第四讲：导数、微分、泰勒多项式逼近

目录

第四讲：导数与微分

1 导例

例 1.1 GPS 导航是利用卫星发射信号, 到达地球表明后又反馈回卫星进行加工、处理. 为精准导航, 须使地面时间和卫星上时钟的时间尽量校准同步. 记地面时间为 T_m, 卫星上时钟时间为 T, 根据狭义相对论, 我们有

$$T_m = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

其中 v 是卫星的绕行速度, c 是真空中的光速. 直接利用上式计算不便, 我们希望找到上面关系的好的近似. 令 $x = \frac{v^2}{c^2}$ 则 $T_m/T = f(x)$, 其中

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

由于卫星速度比之光速小得多, 所以 x 是个很小的量. 我们希望用一个更简单的函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 附近来近似 $f(x)$, 且使近似的误差是 x 的高阶无穷小（$x \to 0$ 时）, 即要求

$$f(x) - g(x) = o(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x} = 0$$

对 $g(x)$ 基本的要求是 $g(0) = f(0) = 1$, 则上极限可写成如下形式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-(g(x)-g(0))}{x-0} = 0 \quad \xRightarrow{\text{假设 } f(x) \text{ 在 } 0 \text{ 的变化率有意义}}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{=:f'(0)\exists} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

即 $g'(0) := \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ 是存在的且等于 $f'(0)$. 注意:

$$f(x) = f(0) + \frac{f(x)-f(0)}{x}x$$

我们预期, 当 x 较小时, $f'(0)$ 是 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 的一个好的近似, 但如果直接用 $f'(0)$ 将它替代, 则将产生一误差, 即有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + error$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{error}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(f(0)+f'(0)x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f'(0)=f'(0)-f'(0)=0$$

也就是说 $error=o(x)$，故我们得出对 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的“一阶近似”如下

$$g(x)=f(0)+f'(0)\,x$$

$$\text{即有}\quad f(x)\approx g(x)\ (x\to 0)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=g(x)+o(x)$$

称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的线性逼近. 特别地，我们看出，$\Delta g:=g(x)-g(0)=g(x)-f(0)$ 是 $\Delta f=f(x)-f(0)$ 在 x 处的一个近似，也称 $\Delta g=f'(0)x$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的线性主部，也称 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的微分，记作

$$df|_{x=0}:=f'(0)\,x=f'(0)\Delta x$$

也就是说，为了得到一阶近似，我们须计算下极限

$$f'(0):=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{1-x}\sim 1-\frac{1}{2}x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}$$

由此得到一阶近似

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\approx 1+\frac{1}{2}x$$

故

$$T_m=\frac{T}{\sqrt{1-x}}\approx T\left(1+\frac{1}{2}x\right)=T\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)$$

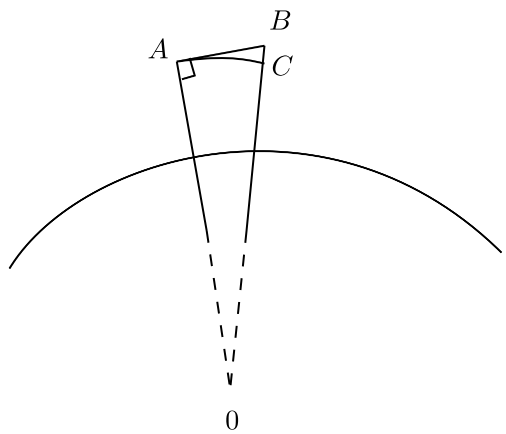
$$\xlongequal{v=4km/s,\,c=3\times 10^5 km/s}T\times(1.00000000005)$$

问题:如何得到 $f(x)$ 的更高阶近似? 比如希望有 $g(x)$ 使得 $f(x)-g(x)=o(x^2)\ (x\to 0)$? 显然，我们考虑对一阶近似 $f(0)+f'(0)x$ 的一个二阶微扰（$perturbation$），即

$$g(x):=f(0)+f'(0)x+Ax^2\ (\ A\text{ 是常数})$$

然后利用 $f(x)-g(x)=o(x^2)$ 来决定 A 的值.

例 1.2 第一宇宙速度 $7.9km/s$ 的推导. 第一宇宙速度是维持物体围绕地球坐用不着地（理论上）飞行所需要的最低速度. 设卫星当前时刻在地球表面附近的 A 点沿着水平方向飞行，假设没有任何外力影响，则它一秒钟后应到达 B 点，但实际上，由于地心引力的影响，卫星实际到达的点是 C 点，且 BC 的长度是重力加速度下的自由落体距离，即 $\overline{BC} = 4.9m$.



卫星绕地球飞行当且仅当 $\overline{OA} = \overline{OC} \approx 6371km$（地球半径），且卫星的速度是 AB 的距离 $\overline{AB}$. 用勾股定理，得

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OA}^2 = (\overline{OC} + \overline{BC})^2 - \overline{OA}^2$$

$$= (6271000 + 4.9)^2 - (6371000)^2 \overset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= (6371000 + 4.9 + 6371000)(637100 + 4.9 - 6371000) =$$

$$= 2 \times 6371000 \times 4.9 + 4.9^2 \approx 2 \times 6371000 \times 4.9 \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} \approx 7.9km$$

注记 1.1 上近似计算的实质是：对函数 $y = x^2$ 在 $x_0 = 6371000$ 处进行线性逼近，即

$$\Delta y = x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \approx$$

$$\approx 2x_0(x - x_0) = \underbrace{2x_0\Delta x}_{dy|_{x=x_0}}$$

逼近的误差是关于 Δx 的高阶无穷小，即

$$\Delta y = dy|_{x=x_0}\Delta x + o(\Delta x)$$

2 微分、导数、泰勒多项式的概念导引

设 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续. 常需考虑两类问题.

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的变化率, 即它在 x_0 处附近平均变化率的极限. 记 $\Delta x = x - x_0$ 是自变量 x 在 x_0 处的一个增量 (增量本身可大可小), 则 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率是
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
常需考虑当 Δx 越来越小时函数的平均变换率. 当 $\Delta x \to 0$, 上面表达式的极限（若存在）就是 $f(x)$ 在 x_0 处的瞬时变化率，这引出 $f(x)$ 在 x_0 处导数的概念.

定义 2.1（导数）对 $f(x)$，如下面的极限存在，则说 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并将其极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（*derivative*），记之为 $f'(x_0)$，即有

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \qquad (2.1)$$

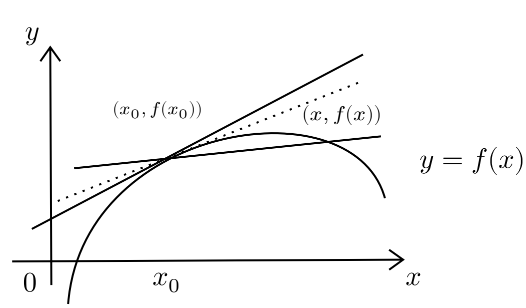
记 $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 附近的一个微小增量，则上式可写成

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (2.1')$$

即写成了两个（微小）增量的商的极限的形式，故称之为微商.

定义 2.2 如果 $f(x)$ 在其定义域内每一点都可导，则我们便由 $f(x)$“导出”了一个新的函数 $f'(x)$，它在 $x_0 \in D(f)$ 上的取值即 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值. 称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，常也简称为 $f(x)$ 的导数.

注记 2.1 定义 (2.1′) 的形式启发我们给导数赋以几何含义：它是过曲线 $y = f(x)$ 上的固定点 $(x_0, f(x_0))$ 与它近旁的点 $(x, f(x))$ 的“割线”的斜率（当 $x \to x_0$ 时）的极限，即曲线在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.



2. 如果 $f(x_0)$ 已知，对与 x_0 靠近的另一点 x，如何利用 $f(x_0)$ 来近似（估计）$f(x)$ 的值，并使近似的误差足够小且可控？具体而言，

   (a) 当 $\Delta x = x - x_0 \to 0$ 时，若有近似 $g(x) \approx f(x)$. 基本的要求是：$g(x_0) = f(x_0)$，即近似的误差 $f(x) - g(x)$ 也趋于零. 进一步希望找到好的近似手段，使得

   $$f(x) - g(x) = o(\Delta x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

   即误差 $f(x) - g(x)$ 相对于 $\Delta x = x - x_0$ 是（在 $x \to x_0$ 时）高阶无穷小.

      i. 我们要求 $f(x)$ 和它（在 x_0 处）的逼近函数 $g(x)$ 在 x_0 处连续，故由 $f(x_0) = g(x_0)$ 知 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x) - g(x)] = 0$，从而上面的极限是有意义的.

      ii. 当然，如果我们要求近似的"精度（*precision*）"更高，只需选择更好的逼近函数 $g(x)$ 使得近似的误差 $f(x) - g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的更高阶无穷小，也就是说，有

      $$f(x) - g(x) = o((\Delta x)^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

   (b) 我们希望在 x_0 处逼近 $f(x)$ 的函数 $g(x)$ 的形式简单、易算. 而最基本（但又非平凡）的函数自然是多项式函数，其最简单的是一次多项式，即线性函数.

      i. 如用线性函数逼近 $f(x)$ 在 x_0 处的表现，可设 $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$（其中 A 为常数)，则 $f(x) - g(x) = o(\Delta x)$ 的要求将引至

      $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

      为使上面的极限成立，需要 $f(x) - g(x) = f(x) - [f(x_0) + A(x - x_0)]$ 至少是当 $x \to x_0$ 时的二阶无穷小，即它至少与 $(x - x_0)^2$ 同阶. 我们看出，若下面的极限成立，则该要求可被满足

      $$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

      上面的讨论表明：如要使 x_0 处附近的逼近误差是一阶无穷小，则可用线性函数来逼近 $f(x)$ 在 x_0 处的表现，即用曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线方程**

      $$\boxed{y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \qquad (2.2)$$

来近似 $f(x)$ 在 x_0 附近的表现

$$f(x) \approx L(x),\ x \in U(x_0)$$

且当 $x \to x_0$ 时，逼近的误差是高于 $x - x_0$ 的无穷小，即

$$f(x) - L(x) = o(x - x_0)$$

故也称线性近似 $L(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一阶近似（*1st order approximation*）.

注记 2.2 通常而言，当 $\Delta x = x - x_0$ 越小，则用线性函数 $L(x)$（在 x_0 附近）逼近 $f(x)$ 的效果也越佳，故一般仅限于当增量 $\Delta x = x - x_0$ 较小时，才用 $L(x)$ 来逼近 $f(x)$（如 x 与 x_0 相距较大，则可选另一与 x 更靠近的点作为逼近的基点）.

将上面的近似换种表达方式，则有

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \text{ 或 } \boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)} \quad (2.3)$$

定义 2.3（微分）常将 $f'(x_0)\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处增量 $\Delta f(x)$ 的线性主部，也叫做 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分（*differential*），用符号表示为 $df|_{x=x_0}$ 或 $dy|_{x=x_0}$，即

$$\boxed{dy|_{x=x_0} = df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x} \quad (2.4)$$

即微分 $dy|_{x=x_0}$ 是 x_0 附近关于自变量增量 Δx 的一个线性函数，该线性函数由 $f(x)$ 在 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 确定.

当给自变量 x 在 x_0 处一个增量 Δx 时，可籍微分 $df|_{x=x_0}$ 计算出对应于自变量增量 Δx 实际增量 $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的一个线性近似（一阶近似），即线性主部 $f'(x_0)\Delta x$ 来.

换言之，我们利用微分来一**阶近似**实际增量 Δf，且近似的误差是 $\Delta x = x - x_0$ 当 $x \to x_0$ 时的高阶无穷小，即

$$\Delta f \approx df|_{x_0} \text{ 或 } \boxed{\Delta f = df|_{x_0} + o(\Delta x)} \quad (2.3')$$

对函数 $y = f(x) = x$, 由于它本身是线性函数, 故它在 x_0 处的微分（一阶近似）就是增量 Δx 自身，即 $dx|_{x=x_0} = \Delta x$. 故定义微分的表达式 (2.4)

亦可写作

$$\boxed{dy|_{x=x_0} = df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx} \quad (2.4')$$

并常将其简写为

$$\boxed{df = f'(x_0)\,dx} \quad (2.4'')$$

即函数 f 在 x_0 的微分 df 是自变量增量 $\Delta x = dx$ 的线性函数，它是对应函数实际增量 Δf 的一阶逼近，或线性近似.

定义 2.4 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的领域内有定义，当自变量在 x_0 处获得增量 $\Delta x = x - x_0$ 时，若相应的函数的增量 $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为如下形式

$$\Delta f = \underbrace{A\Delta x}_{\text{线性主部}} + o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数在 x_0 处可微（*differentiable*）. 并记 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分.

先前的讨论表明，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必在 x_0 处可微，且微分就是 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$，进一步，我们有下面的定理

定理 2.1 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且成立

$$df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$$

证明： 一方面，如 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ 存在，则存在（$\Delta x \to 0$ 时的）无穷小量 $\alpha(x)$（即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$），使得

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \underbrace{\alpha\Delta(x)}_{o(\Delta x)}$$

故 $f(x)$ 在 x_0 可微，且 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

另一方面，若 $f(x)$ 在 x_0 可微，则存在常数 A，使得

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则有 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A \quad \square$$

上面“另一方面”部分证明过程中的思想可总结如下:

用线性近似计算导数: 虽然 df 和 Δf 是不同的, 但注意到, 当 $\Delta x \to 0$ 时, $\Delta f = df + o(\Delta x)$, 故在计算导数 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ 时, 如将 Δf 用其一阶近似——即微分 df 取代, 则计算结果不会有任何不同!

$$\text{一方面:}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}_{=0}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)dx}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\text{另一方面:}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x = dx\to 0}\frac{f'(x_0)dx}{dx} = f'(x_0)$$

注意到, 在用近似 $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$ 计算极限（微商, 导数）时, 在极限过程 $dx = \Delta x \to 0$ 的过程中, 分子、分母上的 $dx = \Delta x$ 可被约去而不影响极限值, 故常将导数也用下符号记之（即导数作为微分之商——微商是也!）

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \quad \left(\text{实际} \ = \lim_{dx=\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$$

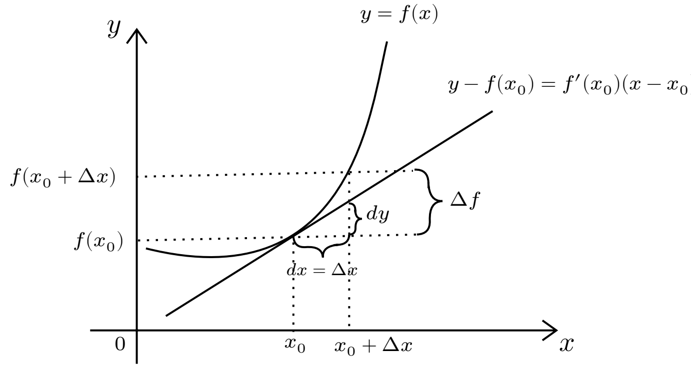
注记 2.3 上面的导数记法是莱布尼茨发明的，而牛顿用的记号是 $\dot{f}$. 莱布尼茨的记号之所以胜出，是因为它成功凸显了导数作为“微商”这一理念，即微分 dx 和 df 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，当我将这两个无穷小量写成商 $\frac{df}{dx}$，并标注 x_0 点，即 $\frac{df}{dx}\big|_{x_0}$ 时，我们默认它表示当 $x \to x_0$ 时两无穷小量比值的极限，即导数 $f'(x_0)$. 既然可将极限理解为微商，即形式上的无穷小量（极限为零，但其本身不为零!）之比，则一些导数运算的法则，在莱布尼茨的计号之下便显得特别顺理成章，比如 $df = \frac{df}{dx}dx$，以及后面将说明的如下规则等

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\ \text{（复合函数求导）} \qquad \frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}\ \text{（反函数求导）}$$

即符号本身就暗示了其背后的运算法则，这自然是很美妙的!

然而，有利必有其弊，莱布尼茨记号的一大流弊就是让很多人以为微分 df 就是 $\Delta x \to 0$ 时的 Δf. 固然在实践中为得到好近似，常将 $\Delta x = dx$ 取得比较小，此时对应的函数增量 Δf 也比较小，从而用 df 近似 Δf 是有效的，且用这个近似计算时不影响比值 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 的（当 $\Delta x \to 0$ 时的）极限. 但从概念上来说，Δf 和 df 的含义是“泾渭分明”的：Δf 是在在给定增

量 Δx 下函数实际增量，它当 $\Delta x \to 0$ 时为零；而微分 $df = f'(x_0)\Delta x$ 是一个独立的函数，它给出在增量 $\Delta x = dx = x - x_0$（可大可小）下，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一阶线性逼近（图像上表现为用 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线来取代 $f(x)$ 在 x_0 点附近的曲线）之增量，即在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线上计算出的增量——作为实际增量 Δf 的近似！



注记 2.4 对常数值函数 $y = c$，由于自变量改变时，函数值的改变为零，故其微分为零.

ii. 如希望用 $g(x)$ 在 x_0 处逼近 $f(x)$ 的误差是比 $(\Delta x)^2 = (x - x_0)^2$ 更高阶的无穷小（当 $x \to x_0$ 时），则线性的 $g(x)$ 显然是不够的，我们不妨试试二次多项式，故设 $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$（其中 A, B 为待定常数），则 $f(x) - g(x) = o\left((x - x_0)^2\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{x - x_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = f'(x_0)$$

为确定常数 B 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

我们不妨设

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2 = h(x)(x - x_0)^2 \quad (2.5)$$

其中 $h(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量. 计算 B 的策略是将上式两边对 x 逐次求导，从而析出 B 来. 为此，我们先证明基本的求导及微分法则.

*　　　　*　　　　*

引理 2.1 对线性函数 $f(x) = ax + b$，$f'(x) = a$；对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$，$f'(x) = 2ax + b$.

证明： 对任意 x_0，给定增量 $\Delta x = x - x_0$，有

$$\Delta f = (a(x_0 + \Delta x) + b) - (ax_0 + b) = a\Delta x$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= (a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c) \\ &= 2ax_0\Delta x + b\Delta x + (\Delta x)^2 = (2ax_0 + b)\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)} \quad \square\end{aligned}$$

注记 2.5 上引理的证明中，先给自变量一个微小增量 Δx，然后计算函数增量 Δf，并将其整理为线性主部 $f'(x_0)\Delta x$ 加上一个高阶无穷小的形式. 这也是牛顿当年计算导数的方法，只是他将 Δx 在计算时解释为无穷小量，即可以任意小但不为零的变量，但最后又令高阶的 $(\Delta x)^2$ 直接为零，以便得到微分 df 及导数. 这种不严格论述引发伯克利主教的诘难，称其为“无穷小幽灵”. 当然，我们知道，只要得到关系：$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$，则常数 A 就是导数，故对我们而言，在上计算中，即便不令 $(\Delta x)^2 = 0$，也明了由此途径求得导数的合理性，且在日常实践中，由上途径获得无穷小关系是很自然方便的，不应“因噎废食”，弃之不用.

定理 2.2 （导数的四则运算法则）设 $u(x), v(x)$ 都在某一区间 I 上可导，则它们的和、差、积、商（分母为零的点除外）也在 I 商可导，且有

A. $(u(x) \pm v(x))' = u(x)' \pm v(x)'$;

B. **莱布尼茨法则：** $(u(x)v(x))' = u(x)'v(x) + u(x)v(x)'$;

C. 在 $v(x) \neq 0$ 的点处，我们有

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

特别地，有一下常用公式

$$(cu(x))' = cu(x)' \ (c \text{ 为常数}) \qquad \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

证明： A 部分由导数的定义和极限的运算法则直接可得，下证 B 和 C. 对 B，我们有两种视角. 记 $f(x) := u(x)v(x)$

I. 对 x 给一增量 Δx，有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= v(x+\Delta x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0$，得 $f'(x) = [u(x)v(x)]' = v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$.

II. 利用导数与微分的关系：(2.3)，可设

$$\Delta u = u'(x)\Delta x + o(\Delta x); \qquad \Delta v = v'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

则 $\Delta f = \Delta(u(x)v(x)) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$

$$= [u(x)+u'(x)\Delta x + o(\Delta x)][v(x)+v'(x)\Delta x+o(\Delta x)] - u(x)v(x)$$

$$= u(x)v'(x)\Delta x + u(x)o(\Delta x) + u'(x)v(x)\Delta x + u'(x)v'(x)(\Delta x)^2 + u'(x)\Delta x o(\Delta x)$$

$$+v(x)o(\Delta x)+v'(x)\Delta x o(\Delta x)+[o(\Delta x)]^2$$

$$= [u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]\Delta x + \underbrace{[u(x)+v(x)]o(\Delta x)+u'(x)v'(x)(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

$$+\underbrace{u'(x)\Delta x o(\Delta x)+v'(x)\Delta x o(\Delta x)+[o(\Delta x)]^2}_{o((\Delta x)^2)}$$

求导的莱布尼茨法则由此自明. 为证 C，我们只需证明 $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$，然后运用莱布尼茨法则即可.

$$\Delta\left(\frac{1}{v(x)}\right) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{v'(x)\Delta x + o(\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v'(x)\Delta x+o(\Delta x)}{v(x)^2+v(x)v'(x)\Delta x + v(x)o(\Delta x)}$$

显然，此时不易将其直接整理成：导数 $\times \Delta x + o(\Delta x)$ 的形式，我们不钻

牛角尖，转为利用导数的原始定义来计算，即

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{1}{v(x)}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v'(x)\Delta x + o(\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v'(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \qquad \square$$

注记 2.6 不难归纳证明下公式

$$(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x))' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots$$

$$+\cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

由导数和微分的关系，可直接写出微分的四则运算法则，即得下推论

推论 2.1 设 $u(x), v(x)$ 都在某一区间 I 上可微，则它们的和、差、积、商（分母为零的点除外）也在 I 商可微，且有

A. $d(u(x)\pm v(x)) = du(x)\pm dv(x)$;

B. **莱布尼茨法则：** $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + du(x)v(x)$;

C. 在 $v(x)\neq 0$ 的点处，我们有

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$$

例 2.1 利用求导的四则运算法则，可大大简化一些导数的计算. 比如对多项式函数 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，为求其导函数，我们只需知道 x^k 的导数，而它的计算是简易的，即

$$(x+\Delta x)^k - x^k = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l(\Delta x)^{k-l} - x^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}x^k(\Delta x)^{k-l} = (\Delta x)^k + kx(\Delta x)^{k-1} + \cdots + kx^{k-1}(\Delta x)$$

$$= kx^{k-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

故 $(x^k)' = kx^{k-1}$，从而

$$p(x)' = na_n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

定义 2.5（高阶导数）设函数 $f(x)$ 具有导函数 $f'(x)$，给定定义域内一点 x_0，如下极限存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，其值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数，记之为 $f''(x_0)$ 或 $\frac{d^2f}{dx^2}\big|_{x=x_0}$

$$f''(x_0) := \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

如对所有定义域内 x_0，其处的二阶导数存在，则得到二阶导函数 $f''(x)$. 同理，可有三阶导数，及三阶导函数的概念. 一般地，设 $y=f(x)$ 在 x_0 附近存在 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$，若它在 x_0 处的导数 $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\big|_{x=x_0}$ 存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数，记之

$$y^{(n)}|_{x=x_0},\quad f^{(n)}(x_0),\quad \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

此时称 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 二阶或二阶以上的导数称为高阶导数，为方便起见，也将 $f(x)$ 称为其自身的零阶导数，记为 $f^{(0)}(x)$.

定义 2.5 若 $f^{(n)}(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $f(x)$ 在 I 上n 阶连续可导，记为 $f(x)\in C^n(I)$；如果对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f(x)\in C^n(I)$，则称 $f(x)$ 在 I 上无限阶可导，记为 $f(x)\in C^\infty(I)$.

定理 2.3（高阶导数的运算法则和莱布尼茨公式）设 $u(x),v(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，则它们的线性组合 $ku(x)+lv(x)$ $(\forall k,l\in\mathbb{R})$，乘积 $u(x)v(x)$ 都是 n 阶可导的，且有

$$(ku(x)+lv(x)\ ^{(n)} = k(u(x))^{(n)} + l(v(x))^{(n)}$$

$$\text{莱布尼茨公式：}(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

证明： 只证莱布尼茨公式，用数学归纳法. 由求导的莱布尼茨法则知公式对 $n=1$ 成立，假设公式对 $n=m$ 成立，则对 $n=m+1$

$$(uv)^{(m+1)} = ((uv)^m)' \xlongequal{\text{归纳假设}} \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}\right)' \xlongequal{\text{求导是线性运算}}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(u^{(k)}v^{(m-k)}\right)' \xlongequal{\text{莱布尼茨法则}} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(u^{(k+1)}v^{(m-k)}+u^{(k)}v^{(m-k+1)}\right)$$

$$= u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}u^{(k+1)}v^{(m-k)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$\xlongequal{\text{重整求和指标}} u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+$$

$$+\quad \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$= u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)} =$$

$$u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}u^{(k)}v^{(m+1-k)}$$

莱布尼茨公式由此证毕. $\square$

定理 2.4（复合函数的求导法则，或链式法则）设函数 $u=u(x)$ 在 x_0 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应 x_0 的点 u_0 处可导，则复合函数 $y=f(u(x))$ 在点 x_0 处可导，且有

$$(f(u(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)u'(x_0) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=u_0}\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

证明: 由于 $y=f(u)$ 在 u_0 处可导（即可微），故对 u_0 处一非零增量 Δu，有

$$\Delta y = \Delta f = f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$$

特别地，上式对 $\Delta u = 0$ 时也成立. 由于 $\Delta u = u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$，在上式两边除上一个 x_0 处的非零增量 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)}{\Delta x} = f'(u(x_0))\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta x} \quad (*)$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，由于 u 在 x 处可导，故 $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)$，且有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$$

由此，在 $(*)$ 两边令 $\Delta x\to 0$，即得

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = f'(u(x_0))u'(x_0) \qquad \square$$

推论 2.2 由导数和微分的关系，即得微分的链式法则（*chain rule*）

$$d\left(f(u(x))\right)|_{x=x_0} = f'(u(x_0))u'(x_0)dx$$

一阶微分的形式不变性： 对上面的复合函数 $f(u(x))$，由于外层函数 $f(u)$ 在 u_0 处可微，故有微分关系

$$df = f'(u_0)du$$

又因内层函数 $u(x)$ 在 x_0（其中 $u(x_0) = u_0$）处亦可微，故得关系

$$du = u'(x_0)dx$$

将上面两个微分关系合并之，得

$$df = f'(u_0)du = f'(u(x_0))u'(x_0)dx$$

即得到复合函数微分的链式法则! 换言之，一阶微分 df 的表达形式具有**不变性**：将 f 看成是中间变量 u 的函数，有 $df = f'(u)du$，又将其看成 x 的函数，有 $df = f'(x)dx$. 质言之，求导的链式法则

$$f'(x) = f'(u(x))u'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

导致了df 无论是以变量 u 来表达，抑或是由变量 x 来表达，其形式都是一致的，此即一阶微分的形式不变性.

*　　　*　　　*

我们回到“主题”，接着计算待定常数 B. 在 (2.5) 式两边同时对 x 求导，利用引理 *2.1*，得到关系

$$f'(x) - f'(x_0) - 2B(x - x_0) = 2(x - x_0)h(x) + (x - x_0)^2 h'(x)$$

两边再对 x 求导，得到关系

$$f''(x) - 2B = 2h(x)(x - x_0)h'(x) + 2(x - x_0)h'(x) + (x - x_0)^2 h''(x)$$

令 $x \to x_0$，得（假设 $f''(x)$ 在 x_0 处连续）$B = \frac{f''(x_0)}{2}$. 由此得到 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶泰勒展开（*Taylor expansion*）

命题 2.1 若 $f(x)$ 在 x_0 附近二阶可导，且导函数在 x_0 连续，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

下面接着演示如何从二阶迭代至三阶，以便凸显更一般的模式.

注记 2.7 有了“洛必达法则”之后，相关计算可大幅简化，但此处这种略显“原始粗糙”的计算模式仍有其价值——浑然天成的高楼大厦固然可观，但不应忘记其建筑之初的“脚手架”，因为当你再建高楼时或许还用得到它！

iii. 如希望用 $g(x)$ 在 x_0 附件逼近 $f(x)$ 的误差是比 $(\Delta x)^3=(x-x_0)^3$ 更高阶的无穷小（当 $x\to x_0$ 时），则二次的 $g(x)$ 显然是不够的，不妨试试三次多项式，设 $g(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+B(x-x_0)^2+C(x-x_0)^3$（其中 A,B,C 为待定常数），则 $f(x)-g(x)=o\left((x-x_0)^3\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)-B(x-x_0)^2-C(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}=0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0 \quad\Longrightarrow\quad A=f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad B=f''(x_0)$$

为确定常数 C 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-f''(x_0)(x-x_0)^2-C(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}=0$$

我们不妨设 $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-f''(x_0)(x-x_0)^2-$

$$-C(x-x_0)^3=h(x)(x-x_0)^3 \qquad (2.6)$$

其中 $h(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 计算 C 的策略同前，即将上式两边对 x 逐次求导，从而析出 C 来. (2.6) 式两边对 x 求导一次，得

$$f'(x)-f'(x_0)-2f''(x_0)(x-x_0)-3C(x-x_0)^2=h'(x)(x-x_0)^3+3h(x)(x-x_0)^2$$

上式两边对 x 再求导一次，得

$$f''(x)-2f''(x_0)-3\cdot 2\,C(x-x_0)=h''(x)(x-x_0)^3+3h'(x)(x-x_0)^2+$$

$$+3h'(x)(x-x_0)^2+6h(x)(x-x_0)^2$$

尚不明朗，那就再操作一次，得

$$f'''(x)-3!C=h'''(x)(x-x_0)^3+3h''(x)(x-x_0)^2+$$

$$+6h''(x)(x-x_0)^2+12h'(x)(x-x_0)+6h'(x)(x-x_0)^2+12h(x)(x-x_0)$$

令 $x\to x_0$，得到（假设 $f'''(x)$ 在 x_0 处连续）$C=\frac{f'''(x_0)}{3!}$. 由此得到 $f(x)$ 在 x_0 处的三阶泰勒展开（*Taylor expansion*）

命题 2.2 若 $f(x)$ 在 x_0 附近三阶可导，且 $f'''(x)$ 在 x_0 处连续，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

一般不难归纳出（虽按上面计算较显繁琐）

定理 2.5（泰勒定理 *I*）若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近进行 n 阶近似，即 $f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

记 $R_n(x):=f(x)-P_n(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

定义 2.6 $P_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的n 阶泰勒多项式；其系数 $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒系数；$x_0=0$ 时的泰勒多项式也称为马克劳林多项式；称 $P_n(x)+o(x-x_0)^n$ 为带有皮亚诺（*Peano*）余项的 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式.

例 2.2 多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 k $(k\le n)$ 阶马克劳林多项式是 $P_k(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$；其在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式也可通过将 $f(x)$ 写成 $f((x-x_0)+x_0)$，然后利用二项展开为关于 $x-x_0$ 的多项式来计算.

3 导数、微分、泰勒多项式的性质和计算

计算导数（微分）时，首先得确保其存在. 我们已知可导和可微是等价的（*c.f.* 定理 *2.1*），而在一点处的导数无非是一个极限，而我们知道一点处的极限存在当且仅当其左、右极限存在且相等. 该考虑引向如下定义及定理.

定义 3.1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的左领域内有定义，若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称此极限值为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的*左导数*（*left derivative*），记作 $f'_-(x_0)$. 类似地，可定义 $y=f(x)$ 在 x_0 处的*右导数*（*right derivative*）

$$f'_+(x_0):=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定理 3.1 函数在一点可导当且仅当它在该点的左、右极限存在且相等.

注记 3.1 *函数在一点处的导数衡量的是函数图像在该点处切线的斜率. 结合上定理，若函数在某点不可导，则要么切线不存在（斜率为无穷也算不存在）；要么只在从点的某一侧靠近点时切线才存在；要么从点的两侧靠近点时切线都存在但不相同.*

例 3.1 若 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点，则在 x_0 处显然不可导. 不止可去间断点处可不导，在所有间断点处都不可导. 也就是说，可导是比连续更强的条件，即有

定理 3.2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

证明： 由于 $f'(x_0)$ 存在，即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 存在，记

$$\alpha(\Delta x):=\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x_0)$$

则 x_0 处的可导性意味着：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. 从而有

$$\Delta f=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \quad\Longrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\alpha(x-x_0)(x-x_0)$$

则当 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，$f(x)-f(x_0)\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. □

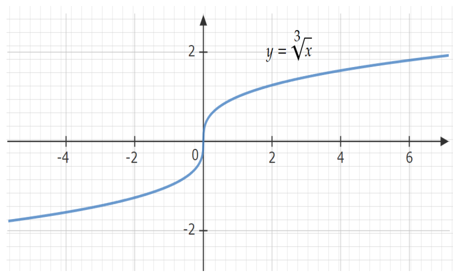
注记 3.2 *类似可证明：若函数在一点处左（右）可导，则函数在该点左（右）连续.*

可导必连续，但连续未必可导，下面就是一个典型例子.

例 3.2 考虑函数 $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$. 我们考察它在 $x=0$ 处是否可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

该极限显然是不存在的，故 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 0 处不可导，但它在 0 处是连续的.



下面也是一个连续但不可导的典型例子，其不可导的原因是左导数不等于右导数.

例 3.3 考虑函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 显然有

$$f'_{+}(0)=1\neq -1=f'_{-}(0)$$

故 $f'(0)$ 不存在，即不可导. 但 $f(x)$ 显然在 $x=0$ 处连续.

例 3.4 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 首先，当 $\Delta x\leq 0$ 时，由于 $f(\Delta)=0$，故

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$$

而当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0^+$ 时，上式无极限，故右导数 $f'_{+}(0)$ 不存在. 所以 $f(x)$ 在 0 处不可导.

例 3.4′ 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 左导数仍是

0，但此时，当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}0$$

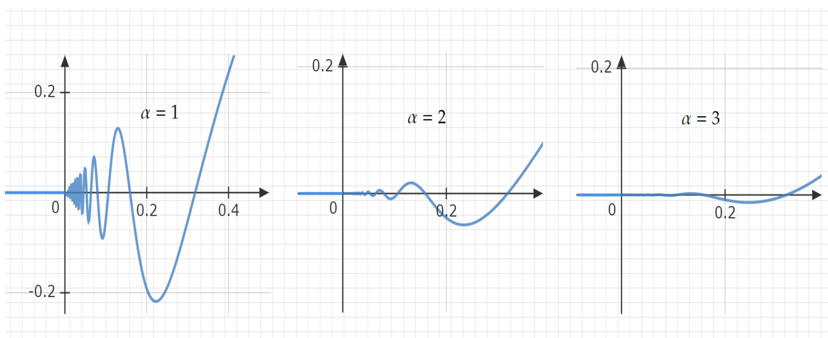
从而右导数 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$，故函数在 $x=0$ 处可导.

例 3.4″ 更一般地，考虑 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 显然，若 $\alpha<0$ 时，函数在 0 处不连续，故不可导. $\alpha>0$ 时函数连续，此时，若 $\alpha\le 1$ ，右导数 $f'_+(0)$ 不存在，故不可导；若 $\alpha>1$ ，右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

故函数在 $x=0$ 处可导.

注记 3.3 从图形上来看，当 $\alpha\le 1$ 时，曲线在 $x=0$ 的右侧振荡剧烈，导致不可导；但当 $\alpha>1$ 时，因子 x^α 可有效抵消 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0^+$ 时产生的振荡，从而导致函数可导. 且 $\alpha>1$ 越大，抵消振荡的效果越好.



例 3.5 试确定 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x+1, & x\le 0\\ ae^x+b, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

解： 首先 $f(x)$ 须在 $x=0$ 处连续. 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin 2x+1)=1$；又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ae^x+b)=a+b$，且 $f(0)=1$. 故 $a+b=1$. 另一方面

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin(2\Delta x)}{\Delta x}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{ae^{\Delta x}+b-1}{\Delta x}\overset{a+b=1}{=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a$$

可导要求：$f'_+(0)=f'_-(0)$，从而 $a=2,b=-1$.

初等函数的导数——基本导数公式

我们知道初等函数在其定义域内都是连续的, 下面将表明初等函数在其定义域内也是可导的.

例 3.6 在上节中（*c.f.* 例 *2.1*）已表明对自然数 $n>0$,（$(x^n)'=nx^{n-1}$. 而当 $n=0$ 时，$x^n=1$ 是常数，故其导数为 0. 由此，根据导数的四则运算法则（*c.f.* 定理 *2.2*)，我们知道多项式函数及有理函数的导数计算. 特别地，对 $\frac{1}{x}$，有

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$$

即上面的公式对 $n=-1$ 也成立. 更一般地，当 $n>1$ 时

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' \xlongequal{\text{求导除法规则}} \frac{0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$$

即对所有的自然数 n，都成立 $(x^n)'=nx^{n-1}$. 下证 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 成立，此即幂函数的求导公式.

证明： 设 $\alpha\neq 0$（$\alpha=0$ 时结论显然）. 当 $x\neq 0$ 时，给定增量 $\Delta x\to 0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{x\frac{\Delta x}{x}}=$$

$$\xlongequal{\text{利用 }(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t\,(t\to 0)}\alpha x^{\alpha-1}$$

当 $x=0$ 时,如 $\alpha>0$, 则有 $(x^\alpha)'|_{x=0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & \alpha>1\\ 1, & \alpha=1\\ \text{不存在}, & 0<\alpha<1\end{cases}$

故公式对 $x=0$ 时也成立.

当 $x<0$ 时，令 $u=-x>0$ 则 $x^\alpha=(-1)^\alpha u^\alpha$. 从而

$$(x^\alpha)'=\frac{dx^\alpha}{dx}=\frac{dx^\alpha}{du}\frac{du}{dx}=(-1)^\alpha\frac{du^\alpha}{du}(-1)=(-1)^{\alpha+1}\alpha u^{\alpha-1}=$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\alpha(-1)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}=(-1)^{2\alpha}\alpha x^{\alpha-1}=\alpha x^{\alpha-1}\quad\square$$

例 3.7 对指数函数 $a^x\,(a>0)$，我们用定义来计算其导函数.

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a$$

特别地，有 $(e^x)' = e^x$（e^x 是唯一的其导数等于其自身的函数）.

例 3.8 对指数函数的反函数 $\log_a x\,(x>0)$，为计算其导数，利用换底公式

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

只需计算 $\ln x$ 的导数，即计算极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

从而得到公式

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}\quad \text{特别地}\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

注记 3.4 函数 $\ln|x|\,(x\neq 0)$ 是分段函数，$x>0$ 时为 $\ln x$，其导数已知；$x<0$ 时，$\ln|x| = \ln(-x)$，利用复合函数求导法则，有

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{d\ln(-x)}{d(-x)}\frac{d(-x)}{dx} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

故更一般地，我们有

$$\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a}\qquad x\neq 0$$

有必要探讨一般的反函数的求导法则. 将导数理解为微商 $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$，则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数即是变量 x 对变量 y 之导数，写成微商的形式便是

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \xlongequal{\text{以 } y \text{ 表达}} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

定理 3.3（反函数求导公式）设函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调（故反函数存在），且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 α,β 上可导（其中 $\alpha = \min\{f(a+), f(b-)\}$, $\beta = \max\{f(a+), f(b-)\}$）且有

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}\quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

证明: 对任意点 $x \in (a,b)$，由于 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上可导且 $f'(x)\neq 0$，有

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

故作为 Δx 时的无穷小，下面的等价关系也成立

$$\Delta x \sim \frac{1}{f'(x)}\Delta y$$

而这意味着 $x=f^{-1}(y)$ 在 y 处可导且其导数

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \xlongequal{\text{作为 } y \text{ 的函数}} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \square$$

注记 3.5（上定理的另证） 利用复合函数求导法则（*c.f.* 定理 *2.4*），将关系 $x=f^{-1}(f(x))$ 的两边对 x 求导，得到

$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(f^{-1}(y)\right)' f'(x) \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \qquad \square$$

我们利用上定理重新推导 $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. 为此，记 $y=a^x$，则 $x=\log_a y$，由反函数求导公式，得

$$(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y\ln a}$$

例 3.9 对 $y=\sin x$ 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + (\cos x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&\xlongequal{\cos\Delta x - 1 \sim -\frac{(\Delta x)^2}{2};\, \sin\Delta x\sim\Delta x} \cos x
\end{aligned}$$

即 $(\sin x)' = \cos x$. 对 $y=\cos x$，由于 $y=\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，记 $u=\frac{\pi}{2}-x$，然后利用复合函数的求导规则，得

$$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{d\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{dx} = \frac{d\sin u}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \times (-1) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$$

即得 $(\cos x)' = -\sin x$. 对 $y=\tan x$，用求导四则运算法则，可得

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x$，同理：$(\cot x)' = -\csc^2 x$；$(\sec x)' = \sec x \tan x$；$(\csc x)' = \csc x \cot x$.

例 3.10 对反三角函数 $y=\arcsin x$，我们利用*定理 3.3* 求其导数.

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\sin y} \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

为化简计算 $\cos(\arcsin x)$，注意到，由于 $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$，故 $\cos(\arcsin x) \ge 0$，从而

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

由此得到

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同理可证 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 此外，对 $y=\arctan x$，有

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\tan y} \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

同理可证 $(arccot\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

例 3.11 由于双曲函数由 $e^{\pm x}$ 的四则运算定义，故利用求导的四则运算法则，非常容易计算其导数如下

$$(\sinh x)' = \cosh x; \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

记 $y = arcsinh\, x$ 是 $y=\sinh x$ 的反函数，其导数的计算如下

$$(arcsinh\, x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\sinh y} \frac{1}{\cosh y} \xlongequal[\cosh y>0]{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 arcsinh\, x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

当然，我们也可以先从 $y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 中反解出 x，得到

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$$

即 $y=arcsinh\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 从而

$$(arcsinh\,x)'=\frac{d\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{dx}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

同理可证 $y=\cosh x$ 的导数公式 $(arccosh\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

由此可看出初等函数在其定义域内是可导的，从而也是可微的. 对上面基本的初等函数类，它们的导数公式是计算一般初等函数导数的基础，故需记忆.

基本导数（微分）公式表

$(C)'=0$	$dC=0dx=0$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$dx^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}dx$
$(a^x)'=(\ln a)a^x$	$da^x=(\ln a)a^x dx$
特别地 $(e^x)'=e^x$	特别地 $de^x=e^x dx$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$d\log_a x=\frac{dx}{x\ln a}$
特别地 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	特别地 $d\ln x=\frac{dx}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$d\sin x=\cos x dx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d\cos x=-\sin x dx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d\tan x=\sec^2 x dx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d\cot x=-\csc^2 x dx$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d\arcsin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d\arccos x=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$d\arctan x=\frac{dx}{1+x^2}$
$(arccot\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$darccot\,x=\frac{-dx}{1+x^2}$
$(\sinh x)'=\cosh x$	$d\sinh x=\cosh x dx$
$(\cosh x)'=\sinh x$	$d\cosh x=\sinh x dx$
$(arcsinh\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$darcsinh\,x=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
$(arccosh\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$darccosh\,x=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

对数求导法： 对某些形式的函数，比如幂指形函数：$y = f(x) = u(x)^{v(x)}$，为求其导数，先对其两边取对数：$\ln f(x) = v(x)\ln u(x)$. 然后两边对 x 求导，并利用复合函数求导法则，可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

注记 3.6 上计算等价于先将 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 写成如下形式

$$f(x) = e^{\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)} = e^{v(x)\ln u(x)}$$

然后利用复合函数的求导法则，得

$$f'(x) = e^{v(x)\ln u(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

注记 3.7 也可对 $\ln f(x) = v(x)\ln u(x)$ 两边求微分，得

$$d\ln f(x) = d\left(v(x)\ln u(x)\right)$$

并利用**一阶微分的形式不变性**，将 $f(x), v(x), \ln u(x)$ 视为中间变量，得

$$\frac{df(x)}{f(x)} = v(x)d\ln u(x) + \ln u(x)dv(x)$$

$$= v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}dx + \left(v'(x)\ln u(x)\right)dx$$

即有

$$df(x) = \underbrace{u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)}_{f'(x)}dx$$

实践中，不必套用上公式，领会其精神，自可灵活处理.

例 3.12 求函数 $y = (\sin x)^{\cos x}$ 的导函数.

解： 两边取对数，得 $\ln y = \cos x\ln(\sin x)$，然后两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = -\sin x\ln(\sin x) + \cos x\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln(\sin x)\right)$$

例 3.13 计算 $y=\frac{e^{2x}\sin^3 x}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}$ 的导函数.

解: 对该函数，直接利用求导运算法则计算是繁琐，且易出错的. 虽然函数的形式并非 $u(x)^{v(x)}$，但对数求导的精髓在于利用对数将函数结构转换为较易处理的形式. 而对数可以将乘除转变为加减，故此处也可用该方法来简化计算. 两边取对数，得

$$\ln y=\ln e^{2x}+\ln\sin^3 x-\ln\sqrt[3]{2x-1}-\ln(4x+3)^2$$

$$=2x+3\ln(\sin x)-\frac{1}{3}\ln(2x-1)-2\ln(4x+3)$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=2+3\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2}{3(2x-1)}-\frac{8}{4x+3}\quad\Longrightarrow$$

$$y'=\frac{e^{2x}\sin^3 x}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}\left(2+3\cot x-\frac{2}{3(2x-1)}-\frac{8}{4x+3}\right)$$

例 3.14 对函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$，计算其微分.

解: 可以先计算 y'，从而 $dy=y'dx$. 或利用一阶微分的形式不变性，直接计算

$$dy=d\ln\sin\sqrt{x}=\frac{d\sin\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}d\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx\quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

例 3.15 求 $y=\arctan\frac{\sin x}{e^x-1}$ 的微分.

解: 利用一阶微分的形式不变性，有

$$dy=d\arctan\frac{\sin x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}d\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}\frac{(e^x-1)d\sin x-\sin xd(e^x-1)}{(e^x-1)^2}=$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}\frac{(e^x-1)\cos x-\sin xe^x}{(e^x-1)^2}dx$$

$$=\frac{(e^x-1)\cos x-e^x\sin x}{(e^x-1)^2+\sin^2 x}dx$$

例 3.16 设 $x=a\arccos\frac{a-y}{a}\,(0<y<2a)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=\frac{a\pi}{3}}$.

解: 当 $x = \frac{a\pi}{3}$ 时，$y = \frac{a}{2}$，因为

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{a-y}{a}\right)^2}}\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

由反函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{a\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}\Big|_{y=\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 3.17 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数，并判断导函数的连续性.

解: 当 $x \neq 0$ 时，函数是初等函数，故可导，且其导函数为

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

当 $x = 0$ 时，*例 3.4′* 表明 $f'(0) = 0$，故导函数为

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时，$f'(x)$ 是初等函数，故连续；但当 $x = 0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在，故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

上例表明，一个连续函数的导函数未必连续.

高阶导数的计算: 对一些简单函数，计算 $y^{(n)}$ 导数时，常计算其前几阶导函数，然后归纳得到一般情形. 有时，若函数可看成是两个函数的乘积，则可利用高阶导数的莱布尼茨公式来求其高阶导数.

例 3.18 对 $y = x^\alpha$，有

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

特别地，对 $y = x^n$，$y^{(n)} = n!$，$y^{(k)} = 0\,(k > n)$.

例 3.19 对 $y = e^x$，有

$$(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = \cdots = (e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

例 3.20 对函数 $y=\sin x$，因为

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Longrightarrow$$

$$(\sin x)''=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

利用数学归纳法，易证下等式

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

同理，对 $y=\cos x$，有

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

例 3.21 对函数 $y=\ln(1+x)$，有

$$y'=\frac{1}{1+x},\quad y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y'''=\frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)}=-\frac{3!}{(1+x)^4},\quad \cdots\cdots\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例 3.22 对函数 $y=\frac{1}{x^2+x-2}$，将其写作

$$y=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

为求 $y^{(n)}$，只需求 $\frac{1}{x-1}$ 和 $\frac{1}{x+2}$ 的 n 次导函数. 而 $\frac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}$，故可在例 *3.18* 中令 $\alpha=-1$，得到

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=-1(-2)(-3)\cdots(-n)(x-1)^{-1-n}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

同理，可得 $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 由此可得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

例 3.23 设 $y=x^3\cos x$，计算 $y^{(200)}$.

解： 利用莱布尼茨公式（*c.f.* 定理 *2.3*），可得

$$y^{(200)}=\sum_{k=0}^{200}\binom{200}{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(200-k)}=\sum_{k=0}^{2}\binom{200}{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(200-k)}$$

$$=x^2(\cos x)^{(200)}+400x(\cos x)^{199}+2\binom{200}{2}(\cos x)^{(198)}$$

$$=x^2\cos\left(x+\frac{200\pi}{2}\right)+400x\cos\left(x+\frac{199\pi}{2}\right)+200\times 199\cos\left(x+\frac{198\pi}{2}\right)$$

$$=x^2\cos x+400x\sin x-39800\cos x$$

例 3.24 设 $y=\arcsin x$，计算 $y^{(n)}(0)$.

解： 首先，直接计算可得

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''(x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

直接计算更高阶导函数的计算量比较大，但注意到 y,y',y'' 之间有如下关系（即 y 满足的二阶微分方程）

$$(1-x^2)y''=xy'$$

为得到更高阶导数之间的递归关系，上式两边同时对 x 求 n 阶导，并利用莱布尼茨公式，得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x^2)^{(k)}y^{(n-k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^{(k)}y^{(n-k+1)}\quad\Longrightarrow$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$$

$$\Longrightarrow\quad(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

令 $x=0$，得如下关系

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

由于 $y^{(0)}(0)=y(0)=0,y'(0)=1$，结合上递归关系，可知当 $n=2k$ 时，有 $y^{(2k)}(0)=y^{(0)}(0)=0$；当 $n=2k+1$ 时，有

$$y^{(2k+1)}(0)=(2k-1)^2y^{(2k-1)}(0)=(2k-1)^2(2k-3)^2y^{(2k-3)}(0)=\cdots=$$

$$=(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots3^2\cdot1^2y'(0)=\underbrace{\left((2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1\right)^2}_{\left((2k-1)!!\right)^2}$$

常用函数的泰勒多项式逼近

先回忆定理 *2.5* 的内容：若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近进行 n 阶近似，即 $f(x)=P_n(x)+o\left(x-x_0\right)^n$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

例 3.25 对 $f(x)=e^x$，我们已知 $f^{(n)}(x)=e^x$，故 $f^{(n)}(0)=e^0=1$. 所以，e^x 的 n-阶带皮亚诺余项的马克劳林多项式公式为

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)}$$

例 3.26 对 $f(x)=\sin x$，我们已知 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0,1,2,\cdots$，由此可得

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad f^{(2k-1)}(0)=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=(-1)^{k-1},\ k=1,2,\cdots$$

从而可得 $\sin x$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)}$$

同理可知 $\cos x$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)}$$

例 3.27 对 $f(x)=\ln(1+x)$，已知（*c.f.* 例 *3.21*）$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$，从而 $f^{(k)}(0)=(-1)^{(k-1)}(k-1)!$, $k=1,2,\cdots$ 由此可知 $\ln(1+x)$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)}$$

例 3.28 对 $f(x)=(1+x)^\alpha$，由例 *3.18* 可知其 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

特别地，对 $\alpha=-1$，有

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)}$$

利用变量替换 $x\to -x$，得

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}+o(x^n)}$$

注记 3.7 利用等比数列求合公式，有

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^n}{1-x}$$

故 $\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x}\sim x^{n+1}=o(x^n)$$

对 $\alpha=\frac{1}{2}$，有

$$\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)}$$

对 $\alpha=-\frac{1}{2}$，有

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)}$$

例 3.29 对 $y=\arcsin x$，例 *3.24* 表明 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}((2k-1)!!)^2 & n=2k+1\\ 0 & n=2k\end{cases}$ 故

$$\boxed{\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})}$$

例 3.30 对 $y=\arctan x$，由于 $y'=\frac{1}{1+x^2}$, $y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$，即 $y''=-2x(y')^2$. 两边同时求 n 阶导数，得

$$y^{(n+2)}=-2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(y'^2)^{(n-k)}=-2x\left(y'^2\right)^{(n)}-2n\left(y'^2\right)^{(n-1)}$$

令 $x=0$，得到如下关系

$$y^{(n+2)}(0)=-2n\left((y')^2\right)^{(n-1)}(0)$$

由此可得 $y'(0)=1$，$y''(0)=0$，$y'''(0)=-2\cdot 2y'^2(0)=-2!$

$$y^{(4)}(0)=-4((y')^2)'(0)=-4\left(2y'y''\right)(0)=0$$

$$y^{(5)}(0)=-6((y')^2)''(0)=-6\left(2y'y''\right)'=-6\left(2y''^2+2y'y'''\right)(0)$$
$$=-12y'(0)y'''(0)=24=4!$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{2k}(0)=0,\ y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)! \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})}$$

若计算一函数的泰勒多项式较易，则可利用它来计算函数的高阶导数.

例 3.31 若 $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解： 在 $\frac{1}{1-x}$ 的马克劳林多项式中做变量替换 $x\to x^4$，得

$$\frac{1}{1+x^4}=1+(-x^4)+(-x^4)^2+\cdots+(-x^4)^k+o\left((x^4)^k\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^{4l}+o(x^{4l}) \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{1+x^4}=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^{4l+1}+o(x^{4k+1})$$

$$=\quad\sum_{l=0}^{k}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l+o(x^{4k+1})$$

对比系数，可知

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^k(4k+1)! & n=4k+1\\ 0, & n\neq 4k+1\end{cases}$$

唯一性定理： 上面几例中计算的合理性是由于一个函数的泰勒多项式是**唯一的**，也就是说，不论采用何种方式，只要能写出下关系

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)\ (x\to x_0)$$

则它不是别的，一定是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒多项式近似. 换言之，其系数 c_i 是由函数 $f(x)$ 唯一决定的.

证明： 显然，若 $f(x)$ 给出如下，则有

$$c_0 = \lim_{x\to x_0} f(x), \quad c_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-c_0}{x-x_0}, \quad \cdots$$

$$c_n = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1})}{(x-x_0)^n} \quad \square$$

例 3.32 利用唯一性定理，可更便捷地计算 $f(x)=\arcsin x$ 的马克劳林多项式如下，对 f 求导，然后利用 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开公式，得

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$\text{若}\quad f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{2k}x^{2k}+\cdots+c_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\text{则必有}\quad f'(x)=c_1+2c_2x+\cdots+kc_kx^{k-1}+\cdots+(2n+1)c_{2n+1}x^{2n}+o(x^{2n})$$

又根据唯一性定理，知 $f'(x)$ 中非零的系数为 $c_{2k+1}\,(k=0,1,\cdots,n)$

$$(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} \quad\Longrightarrow\quad c_{2k+1}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}$$

从而相对比较轻易地得到了之前用比较复杂的方法得到的

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

例 3.33 类似于上例中的做法，我们可以比较轻松地计算例 *3.30* 中计算出的 $y=\arctan x$ 的马克劳林多项式. 注意到 $y'=\frac{1}{1+x^2}$，但

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})$$

$$\text{设}\quad y=\arctan x=c_0+c_1x+c_2x^2+c_kx^k+\cdots+c_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\text{则}\quad y'=\frac{1}{1+x^2}=c_1+2c_2x+\cdots+(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}+\cdots+(2n+1)c_{2n+1}x^{2n}+o(x^{2n})$$

故非零的系数为 $c_{2k+1}\,(k=0,1,\cdots,n)$

$$(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}=(-1)^kx^{2k} \quad\Longrightarrow\quad c_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

从而重新推出

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

例 3.34 计算 $f(x) = \sqrt[3]{2-\cos x}$ 的马克劳林公式直到 x^5 项.

解法 I: $f(x) = \sqrt[3]{1+(1-\cos x)} =$

$$1 + \frac{1-\cos x}{3} - \frac{(1-\cos x)^2}{9} + o((1-\cos x)^3) \xlongequal{1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{36} + o(x^5)\right) = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

解法 II: 由于 f 是偶函数，故所求公式的形式为

$$f(x) = 1 + ax^2 + bx^4 + o(x^5)$$

为确定 a, b，注意到 f 满足 $f(x)^3 = 2 - \cos x$，得到

$$(1 + ax^2 + bx^4 + o(x^5))^3 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\Longrightarrow \quad 3a = \frac{1}{2}, \quad 2b + 3a^2 = -\frac{1}{24} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{24}.$$

例 3.34 计算 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$ 的马克劳林公式直到 x^4 项.

解: $x \neq 0$ 时，$f(x) = e^{\ln f(x)}$，且 $\ln f(x) =$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}_{=:y}$$

$$\Longrightarrow \quad f = e^{1+y} = ee^y = e\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}\right) + o(x^4)$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4) \quad y^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{36}x^4 + o(x^4)$$

$$y^3 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \quad y^4 = \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4\right) + o(x^4)$$

4 洛必达法则，利用泰勒多项式求极限

有了导数“意象”，我们可以重审下面两个基本极限的计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=(\sin 0)'=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x^2-0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}}{\frac{x^2-0^2}{x-0}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x-0}}\overset{???}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

有意思，我们将该模式应用于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$ 试试（注意，一阶无穷小等价替换 $\sin x\sim x$ 是不解决问题的）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}=(x-\sin x)'(0)=1-\cos 0=0$$

再试一下稍微复杂一些的 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x^3-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}}{\frac{x^3-0^3}{x-0}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-0^3}{x-0}}\overset{???}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

$$\left(=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\frac{1}{6}\right)$$

注记 4.1 如果要用无穷小的替换来计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，则必须将分子 $x-\sin x$ 替换成一个三阶无穷小 $+$ 更高阶的无穷小才可以，为此，我们利用 $\sin x$ 的三阶泰勒多项式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}$$

启发： 对 $\frac{0}{0}$（即 $\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$）（不定）型极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$，由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，故

如有必要，可通过补充定义：$f(0)=g(0)=0$，使得 $f(x),g(x)$ 在 0 处连续. 则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\xlongequal{\text{如 } f'(a),g'(a) \text{ 存在，且 } g'(a)\neq 0}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

但若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=0$，则按上计算出的结果仍是 $\frac{0}{0}$ 型，但直觉和上面具体例子又似告诉我们按如下操作也会得到正确结果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\xlongequal[\text{只是直觉上可行！}]{f',g' \text{ 连续}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\xlongequal[\text{模式重复}]{\text{补充定义：} f'(a)=g'(a)=0}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{g'(x)-g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}}{\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}}=$$

$$\xlongequal{\text{如 } f''(a),g''(a) \text{ 存在，且 } g''(a)\neq 0}\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

但若 $\lim\limits_{x\to a}f''(x)=\lim\limits_{x\to a}g''(x)=0$，可继续操作下去，如果可以，利用三阶导数求极限，等等.

定理 4.1（洛必达法则（*L'Hospital rule*））设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 再 x_0 的某去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$;
2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在该去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数，或为 ∞）.

则有 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

证明： 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=0$ 时，我们发现根本的问题是：若用

$$\Delta f=f(x)-f(a)=f'(a)\Delta x+o(\Delta x);\quad \Delta g=g(x)-g(a)=g'(a)\Delta x+o(\Delta x)$$

来做近似稍显“粗糙”，以至导出 $\frac{0}{0}$ 的结论，所以，为了能够证明洛必达法则，我们须对 Δf 和 Δg 做更精确可控（$o(\Delta x)$ 还是太不确定了！）的估计. 后面的柯西中值

定理表明，此时 $\exists\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{\Delta f}{\Delta g}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad (\text{这是更可控的估计，没有余项，但 }\xi\text{ 不确定})$$

由此

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\xlongequal{x\to a\Leftrightarrow\xi\to a}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\square$$

注记 4.1 对 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$，当 $f'(a)=g'(b)=0$，如 f,g 在 a 附近具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ 存在，则极限值应是 $\frac{f''(a)}{g''(a)}$. 从泰勒公式的角度而言，这是显然的，因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}{g''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)+\frac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}{g''(a)+\frac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}=\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

一般地，可证

命题 4.1 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 处的导数满足:

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0;\quad g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0$$

但 $f^{(n)}(a)\neq 0$, $g^{(n)}(a)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

证明: f 和 g 的泰勒多项式逼近为

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n);\quad g(x)=\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\quad\square$$

注记 4.2 定理 *4.1* 中将 $x\to a$ 改成 $x\to a^-$，$x\to a^+$，或 $x\to\infty$ 等都不影响定理成立. 定理 *4.1* 也适用于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 即若函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的某去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数，或为 ∞）

$$\text{则}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

同样地，将 $x\to a$ 改成 $x\to a^-$，$x\to a^+$，或 $x\to\infty$ 等不影响上结论成立.

注记 4.3 利用洛必达法则可证明带皮亚诺余项的泰勒公式：设 f 在 x_0 处存在 $f^{(n)}(x_0)$，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\cdots+\quad\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0)$$

证明： 记 $R_n=f(x)-P_n(x)=$

$$f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

它满足下面 $n+1$ 个条件

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{导数定义}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0.\quad\square$$

例 4.1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\frac{0}{0}\text{型，用洛必达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)(-\frac{1}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x(1+x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)}{x^2+1}=1$$

例 4.2

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{ 型，用洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}\sec^2 x}{2\tan^2 x\sec^2 x}\ (\text{更复杂了，得先整理原式})$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}e^{\tan x}\lim_{x\to0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}$$

如果选择此时用洛必达法则，计算还是比较复杂，所以我们不要拘泥于这一种方法，而是结合之前所学，各种方法灵活使用，“组合出拳”，以最高效解决问题为本.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}\xlongequal[e^t-1\sim t\ (t\to0)]{\text{用 }\tan x\sim x;}\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

对初学者来说，这其实是一步“险棋”，因不能确定等价替换是否恰当，因为不能确定等价替换是否恰当，只能通过继续求极限，如能求出来就说明是恰当的. 而此时的极限形式已被大大简化，故可直接使用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\cos^2 x}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}e^{\tan x}\lim_{x\to0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}=-\frac{1}{3}$$

当然，有了泰勒多项式，我们可用下方法计算上面最后一个极限，即

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}\xlongequal{\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\lim_{x\to0}\frac{x+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

“事后诸葛亮”，我们知道上面那步“险棋”是走对了，下面用泰勒多项式来分析其合理性之根由. 对 $\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}$，如果将分母上的 $\tan^3 x$ 用 x^3 给替换掉，那为了保证极限值不改变，分子上的无穷小须能写成：“关于 x 的三阶无穷小 + 更高阶无穷小的形式”. 事实上，即便利用一阶的近似：$e^{x-\tan x}-1\sim x-\tan x$，也能满足我们的要求：

$$e^{x-\tan x}-1\sim x-\tan x+o(x-\tan x)$$

$$=x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+o\left(x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)$$

$$=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+o\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=\underbrace{-\frac{x^3}{3}}_{\text{三阶无穷小}}+\underbrace{o(x^3)}_{\text{更高阶无穷小}}$$

例 4.3 下面这个 $\frac{0}{0}$ 型极限，得用洛必达法则四次才能解决

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-3xe^{-\frac{x^2}{2}}+x^3e^{-\frac{x^2}{2}}}{24x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-3e^{-\frac{x^2}{2}}+6x^2e^{-\frac{x^2}{2}}-x^4e^{-\frac{x^2}{2}}}{24}=-\frac{1}{12}$$

如用无穷小量的等价替换方法，由于分母 x^4 是 4 阶，故分子得写成“4 阶 + 更高阶”. 如没有泰勒多项式这个工具，则操作如下

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=(\cos x-1)-\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)$$

$$\sim\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)=o(x^2)-o\left(-\frac{x^2}{2}\right)=o(x^2)$$

遗憾没能得到有效结果，但莫悻悻然，有泰勒公式这一“利器”，自能泰然应对.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4);\quad e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$$

$$\Longrightarrow\quad\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

例 4.4 对下面的例子，我们先通过恒等变换将极限简化，然后再使用洛必达法则或其它. 也就是说，虽然“招数”多了，但一定得配合基本功，否则反会被招数给束缚，变成“花拳绣腿”的施展.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left(\ln(1+x)-x\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\left(\ln(1+x)-x\right)}\xlongequal[\tan x\sim x;\,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}]{\ln(1+x)-x\sim-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

例 4.5 下面这个极限，如果直解用洛必达法则，得用三次，计算量较大，然若一开始就合理使用无穷小量等价替换，可是计算简化.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^4}=\frac{1}{2}$$

例 4.6 下面是个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，可用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\arctan x-\ln(1+x^2)}{x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\arctan x=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

对一些 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，1^∞，0^0 不定型极限，可转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型计算.

例 4.7 该例中，将 $0\cdot\infty$ 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

例 4.8 该例中，将 $\infty-\infty$ 型转化为 $\frac{0}{0}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{ 型，用洛必达法则}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{1+\frac{x}{\sin x}\cos x}=0$$

例 4.9 该例中，将 ∞^0 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x}\xlongequal{\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

例 4.10 该例中，将 1^∞ 型转化为 $\frac{0}{0}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例 4.11 该例中，将 0^0 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\xlongequal{\text{例 4.7}}e^0=1$$

再次强调，使用洛必达法则之前必须验证使用条件，否则很容易导致错误的发生，比如下面几例.

例 4.12 对极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$，它是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的. 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

如果由此认为极限不存在便错了，因为显然极限为零.

例 4.13 对极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$，它不是 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的. 它的极限显然是 2，但若忽视条件贸然使用洛必达法则，那么会得到如下错误

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0$$

例 4.14 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$. 但如用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\ (\text{极限不存在})$$

最后，我们再算几则例子，给大家演示下如何利用泰勒展开这一利器来破解一些棘手的求极限问题.

例 4.15 对极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$，用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+\cos(\sin x)\sin 2x+\cos(\sin x)\sin x\cos x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}$$

分子上的函数的导数是：$\cos(\sin x)\cos^4 x-3\sin(\sin x)\cos^3 x\sin x-$

$$-\sin(\sin x)\cos x\sin 2x+2\cos(\sin x)\cos 2x-\sin(\cos x)\sin x\cos^2 x+$$

$$+\cos(\sin x)\cos 2x+\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x-\cos x$$

它在 $x=0$ 处的取值是 $1-3\times 0-0+2-0+1+1-0-1=4$，故原极限等于 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. 该解法实繁琐，但用泰勒展开就能化繁为简，只需将分子展开到 x^4 的项.

$$\cos(\sin x)-\cos x=1-\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^4}{4!}-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+o(x^5)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + o(x^5) = \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

从而

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

例 4.16 对极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1)}{x^4}$. 直接利用洛必达法则求解将是十分繁琐的. 我们尝试将分子展开到 x^4 的项为止.

$$\ln(1 + \sin^2 x) = \sin^2 x - \frac{(\sin^2 x)^2}{2} + o(\sin^4 x)$$

如贸然用 $\sin x \sim x$ 代入将得不到 4 阶无穷小，至少得用下替换才行

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$$

从而 $\ln(1 + \sin^2 x) =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \frac{1}{2}\binom{4}{4}x^4 + o(x^4) + o(x^4)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \underline{x^2 - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)}$$

$$\sqrt[3]{2 - \cos x} = \sqrt[3]{1 + (1 - \cos x)} = 1 + \frac{1 - \cos x}{3} - \frac{(1 - \cos x)^2}{9} + o((1 - \cos x)^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) - \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4) = \underline{1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$\Longrightarrow \quad 原极限 = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \frac{5x^4}{6}\right) - 6\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)}{x^4} = \frac{-7}{12}$$

注记 4.4 有了求极限的洛必达法则，我们先前推导二阶和三阶泰勒多项式的计算可大幅化简. 设 $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$（其中 A, B 为待定常数），则 $f(x) - g(x) = o\left((x - x_0)^2\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{x - x_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = f'(x_0)$$

为确定常数 B 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

用洛必达法则计算极限，有

$$\begin{aligned}
\text{上极限} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2B(x - x_0)}{2(x - x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2B}{2} \\
= \frac{f''(x_0) - 2B}{2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad B = \frac{f''(x_0)}{2}
\end{aligned}$$

为得到三阶近似，我们对近似 $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ 添加一 3 阶“微扰项” $C(x - x_0)^3$，然后要求

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - C(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} = 0$$

用洛必达法则计算极限，有

$$\begin{aligned}
\text{上极限} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - 3C(x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - 3 \cdot 2\,C(x - x_0)}{3 \cdot 2(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x) - 3!C}{3!} \\
&= \frac{f'''(x_0) - 3!C}{3!} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{f'''(x_0)}{3!}
\end{aligned}$$

不难推广到一般 n 阶近似的情形.

5 隐函数和参数方程的求导

我们先考察一个简单的例子. 设变量 x 和 y 由下方程关联（$a,b>0$）.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.1)$$

通过选取平方根的一个分支（正或负的），可将 y 表示成 x 的函数. 比如

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

其导数可直接计算如下

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)$$

另一方面，如果在方程 (5.1) 两边同时对 x 求导，则得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{2y}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)$$

跟直接计算所得结果完全一样. 这种计算方法当然不是新的知识，我们先前就屡有使用. 这里强调的是：函数 $y=y(x)$ 可看成是由关系（方程）(5.1) 给出的，也就是说它其实是由方程决定的一个隐函数，所以这里用到的这种求导方式也叫*隐函数求导法*. 尤其是当没法从关系方程直接解出明确的表达式 $y=y(x)$ 时，这种方法就成必要了.

隐函数求导法： *设函数 $y=y(x)$ 是由关系（方程）$F(x,y)=0$ 所界定的，即 $y=y(x)$ 满足 $F(x,y(x))\equiv 0$ 为求 $\frac{dy}{dx}$，在该方程两边同时对 x 求导，然后由之解出 $\frac{dy}{dx}$ 即可.*

例 5.1 我们知道开普勒（*Kepler*）方程 $y=x+\epsilon\sin y\,(\epsilon\in(0,1))$ 确定了 y 和 x 之间的函数关系 $y=y(x)$，为计算其导函数，我们将方程两边对 x 求导，得

$$y'=1+\epsilon\cos y\cdot y' \quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{1}{1-\epsilon\cos y}$$

例 5.2 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\cos(xy)-y^2=0$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解： 方程两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\frac{d(xy)}{dx}-\sin(xy)\frac{d(xy)}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0 \quad\Longrightarrow$$

$$e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-\sin(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(xe^{xy}-x\sin(xy)-2y\right)\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)-ye^{xy}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(\sin(xy)-e^{xy}\right)}{xe^{xy}-x\sin(xy)-2y}$$

也可利用一阶微分的形式不变性，在方程两边同时求微分，最后解出微商 $\frac{dy}{dx}$. 比如对上例，按此思路，有

$$de^{xy}+d\cos(xy)-2ydy \quad \Longrightarrow \quad e^{xy}d(xy)-\sin(xy)d(xy)-2ydy=0$$

$$\Longrightarrow \quad e^{xy}(xdy+ydx)-\sin(xy)(xdy+ydx)-2ydy=0$$

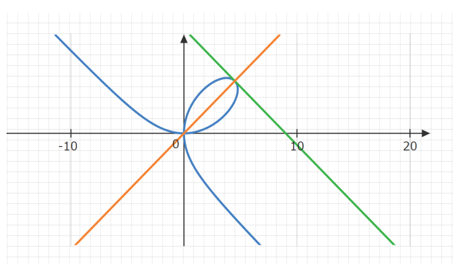
$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(\sin(xy)-e^{xy}\right)}{xe^{xy}-x\sin(xy)-2y}$$

例 5.3 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y^2=\cos\sqrt{x}$ 确定，为计算 y'，对该方程进行微分，得

$$d\sin y^2=d\cos\sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad \cos y^2 d(y^2)=-\sin\sqrt{x}d\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \quad 2y\cos y^2 dy=-\sin\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}y\cos y^2}$$

例 5.4 求笛卡尔（*Descartes*）叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 在点 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 处的切线和法线方程.



方程两边对 x 求导，得

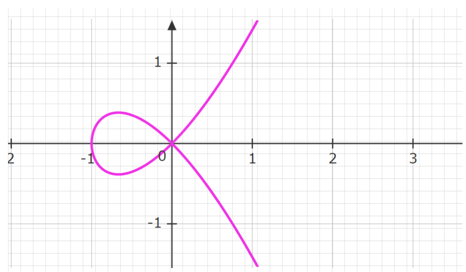
$$3x^2+3y^2y'=3ay+3axy' \quad \Longrightarrow \quad y'=\frac{ay-x^3}{y^2-ax}$$

当 $x=y=\frac{3a}{2}$ 时，$y'=-1$. 故曲线在点 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{1}\right)$ 的切线方程和法线方程分别是

$$\text{切线：}\quad y-\frac{3a}{2}=-1\left(x-\frac{3a}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad x+y=3a$$

$$\text{法线：}\quad y-\frac{3a}{2}=1\cdot\left(x-\frac{3a}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad x-y=0$$

例 5.5 方程 $x^3+x^2-y^2=0$ 定义的曲线常被称为节点曲线（*node curve*）

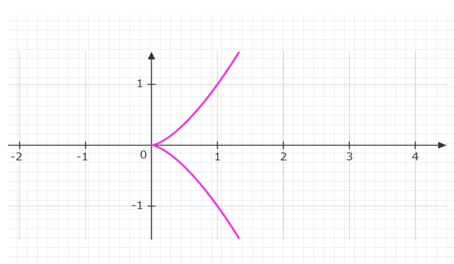


如果要求其上某点处的切线方程，我们对方程微分，然后整理出微商 $\frac{dy}{dx}$

$$3x^2dx+2xdx=2ydy\quad\Longrightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{x(3x+2)}{2y}$$

导数的表达式在 $(0,0)$ 处无意义，故节点曲线在原点处无良好定义的曲线，称 $(0,0)$ 是曲线的一个奇异点（*singularity*）．奇异性表现为在曲线在该点的相交导致有两个不同的切方向，从而不可导.

例 5.6 方程 $x^3-y^2=0$ 定义的曲线常被称为尖点曲线（*cusp curve*）.



如果要求其上某点处的切线方程，方程两边对 x 求导，得

$$3x^2 - 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{2y}$$

可见尖点曲线在 $(0,0)$ 处不存在切线.

隐函数的高阶导数： 思路同前，对定义隐函数的方程两边求导，直到产生我们需要阶数的导数，然后将其解出来（如果可能）. 以上面例 *5.6* 来说明，一方面已知 y'，故

$$y'' = \left(\frac{3x^2}{2y}\right)' = \frac{12xy - 6x^2y'}{4y^2} = \frac{12xy - \frac{9x^4}{y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

另一方面，在 $3x^2 - 2yy' = 0$ 两边再对 x 求导一次，得

$$6x - 2((y')^2 + yy'') = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{3x - (y')^2}{y}$$

$$\Longrightarrow \quad y'' = \frac{3x - \frac{9x^4}{4y^2}}{y} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

例 5.7 设 $y = y(x)$ 由下面方程决定

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

为计算 y''，我们先把方程两边微分

$$d\arctan\frac{y}{x} = d\ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow (x-y)dy = (x+y)dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

为求 y''，将方程 $(x-y)y' = (x+y)$ 两边对 x 求导，得

$$(1-y')y' + (x-y)y'' = 1 + y' \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{(1+y') - (1-y')y'}{x-y} = \frac{1+y'^2}{x-y}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}{x-y} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

参数方程求导：设函数由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in I$. 若可消去参数 t，从而得到一个联系 x,y 的方程 $F(x,y)=0$，则计算 $\frac{dy}{dx}$ 可按隐函数求导方法进行，但若无法消参，该如何计算 $\frac{dy}{dx}$?

注记 5.1 从“导数作为微商”的角度来看，答案似乎是显然的，因为作为微商（微分之商），有

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

当然，上面是“启发性”推导，须配以严格证明才行. 下从导数的定义出发分析.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

但问题是：首先要让 y 是 x 的函数才可以，但 $y=\psi(t)$ 又该如何成为 $x=\varphi(t)$ 的函数呢? 显然，如果在某点 (x,y) 处，t 可以写成 x 的函数，即反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在，那么在这点附近，y 以如下方式依赖于 x，即 y 之作为 x 的函数的方式

$$y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

由于反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 在 (x,y) 附近存在，所以在该点处

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

是存在的，从而 $\varphi'(t)\neq 0$.（我们知道，如果 $x=\varphi(t)$ 在 t 附近严格单调，则反函数存在，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 事实上，$\varphi'(t)\neq 0$ 是在一点附近反函数存在的必要条件）. 好，那么在此假设之下，y 对 x 的求导问题转化为复合函数的求导问题

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x+\Delta x))-\psi(\varphi^{-1}(x))}{\Delta x}=\frac{d\psi(\varphi^{-1}(x))}{dx}$$

根据复合函数求导的链式法则，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(\varphi^{-1}(x))}{dx}\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}\frac{d\psi(t)}{dt}\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

由此可见我们利用“微商”概念进行的启发性“似真（plausible）推理”在严格概念框架下也是正确的.

让我们回看下本小节开头对椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的求导问

题，通过方程两边对 x 求导的方式我们已得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$；另一方面，该椭圆有自然的参数方程描述

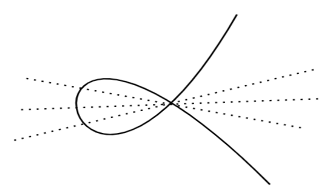
$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad 0\le\theta<2\pi$$

对 $\cos\theta\neq 0$ 的点 θ 处，利用参数方程的求导公式，可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\frac{x/a}{y/b}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

例 5.8 对例 *5.5* 中的“节点曲线” $x^3+x^2-y^2=0$，我们可利用过原点的旋转直线族给出其有理参数，即解方程组

$$\begin{cases} x^3+x^2-y^2=0 \\ y=tx \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$



通过隐函数求导法，我们已知 $\frac{dy}{dx}=\frac{x(3x+2)}{2y}$. 而利用参数方程求导法，则有

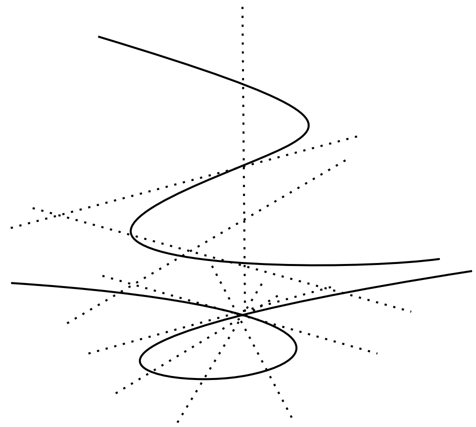
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-1}{2t} \quad \left(=\frac{(3t^2-1)(t^2-1)}{2t(t^2-1)}=\frac{x(3x+2)}{2y}\right)$$

注记 5.2 注意到节点曲线的奇点 $(0,0)$ 对应的参数是 $t=1$. 便有一个神奇的现象：按 $y'=x(3x+2)/y$，它在 $(0,0)$ 处是没有定义的，但当用上述参数方程后，我们发现它在对应的参数 $t=1$ 处竟然有意义了，即

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0,y=0}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=1}=\frac{3t^2-1}{2t}\Big|_{t=1}=\frac{2}{2}=1$$

这是什么缘故呢？我们没法在这里展开说明，只说结论：上面的参数化消解了结点曲线在原点的奇异性——参数 t 的几何意义是对应直线方向的“斜率”，所以以上参数化的本质是让过定点的直线族与曲线相交；而消解奇点的原因是斜率（作为直线上点的

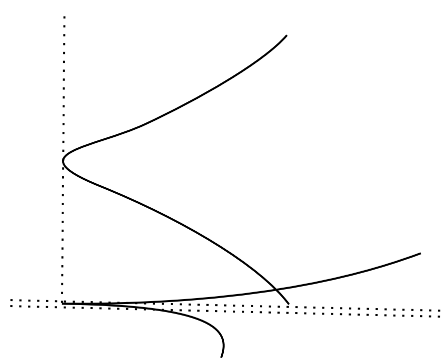
坐标比）可看成是另一维度（参数化这旋转直线族的射影空间）中的点. 即本质相当于把曲线“拉扯”到高一维空间中，从而使得相重合的切线方向（导致奇异性的产生）给自然分离了.



同样地，对例 *5.6* 中由 $x^3 = y^2$ 给出的尖点曲线，其自然参数化是 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 其奇异点 $(0,0)$ 对应参数 $t = 0$. 同上例，这里的神奇之处是，明明 $y'(x) = 3x^2/2y$ 在 $(0,0)$ 处无意义，但经过上参数化，它竟然有意义了，即

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=0} = \frac{3t^2}{2t}\Big|_{t=0} = \frac{3}{2}t\Big|_{t=0} = 0$$

本质上，这相当于将原点爆裂（*blow up*）为与 x-y 平面垂直的直线，直观上，则过原点的所有直线方向都将在其中分离，特别地，尖点曲线在原点处的两条重叠切线也将分离，从而将其奇点给消解了（*resolving the singularity*）.



例 5.9 对摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}$$

例 5.10 对例 *5.3* 中的笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$，已计算出 $y' = \frac{ay - x^3}{y^2 - ax}$. 另一方面，它的一个自然有理参数是 $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$. 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3at(2 - t^3)/(1 + t^3)^2}{3a(1 - 2t^3)/(1 + t^3)^2} = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3} \quad \text{（注意与 } a \text{ 无关！）}$$

问题： 验证用参数求导得出的结论和之前得到结论是完全一致的.

极坐标方程确定函数的求导： 设曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\, \beta]$ 给出，按照极坐标与笛卡尔坐标之间的变换规则可知该曲线有一自然的参数方程描述，即

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = r(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [\alpha,\, \beta]$$

然后由参数方程求导法，可知

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}}$$

例 5.11 已知心脏线的极坐标方程 $r = 2a(1 + \cos \theta)$，求其上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 的点处的切线方程.

解： 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，$r(\theta) = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) = 2a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且

$$x = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) a; \quad y = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

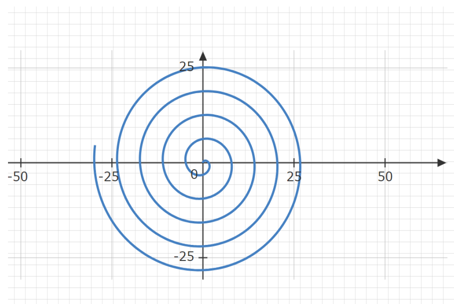
$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = \frac{-2a \sin \theta \sin \theta + 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta}{-2a \sin \theta \cos \theta - 2a(1 + \cos \theta \sin \theta)}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = -1$$

故所求切线的方程为

$$y - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = -\left[x - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) a\right]$$

例 5.12 阿基米德螺线（*Archimedean spriral*）由极坐标方程 $r = a + b\theta$，其中 a, b 为常数，其最简单的情形是 $r = \theta$，其参数方程是

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos\theta \\ y(\theta) = \theta\sin\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$



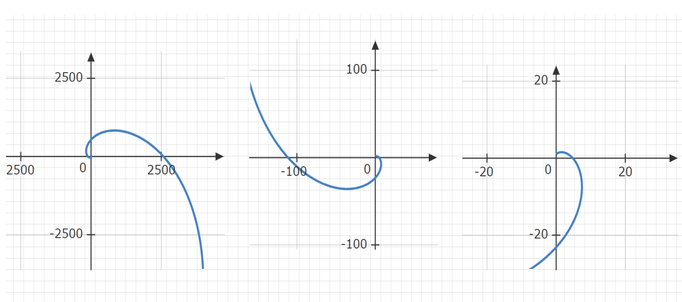
注意，对 $r = b\theta$ 描述的螺线，曲线上 θ 对应点的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 不依赖于 $b \neq 0$ 的选择. 我们消去参数 θ，得 $r = \theta$ 的直角坐标描述为

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan\theta \\ x^2 + y^2 = \theta^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

注意它与例 *5.7* 中的方程 $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 对应的方程是类似的，我们已经知道对由它决定的隐函数 $y = y(x)$，有 $y' = \frac{x+y}{x-y}$. 它对有的极坐标方程为

$$\theta = \ln r \quad \Longrightarrow \quad r = e^{\theta}$$

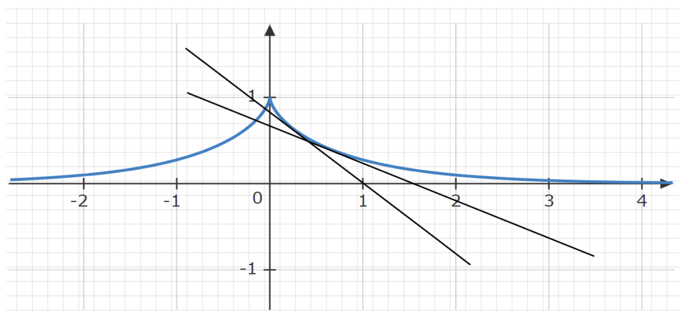
由该方程定义的曲线称为对数螺线，它是一个 “自相似”（*self similar*）曲线，其不同尺度下的图像举例如下，可看出：无论尺度如何收放，其形皆似也！



它的一个参数方程是 $\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ 从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}\sin\theta}{-e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \qquad \left(= \frac{x+y}{x-y}\right)$$

例 5.13 曳物线 $\begin{cases} x = a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$ 上的每条切线上从切点到与它和 x 轴的交点的长度是定值.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin t\right)} = \frac{\cos t}{\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} - \sin t}$$

$$= \frac{\cos t}{\frac{1}{\sin t} - \sin t} = \frac{\sin t\cos t}{1 - \sin^2 t} = \tan t$$

故过 $t = t_0$ 确定的点的切线方程是

$$y - a\sin t_0 = \tan t_0\left(x - a\left(\ln\tan\frac{t_0}{2} + \cos t_0\right)\right)$$

其与 x-轴的交点坐标是 $\left(a\ln\tan\frac{t_0}{2}, 0\right)$，它与切点连线的距离的平方是

$$\left(a\left(\ln\tan\frac{t_0}{2} + \cos t_0\right) - a\ln\tan\frac{t_0}{2}\right)^2 + (a\sin t_0)^2 = a^2$$

参数方程表示的函数的高阶导数计算： 对参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 我们已知 $\frac{dy}{dx}$ =

$\frac{y'(t)}{x'(t)}$. 如要计算二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$，只需

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{1}{x'(t)}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$$

在实际计算中，无需特意记忆上公式，只按其推导过程计算即可.

例 5.14 计算摆线曲线（*c.f.* 例 *5.9*）所确定函数的二阶导数.

解： 我们已知一阶导数为 $\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2}$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{t}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\frac{1}{x'(t)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a}\csc^4\left(\frac{t}{2}\right)$$

例 5.15 对曳物线（*c.f.* 例 *5.13*），已得 $y'(x)=\tan t$，下计算二阶导

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left(y'(x)\right)=\frac{d}{dt}\left(\tan t\right)\frac{1}{x'(t)}=$$

$$=\sec^2 t\frac{1}{a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\frac{1}{\cos^2 t}\frac{\sin t}{a\cos^2 t}=\frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4(t)}$$

如需计算 $y'''(x)$，只需如法炮制，稳步计算

$$y'''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4 t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4 t}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\cos^5 t+4\sin^2 t\cos^3 t}{\cos^8 t}\frac{\sin t}{a\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}\frac{\sin t\cos^3 t\left(\cos^2 t+4\sin^2 t\right)}{\cos^{10} t}$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{(1+3\sin^2 t)\sin t}{\cos^7(t)}$$

6 核心回顾——承上启下篇

核心回顾： $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 衡量的是函数曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率. 即该点的切线方程（*tangent line*）是

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

由之决定的线性函数 $L_{f,(x_0)}(x)$ 称作是 $f(x)$ 在 x_0 点附近的线性近似（*linear approximation*）

$$\boxed{L_{f,x_0}(x):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

当 x 在 x_0 点产生一增量Δx 时，线性近似对应的增量（即在切线上计算的增量）

$$\Delta L_{f,x_0}=L_{f,x_0}(x_0+\Delta x)-L_{f,x_0}(x)$$

是函数 $y=f(x)$实际增量$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$（即函数曲线上计算而得的）的一阶线性近似，当然，它不是别的，正是函数在这点的微分$df|_{x=x_0}$，即有

$$\boxed{df|_{x=x_0}=\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx}$$

亦即，微分 $df|_{x=x_0}$ 可看成是“坐镇”于 $(x_0,f(x_0))$ 的一个“机器”：它将 x_0 处自变量增量 $dx=\Delta x$ 线性地变换为 $df_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$ ——作为对应函数实际增量 Δf 的一阶近似：$df|_{x=x_0}\approx\Delta f$. 一阶的含义是：误差 $\Delta f-df|_{x=x_0}=o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小.

换言之，微分 $df|_{x=x_0}$ 是一个映射（变换），且是最简单的线性映射，即

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\{x_0\text{ 处 }x\text{ 的增量空间}\} & & \{\text{对应线性近似 }L_{f,x_0}\text{ 的增量空间}\}\\ \|\wr & \xrightarrow[\text{作为映射}]{df|_{x_0}} & \|\wr \\ \{\Delta x=x-x_0\mid x\in\mathbb{R}\} & & \left\{\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x\mid\forall\Delta x\in\mathbb{R}\right\}\end{array}}$$

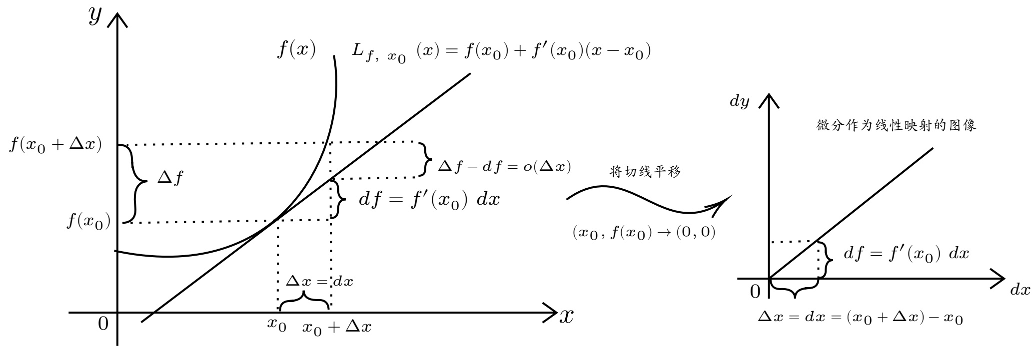
注意，这里所说的“增量空间”是指 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间（*vector space*），因增量间可加减、可数乘. 事实上

$$\{\Delta x=x-x_0\,|\,x\in\mathbb{R}\}\xlongequal[\text{即同构于}]{\text{等同于}}\mathbb{R}\text{（作为 }x\text{-轴 }\mathbb{R}_x\text{ 上 }x_0\text{ 处的切线空间）}$$

$$\left\{\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x\mid\forall\Delta x\in\mathbb{R}\right\}\xlongequal[\text{即同构于}]{\text{等同于}}\mathbb{R}\text{（作为 }y\text{-轴 }\mathbb{R}\text{ 上 }f(x_0)\text{ 处的切线空间）}$$

故微分 $df_{x=x_0}$ 是切线空间（简称切空间）层面由导数 $f'(x_0)$ 给出的线性变换（即最简单的“数乘变换”）. 但须再三强调：**导数不是微分**！导数是一个数字，衡量函数在该点的瞬时变化率；微分是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的数乘线性变换，乘数虽是导数，但其实质是从 x_0处切空间（等同于 x-轴 $\mathbb{R}_x$ 自身）到 y-轴上$f(x_0)$处切空间（等同于 y-轴 $\mathbb{R}_y$ 自身）的一个线性变换:即将 x_0 处增量 Δx 变换为线性近似 L_{f,x_0} 的增量 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

$$df|_{x=x_0} : \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{R}_y \qquad dx \longmapsto df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$$



由上图不难看出：$(x_0, f(x_0))$ 处切线与微分的图像的关系为

将切线平移，使其上 $(x_0, f(x_0))$ 点与坐标原点重合

然后将 x-轴 $\mathbb{R}_x$ 解释为微分 dx 的取值空间（x_0 点切空间 $\cong \mathbb{R}_x$）

将 y-轴 $\mathbb{R}_y$ 解释为微分 dy 的取值空间（$f(x_0)$ 点切空间 $\cong \mathbb{R}_y$）

注记： 这里切线与微分之图形的关系非常类似与线性方程组 $Ax = b$ 的解与其对应之齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解之关系！在线性方程组理论的语境下，$Ax = b$ 的解可写成其任一特解 x_0 与 $Ax = 0$ 的全体解的和，即从图形上来说，$Ax = b$ 的解图形是 $Ax = 0$ 解图形对特解 x_0 的一个平移！而 $Ax = 0$ 的解的图形是一个线性空间.

线性近似 $L_{f,x_0}(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{df|_{x=x_0}}$ 只关涉 $f(x)$ 在 x_0 点附近（“曲”）用其微分（“直”）的近似. 自然要追问:

1. 决定线性近似的 $f'(x_0)$ 是如何影响函数在该点及在该点附近的表现的?

2. 微分近似的误差 $o(\Delta x)$ 项能否有更精细的控制?

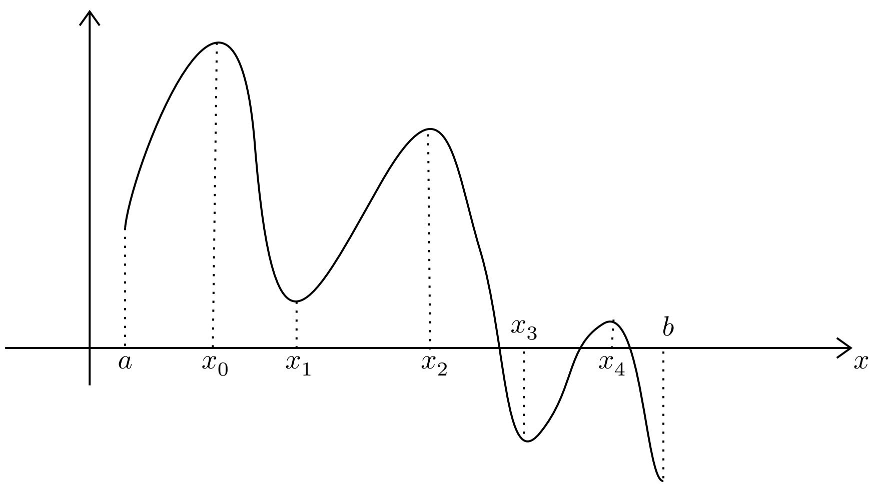
3. 如何通过导数值的变化研究一函数在一个区间上的整体性质?

这将是我们下面几小节探讨的主题.

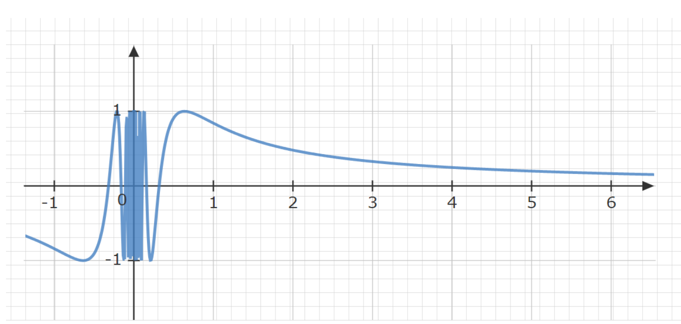
7 极值点与费马定理、单调性与极值判别法

定义 7.1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义，若 $\exists\,\delta > 0$，使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，成立 $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值（极小值），并称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点（极小值点）. 极大值、极小值通称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点.

注记 7.1 上定义表明“极值”是个局部概念，它只是 x_0 点处某领域 $U(x_0, \delta)$ 内的最大或最小值，未必是全局最大或最小. 如下图中的函数图像，显然，x_0, x_2, x_4 是极大值点；同时 x_0 也是函数的最大值点；x_1, x_3 是极小值点，但函数在 $x = b$ 时取最小值；另外，虽然 x_4 是极大值点，但它对应的函数值必函数在极小点 x_1 处的取值还小.

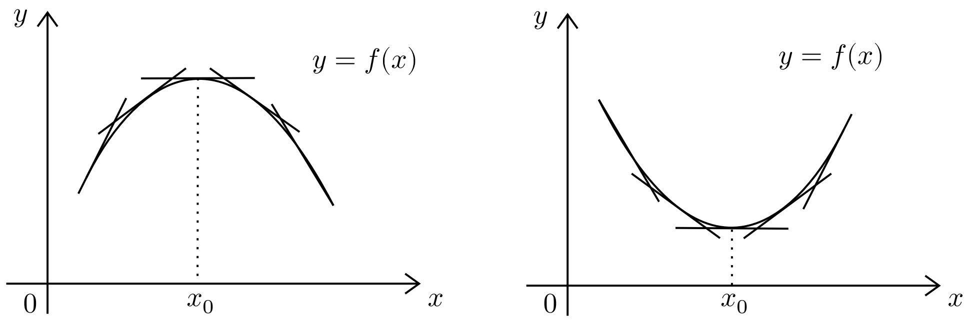


注记 7.2 函数的极值点可以是无穷多，比如 $(0,1)$ 中的函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 的极值点是 $x = \frac{2}{(2n+1)\pi}$（n 为偶数时为极大值点；n 为奇数时为极小值点）.



从图形上看，如果函数是连续且可导的（即每点处有切线），则极值点对应于具有水平切线的点.

另外，如果将 x 解释为时间变量，则 $y=f(x)$ 的图形可看成是一质点沿曲线的运动，则在极大值点附近（比如上图中的点 x_0），当从 x_1 左侧通过 x_0 时，我们看到点在曲线上先“爬坡”，且其爬坡的速度 $f'(x)$ 越来越小（即切线斜率从正值变得越来越小），到 x_0 对应的点时切线则呈水平状（即点的即时速率为零），然后又开始“加速下坡”（即切线斜率 $f'(x)$ 从 0 开始减少——虽为负，但其绝对值越来越大）.



同理，在极小点附近，函数曲线上的点先历经下坡阶段，越过极小值点后又开始爬升；切线斜率（点的运动速度）先从负值增于零，越过极值点后，又从零开始增加.

既然“爬坡”对应轨迹的上升，即函数单调增加，故可将导数非负同函数单调增加相联系；同理，既然“下坡”对应轨迹的下降，即函数单调减少，可将导数非正同函数单调减少相联系. 不难想见下定理的正确性.

定理 7.1（费马（*Fermat*））设 $f(x)$ 在 x_0 取极值, 且 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f'(x_0)=0$.

定义 7.2 导数为零的点称为函数的驻点（*stationary point*）.

由费马定理知，可导函数在**区间内**（边界上须单独处理）的极值点是函数的驻点. 我们记 $f\in D(I)$ 表示 f 是区间 I 上的可导函数，则下定理在直观上也是显明的.

定理 7.2 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$（即在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可导），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（减少）当且仅当 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)\geq 0$ (≤ 0)

（定理 7.1 的）证明 I: 不妨设 x_0 是极大值点（极小值点的情形可类似处理）. 因为 $f(x)$ 在该点可导（可微），故在该点有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. 由于 x_0 是极大值点，故在其某一领域 $U(x_0,\delta)$ 内，成立 $f(x)\leq f(x_0)$，由此可知

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0;\quad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \geq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

（定理 7.1 的）证明 II： 利用线性近似，在 x_0 处有

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)) = (f'(x_0) + \alpha)(x - x_0)$$

其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小. 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 x 与 x_0 充分接近时, $f'(x_0)+\alpha$ 和 $f'(x_0)$ 同号，故当 x 经过 x_0 时 $f(x) - f(x_0)$ 变号，与 x_0 是极值点矛盾. $\square$

下面看能否用已有工具（*c.f.* 见上节“承上启下篇”）证明定理 *7.2.* 在试证洛必达法则时已发现其弊了. 下节会打造更为有效的分析工具!

定理 7.2 的证明尝试及其前瞻性证明： 必要性：不妨设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，即 $\forall x \in (a, b)$，在 x 处给一个小增量 $\Delta x > 0$ 时，成立 $f(x + \Delta x) \geq f(x)$；显然，该不等式当增量 $\Delta x < 0$ 时也成立. 也即，无论 Δx 是正还是负，都有

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \xRightarrow{\text{令 } \Delta x \to 0} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0. \quad \square$$

对充分性，我们需从 (a, b) 上的 $f'(x) \geq 0$ 推出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调增加性.

分析： 从 a 处开始，由于 $f'(a) \geq 0$，则对 $\Delta x > 0$，按惯常分析法，我们有

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\geq 0} + o(\Delta x)$$

感觉当 Δx 很小时，误差项 $o(\Delta x)$ 可小到无论其正负，都能使 $f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \geq 0$，从而 $f(a + \Delta x) > f(a)$，即在 a 处局部单调，然后一点点向右移动，逐渐将局部单调性“黏合”成整体单调性. 然而这一企图并不易实现. 一方面，若 $f'(a) = 0$ 时，误差项 $o(\Delta x)$ 若为负该怎么办? 而且即便 $f'(a) > 0$，通过上公式又如何能确保选择合适的 Δx 从而使得右边是正的? 更何况 Δx 该选多小及如何选都没法明确说明.

故现有工具虽对分析函数在某点附近的表现是极其有效的, 但对函数整体性却显得力有不逮. 比如上面的误差项 $o(\Delta x)$ 就是干扰因素，我们自然希望将它的存在转化成另一种形式，从而使我们可获得函数在一区间上整体表现的有效信息.

由下节中的朗格朗日中值定理知，此时 $\exists \xi \in (a, a + \Delta x)$，使得

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x \geq 0$$

从而有 $f(a + \Delta x) \geq f(a)$. 更一般地，$\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$，由朗格朗日中值定理知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1) \quad \square$

有了定理 7.2，则不难将之前在极值点附近“上山下坡”的游戏可转述为下定理.

定理 7.3（极值第一判别法）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0,\delta)$ 内连续，且在去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导

1. 若在 x_0 处左侧 $f'(x)<0$，在 x_0 处右侧 $f'(x)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;
2. 若在 x_0 处左侧 $f'(x)>0$，在 x_0 处右侧 $f'(x)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;
3. 若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

证明: 对 1. 有条件知，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上单调增加，故 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，有 $f(x)\geq f(x_0)$，及 x_0 是极小值点. $2,3$ 可类似获证. $\square$.

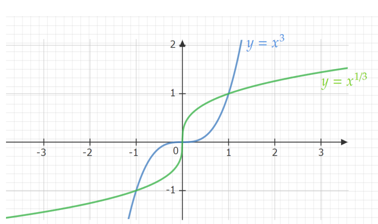
另一方面，我们也知道，在“上山下坡”游戏中，当（从左到右）经过极大（小）值点时，切线的斜率先逐渐减少（增加）为零，过极值点后，又从零开始逐渐减少（增加）. 也即导函数（衡量切线斜率的变化）在极大（小）值附近是减少（增加）函数.

定理 7.4（极值第二判别法）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$（即 x_0 是驻点），有如下判定

1. 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;
2. 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

证明: 当 $f''(x_0)<0$ 时，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 由极限的“保号性”，知在 x_0 的某去心领域内有 $\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 即在 x_0 的某左领域内 $f'(x)>0$; 在某右领域内 $f'(x)<0$，也即经过 x_0 时，函数先增后减，故 x_0 为极大值点. 同理可证 2. $\square$

注记 7.3 逻辑上，还有一种情形：$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，此时我们无法用上方法判断函数在 x_0 处的表现. 我们看一个相关例子 $y=x^3$，显然 $y'(0)=y''(0)=0$，且 0 不是极值点. 与之比对，其反函数 $y=x^{1/3}$ 在 0 处也无极值（原因???）



那么是否所有满足 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 的函数在 x_0 无极值呢? 对该问题，我们

断言： 如函数 $f(x)$ 在 x_0 处 3 阶可导，且满足条件：$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$，但 $f'''(x_0) \neq 0$，则 x_0 一定不是 f 的极值点.

断言之证明： 在 x_0 处有泰勒展开：

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right)$$

$$\xlongequal{f'(x_0)=f''(x_0)=0} f(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right)$$

将 $o\left((x-x_0)^3\right)$ 写成 $\alpha(x-x_0)^3$，其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，则有

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f'''(x_0)}{3!} + \alpha\right)(x-x_0)^3$$

由于 $f'''(x_0) \neq 0$，可见只要 $\delta x = x - x_0$ 取得足够小，都能使 $\left(\frac{f'''(x_0)}{3!} + \alpha\right)$ 的符号恒定（由 $f'''(x_0)$ 的符号决定），但此时，显然 $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 的某小领域内可正可负，即 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. □

注记 7.4 用泰勒展开，可得更一般的结论：如 f 在 x_0 处 n 阶可微，且满足

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)(x_0)} = 0, \text{但} f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \text{则有}$$

1. 若 n 为奇数，则 x_0 不是 f 的极值点；
2. 若 n 为偶数，则当 $f^{(n)}(x_0) > (<) 0$ 时，x_0 是函数 f 的极小（大）值点.

极值的第二判别法其实就是上结论当 $n = 2$ 是的情形. 利用泰勒展开，可对定理 *7.4* 以更简洁明快的证明.

定理 7.4 的另证： 在 x_0 处，有泰勒展开

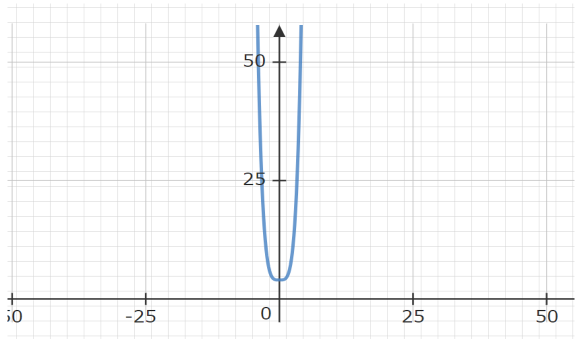
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f''(x_0)}{2!} + \alpha\right)(x-x_0)^2$$

其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量. 故知在 x_0 的某去心领域，$f(x) - f(x_0)$ 的符号恒定，且由 $f''(x_0)$ 的符号决定. □

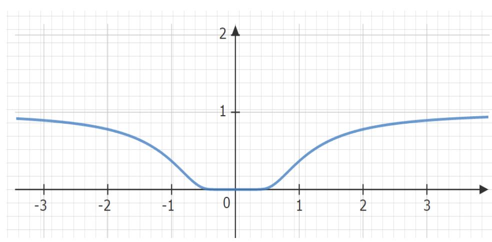
例 7.1 对函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$，可知 $f'(0) = f''(0) = f''(0) = 0$，但

$f^{(4)}(0)=4$. 由上讨论可推断 $f(x)$ 在 0 处取极小值. 由下图可见，该函数在 0 处是非常"平坦"的，但还是极小值点的形态.



当然，最简单的例子幂函数 x^n，在 $x=0$ 处，其前 $n-1$ 阶导数在 0 处为零，其 n 阶导数为 $n!$. 按上面的分析，如 n 是奇数，0 不是极值点，当 n 是偶数使 0 是极小值点，且 n 越大，其图形在 0 附近越平坦. 然而，还有更平坦的极端情形，事实上，我们可以构造出在某点其任意阶导数都为零的非常值函数！下面是个经典例子.

例 7.2 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 证明 $f^{(n)}=0,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\xlongequal{y:=\frac{1}{x}}\lim_{y\to\infty} ye^{-y^2}=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，则

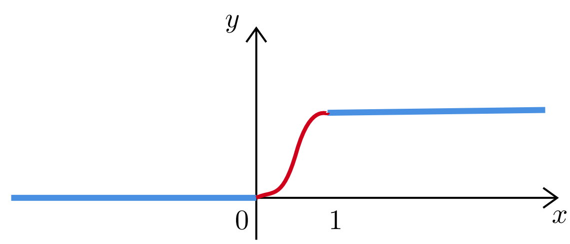
$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

当 $x \neq 0$ 时，$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$，然后按定义可计算出

$$f'''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^4 - 6x^6}{x^7} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

一般地，不难归纳证得 $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 n 次多项式，进而可归纳证明 $f^{(n)}(0) = 0$. $\square$

注记 7.5 上例在实践中也有重要作用，比如可利用它将函数“焊接”成为光滑函数（*smooth function*），即无穷次可微的函数. 比如，给出两个常值函数：$u(x) \equiv 0,\ \forall x \in (-\infty, 0]$; $v(x) \equiv 1\ \forall x \in [1, +\infty)$. 试问如何将它们延拓为 $(-\infty, +\infty)$ 上的光滑函数，且使其值域为 $[0, 1]$



事实上，记 $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 它是光滑函数，构造 $f(x) := \frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}$. 它即满足我们需求的光滑函数.

定理 *7.2* 给出了利用导数来判定函数单调性的判则，为全备起见，我们尚需探讨用导数来判定函数**严格**单调的判则.

定理 7.2$'$ 设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加（减少）当且仅当 $\forall x \in (a, b)$，有 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$，且在 (a, b) 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒等于零.

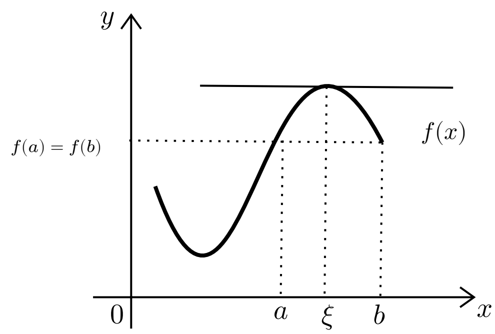
证明： 充分性. 不妨设在 (a, b) 上有 $f'(x) \geq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，即对 $\forall x, x_1, x_2 \in [a, b]$，$x_1 < x < x_2$，有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. 如 f 不是严格单调的，不妨假设 $f(x_1) = f(x_2)$，则上条件表明 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是常数，从而 f' 在 (x_1, x_2) 上恒为零，与前提矛盾了，故 f 是严格单调的.

必要性. 首先 $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. 如在某区间 $I \subseteq (a, b)$ 上 $f'(x) \equiv 0$，则在其上函数为常数，这与严格单调的前提矛盾了. $\square$

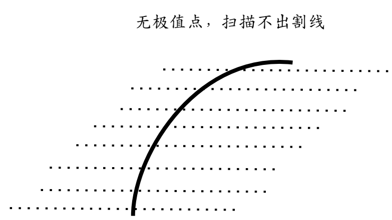
注记 7.6 上定理中证明中用到了结论：如在一区间 I 上 $f' \equiv 0$，则 f 在 I 上为常值函数. 该结论是下节“拉格朗日中值定理”的直接推论. 虽然这个结论在直观上似乎很显明（如之前的零点存在定理等），但如不用中值定理，其证明相当不易.

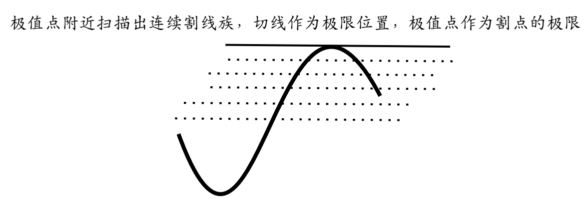
8 中值定理，导函数的介质性与导数极限定理

费马定理表明：对可导函数，其极值点就是函数的驻点，即导数为零的点. 这是关于函数的一个局部（*local*）性质，为将其全局化（*globalization*），我们变换视角，不只盯着极值点看，而是从它近旁观察起，看极值点究竟是如何产生的?



分析： 驻点的特征是驻点处有水平切线，而（局部）切线是其近旁之割线（全局特征）的极限位置. 所以，如一点附近不存在水平割线，那就不存在水平切线作为其极限位置. 受此启发，我们可用水平直线族"扫描"曲线，如"扫描线"与曲线在某些点附近交成割线，则预示着它附近有极值点——作为割线两端点的极限点！



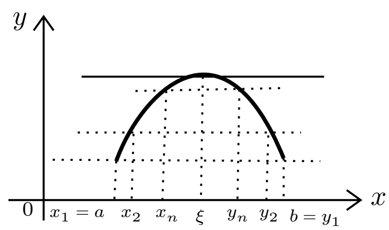


而水平割线的特征是：$\exists a, b,\ a \neq b$，使得 $f(a)=f(b)$. 那么可以预见：$\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$. 而在直观上，ξ 是作为连续水平割线族的割点的极限而存在的！由此，不仅可得下定理，且知搜寻极值点的一种算法.

定理 8.1（罗尔（*Rolle*）定理）设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，即它在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，如 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：（存在性证明）由闭区间上连续函数的性质，知在 $[a,b]$ 上函数存在最大值 M 和最小值 m. 如 $M=m$，此时 f 在 $[a,b]$ 上取常值，结论显然；如 $M>m$，此时 M 和 m 中至少有一个与 $f(a)=f(b)$ 不相同，不妨设 $M=f(\xi)>f(a)=f(b)$，即 $\xi\in(a,b)$ 是极值点，由费马定理知 $f'(\xi)=0$. □

证明：（构造性证明）记 $I_1=[a_1,b_1]$，其中 $a_1=a$, $b_1=b$. 记区间的距离函数为 $d([\mu,\kappa])=\kappa-\mu$，显然当 κ,μ 连续变化时，d 也是连续变化的，且区间长度可连续变为零（如不能，则 $[a,b]$ 内包含不连续点，矛盾）.



所以 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，存在 $I_n=[a_n,b_n]\subseteq I_{n-1}=[a_{n-1},b_{n-1}]$，使得

$$f(a_n)=f(b_n),\ \text{且}\ d(I_n)<\frac{b-a}{2^n}$$

即我们沿着与水平割线垂直的方向来连续推移它，由此得到闭区间套：

$$I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots\supseteq I_n\supseteq\cdots$$

因 $d(I_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$，据闭区间套定理知，$\exists!\,\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$，即 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 我们证明在 ξ 处，必有 $f'(\xi)=0$. 注意到下极限显然成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=0$$

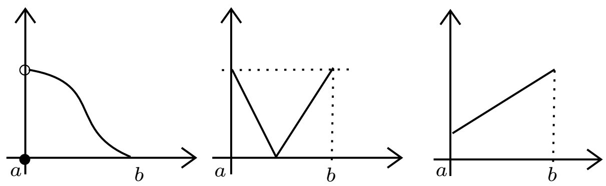
但另一方面，它可写成如下

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi+b_n-\xi)-f(\xi+a_n-\xi)}{b_n-a_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[f(\xi)+f'(\xi)(b_n-\xi)+o((b_n-\xi))]-[f(\xi)+f'(\xi)(a_n-\xi)+o((a_n-\xi))]}{b_n-a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi)(b_n-a_n)+o((b_n-\xi))+o((a_n-\xi))}{b_n-a_n}=f'(\xi)\quad\square$$

注记 8.1 罗尔定理中的三条件：*1.* 闭区间上连续；*2.* 闭区间内可导；*3.* 闭区间端点处函数值相同，对罗尔定理成立是缺一不可的. 见下图中的函数自明.

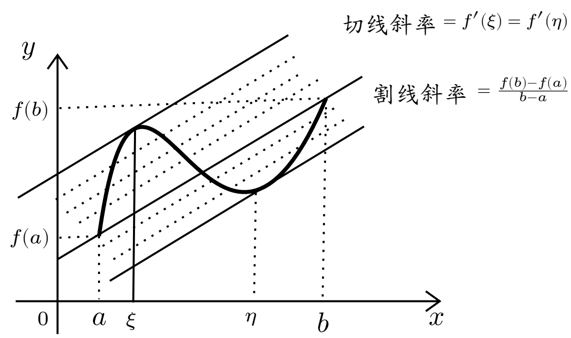


用罗尔定理可证如下闭区间上反函数存在的一个充分条件.

推论 8.1 若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且在 (a,b) 内，$f'(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单射，从而必存在反函数.

证明: 设 $\exists a \leq x_1 < x_2 \leq b$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由 $f(x) \in C[x_1,x_2] \cap D(x_1,x_2)$, 根据罗尔定理知 $\exists \xi \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$，矛盾. □

罗尔定理中的条件 $f(a) = f(b)$ 稍显特殊，但其背后的直观，即利用趋向于某条切线的割线族去扫描曲线却是个一般图景. 据此可将罗尔定理推广为**拉格朗日中值定理**（*Lagrange mean value theorem*），它是无穷小分析中最重要的工具之一.



定理 8.2（拉格朗日中值定理）设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

注记 8.2 从图形上来看，只需把坐标系旋转 θ，其中 $\theta = \arctan \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 便化归到罗尔定理的情形，所以结论是“肉眼可见”的. 当然，我们要找到化归为罗尔定理的代数方法，从而得到定理的严格证明. 为此，只需从 $f(x)$ 构造出一满足罗尔定理成立条件的函数来. 显然，曲线上的点同连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 之割线上对应相同 x 坐标的点的 y 坐标之差就是一个满足需求的函数，由此得下证明：

证明： 构造辅助函数如下

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则 $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 故由罗尔定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'=0$，即

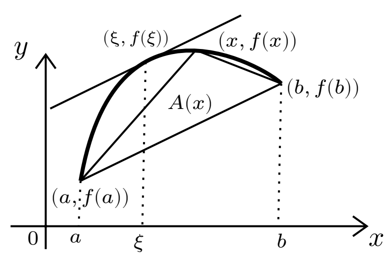
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \qquad \square$$

类似于罗尔定理的构造性证明，也可通过构造闭区间套来证明，此处不赘述.

注记 8.3 从 $f(x)$ 构造出满足罗尔定理条件的函数的方法不唯一，除证明中的选择外，也可选择曲线上点 $(x,f(x))$ 和端点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 连线而成三角线的（有向）面积. 记该函数为 $A(x)$，则

$$A(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b-a & x-a \\ f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \end{vmatrix}$$

显然，$A(a)=A(b)=0$，由罗尔定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $A'(\xi)=0$，即朗格朗日定理成立. $\square$



推论 8.2 设在区间 I 上有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 是 I 上的常数值函数.

证明： 用反证法，假设 $\exists x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，对区间 $[x_1,x_2]$ 应用朗格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. 但 $f'(\xi)=0$，故 $f(x_1)=f(x_2)$. 矛盾. $\square$

由上推论直接可证下面的**不定积分基本定理**（含义后自明）

定理 8.3 如在区间 I 上，有 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上只差一个常数，即 $\exists$ 常数 C，使得 $f(x)=g(x)+C$.

证明： 由于 $f'(x)\equiv g'(x)$，故 $(f(x)-g(x))'\equiv 0$，根据推论 *8.2* 知在 I 上有 $f(x)-g(x)\equiv C$ （常数） $\square$

有限增量公式: 我们变换一种书写方式, 让朗格朗日中值定理称为强有力的分析工具. 首先回忆线性近似公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

或将 $o((x-x_0))$ 写成 $o((x-x_0))$ 写成 $o((x-x_0)) = \alpha(x-x_0)$, 其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量. 故得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

但正如之前所说, 上面的近似公式在实际应用中常有不便之处, 我们结合朗格朗日中值定理对其做优化改进.

首先注意到 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 对 $a > b$ 也是成立的, 故在 x_0 附近,

$$\boxed{\text{存在介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间的数 } \xi\text{，使得 } f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)}$$

更进一步, 不妨设 $x_0 < x$, 可找到 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ (取 $\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}$ 即可), 从而有

$$\exists\theta \in (0,1), \text{使得 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$$

当 $x_0 > x$ 时, 同样开取 $\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \in (0,1)$, 则可使 $f(x)$ 写成上面形式. 从而不论 x 是否大于 x_0, 上式都成立. 换言之, 对 x_0 处的一个增量 $\Delta x = x - x_0$ (可正可负)

$$\boxed{\exists\theta \in (0,1),\ \text{使得 } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'\underbrace{(x_0 + \theta\Delta x)}_{\xi}\Delta x}$$

这便是函数的**有限增量公式**, 它给出了函数增量 Δf 在 x_0 附近的一个精确估计.

朗格朗日中值定理虽保证了 ξ 的存在, 但一般不能告诉我们 ξ 的具体值. 但在某些例子中, ξ 是可以被精确求出的.

例 8.1 设 $f(x) = x^3$, $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 确定 $\xi \in (-1, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(-1)}{b - (-1)}$.

解: 由于 $f'(\xi) = 3\xi^3$. 故问题相当于求解方程: $3\xi^2 = b^2 - b + 1$.

$$b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \xi = \pm\sqrt{\frac{b^2 - b + 1}{3}} \in (-1, b)$$

例 8.2 根据三角函数的性质，下面等式显然成立

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1]$$

我们用拉格朗日中值定理来证明它. 记上式坐边的函数为 $f(x)$，对它求导，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

故由定理 *8.3* 知 $f(x)\equiv C$（其中 C 为常数）. 为确定 C 的值，令 $x=0$，此时

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad C=\frac{\pi}{2}$$

常也用朗格朗日中值定理证明不等式，比如

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},\quad x>0$$

证明：两边取对数，不难发现不等式等价于

$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{1+x}<\ln(1+x)-\ln x<\frac{1}{x}$$

考虑 $f(x)=\ln x$，在 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(x,x+1)$，使得

$$\ln(1+x)-\ln x=f'(\xi)(x+1-x)=\frac{1}{\xi}$$

但由于 $0<x<\xi<x+1$，故 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$，从而不等式得证. □

启发性说明：如函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=g(t)\\ y=f(t)\end{cases}$，$t\in I$. 设点 $(a,\,y(a))$ 对应于参数 t_a；点 $(b,\,y(b))$

对应于参数 t_b. 则在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$. 设点 $(\xi,\,f(\xi))$ 对应的参数为 t_ξ，即有

$$f(t_b)-f(t_a)=\frac{f'(t_\xi)}{g'(t_\xi)}(g(t_b)-g(t_a))\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{f(t_b)-f(t_a)}{g(t_b)-g(t_a)}=\frac{f'(t_\xi)}{g'(t_\xi)}$$

特别地，函数 $y=f(x)$ 的“平凡”参数化 $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$ $t\in I$ 给出拉格朗日中值定理. 以上讨论导致**柯西中值定理**.

定理 8.4 (柯西 ($Cauchy$) 中值定理) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 并在 (a,b) 上可微, 且 $\forall\, x \in (a,\, b)$, 都成立 $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists\, \xi \in (a,\, b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

将上面启发性说明中的想法严格化, 即本质上将 $f(x), g(x)$ 看成是一个函数关系的参数化, $y=g(t),\, x=f(t) \;\Rightarrow\; y=g(f^{-1}(x))$. 便有以下证明:

证明: 由于 $g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 且 $g'(x) \neq 0$, 则知 $g'(x)$ 在 (a,b) 上恒正或恒负, 故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调. 下面不妨设其严格单调增加. 记 $g(a)=\alpha,\, g(b)=\beta$, 则 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在反函数 $g^{-1}(y) \in C[\alpha,\beta] \cap D(\alpha,\beta)$, 且 $\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{g'(x)}$, 所以 $g^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也单调增加. 考虑函数 $F(y)=f(g^{-1}(y))$, 它在 $[\alpha,\beta]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 于是 $\exists\, \eta \in (\alpha,\, \beta)$, 使得

$$F'(\eta) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{f(g^{-1}(\beta))-f(g^{-1}(\alpha))}{\beta-\alpha} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad F'(\eta) &= \left(f(g^{-1}(y))\right)'\big|_{y=\eta} = \left(f'(g^{-1}(y))\cdot\left(g^{-1}(y)\right)'\right)\big|_{y=\eta} \\ &= \left(f'(x)\cdot\frac{1}{g'(x)}\right)\Big|_{x=g^{-1}(\eta)=:\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \square \end{aligned}$$

注记 8.4 我们也可以尝试由 f, g 构造出满足罗尔定理的条件来证明柯西中值定理. 类似于用构造辅助函数证明拉格朗日终止定理, 我们也可选择函数图像上点的纵坐标与过两端点割线上相同横坐标点的纵坐标之差来做辅助函数. 即令

$$G(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

则显然 $G(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 且 $G(a)=G(b)=0$, 故由罗尔定理, 知 $\exists\, \xi \in (a,b)$, 使得 $G'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

也可将注记 *8.3* 中的构造思路迁移过来, 即用联结两端点和曲线上点的三角形的面积为辅助函数, 然后利用罗尔定理. 在此处应构造函数

$$A(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

例 8.3（罗尔定理的拓广）设 $f(x) \in C[a, +\infty) \cap D(a, +\infty)$（其中 a 为常数）. 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$，则 $\exists \xi \in (a, +\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明: 若存在 $x \in [a, +\infty)$, 使得 $f(x) = f(a)$, 则结论显然成立. 如果 $\forall\, x \in [a, +\infty)$, $f(x) \neq a$, 不妨设 $\exists\, c > a$, 使得 $f(c) > f(a)$. 取 $\epsilon = \frac{f(c)-f(a)}{2} > 0$, 则由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$ 知 $\exists\, X > c$，使得当 $x > X$ 时，成立 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. 特别地，对 $x = X + 1$，有

$$f(X+1) < f(a) + \epsilon = \frac{f(a) + f(c)}{2} < f(c)$$

从而 $f(x) \in C[a,\, X+1] \cap D(a,\, X+1)$，且 $\exists\, c \in (a,\, X+1)$，使得

$$f(c) > f(a),\ f(c) > f(X+1)$$

即 $f(x)$ 在 $(a,\, X+1) \subseteq (a,\, +\infty)$ 内某点 ξ 取最大值，由费马定理，$f'(\xi) = 0$. □

例 8.4 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导、有界，且 $f(1) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (1,\, +\infty)$，使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

分析: 即证 $\exists \xi \in (1, +\infty)$，使得 $\frac{f(\xi)}{\xi} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Big|_{x=\xi} = 0$

证明: 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 它在 $[1, +\infty)$ 上是可导的, 由于 $F(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$, 且因 $f(x)$ 有界，故 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0 = F(1)$. 故有例 *8.3* 中罗尔定理的拓广，知 $\exists \xi \in (a,\, +\infty)$, 使得 $F'(\xi) = 0$，即 $\exists \xi \in (1,\, +\infty)$，使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$. □

例 8.5（无穷远处无界的一个充分条件）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = A > 0$，则必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

证明: 根据极限的保号性，知 $\exists\, X > a$，使得当 $x > X$ 时，有 $f'(x) > \frac{A}{2} > 0$. 故对 $\forall\, x \in [X+1,\, +\infty)$，由拉格朗日中值定理知，$\exists \xi \in (X+1, x)$，使得

$$f(x) = f(X+1) + f'(\xi)(x - X - a) > f(X+1) + \frac{A}{2}(x - X - 1)$$

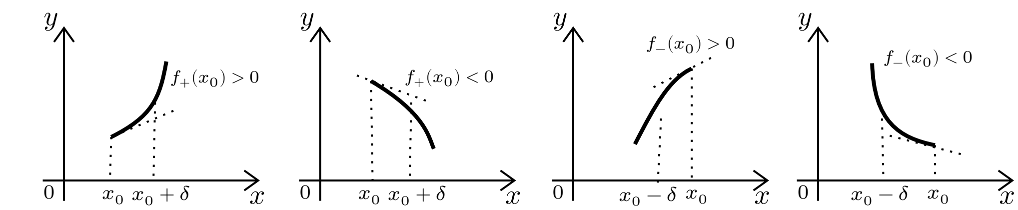
$$\text{但} \lim_{x \to +\infty} \left(f(X+1) + \frac{A}{2}(x - X - 1) \right) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \square$$

我们知道当 $f(x) \in C[a, b]$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有介值性. 注意，这里 $f(x)$ 在**闭**区间上的**连续性**都必要的！但下面的定理表明，对于一个函数的导函数 $f'(x)$，则不论其连续与否，它都具有介值性！

定理 8.5（达布（*Darboux*）定理））设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a) < f'_-(b)$，则 $\forall c \in (f'_+(a),\, f'_-(b))$，都 $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = c$.

先证一个引理.

引理 8.1 若 $f'_+(x_0) > (<)\, 0$，则 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，成立 $f(x) > (<)\, f(x_0)$；同理，若 $f'_-(x_0) > (<)\, 0$，则 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，成立 $f(x) < (>)\, f(x_0)$

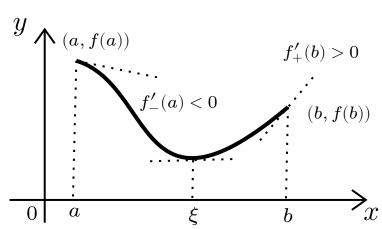


证明： 由右导数的定义 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$，以及极限的局部保号性，知 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，成立

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x_0)$$

其余情形可类似获证. □

（定理 8.5）的证明： 先证明 $f'_+(a) < 0$, $f'_-(b) > 0$ 的情形.



由于 $f'_-(a) < 0$，$f'_+(b) > 0$，根据上引理，知 $\exists\, \delta > 0$，使得

$$f(a+\delta) < f(a); \quad f(b-\delta) < f(b)$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点 ξ 在 $[a,b]$ 的内部，即在 (a,b) 之中. 由费马定理知 $f'(\xi) = 0$. 下证一般情形：$\forall\, c \in (f'_+(a), f'_-(b))$，令 $F(x) = f(x) - cx$. 则 $F(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $F'_+(a) = f'_+(a) - c < 0$，且 $F-'(b) = f'_-(b) > 0$，则问题化归为上情形. □

既然一个函数的导函数具有更强的介值性, 而一般函数的介值性须更强条件的保证（即闭区间上连续），则不难想见：不是所有的函数都能写成某函数的导函数. 有了不定积分的概念之后，这表现为，不是所有的函数有不定积分.

例 8.6 可证明不存在可导函数 $f(x)$，使得 $f'(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

证明: 如存在 $f(x)$，使得 $f'(x) = sgn\,(x)$. 特别地，有 $f'(-1) = -1$, $f'(1) = 1$，则由达布定理知，$\exists \xi \in (-1, 1)$，使得 $f'(\xi) = \frac{1}{2}$，但这是不可能的. $\square$

注记 8.5 事实上，对于一些光滑的好函数，是不能将它表示为某初等函数的导数的，即后面的不具有初等不定积分的函数类. 这样的函数有很多，比如

$$\sqrt{1-x^4},\ \ \frac{1}{\ln x},\ \ e^{-x^2},\ \ \sin(x^2)(\cos(x^2)),\ \ \frac{\sin x}{x},\ \ \frac{e^{-x}}{x},\ \ \ln(\ln x)$$

在第三节例 *3.4′* 中，我们讨论了 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 的可导性. 由导数的定义计算出 $f'(0) = 0$. 而另一方面

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 不存在，故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续（第二类间断点）.

由此可知，一般是不能用 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ 来计算 $f'(x_0)$ 的. 当然，上面的讨论也说明如果导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，则成立 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$. 但我们要继续问: $f'(x)$ 连续这个条件能否弱化? 事实是可以的，我们有如下**导数极限定理**.

定理 8.6（导数极限定理）设 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ $((x_0-\delta, x_0])$ 上连续，且在 $(x_0, x_0+\delta)$ $((x_0-\delta, x_0))$ 内可导. 如 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = A\right)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处有右（左）导数，且 $f'_+(x_0) = A$ $(f'_-(x_0) = A)$.

证明: $\forall\, x \in (x_0, x_0+\delta)$，由拉格朗日中值定理，知 $\exists \xi \in (x_0, x)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Longrightarrow \quad f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi) \xlongequal{\lim\limits_{x\to x_0^+}\xi = x_0} A \quad \square$$

推论 8.3 设 $\delta > 0$,函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内连续,在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，且 $f'(x_0) = A$.

例 8.7 求 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ 的导函数.

解: 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=1$. 只需确定 $f'(1)$. 注意到

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1;\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x)=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=1$. 又因为 $f'(x)$ 在 0 处本身是连续的，故由上推可知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)=1$$

综上可得

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x>0 \\ 1, & x\leq 0 \end{cases}$$

注记 8.6 上面定理及推论中，函数 $f(x)$ 在 x_0 的（单侧）连续性条件时必须的，因为可导蕴含连续，如在某点函数不连续，那考虑它在该点的可导性就没意义了. 考虑

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\cos x$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$. 但并不能由此得出 $f'(0)=1$ 的错误结论. 这是因为，按定义

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=+\infty$$

问题当然出在 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是不连续的. 即 $0=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

推论 8.4 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则其导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内不存在第一类间断点.

证明: 假设 $x_0\in(a,b)$ 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点，则 $f'(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在，根据定理 *8.6* 知，此时 f 在 x_0 处的左、右导数都存在，且

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=f'_+(x_0);\qquad \lim_{x\to x_0^-} f'(x)=f'_-(x_0)$$

另一方面，由于 $f(x)$ 在 x_0 点是可导的，故必有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$. 但这表明 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，矛盾. 从而知可导函数的间断点必属第二类. □

9 带拉格朗日余项的泰勒公式

泰勒定理 I（*c.f.* 第二节定理 *2.5*）表明：若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近进行 n 阶近似，即 $f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$ 称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处带皮亚诺余项的 n 级泰勒公式（展开）. 当 $x_0=0$ 时，也叫带皮亚诺余项的 n 级马克劳林公式（展开）.

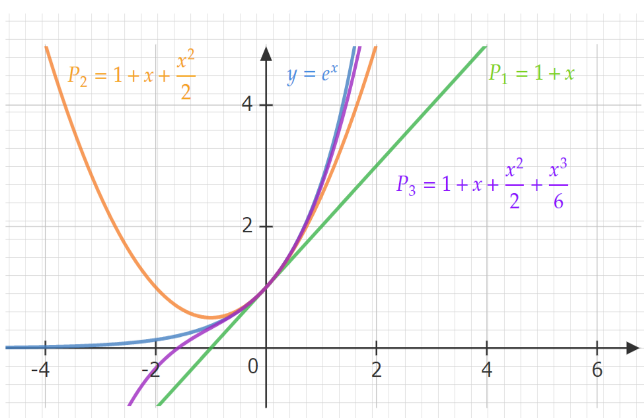
利用洛必达法则，我们可严格证明逼近误差 $R_n(x):=f(x)-P_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\overset{R_n(x_0)=0}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots\overset{R_n^{(n-2)}(x_0)=0}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$\overset{R_n^{(n-1)}(x_0)=0}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}\overset{\text{按极限定义}}{=\!=\!=}\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}\overset{R_n^{(n)}=0}{=\!=\!=}0$$

也就是说，$P_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 x_0 处的 $\le n$ 阶导数（零阶导数理解为函数值）都是重合的，从这个意义上，我们也称 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 附近的n 阶近似.

下面是例示. 我们看到，对 $y=e^x$，其在 0 处的三阶展开 P_3 已是非常好的逼近了.



一阶泰勒展开 $P_1(x)=L_{f,x_0}(x)$ 即线性近似，如同拉格朗日定理可转化线性近似的误差项 $o((x-x_0))$，可利用中值定理对 n-级泰勒展开 $P_n(x)$ 的误差项 $o((x-x_0)^n)$

进行转化，从而有下面的**带拉格朗日余项的泰勒公式（展开）**.

泰勒定理 II（带拉格朗日余项的泰勒公式）设函数 $f(x)$ 在包含点 x_0 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in (a,b)$，存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ，使得

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

显然，当 $n=0$ 时，上定理即为拉格朗日中值定理. 当 $x_0=0$ 时，对于的泰勒公式也称为带拉格朗日余项的马克劳林公式. 为凸显思路，下面我们只处理 $n=1,2$ 时的情形，一般 n 的情形由是自明.

证明：当 $n=1$ 时，用 $P_1(x)=L_{f,x_0}(x)$（线性）近似 $f(x)$ 产生的误差（余项）$R_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ 满足条件：$R_1(x_0)=R_1'(x_0)=0$. 则有

$$\frac{R_1(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{R_1(x)-R_1(x_0)}{(x-x_0)^2-(x_0-x_0)^2}\xlongequal[\exists\xi_1,\text{介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_1'(\xi_1)}{2(\xi_1-x_0)}$$

$$=\frac{R_1'(\xi_1)-R_1'(x_0)}{2(\xi_1-x_0)-2(x_0-x_0)}\xlongequal[\exists\xi,\text{介于 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_1''(\xi)}{2}=\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$\text{即 }\frac{f(x)-P_1(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(\xi)}{2}\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)=P_1(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

当 $n=2$ 时，用 $P_2(x)$ 近似 $f(x)$ 产生的误差（余项）$R_2(x)$ 满足条件

$$R_2(x_0)=R_2'(x_0)=R_2''(x_0)=0$$

$$\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^3}=\frac{R_2(x)-R_2(x_0)}{(x-x_0)^3-(x_0-x_0)^3}\xlongequal[\exists\xi_1,\text{介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2'(\xi_1)}{3(\xi_1-x_0)^2}$$

$$=\frac{R_2'(\xi_1)-R_2'(x_0)}{3(\xi_1-x_0)^2-3(x_0-x_0)^2}\xlongequal[\exists\xi_2,\text{介于 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2''(\xi_2)}{3\cdot 2(\xi_2-x_0)}=$$

$$\frac{R_2''(\xi_2)-R_2''(x_0)}{3\cdot 2(\xi_1-x_0)-3\cdot 2(x_0-x_0)}\xlongequal[\exists\xi,\text{介于 } x_0 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2'''(\xi)}{3!}=\frac{f'''(\xi)}{3!}$$

$$\text{即 }\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^3}=\frac{f'''(\xi)}{3!}\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

一般情形请读者的自行归纳证明. □

令 $\theta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}$，由于 ξ 介于 x_0 和 x 之间，则知 $\theta\in(0,1)$，且 ξ 可籍 θ 表达为

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1$$

故带拉格朗日余项的泰勒公式也可表达为

$$\boxed{f(x)=P_n(x)\ \ +\ \ \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

如 $\exists\, M>0$，使得 $\forall\, n\in\mathbb{N}_+$，成立 $|f^{(n)}(x)|\le M$，那么

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-P_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}f(x)=P_n(x)$$

即当所有阶导数都有界时，$P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的误差当 $n\to\infty$ 时趋于零. 事实上，可证明：$f(x)$ 在 x_0 点的泰勒多项式 $P_n(x)$ 是所有 n-次多项式中与 $f(x)$ 在该点"最接近"的. 即对和 $P_n(x)$ 不相等的每一个此时不超过 n 的多项式 $p(x)$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 是，成立 $|f(x)-p_n(x)|<|f(x)-p(x)|$.

定理 9.1（误差上界估计）设 $f(x)$ 在包含点 x_0 和 x 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数. 如 $\exists M>0$，使得对 x_0 和 x 之间的 t，都有 $|f^{(n+1)}(t)|\le M$，则对用 n 阶泰勒多项式 $P_n(x)$ 在 x_0 处近似 $f(x)$ 所产生的误差项 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ 有如下估计

$$\boxed{|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}$$

证明： 显然. □

例 9.1 如要估算 e 的值，我们利用 e^x 的马克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},\quad\theta\in(0,1)$$

令 $x=1$，则 $e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，其误差由 $\left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right|=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$ 控制. 由于

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

可知

$$\text{误差}=\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\right|<\frac{3}{(n+1)!}$$

特别地，当 $n=3$ 时，知误差 $< \frac{3}{4!} = \frac{1}{8} = 0.125$，差强人可. 如需误差 $< 10^{-6}$，即需

$$误差 = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

则可从中解出 $n=9$ 已足够，而此时

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718281$$

在实用中已经很好了.

注记 9.1 不难看出，对任意 x，e^x 马克劳林公式的余项 $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即得公式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

此即 e^x 的无穷和（展开）表示，或无穷级数（*infinite series*）表示. 类似地，我们可得 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的无穷级数表示

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

然后我们在 e^x 的无穷展开中做替换 $x \to ix$，其中 $i = \sqrt{-1}$. 并注意到 $i^2 = -1$，$i^3 = -i$，$i^4 = 1$，如次循环，则有

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)}_{\sin x} \end{aligned}$$

从而得到著名的**欧拉公式：** $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

10 函数的拐点与凸性

11 综合应用

11.1 函数性态与函数作图

11.2 曲线曲率

11.3 利用微分、泰勒展开做近似计算

11.4 方程近似解

11.5 中值定理相关

12 附录：高阶微分