线性代数笔记

413

2023.01*

目录

*Build 20230130

1 向量空间

1.1 复数

省略...

1.2 向量空间的定义

若我们定义平面，它由所有有序实数对构成

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\} \tag{1}$$

定义空间：我们定义为

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\} \tag{2}$$

如果定义高纬度便引出组的概念组（list）

1. 按顺序排列
2. 用逗号隔开，用括弧（），() 括弧里面可以是任何东西
3. 特别的其中长度大于零，可以用角标来表示第几个

区分与集合的区别:

1. 对于组（有序）
   例如：$(0, 0, 0, 0) \neq (0)$
2. 对于集合 (无序)
   例如：$\{0, 0, 0, 0\} = \{0\}$

其中对于数域:

$$F^n \quad R + C: \quad \text{R-Real} \quad \text{C- Complex}$$

记忆简化

$$\mathbf{F^n} = \{(x_1, ...(x_n) : x_j \in F, j = 1, ..., n\} \rightarrow x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbf{F} \tag{3}$$

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \rightarrow x + y = y + x \tag{4}$$

其中用单个字母表示 F^n 中的一个元素, 那么必须列出坐标时, 通常要标有坐标角标来表示，比如, 若 $x \in F^n$, 则令 x 等于 $x_1, ..., x_n$ 就是很好的表示方法: 例如 0 的表示:

$$0 = (0, ..., 0) \tag{5}$$

1.3 向量的加法与乘法

向量的加减法和标量乘法

其中性质如下

- 交换性
  对于所有的,$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 都有, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- 结合性
- 加法单位元
  存在一个元素 $0 \in V$, 使得对所有的,$v \in V$, 都有, $v+0=v$;
- 加法逆
  对于每一个,$v \in V$, 都存在 $w \in V$, 使得,$w+v=0$
- 乘法单位元
- 分配性质
  对于 $a, b \in \mathbf{F}(\ ), \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 都有,$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}; (a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

1.4 向量空间的性质

1. 向量空间有唯一的加法单位元
2. 向量空间中的每一个元素都有唯一的加法逆
3. 对于每一个 $\mathbf{v} \in V$, 都有 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$
4. 对于每一个 $a \in F$, 都有 $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$
5. 对于每一个 $\mathbf{v} \in V$, 都有 $(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}$

1.5 子空间

定义:
V 的子集 U 称为 V 的 **子空间 (subspace)**, 如果 U(采用 V 相同的加法和标量乘法) 也是向量空间满足条件:

- 加法单位元
  $\mathbf{0} \in U$
- 加法封闭
  $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$
- 标量乘法封闭
  $a \in F, \mathbf{u} \in U,\ a\mathbf{u} \in U$

1.6 和与直和

定义: 设 $U_1, ..., U_m$ 都是 V 的子空间，则 $U_1, ..., U_m$ 的和记作 $U_1 + ... + U_m$，定义为 $U_1, ..., U_m$ 中所有可能的和

$$U_1 + ... + = U_m = \{u_1 + ... + u_m : u_1 \in U_1, ..., u_m \in U_m\} \tag{6}$$

使得 $V = U_1 + ... + U_m$, 使得 V 中每个元素都可以写成如下形式

$$u_1 + ... + u_m$$

称为 V 是子空间 $U_1, ..., U_m$ 的直和，记 $V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$
定理:

设 $U_1, ..., U_m$ 都是 V 的子空间，则 $V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$

当且仅当下两个条件成立:

1. $V = U_1 + ... + U_m$
2. 若 $\mathbf{0} = u_1 + ..., u_n, u_j \in U_j$
   设 U 和 W 都是 V 的空间，则 $V = U \oplus ... \oplus W$ 当且仅当 $V = U + W$, 并且 $U \cap W = \{0\}$

2 有限维向量空间

2.1 张成与线性无关

定义 1. *V 中一组向量 $(v_1..., v_m)$ 的线性组合是如下的向量*

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_m\boldsymbol{v}_m \ a_1, ..., a_m \in F \tag{7}$$

其中 $(v_1, ..., v_m)$ 所有的线性组合构成的集合称为 $(v_1, ..., v_m)$ 的张成（span）记为 $span(v_1, ..., v_m)$ 即为

$$span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m) = \{a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_m\mathbf{v}_m : a_1, ..., a_m \in F\} \tag{8}$$

其中其中空组 () 的张成空间为 $\{0\}$

定义 2. *如果 $span(v_1, ..., v_m)$ 等于 V，则称 $s(v_1, ..., v_m)$ 张成 V,*

其中: 转到多项式的定义，对于多项式 $p \in \mathcal{P}(F)$ 如果存在标量 $a_0, a_1, ..., a_m \in F, a_m \neq 0$,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m, z \in F$$

则说 p 的次数（degree）, 为 m. 规定恒等于 0 的次数为 $-\infty$

线性无关

定义 3. 对于 V 中的一组 $(v_1, ..., v_m)$, 如果使得 $(a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_m v_m) = 0$ 的 $a_1...a_m \in F$, 只有 $a_1 = ... = a_m = 0$, 则称 $(v_1, ..., v_m)$ 是**线性无关**的。

2.2 基

定义 4. 若 V 中的一个向量既是线性无关的，又张成 V, 则称之为 V 的**基**（*basis*）

这是个 $\mathbf{F}^n$ 的一个基，称为 $\mathbf{F}^n$ 的标准正交基:

$$((1,0,...,0),(0,1,...,0),...(0,0,...,1))$$

定义 5. V 中向量组 $(v_1,...,v_n)$ ，是 V 的基当且仅当每一个 $\boldsymbol{v} \in V$ 都能写成如下

$$\boldsymbol{v} = (a_1\boldsymbol{v}_1, ..., a_n\boldsymbol{v}_n),\text{ 其中 } a_1, ..., a_n \in F$$

定义 6. 在向量空间中，每个张成组都可以简化为一个基

定义 7. 推论：每个有限维向量空间都有基

定义 8. 在有限维向量空间中，每一个线性无关向量组都可以扩充成一个基

定义 9. 设 V 是有限维度，U 是 V 的一个子空间，则存在 V 的一个子空间 W 使得 $V = U \oplus W$

2.3 维数

定义 10. 有限维向量空间的任意两个基长度是相同的 *(定义 F^n 的维数为 n, 其中基的长度也为 n)*

定义 11. 有限维向量空间的任意基长度称为这个向量空间的**维数**（*dimension*），V 的维数记为 $dimV$

例如：$dimF^n = n$ $\qquad dim\mathcal{P}_m(F) = m+1$

定义 12. 若 V 是有限维的，并且 U 是 V 的子空间，则 $dimU \leq dimV$

定义 13. 若 V 是有限维的，则 V 中的每一个长度 $dimV$ 的张成向量组都是 V 的一个基

定义 14. 如果 V 是有限维的，则 V 中每个长度 $dimV$ 的线性无关向量组都是 V 的基

定义 15. 如果 U_1 和 U_2 是同一个有限维向量空间的两个字空间则

$$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim\,(U_1 \cap U_2)$$

定义 16. 设 V 是有限维的，并且 $U_1, ..., U_m$ 是 V 的子空间，使得 $V = U_1 + ... + U_m$,

$$dimV = dimU_1 + ... + dimU_m,\ V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

3 线性映射

定义 17. 从 V 到 W 的线性映射 *(linear map)*, 是具有以下性质的函数 $T: V \to W$:

(a) **加性 *(addivity):*** 对于所有的 $v,v \in V$ 都有 $T(\boldsymbol{u}+v) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

(b) **齐性 *(homogeneity):*** 对于所有的 $\lambda \in F, \boldsymbol{v} \in V$ 都有 $T(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(T\boldsymbol{v})$

(c) $\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$: 从 V 到 W 的所有线性映射构成的集合记为 $\mathcal{L}(V,W)$

(d) **零 *(zero):*** *(*V 到 W 的映射*)*$0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$*(*$W$ 的 *0)*

(e) **恒等 *(identify):*** $Iv = v; I \in \mathcal{L}(V,V)$

(f) **微分 *(differentiation):*** 定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R),\mathcal{P}(R))T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$

(g) **积分 *(intergration):*** 定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R),R)$ 如下 $T\boldsymbol{p} = \int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx$

(h) $\mathbf{x^2}$ 乘 *(multiplication by* x^2 *):* 定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R),\mathcal{P}(R))$ 如下 $(T\boldsymbol{p})(x) = x^2\boldsymbol{p}(x), x \in R$

(i) **后向移位 *(backward shift):*** F^∞ 表示 F 元素的所有序列组成的向量空间, 定义 $T \in \mathcal{L}(F^\infty,F^\infty)T(x_1,x_2,x_3,$ $(x_2,x_3,...)$

(j) **从 F^n 到 F^m*(from* F^n *to* F^m*):***

定义 $T \in \mathcal{L}(R^3,R^2)$ 如下 $T(x,y,z) = (2x-y+3z, 7x+5y-6z)$ 更一般地, 设 m,n 都为正整数,$a_{j,k} \in F, j=1,...,m; k=1,...,n$ 定义 $T \in \mathcal{L}(F^n,F^m)$ 如下*:*

$$
\begin{aligned}
T(x_1,...,x_n) = (&a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}, ...,\\
&a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,n}, ...,\\
&\vdots\\
&a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}).
\end{aligned}
$$

特别的有:

设 $(v_1,...,v_n)$ 是 V 的一个基, 并且 $T: V \to W$ 是线性的, 如果 $v \in V$, 那么 v 可以写成如下形式

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

由于 T 线形可知:

$$T\mathbf{v} = a_1T\mathbf{v}_1 + ... + a_nT\mathbf{v}_n$$

如果基 V $(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)$ 和任意的向量 $w_1,...,w_n \in W$, 我们可以构造一个线性映射 $T: V \to W$; 使得 $Tv_j = w_j, j=1,...,n$. 这样就有以下:

$$T(a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n, a \in F$$

3.1 零空间与值域

对于 $T \in \mathcal{L}(V,W)$,V 中被 T 映射成 **0** 的那些向量所组成的子集称为 T 的零空间, 记为 null T

$$\text{nll}\,T = \{\mathbf{v} \in V : T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

定义 18. *若 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, 则 null T 是 V 的子空间.*

定义 19. *设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, 则 T 是单的当且仅当 null T={0}*
*对于 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, 由 W 中形如 $T\mathbf{v}(\mathbf{v} \in V)$ 的向量所组成的子集称为 T 的***值域** *(range), 记为 range T:*

$$\textit{range}\,T = \{T\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V\}$$

定义 20. *如果 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, 那么 range T 是 W 的子空间*

定义 21. *如果 V 是有限维向量空间, 并且 $T \in \mathcal{L}(V.W)$, 那么 range T 是 W 的有限维子空间, 并且:*

$$dimV = dim\,\boldsymbol{null}\,\boldsymbol{T} + dim\,\boldsymbol{range}\,\boldsymbol{T}$$

定理× *. 如果 V 和 W 都是有限维向量空间, 并且 dim V > dim W. 对于 $T \in \mathcal{L}(V,W)$:*

$$dim\,\boldsymbol{null}\,\boldsymbol{T} = dim\,V - dim\,\boldsymbol{range}\,\boldsymbol{T} \geq dim\,V - dim\,W > 0,$$

定义 22. *如果 V 和 W 都是有限维向量空间, 并且 dim V< dim W, 那么 V 到 W 的线性映射一定是不满的*

3.2 线性映射的矩阵

设 m 和 n 都是正整数, 一个 m x n 矩阵 (matrix) 是一个有 m 个行和 n 个列的矩阵列, 犹如:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$,$(v_1,...,v_n)$ 是 V 的基,$(w_1,...,w_m)$ 是 W 的基, 那么对于每一个 $k = 1,...,n, T\mathbf{v}_k$ 都可以唯一地写成这些 w 的线性组合:

$$T\mathbf{v}_k = a_{1,k}\mathbf{w}_1 + ... + a_{m,k}\mathbf{w}_m$$

其中 $a_{j,k} \in F, j = 1,...,m$. 因为线性映射尤其在基上的值确定, 所有线性映射 T 由这些标量 $a_{j,k}$ 完全确定. 这些 a 所构成的 $m \times n$ 矩阵3.2称为 T 关于基 $(v_1,...,v_n)$ 和基 $(w_1,...,w_m)$ 的矩阵记为:

$$\mathcal{M}(T, (\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n), (\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m))$$

如果基 $(v_1,...,v_n)$ 和基 $(w_1,...,w_n)$ 是自明的 (例如, 只有一个基), 那么 $\mathcal{M}(T,(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n),(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m))$ 可以简化为 $\mathcal{M}(T)$

为了记住如何从 T 构造 $\mathcal{M}(T)$, 可以将定义域的基向量 $v_1,..,v_n$ 横写在顶端, 将目标空间的基向量 $w_1,..,w_n$ 竖写右边

$$\mathcal{M}(T)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & \dots & v_k & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{bmatrix} & & a_{1,k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{m,k} & & \end{bmatrix} \end{array}$$

上图的矩阵中, 只列出了第 k 列. 把 Tv_k 写成诸如 w 的线性组合, 所需的系数就组成了 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列. 如果你想得到 Tv_k 便从矩阵 $\mathcal{M}(T)$ 第 k 列的每个元素与左侧的列中相应的 w 相乘, 然后相加.

如果 T 是 $\mathbf{F^n}\to\mathbf{F^m}$ 的线性映射, 没有特殊说明, 总设所考虑的基是标准基 (即第 k 的基向量的 k 个位置为 1, 其他为 0) 如果把 $\mathbf{F^m}$ 的元素看成 m 个数组成的列, 那么可以把 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列视为 T 对 k 个基向量的作用.

例如: 若 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{F^2},\mathbf{F^3})$ 定义如下:

$$T(x,y)=(x+3y,2x+5y,7x+9y)$$

解: 因为 $T(1,0)=(1,2,7),T(0,1)=(3,5,9)$。因此,T(关于标准基) 的矩阵是 3×2 的矩阵

$$\mathcal{M}(T)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}$$

其中 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 没有特殊说明, 标准基为 $1,x,x^2,...,x^m$.

3.3 矩阵的加法与标量乘法

矩阵加法:

定义 23. 规定**两个同样大小的矩阵和**是把矩阵对应相加的元素相加得到的矩阵, 即 $(A+C)_{j,k}=A_{j,k}+C_{j,k}$

线性映射的和的矩阵

设 $S,T\in\mathcal{L}(V,W)$, 则 $\mathcal{M}(S+T)=\mathcal{M}(S)+\mathcal{M}(T)$

矩阵的标量乘法

标量与矩阵的乘积就是用标量乘以矩阵的每个元素, 也就是说，$(\lambda A)_{j,k}=\lambda A_{j,k}$

标量乘以线性映射的矩阵

设 $\lambda\in\mathbf{F},T\in\mathcal{L}(V,W)$, 则 $\mathcal{M}(\lambda)=\lambda\mathcal{M}(T)$

记号 $F^{m,n}$ $\quad dim\,F^{m,n}=mn$

定义 24. 矩阵乘法
设 A 是 $m \times n$ 矩阵，C 是 $n \times p$.AC 定义为 $m \times p$ 矩阵，其中第 j 行第 k 列的元素是、

$$(AC)_{j,k} = \sum_{r=1}^{n} A_{j,r} C_{r,k}$$

也就是说，把 A 的第 j 行与 C 的第 k 列的对应元素相乘在求和，就得到了 AC 的第 j 行第 k 列的元素.

其中当第一个矩阵的列数等于的二个矩阵的行数时，我们才能定义矩阵乘积。**线性映射乘积的矩阵**
若 $T \in \mathcal{L}(U, W), S \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 $\mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$

$A_{j,\cdot}, A_{\cdot,k}$ 的性质

3.4 可逆性与同构的向量空间