第三讲：曲线积分与曲面积分

目录

第三讲：曲线积分与曲面积分

1 导言：积分概念再释

积分的物理意义是数量（向量或更一般的张量）在空间区域上的积累. 比如当物理量 Q 分布在区间 $[a,b]$ 上时，设其密度函数为 $\rho(x)$，则其总分布量为 $\int_a^b \rho(x)dx$，它可看成是“微分形式” $\rho(x)dx$ 同区域 $[a,b]$ 相互作用而产生了一个数.

而 $\rho(x)dx$ 是物理量 Q 的微分，即 $dQ=\rho(x)dx$，事实上，密度函数就是通过 $\frac{dQ}{dx}$ 定义的，即

$$\rho(x) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q(x+\Delta x)-Q(x)}{\Delta x}$$

根据微积分基本定理（或牛顿-莱布尼茨公式），Q 在 $[a,b]$ 上的分布总量为

$$\Delta Q = Q(b)-Q(a)=\int_a^b dQ=\int_a^b \rho(x)dx$$

定积分概念的推广既可往更高维走（比如多重积分），亦可往更低维走，那么要问: 什么是零维积分?

零维的典型图形是一系列离散点 $S:=\{p_i\}_{i=1}^n$，设物理量 Q 定义在 S 上，记 Q 在 p_i 处的取值为 $Q_i=Q(p_i)$，则 Q 在 S 上的“积分”可定义为

$$\int_S Q := \sum_{i=1}^n Q_i$$

更一般地，可考虑带“$\pm$”的离散点集，比如 $S=\{p_1,-p_2,p_3,-p_4,-p_5\}$，则 Q 在 S 上的“积分”为

$$\int_S Q = Q_1-Q_2+Q_3-Q_4-Q_5$$

为凸显积分的“区域可加性”这一根本属性，我们可将上 S 写为点的形式和（差）

$$S=p_1-p_2+p_3-p_4-p_5$$

更一般地，我们可以将零维积分区域定义为点的形式“整数线性组合”，即

$$S=a_1p_1+\cdots+a_np_n \quad 其中 \quad a_i\in\mathbb{Z}$$

并称如上的点的整数线性组合 S 为一条“零维链”——作为零维积分区域，则 Q

在 S 上的积分可定义为

$$\int_S Q = \sum_{i=1}^{n} a_i Q_i$$

再考虑 $n = \infty$ 的情形，便得到了最一般形式的“零维积分”概念——离散和.

为了说明考虑带“$\pm$”的点集的合理性，我们重审一维定积分的情形，由于

$$\int_a^b dQ = -\int_b^a dQ$$

如果将积分区域 $I = [a, b]$ 看成是带方向的线段 $\overrightarrow{ab}$，并记 $-I := \overrightarrow{ba}$，则上式可写为

$$\int_I dQ = -\int_{-I} dQ$$

由此可见，定积分的定义天然就蕴含对积分区域的方向性的考量. 如考察方向性，则 $I = \overrightarrow{ab}$ 的边界不应是单纯的由其两端点组成的几何 $\{a, b\}$，而应是带“$\pm$”符号的点集，或端点的整数线性组合，即 $\partial I = b - a$. 如此，则牛顿-莱布尼茨公式可写为

$$\int_{\partial I} Q = \int_I dQ$$

由于积分相当于被积的函数（其实是微分形式，函数看做是 0-次微分形式）和被积区域“作用”后产生一个数（积分值），将上式中的这种作用分别写成 $\langle \partial I, Q\rangle$ 和 $\langle I, dQ\rangle$，则上式可写为如下漂亮形式

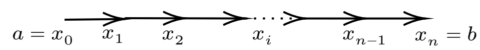
$$\langle \partial I, Q\rangle = \langle I, dQ\rangle$$

这体现出来了深刻的对偶性（*duality*），即被积对象（微分形式）和积分区域之间相互作用的“盈虚消长”. 即一函数 Q 在有向线段 I 的有向边界 ∂I 上的积分（累积）等于其微分 dQ 在 I 上的积分（累积），并且，1 维积分区域 I 降维为其 0 维边界 ∂I 的同时，0 次微分形式（函数）Q 提升为 1 次微分形式 dQ. 由此也可看出函数层面上的微分运算 d 是对偶于其定义区域上的取边算子 ∂ 的.

那么，上面的概念图景如何往更高维度推广呢? 上面考虑的是一维积分转化为零维积分，则下一步是二维积分转化为一维积分，进而三微积分转化为二维积分等等. 这将是本章的主题.

让我们想象，高维的有向积分区域是什么? 其有向边界又该如何确定? 如何用微分手段来“度量”有向区域上物理量的累积? 以及高维积分是如何自然“下降”到其边界上的低一维积分的?

展开畅想之前，我们理应对一维的情形在上面新语境下给出更合理的诠释.



$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{x_0x_1} + \overrightarrow{x_1x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_{n-1}x_n}$$

由上图可知

$$\int_a^b dQ = \int_{\overrightarrow{ab}} dQ = \int_{\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{x_ix_{i+1}}} dQ \xlongequal{\text{区域可加性}} \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\overrightarrow{x_ix_{i+1}}} dQ$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(Q(x_{i+1}) - Q(x_i)\right) \xlongequal{\text{相互抵消}} Q(x_n) - Q(x_0) = Q(b) - Q(a)$$

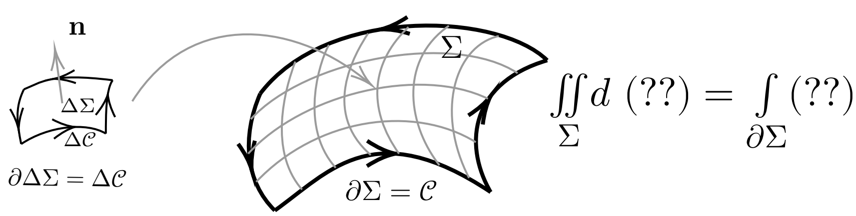
而牛顿-莱布尼茨公式表现为

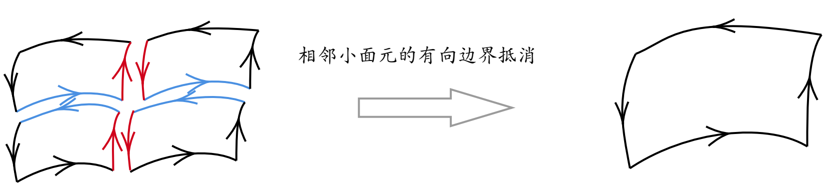
$$\int_{\overrightarrow{ab}} dQ \xlongequal{\text{牛顿-莱布尼茨公式}} \int_{\partial(\overrightarrow{ab})} Q = \int_{b-a} Q = Q(b) - Q(a)$$

由此看出，从 1 维积分到 0 维积分过渡的关键在于下面的有向边界的“抵消”机制

$$\partial\left(\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{x_ix_{i+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\partial\left(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = b - a$$

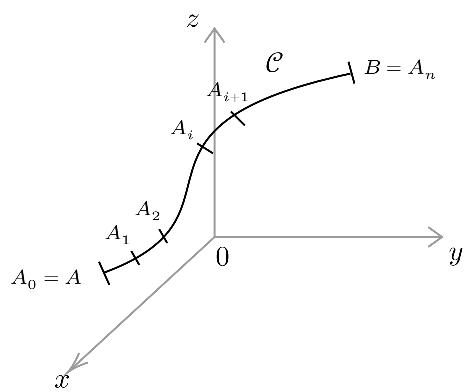
即将一维链 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ 首尾抵消得到其 0 维边界 $b-a$，而刚好 dQ 在 $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ 上的积分，即 Q 在 $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ 上的变化 $\Delta Q = Q(x_{i+1}) - Q(x_i)$ 与该抵消的机制是相协调的，结合积分的可加性（线性性）便可实现积分的降维. 那么，这一“抵消机制”的二维图景又是如何的呢?“比类合谊”，不难用下面的图景“以见指撝”





2　曲线的弧长微分和第一型曲线积分

设某物理量分布于一条空间曲线 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^3$，设其密度函数为 $f(x,y,z)$，则它的总量可按下面方法加以计算.



定义 2.1（第一型曲线积分）按积分的一般模式——局部“以直代取”，然后“见微知著”，即将曲线 $\mathcal{C}$ 分为一些小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$，$i=1,\cdots,n$. 记第 i 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i，并记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$. 任取点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\widehat{A_{i-1}A_i}$，然后作相应的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

如果当所有小弧段的最大长度 $\lambda\to 0$ 时，上黎曼和的极限存在，且与对曲线的划分方式和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取发都无关，则称该极限值是 $f(x,y,z)$ 在曲线 $\mathcal{C}$ 上的第一类曲线积分，记为

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，曲线 $\mathcal{C}$ 称为积分路径，ds 称为弧长微分. 特别地，若曲线 $\mathcal{C}$ 是一封闭曲线，即曲线首尾两端点重合，此时上积分也常记为 $\oint_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds$. 第一型曲线积分 $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds$ 也称为函数 $f(x,y,z)$ 对弧长的曲线积分.

注记 2.1 如果曲线是平面曲线 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^2$，也可仿此定义函数 $f(x,y)$ 对弧长的曲线积分. 另外，对通常的定积分 $\int_a^b f(x)dx$，如果恒考虑 $a<b$ 的情形，此时 dx 非负，则可将 dx 看成“曲线” $\overline{ab}$ 上的弧长，则可将其看作第一型曲线积分；但如果考察方向性，即将积分区间 $[a,b]$ 视作有向线段 $\overrightarrow{ab}$，则在其反向线段 $\overleftarrow{ab}$ 上时，dx 视作是负的，故此时不能视作第一型曲线积分，而应视作第二型曲线积分，即考虑方向的积分.

注记 2.2 由定义，由于第一型曲线积分中的弧长微分 ds 是非负的，所以第一型曲线积分与路径无关，即在 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{BA}$ 上的积分都相同；或对曲线 $\mathcal{C}$ 规定一个方向，并记 $-\mathcal{C}$ 为曲线 $\mathcal{C}$ 的反向曲线，则 $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} fds = \int_{-\mathcal{C}} fds$，这是它与定积分的不同之处，也是它有别与其后将定义的第二型曲线积分的根本之处.

既然第一类曲线积分的定义模式类同定积分及重积分的定义模式, 故相应的可积性条件也是类似的, 比如可以证明: 如果 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 $\mathcal{C}$ 上连续, 或 $f(x, y, z)$ 在 $\mathcal{C}$ 上有界且只有有限多个间断点时, 函数在 $\mathcal{C}$ 上是可积的, 即 $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} fds$ 存在.

此外, 第一型曲线积分亦满足积分的根本线性性质, 即对被积对象的线性性——积分作为线性映射和对被积区域的线性性——区域可加性, 在曲线积分的情形, 这将表现为下面的路径可加性.

1. **线性性** 若 f, g 都在曲线 $\mathcal{C}$ 上可积, 则对常数 α, β, 函数 $\alpha f + \beta g$ 也在 $\mathcal{C}$ 上可积, 且有
$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))\, ds = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds + \beta \int_{\mathcal{C}} g(x, y, z) ds$$

2. **路径可加性** 设曲线 $\mathcal{C}$ 由 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 首尾相接而成, 则 f 在 $\mathcal{C}$ 上可积等价于 f 在 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 上同时可积, 且有
$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z) ds + \int_{\mathcal{C}_2} f(x, y, z) ds$$

3. **中值定理** 若函数 f 在光滑曲线 $\mathcal{C}$（即定义曲线的函数是光滑的）上连续, 则 $\exists\, (\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{C}$, 使得
$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta)\, s_{\mathcal{C}}$$
其中 $s_{\mathcal{C}}$ 是曲线 $\mathcal{C}$ 的弧长, 它可按函数 $f \equiv 1$ 对其的弧长积分来计算, 即 $s_{\mathcal{C}} = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} ds$

由定义可知, 计算第一型曲线积分的关键就在于确定弧长微分 ds. 如果曲线 $\mathcal{C}$ 由参数方程给出, 即 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [\alpha,\, \beta]. \\ z = z(t) \end{cases}$

如果曲线光滑, 即 $x(t), y(t), z(t)$ 都具有连续导数, 且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为零,

即 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} \neq 0$，则 $\mathcal{C}$ 是可求长的，且其弧长为

$$s_{\mathcal{C}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt$$

注记 2.3 曲线的光滑性条件等价于下映射的雅克比矩阵 $\mathbf{J}_\varphi$ 是满秩的

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_\varphi = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

由此可知，此时弧长微分为 $ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, dt$，而第一型曲线积分，如其存在，则可按下计算

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt$$

定理 2.1 如 $\mathcal{C}$ 光滑，且 f 在 $\mathcal{C}$ 上连续，则 $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds$ 存在，且其值按上积分计算.

证明： 在曲线 $\mathcal{C}$ 上依次任意插入分店 $A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，并记 $A_0 = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$，$A_n = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 这对应着参数区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个划分

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

注意，这需要假设曲线 $\mathcal{C}$ 是简单的，即它没有自交点，也就是不存在不同的参数 t, t'，单它们对应相同的点.

记小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的长度为 Δs_i，及 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 根据弧长公式及中值定理，知 $\exists t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$，使得

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt = \sqrt{x'^2(t_i^*)+y'^2(t_i^*)+z'^2(t_i^*)}\, \Delta t_i$$

记小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上对应参数 t_i^* 的点为 (ξ_i, η_i, ζ_i)，则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))\sqrt{x'^2(t_i^*)+y'^2(t_i^*)+z'^2(t_i^*)}\Delta t_i$$

由于 $f(x,y,z)$ 在 $\mathcal{C}$ 上连续，故 $\int_{\mathcal{C}} f ds$ 存在. 又因为 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 是连续

的，故函数 $f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha,\,\beta]$ 上可积. 从而当 $\lambda := \max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，$\lambda' := \max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\to 0$，且上面等式两边的和的极限都为对应积分，即有

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \qquad \square$$

注记 2.4 由于 $\Delta s_i > 0$，故要求 $\Delta t_i > 0$，从而上定积分中 t 的下限一定小于上限.

下面讨论几种常见情形

1. 若曲线 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是平面曲线，其参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad t\in[\alpha,\beta]$. 设 $f(x,y)$ 对 $\mathcal{C}$ 的弧长积分存在，则其值为

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

2. 如平面曲线 $\mathcal{C}$ 由 $y = y(x)$，$a < x < b$ 描述，则

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \quad a < b$$

3. 若曲线 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^3$ 由方程组（一般方程）$\mathcal{C}:\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$，即曲线作为两曲面的相交. 当然，这要求下雅可比矩阵是满秩的

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}$$

即其三个二阶行列式子式不能全为零. 不失一般性，假设

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} := \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \neq 0$$

则利用克拉默法则从微分关系 $\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \\ \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0 \end{cases}$ 将 dx, dy 用 dz 表

示为

$$dx=\frac{\begin{vmatrix}-F_zdz & F_y\\ -G_zdz & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}=-\frac{F_zG_y-F_yG_z}{F_xG_y-F_yG_x}dz$$

$$dy=\frac{\begin{vmatrix}F_x & -F_zdz\\ G_x & -G_zdz\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}=-\frac{F_xG_z-F_zG_x}{F_xG_y-F_yG_x}dz$$

由隐函数存在定理，存在函数关系 $\begin{cases}x=x(z)\\ y=y(z)\end{cases}$ 使得 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dz}=-\dfrac{F_zG_y-F_yG_z}{F_xG_y-F_yG_x}\\ \\ \dfrac{dy}{dz}=-\dfrac{F_xG_z-F_zG_x}{F_xG_y-F_yG_x}\end{cases}$.

换言之，z 可选为曲线 $\mathcal{C}$ 的参数，从而 $\mathcal{C}$ 有如下参数方程

$$\begin{cases}x=x(z)\\ y=y(z)\\ z=z\end{cases}\quad z_1\le z\le z_2 \qquad\Longrightarrow\qquad ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}\,dz\ =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{F_zG_y-F_yG_z}{F_xG_y-F_yG_x}\right)^2+\left(\frac{F_xG_z-F_zG_x}{F_xG_y-F_yG_x}\right)^2+1}\ dz$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)^2}}\ dz$$

$$=\frac{1}{\left|\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\right|}\sqrt{\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}\right)^2+\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)^2}\ dz$$

然后利用下公式计算积分

$$\int_{\mathcal{C}}f(x,y,z)ds=\int_{z_1}^{z_2}f(x(z),y(z),z)\,ds$$

当然，在具体中可灵活寻找参数化，而无需凡例必套上公式求解.

例 2.1 计算曲线积分 $\int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)ds$，其中 $\mathcal{C}$ 是圆心在 $(R,0)$，半径为 R（$R>0$）的上半圆周.

解： 曲线 $\mathcal{C}$ 的方程为 $(x-R)^2+y^2=R^2$，即 $x^2+y^2=2xR$，从而

$$\int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)ds=2R\int_{\mathcal{C}}xds \xlongequal[ds=Rdt]{\left\{\begin{array}{c}x=R+R\cos t\\ y=R\sin t\end{array}\right. \quad t\in[0,\pi]} 2R\int_0^{\pi}(R+R\cos t)Rdt=2\pi R^3$$

或利用极坐标 $\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}\right.$，则曲线方程为 $r=2R\cos\theta$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，被积函数为 r^2，而弧长微分为

$$ds=\sqrt{r(\theta)+r'(\theta)}d\theta=\sqrt{4R^2\cos^2\theta+4R^2\sin^2\theta}d\theta=2Rd\theta$$

从而

$$\int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)ds=2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta=2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}4R^2\cos^2\theta d\theta=2\pi R^3$$

例 2.2 计算曲线积分 $\oint_{\mathcal{C}}x^2ds$, 其中曲线 $\mathcal{C}$ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

解 I: 曲线 $\mathcal{C}$ 为球面上一大圆, 我们先求其参数方程. 联立两方程 $\left\{\begin{array}{c}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{array}\right.$ 从中消去 z 可得 $\mathcal{C}$ 于 xy 平面上的如下投影曲线（椭圆）

$$2x^2+2y^2+2xy=R^2$$

可以通过坐标旋转将 xy 消除后利用椭圆的标准参数化，也可将上方程直接配方为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\frac{R^2}{2}$$

$$\text{令}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos t\\ \dfrac{x}{2}+y=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t\end{array}\right. \quad t\in[0,2\pi] \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c}x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R\cos t\\ y=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\dfrac{R}{\sqrt{6}}\cos t\\ z=-(x+y)=-\dfrac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t\end{array}\right. \quad t\in$$

$[0, 2\pi]$. 故得在该参数下的弧长微分为

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt =$$

$$= R\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t + \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt = Rdt$$

从而

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} R \cos t R^2 dt = \frac{2\pi R^3}{3}$$

解 II: 令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$，$G(x,y,z) = x + y + z$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z; \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2z;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y \quad \Longrightarrow$$

$$ds = \frac{1}{2|(x-y)|}\sqrt{4(y-z)^2 + 4(x-z)^2 + 4(x-y)^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{|x-y|}\sqrt{y^2 + z^2 - 2yz + x^2 + z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2xy}\, dz$$

$$= \frac{1}{|x-y|}\sqrt{2R^2 - 2xy - 2yz - 2xz}\, dz \overset{2xy = 2z^2 - R^2}{\underset{x+y=-z}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$\frac{1}{|x-y|}\sqrt{2R^2 - 2z^2 + R^2 + 2z^2}\, dz = \frac{1}{|x-y|}\sqrt{3}R\, dz = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2R^2 - 3z^2}}\, dz$$

由于在 $\mathcal{C}$ 在 xy 的投影椭圆 $2x^2 + 2y^2 + 2xy = R^2$ 上，成立 $(x+y)^2 = \dfrac{R^2}{2}$，从而可知曲线 $\mathcal{C}$ 上 z 的取值范围是 $-\dfrac{R}{\sqrt{2}} \le z \le \dfrac{R}{\sqrt{2}}$，尚需将 x^2 用 z 来表达，这较复杂，但如果注意到曲线 $\mathcal{C}$ 关于 x,y,z 是对称的，故利用对称性，可先计算

$$\oint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R^2 \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2R^2 - 3z^2}}\, dz =$$

$$= \sqrt{3}R^3 \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{\sqrt{2R^2 - 3z^2}} = \sqrt{3}R^3 \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 2\pi R^3$$

然后 $\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \frac{2\pi R^3}{3}$. 当然，如果一开始就注意利用对称性，则直接有

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \frac{1}{3}\oint_{\mathcal{C}}(x^2+y^2+z^2)ds = \frac{R^2}{3}\oint_{\mathcal{C}} ds = \frac{R^2}{3}2\pi R = \frac{2\pi R^3}{3}$$

对曲线 $\mathcal{C}$，若它上面分布着质量，且密度函数为 $\mu(x,y,z)$，则曲线的质心坐标为 (x_C, y_C, z_C) 由下给出

$$x_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} x\mu(x,y,z)ds}{\int_{\mathcal{C}} ds};\quad y_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} y\mu(x,y,z)ds}{\int_{\mathcal{C}} ds};\quad z_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} z\mu(x,y,z)ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}$$

例 2.3 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限部分的边界曲线的质心坐标（设质量密度 $\mu\equiv 1$）.

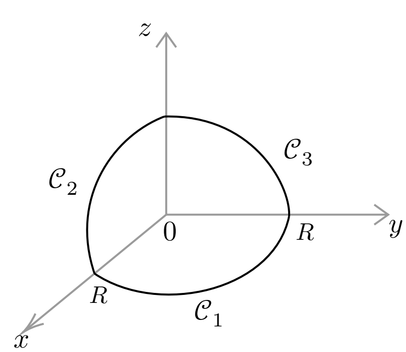
解: 边界曲线的质量为 $m = 3\times\frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{2}$. 将边界曲线划分为如下图的三部分 $\mathcal{C}_i$（$i=1,2,3$）. 我们计算

$$\int_{\mathcal{C}_1} xds \overset{\text{利用极坐标}}{=\!=\!=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\, ad\theta = R^2$$

由对称性知，$\int_{\mathcal{C}_2} xds = R^2$，但 $\int_{\mathcal{C}_3} xds = 0$. 故知质心的 x 坐标为

$$x_C = \frac{1}{m}\left(\int_{\mathcal{C}_1} xds + \int_{\mathcal{C}_2} xds + \int_{\mathcal{C}_3} xds\right) = \frac{4R}{3\pi}$$

再用对称性，知质心的 x，y 和 z 坐标都相同，即 $x_C = y_C = z_C = \frac{4R}{3\pi}$.



3 曲面的面积

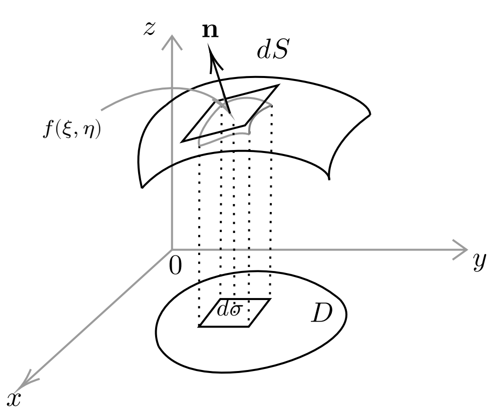
上节中讨论了分布在曲线上的物理量（标量）在空间曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的累计量及其计算，从而有一般的第一型曲线积分的概念及其计算. 同样地，如果物理量（标量）是分布在空间曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的，该如何计算其在曲面 Σ 上的累计量及其计算?

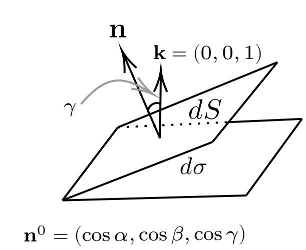
基本的概念模式及处理思路应是相通的. 设物理量的密度函数为 $\mu(x, y, z)$，为计算其在曲面上的累计量）先将曲面 Σ 用曲线网分割称小曲面块 $\Delta\Sigma_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）. 记 $\Delta\Sigma_i$ 的面积为 ΔS_i，并记 $\lambda = \max_{1\leq i\leq n}\{d_i\}$（其中 d_i 为 $\Delta\Sigma_i$ 的直径，即连接曲面内任意两点距离的最大值）. 分割地细致些，使得在 $\Delta\Sigma_i$ 上可将密度函数视为常数，从而可任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Sigma_i$，下和式可作为物理量总理的一个有效近似

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

通常情况下，当分割越来越细致，即 λ 越来越小时，我们期待上面的近似越来越精确，以致于当考虑极限情形，即 $\lambda \to 0$ 时，如上和式的极限也存在，则它就是物理量在曲面 Σ 上的精确积累. 由此可导引出一般（第一型）曲面积分的概念（见下节定义），但前提是需明确如何对曲面求面积，否则上面和式中 ΔS_i 的意义将不明，遑论其计算. 此外，如果上面的密度函数 $\mu \equiv 1$，则按上和极限（如其存在）计算出来的应该是曲面 Σ 的面积才是，由此看出，要定义第一型曲面积分，需先明确曲面的面积概念及其计算方法，否则将是无源之水，而这将是本节的主要内容.

如果曲面 Σ 可表示为二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $(x, y) \in D$ 上的图形. 我们假设曲面 Σ 是有界的，并假设 z 是 D 上具有连续一阶偏导数的函数，即曲面 Σ 是光滑的. 在如此假设下，为计算 Σ 的面积，我们将平面区域 D 用平行于坐标轴的坐标直线作划分，则 D 的任一典型矩形子区域 $d\sigma = dxdy$ 上对应的小曲面部分可由由 $d\sigma$ 内任意一点 (ξ, η) 对应的切平面在 $d\sigma$ 上的部分来近似，见下图





记曲面在其上点 $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$ 处的法向量为 $\mathbf{n}$，则 $\mathbf{n} = (z_x, z_y, -1)$，从而单位法向量为

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \right)$$

将其写成方向余弦的形式 $\mathbf{n}^0 = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$，则 $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$.

由此可知切平面近似的面元面积 dS 同 $d\sigma$ 是投影关系，即

$$d\sigma = dS|\cos\gamma| \quad \Longrightarrow \quad dS = \frac{d\sigma}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

由此可知曲面 Σ 的面积可按下二重积分计算

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\; dxdy$$

更一般地，若光滑曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z) = 0$ 描述，且假设 $F_z \neq 0$，则对其两边微分，得

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy$$

即 $\begin{cases} z_x = -\dfrac{F_x}{F_z} \\ z_y = -\dfrac{F_y}{F_z} \end{cases}$ 从而曲面上的面积微元为 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$$= \sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_z^2}+\frac{F_y^2}{F_z^2}}\; dxdy = \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,dxdy = \frac{||\nabla F||}{|F_z|}\; dxdy$$

从而此时，曲面面积为 $S = \iint\limits_D \dfrac{||\nabla F||}{|F_z|}\; dxdy$，其中 D 是曲面 Σ 在 xy-平面上的投影区域. 当然，如 $F_x \neq 0$ 或 $F_y \neq 0$，则可通过对 yz-平面或 xz-平面上投影计算.

曲面往往通过参数方程描述，设 Σ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D_{uv}$. 即曲面上点的径矢为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$.

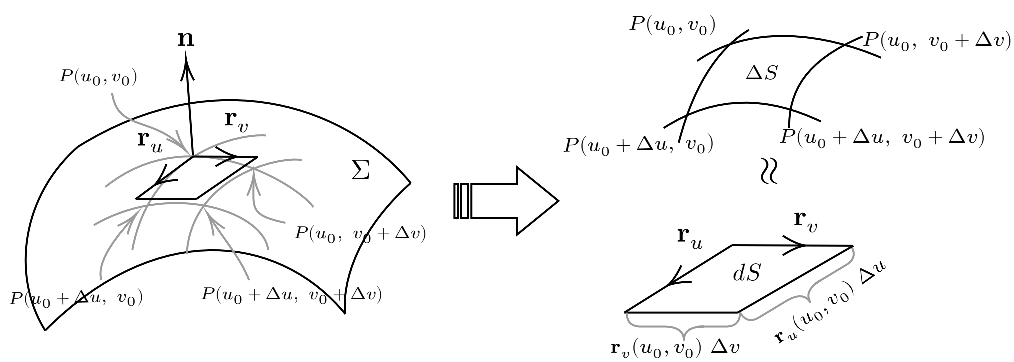
设 x, y, z 对 u, v 都具有连续偏导数，且 $\mathbf{r}(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 的雅可比矩阵 $\mathbf{J_r} =$

$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$ 满秩，这也是曲面 Σ 是**光滑**的要求. $\mathbf{J_r}$ 满秩即要求其三个二阶子式的行列式不能全为零，即下面三个行列式在曲面上任意一点处不全为零

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

事实上，这条件表明：曲面存在整体连续变化的法向量——即曲面由连续法向量场. 这可通过下面的推理看出

在参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ 中，固定 $v = v_0$，则参数方程描述了曲面 Σ 上一条（坐标）曲线，称为 u-曲线；同理，固定 $u = u_0$，可得曲面 Σ 上的一条 v-曲线. 设曲面是光滑的，即 x, y, z 对 u, v 具有连续一阶偏导，且其雅可比矩阵 $\mathbf{J_r}$ 满秩，这表明任意一条 u-曲线和 v-曲线上的点都具有切向量 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$，即 $\begin{cases} \mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u) \\ \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v) \end{cases}$ 在曲面上任意点处都存在，且不共线，即是线性独立的.



从而法向量 $\mathbf{n}$ 可按 $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 来计算，即

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

不妨设 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$，则 $\cos\gamma = \dfrac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}$，且由

于 $dxdy=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$，故知而曲面上无穷小面积微元 dS 由下给出

$$dS=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv$$

当然，也可用 $P(u_0,v_0)$ 处的切平面上对应 $dudv$ 的面积 dS 作为 ΔS 的一阶线性近似. 首先，$P(u_0,v_0)$ 处 du 和 dv 对应的坐标曲线上的曲线弧有如下切线近似

$$\overset{\frown}{P(u_0+\Delta u,\,v_0)P}(u_0,v_0)\approx\mathbf{r}(u_0+\Delta u,v_0)-\mathbf{r}(u_0,v_0)=\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\Delta u+o(\Delta u)$$

$$\overset{\frown}{P(u_0,\,v_0+\Delta v)P}(u_0,v_0)\approx\mathbf{r}(u_0,v_0+\Delta v)-\mathbf{r}(u_0,v_0)=\mathbf{r}_v(u_0,v_0)\Delta v+o(\Delta v)$$

故由无穷小坐标曲线弧围成的曲面上的面元 ΔS 可用对应切线不妨张成的无穷小平行四边形的面积来近似，即

$$\Delta S\approx||\left(\mathbf{r}(u_0+\Delta u,v_0)-\mathbf{r}(u_0,v_0)\right)\times\left(\mathbf{r}(u_0,v_0+\Delta v)-\mathbf{r}(u_0,v_0)\right)||$$

$$\approx||\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)||\Delta u\Delta v$$

即曲面 Σ 上的面积微元为

$$dS=||\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)||\,dudv=||\mathbf{n}||\,dudv$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv$$

记 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}$, $B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}$, $C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$
则上公式可简记为

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

从而曲面 Σ 的面积可由下面的关于 u,v 的二重积分来计算

$$S=\iint\limits_{D_{uv}}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

另一种常用表示法：令

$E=\mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v=x_u^2+y_u^2+z_u^2$; $F=\mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$; $G=\mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_v=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

则计算可得

$$EG-F^2=(x_u^2+y_u^2+z_u^2)(x_v^2+y_v^2+z_v^2)-(x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v)^2$$

$$=x_u^2x_v^2+y_u^2y_v^2+z_u^2z_v^2+x_u^2y_v^2+x_u^2z_v^2+y_u^2x_v^2+y_u^2z_v^2+z_u^2x_v^2+z_u^2y_v^2-$$

$$-(x_u^2x_v^2+y_u^2y_v^2+z_u^2z_v^2)-2x_ux_vy_uy_v-2x_ux_vz_uz_v-2y_uy_vz_uz_v$$

$$=(y_u^2z_v^2-2y_yy_vz_uz_v+y_v^2z_u^2)+(z_u^2x_v^2-2x_ux_vz_uz_v+x_u^2z_v^2)+$$

$$+(x_u^2y_v^2-2x_ux_vy_uy_v+x_v^2y_u^2)=A^2+B^2+C^2$$

从而，曲面 Σ 上的面积微元也可表达为 $dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，从而有面积公式

$$S=\iint\limits_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint\limits_{D_{uv}}\sqrt{det\,\mathbf{G}}\,dudv$$

其中 $\mathbf{G}$ 为曲面上的度规矩阵（$metric\ matrix$）

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_v \end{bmatrix}$$

注记 3.1 二阶实对此矩阵 $\mathbf{G}$ 也称为格拉姆矩阵，它之所以被称为度规矩阵，是因为它本质上是度量曲面上两点之间的距离的，即考虑与 $\mathbf{G}$ 相伴的二次型

$$ds^2=[du\quad dv]\mathbf{G}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=[du\quad dv]\begin{bmatrix} \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=$$

$$=\mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_u(du)^2+2\mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_vdudv+\mathbf{r}_v\bullet\mathbf{r}_v(dv)^2$$

$$=(x_u^2+y_u^2+z_u^2)du^2+2(x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v)dudv+(x_v^2+y_v^2+z_v^2)dv^2$$

$$=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

上式也称为是曲面 Σ 的高斯第一微分型. 它之所以衡量曲面上两点间的距离也可由下看出 $ds^2=d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r}=$

$$=(x_udu+x_vdv,\ y_udu+y_vdv,\ z_udu+z_vdv)\bullet(x_udu+x_vdv,\ y_udu+y_vdv,\ z_udu+z_vdv)$$

$$=(x_udu+x_vdv)^2+(y_udu+y_vdv)^2+(z_udu+z_vdv)^2$$

$$=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

例 3.1 计算半径为 R 的球的表面积.

解 I: 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则在第一卦限内，球面可描述为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D:=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2,\ x,y\ge 0\}$$

由于 $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，$z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，故球面面积为

$$S=8\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=8R\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=4\pi R\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4\pi R^2$$

解 II: 球面有参数方程 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\varphi\end{cases}$ 其中 $(\theta,\ \varphi)\in D=\{(\theta,\varphi)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$.

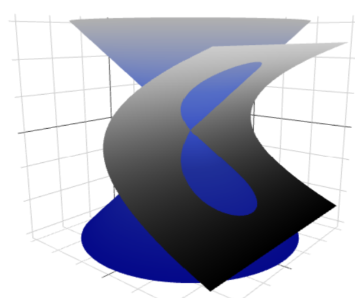
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\cos\varphi$$

故 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=R^2\sin\varphi$，故球面面积可计算为

$$S=\iint\limits_D R^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}R^2\sin\varphi\,d\varphi=4\pi R^2$$

例 3.2 求锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $z^2=2y$ 所截部分的面积.

解:



由对称性，z 平面上下部分所截面积相等. $z>0$ 中所截曲面部分由函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形给出，只需计算对应 (x,y) 的取值区域 D. 首先锥面和柱面相交于曲

线 $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z^2 = 2y \end{cases}$，从中消去 z，得到相交曲线在 xy-平面上的投影曲线为

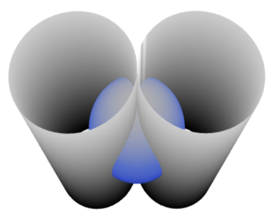
$$x^2 + y^2 = 2y \quad \Longrightarrow \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$$

由于 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，故 $z_x = \dfrac{x}{z}$；$z_y = \dfrac{y}{z}$，从而所求面积为

$$S = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dxdy$$

$$= 2\iint\limits_D \sqrt{2}\, dxdy = 2\sqrt{2}\, Area(D) = 2\sqrt{2}\pi$$

例 3.3 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被两个柱面 $x^2 + y^2 - Rx = 0$，$x^2 + y^2 + Rx = 0$ 所截得部分的曲面面积.



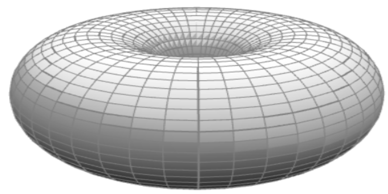
由对称性,计算出第一卦限内的截面面积后 8 倍之即可. 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$，消去 z，得到交曲线在 xy-平面上的投影曲线为 $x^2 + y^2 = Rx$，从而第一卦限内的截面可看成函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 在 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le Rx,\, y \ge 0\}$ 上的部分. 故

$$S = 8\iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = 8R\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \overset{\text{利用极坐标}}{=\!=\!=\!=}$$

$$= 8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)d\theta = 4R^2(\pi - 2)$$

由此可知，球面倍柱面截后所剩部分的面积为 $S = 4\pi R^2 - 4R^2(\pi - 2) = 8R^2$，它与 π 无关，从而也否定了有球面组成的曲面的面积必与 π 有关的猜想. （对相关体积问题的讨论见第二讲第 *1.5* 节中例 *1.5.7* 及其后注记.）

例 3.4 求环面的面积, 设环面由方程 $\begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi \quad 0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = a\sin\theta \end{cases}$
表示（其中 $0 < a < b$）.



解： $\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (x(\theta,\varphi),\, y(\theta,\varphi),\, z(\theta,\varphi))$. 直接计算可得

$\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi,\, -a\sin\theta\sin\varphi,\, a\cos\theta)\,; \quad \mathbf{r}_\varphi = (-(b+a\cos\theta)\sin\varphi,\, (b+a\cos\theta)\cos\varphi,\, 0)$

不难看出 $\mathbf{r}_\theta \bullet \mathbf{r}_v = 0$, 及 θ-曲线和 φ-曲线是正交曲线族（*orthogonal family of curves*）——两族正交的圆（经圆和维圆），它们构成了环面上的正交曲线坐标网.

因为正交的缘故 $dS = ||\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi||\, d\theta d\varphi = ||\mathbf{r}_\theta|| \cdot ||\mathbf{r}_\varphi||\, d\theta d\varphi = a(b + a\cos\theta)\, d\theta d\varphi$, 从而

$$S \xlongequal{D:=\{(\theta,\varphi)|0\le\theta,\varphi\le 2\pi\}} \iint\limits_D a(b + a\cos\theta)\, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta) d\theta = 4\pi^2 ab$$

例 3.5 设连续曲线 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数, 且满足 $f(x) > 0$, 求曲线绕 x-轴一周所成旋转曲面的面积.

解 I: 只需计算旋转面在 $y, z \ge 0$ 部分的面积, 然后四倍之. 旋转面的描述方程为 $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = f(x)$, 故 $y, z \ge 0$ 时曲面由下函数的图像描述

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2}, \qquad (x,y) \in D := \{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

从而 $z_x = \dfrac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$, $z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$, 从而所求旋转面面积为

$$S = 4\iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = 4\iint\limits_D \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}\, dxdy$$

$$
= 4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}dy \xlongequal{u=\frac{y}{f(x)}}
$$

$$
= 4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx
$$

与之前微元法得到的计算结果一致.

解 II: 旋转面具有参数描述 $\begin{cases} x = r \\ y = f(r)\cos\theta \\ z = f(r)\sin\theta \end{cases}$，$a \le r \le b$，$0 \le \theta \le 2\pi$. 由此计算可得

$$
E = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1 + f'^2(r); \quad G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = f(r)^2
$$

$$
F = x_r x_\theta + y_r y_\theta + z_r z_\theta = 0 + f'(r)\cos\theta f(r)\sin\theta - f'(r)\sin\theta f(r)\cos\theta = 0
$$

从而 $\sqrt{EG-F^2} = f(r)\sqrt{1+f'^2(r)}$，故旋转面的面积为

$$
S = \int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\sqrt{EG-F^2}\,drd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(r)\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr
$$

$$
= 2\pi\int_a^b f(r)\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr
$$

例 3.6 若例 *3.5* 中的连续曲线 $y = f(x)$ 不是绕 x-轴旋转一周，而是绕 y-轴旋转一周，则旋转面有参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = f(r) \\ z = r\sin\theta \end{cases}$，$a \le r \le b$，$0 \le \theta \le 2\pi$，按上例中的计算步骤，可知此时旋转面的面积计算公式为 $S = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr$

对例 *3.4* 中的环面，它可看成是圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$ 绕 y-轴旋转一周所成，则可根据上公式计算其表面积. 当 $y \ge 0$ 时，$y = \sqrt{a^2-(x-b)^2}$，得到

$$
\sqrt{1+y'^2(x)} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-(x-b)^2}} \quad \Longrightarrow \quad \text{故环面面积为}
$$

$$
S = 2\times 2\pi\int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dr = 4\pi a\int_{b-a}^{b+a}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}} \xlongequal{r-b=:t}
$$

$$
4\pi a\int_{-a}^{a}\frac{b+t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt \xlongequal{u:=\frac{t}{a}} 4\pi a\int_{-1}^{1}\frac{b+au}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 4\pi ab\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 4\pi^2 ab
$$

4 第一型曲面积分及其应用

由上节开头的导言，我们直接给出第一型曲面积分的定义.

定义 4.1 设函数 $f(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面 Σ 上的有界函数，将曲面用曲线网分割成 n 小块 $\Delta\Sigma_i$（$i=1,2,\cdots,n$）. 记第 i 块小曲面的面积为 ΔS_i，并记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$（其中 d_i 是 $\Delta\Sigma_i$ 的直径），任取点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i$$

如果当 $\lambda\to 0$ 时，上和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，Σ 为积分曲面，dS 称为曲面面积微元. $f(x,y,z)$ 的第一型曲面积分也称为函数 $f(x,y,z)$ 对面积的曲面积分.

特别地，当 $f\equiv 1$ 时，$\iint\limits_{\Sigma} dS$ 计算曲面 Σ 的面积. 若曲面 Σ 为封闭曲面（比如球面），则曲面积分也记为 $\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

类似于第一型曲线积分，若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 存在，且积分线性性及区域可加性等对第一型曲面积分也是成立的，这里不再赘述.

第一型曲线积分的计算的关键在于确定弧长微分 ds，然后化为定积分计算；同理，对第一型曲面积分，计算的关键是确定其曲面面积微元，然后便可化为二重积分进行计算. 类似曲线积分的情形，我们也可证明下定理

定理 4.1 设光滑曲面 Σ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}\quad (u,v)\in D_{uv}$ 如果函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则 f 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分存在，且有如下计算公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

其中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$，$B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$，$C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$；即考虑曲面上点的径矢

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v)),\quad (u,v)\in D_{uv}$$

从而 $(A,B,C)=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\quad dS=||\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v||\,dudv$　或可按下计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

其中 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$.

特别地，若 Σ 由 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 给出，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 4.1 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$.

解 I: Σ 在 xy-平面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$. 由于

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

故面积微元为 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，从而

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x+y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy$$

$$=R\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x+y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy+R\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

由于区域 D_{xy} 关于 x-轴和 y-轴都是对称的，故由对称性（考虑 $x\to -x$; $y\to -y$）知

$$\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=0$$

从而 $I=R\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi R^3$.

解 II： 利用 Σ 的参数方程

$$\mathbf{r}(\varphi,\,\theta)=(R\sin\varphi\cos\theta,\,R\sin\varphi\sin\theta,\,R\cos\varphi)\quad 0\le\theta\le 2\pi,\,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$dS=||\mathbf{r}_\varphi\times\mathbf{r}_\theta||d\varphi d\theta$$

$$=||(R^2\sin^2\varphi)\cos\theta,\,R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\,R^2\sin\varphi\cos\varphi||d\varphi d\theta=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta$$

故 $I=\iint\limits_{\Sigma} zdS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\varphi R^2\sin\varphi d\varphi=2\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=\pi R^3.$

例 4.2 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}dS$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$.

解： 椭球面有参数表示 $\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=b\sin\varphi\sin\theta \\ z=c\cos\varphi \end{cases}$ （$0\le\theta\le 2\pi,\,0\le\varphi\le\pi$）. 计算可知

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi$$

故 $dS=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2}d\varphi d\theta$

$$=\sqrt{(abc)^2\sin^2\varphi\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}d\varphi d\theta$$

而被积函数为

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}$$

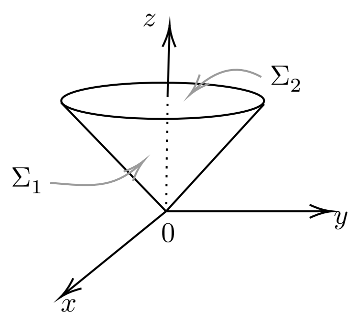
$$I=\iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}abc\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$\xlongequal[\text{第一卦限的体积}]{\text{根据对称性，只算}}8\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]}abc\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$=\frac{4}{3}abc\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

例 4.3 计算 $I = \oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成锥体的整个边界.

解： 锥体在 xy-平面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.



由上图，Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 两部分组成，其中 $\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D_{xy}$, $\Sigma_2: z=1$, $(x,y)\in D_{xy}$. 故

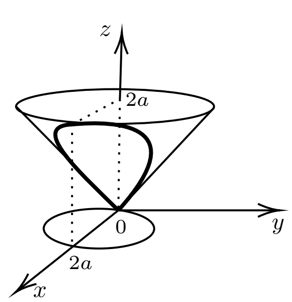
$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS + \iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy + \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy + \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy = (\sqrt{2}+1)\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= (\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$$

例 4.4 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 割下的部分.



解 I: 曲面 Σ 在 xy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2ax\}$，曲面由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图像给出，由上例中的计算，知 $dS=\sqrt{2}dxdy$，从而

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2y^2+(x^2+y^2)^2)\sqrt{2}dxdy \xlongequal{\text{利用极坐标}}$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^4)rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta\sin^2\theta+1)\left(\frac{1}{6}r^6\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}(2a)^6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta(\cos^2\theta\sin^2\theta+1)d\theta=\frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6$$

解 II: 如果用球面坐标，则锥面上的点满足 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，从而锥面有如下参数表示

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta \\ z=r\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r \end{cases}$$

Σ 的边界 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2ax \end{cases}$ 在球坐标下为 $\begin{cases} \varphi=\pi/4 \\ r^2\sin^2\varphi=2ar\sin\varphi\cos\theta \end{cases}$ 故曲面在 xy-平面上的投影区域在球坐标下的表示为

$$D_{\theta,r}=\left\{(\theta,r)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2};\ 0\le r\le 2\sqrt{2}a\cos\theta\right\}$$

$$\mathbf{r}_r=(x_r,y_r,z_r)=\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}},\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\quad \mathbf{r}_\theta=(x_\theta,y_\theta,z_\theta)=\left(\frac{-r\sin\theta}{\sqrt{2}},\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}},0\right)$$

从而

$$E=\mathbf{r}_\theta\bullet\mathbf{r}_\theta=\frac{r^2}{2};\quad F=\mathbf{r}_r\bullet\mathbf{r}_\theta=0;\quad G=\mathbf{r}_r\bullet\mathbf{r}_r=1$$

故得

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}a\cos\theta}\left(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{1}{4}r^4\right)\frac{r}{\sqrt{2}}dr=\frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6$$

例 4.5 设 S^2 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，证明

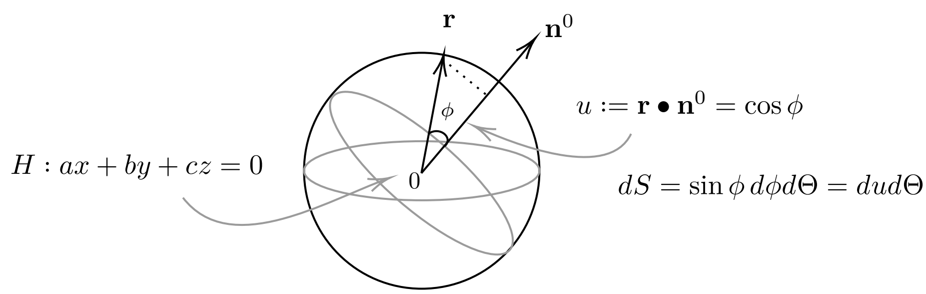
$$\oiint\limits_{S^2} f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du$$

其中 a,b,c 是不全为零的常数，$f(u)$ 是 $|u|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上的一元连续函数.

证明： 令

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

则 $|u|$ 表示单位球面上的点 (x,y,z) 到平面 $H: ax+by+cz=0$ 的距离, 而 u 表示径矢 $\mathbf{r}=(\sin\varphi\cos\theta,\,\sin\varphi\sin\theta,\,\cos\varphi)$ 在平面 H 的单位法向量 $\mathbf{n}^0$ 上的正交投影，即 $u=\cos\phi$，其中 ϕ 是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{n}^0$ 之间的夹角.



由例 *4.1* 之解 *II* 中的计算，单位球面的面积微元在球坐标下的表达为 $dS=\sin\varphi\,d\varphi d\theta$，由此可推知（考虑到坐标的旋转不改变面积）：若记 Θ 为平面 H 上的角坐标，ϕ 的定义如上，则单位球面 S^2 上的面积微元亦可表达为

$$dS=\sin\phi\,d\phi d\Theta \overset{u=\cos\varphi}{=\!=\!=} dud\Theta$$

$$\text{从而}\quad \oiint\limits_{S^2} f(ax+by+cz)\,dS = \iint\limits_{(u,\Theta)\in[-1,1]\times[0,2\pi]} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)dud\Theta$$

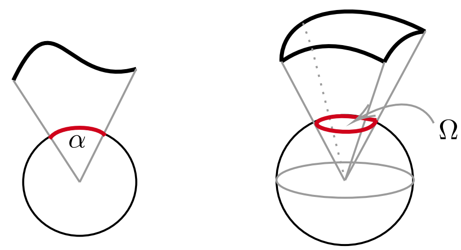
$$=\int_0^{2\pi}d\Theta\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du$$

注记 5.1 立体角（*solid angle*）是比较常用的概念，它是平面角概念的三维推广，用以衡量某点观察到的物体的大小. 对特定观察点，一个近处的小物体可能和一个远处的大物体有着相同的立体角，比如我们观测到了月亮和太阳的象，虽然它们大小不同，但因为远近关系，它们呈现在我们视野（用立体角衡量）中的大小可能是相近的.

立体角惯以字母 Ω 来表示，它的定义为：如观测一物体，我们以观测点为球心，构造一个单位球面，则物体投影到该单位球面上的投影面积，即为该物体相对于该观测点

的立体角. 因此，立体角是单位球面上的一块面积，这和“平面角”是单位圆上的一段弧长”是相仿的. 在球坐标下，球面的面积微元是 $dS = r^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$，故立体角的微元，作为单位球面上的面积微元，有如下表达

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\varphi \, d\varphi d\theta$$



即对球面上的部分，其立体角为投影面积与球半径平方的比值，设球面上的区域为 S，则其立体角为可按下计算

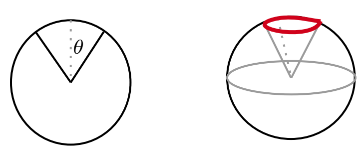
$$\Omega = \iint\limits_S d\Omega = \iint\limits_S \sin\varphi \, d\varphi d\theta$$

特别地，对封闭球面 S^2（半径任意），若观察点在球心，则其立体角显然是 4π，当然也可直接计算如下

$$\Omega = \oiint\limits_{S^2} \sin\varphi \, d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 4\pi$$

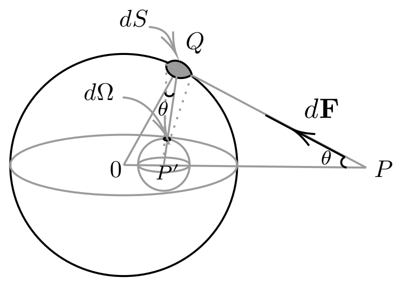
事实上，不难想见，以球面 S^2 内任意点为观测点，球面 S^2 的立体角都是 4π；也不难想见，对封闭曲面内的任意一点，则曲面相对该点的立体角也是 4π，这是电磁学中高斯定律的基础. 此外，也不难想见，封闭曲面对其外任意观测点的立体角为 0.

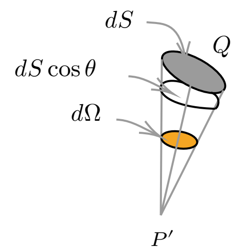
这些结论，及对一般曲面立体角的计算将在第二型曲面积分后加以讨论. 对顶角为 2θ 的圆锥，其相对于顶点的立体角即为单位球上的一个球冠的面积，即



$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} \sin\varphi \, d\varphi = 2\pi(1 - \cos\theta) = 4\pi \sin\frac{\theta}{2}$$

注记 5.2 利用立体角概念可方便一些积分计算．我们先前证明过均匀球体对其外一质点产生的引力等效于将其看做质量集中于球心的质点对其外一质点产生的引力．事实上，牛顿证明了更强的结论：即一个密度只随着到球心距离而变化的球体，对其外一质点的引理等效于将其看做质量集中于球心的质点对其外一质点产生的引力．





$$\Delta\ OQP' \sim \Delta\ OPQ \implies \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \implies \overline{OP}\cdot\overline{OP'} = R^2 \qquad \frac{dS\cos\theta}{d\Omega} = \frac{\overline{P'Q}^2}{1}$$

将球分成薄球壳，如能证明每一球壳（看成球面）的引力等效于将其质量集中于球心的引力效应，则结论即明．如上图，设球面 $S^2(R)$ 半径为 R，面密度为 μ，并设球外一质点 P 的质量为 m. 考虑球壳上的面积微元 dS 对 P 的引力 $d\mathbf{F}$，由对称性，只有沿着 OP 的分量为零，即只需计算

$$|d\mathbf{F}|\cos\theta = k\frac{m\mu\, dS}{\overline{PQ^2}}\cos\theta$$

在直线 OP 上取点 P'，使得 $\Delta OQP' \sim \Delta OPQ$，从而 $\angle OQP' = \angle OPQ = \theta$，并且 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'} = R^2$，换言之，$P'$ 是 P 关于球面的反射对称点．以 P' 为圆心作单位球面，则 dS 在该平面上的投影面积就是 dS 对应的立体角 $d\Omega$，它与 $dS\cos\theta$ 的关系是

$$dS\cos\theta = \overline{P'Q^2}\, d\Omega$$

从而求壳对 P 的净引力为

$$\oiint\limits_{S^2(R)} |d\mathbf{F}|\cos\theta = \oiint\limits_{S^2(R)} k\frac{m\mu}{\overline{PQ^2}} dS\cos\theta = km\mu \oiint\limits_{S^2(R)} \frac{\overline{P'Q^2}}{\overline{PQ^2}} d\Omega \xlongequal[\text{三角形}]{\text{相似}} km\mu \oiint\limits_{S^2(R)} \frac{R^2}{\overline{OP^2}} d\Omega$$

$$= \frac{km\mu R^2}{\overline{OP^2}} \oiint\limits_{S^2(R)} d\Omega = \frac{km\mu R^2}{\overline{OP^2}} 4\pi = k\frac{m\mu 4\pi R^2}{\overline{OP^2}} \xlongequal{M:=4\pi R^2\times\mu} k\frac{mM}{\overline{OP^2}}$$

即球壳对 P 的引力等效于其质量集中于 O 点的质点对 P 的引力．

5 第二型曲线积分及其应用

6　第二型曲面积分及其应用

7 附录一：引力场的泊松方程

设物体占据空间为 Ω，其其密度为 $\mu(\mathbf{r}')$（其中 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$），由于它的引力，在 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处质量为 m 的质点有势能 $V(\mathbf{r}) = mU(\mathbf{r})$，其中引力势为

$$U(\mathbf{r}) = -k \iiint\limits_{\Omega} \frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (d\mathbf{r}' = dx'dy'dz')$$

首先，$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r})'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

再注意到：$\Delta f = \nabla \bullet (\nabla f)$，即将 ∇ 看成矢量算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$，从而

$$\nabla \bullet (\nabla f) = \nabla \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

故有

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \nabla \bullet \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \bullet \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

显然，当 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ 时，上面的结果为零，从而可知此时 U 满足拉普拉斯方程. 当 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 时，上式是两无穷大之差，为确定其值，考虑以 $\mathbf{r}'$ 为中心，半径为 ϵ 的球体 $\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)$，在其上积分，有

$$\iiint\limits_{\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r} \overset{d\mathbf{r} = dxdydz}{=\!=\!=\!=\!=} \iiint\limits_{\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \nabla \bullet \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r} \overset{Gauss\text{ 公式}}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \bullet d\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\partial\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \bullet d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{\epsilon^2} \iint\limits_{\partial\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} d\sigma = -4\pi$$

故对任意包含 $\mathbf{r}'$ 的封闭区域 Ω，都成立

$$\iiint\limits_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r} = -4\pi$$

而若 Ω 不包含 $\mathbf{r}'$，成立

$$\iiint\limits_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r} = 0$$

从而

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

其中 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 是三维 δ 函数, 即它满足下关系

$$\iiint\limits_{\Omega}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Omega \text{ 包含 } \mathbf{r}' \\ 0, & \text{若 } \Omega \text{ 不包含 } \mathbf{r}' \end{cases}$$

显然 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$，故有

$$\iiint\limits_{\Omega}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \iiint\limits_{\Omega_\epsilon(\mathbf{r}')}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \underbrace{\iiint\limits_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon(\mathbf{r}')}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}_{\equiv 0}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_\epsilon(\mathbf{r}')}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \mu(\mathbf{r}) \quad (\text{通过考虑极限 } \epsilon \to 0 \text{ 可知})$$

故可得

$$\iiint\limits_{\Omega}\Delta\left(\frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' = \iiint\limits_{\Omega}\mu(\mathbf{r}')\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' + \underbrace{\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Delta\mu(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}_{\equiv 0}$$

$$-4\pi\iiint\limits_{\Omega}\mu(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = -4\pi\mu(\mathbf{r})$$

从而可得

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -k\iiint\limits_{\Omega}\Delta\left(\frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' = -4\pi k\mu(\mathbf{r})$$

从而得知 $U(\mathbf{r})$ 满足泊松方程.