第三讲：函数的极限与连续性

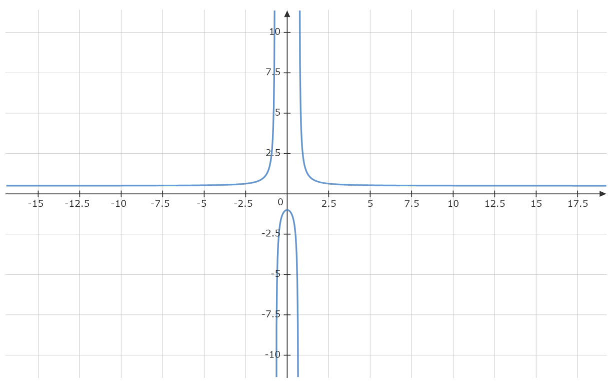
目录

第三讲：函数的极限与连续性

1　函数的极限

数列是特殊的函数，即定义域是 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ 的函数．特别地，如果数列 $\{x_n\}$ 可写成 $x_n = f(n)$ 的形式，则求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的问题相当于探讨函数 $f(x)$ 当 x 趋向正无穷 $+\infty$ 时的性状.

比如，我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$. 它对应为函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$ 当 $x \to \infty$ 时的取值可无限逼近于 $\frac{1}{2}$，即 $y = \frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的图像（曲线）的一条渐近线（*asymptotic line*）. 见下图所示.



我们可以仿照数列极限的定义逻辑而给出 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 的极限的定义.

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > a$（其中 a 为固定正常数）时有定义，若存在实数 A,$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0\,(X > a)$，使得当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 x 趋向无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A，或 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时收敛于 A. 记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

设函数 $f(x)$ 在 $x > a$（a 为固定常数）时有定义，若存在实数 A，$\forall \epsilon > 0, \exists X > a$，使得当 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 x 趋于正无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$；同理，设函数 $f(x)$ 在 $x < a$（a 为固定常数）时有定义，若存在实数 A，$\forall \epsilon > 0, \exists X < a$，使得当 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 x 趋于负无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

注记 1.1 在上定义的背景下，如果 $\forall A > 0,$，$\exists X > 0\,(X > a)$，使得当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x)| > A$，则称 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时是无穷大，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \infty$.

注记 1.2 由定义 *1.1* 可见：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例 1.1 我们用定义 *1.1* 严格证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$.

证明: 由于

$$\frac{x^2+1}{2x^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2(2x^2-1)}<\frac{3}{2x^2}\ (x>1)$$

故 $\forall\epsilon>0$，取 $X=\max\left\{1,\sqrt{\frac{3}{2\epsilon}}\right\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=$

$$=\left|\frac{x^2+1}{2x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2x^2}<\frac{3}{2X^2}<\epsilon \qquad \square$$

例 1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 极限不存在,这是因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

证明: $\forall\epsilon>0$，要使

$$-\frac{\pi}{2}-\epsilon<\arctan x<-\frac{\pi}{2}+\epsilon$$

只须 $x<\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\epsilon\right)$. 故取 $X=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)>0$，则当 $x<-X$ 时，有 $\left|\arctan x+\frac{\pi}{2}\right|<\epsilon$. 即证得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. $\square$

例 1.3 如果 k 是正整数，则不难推测 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$，下面是其严格证明.

证明: $\forall\epsilon>0$，取 $X=\epsilon^{\frac{1}{k}}$，则当 $|x|>X$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x^k}-0\right|=\frac{1}{x^k}<\frac{1}{X}=\epsilon \qquad \square$$

例 1.4 不难看出 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. 下严格证之.

证明: $\forall\epsilon\in(0,1)$，取 $X=\ln\frac{1}{\epsilon}>0$，则 $\forall x<-X$，有

$$0<e^x<e^{-X}<\epsilon \qquad \square$$

例 1.5 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=1\,(0<a<1)$

证明: $\forall\epsilon>0$，取 $X=\log_a\epsilon$（不妨设 $\epsilon<1$，则 $X>0$），则当 $x>X$ 时有

$$|a^x-0|=a^x<a^X=\epsilon \quad \square$$

一般地，对函数 $f(x)$，若关注它当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 取值的极限情形，则需引入 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 的概念.

注意，这里 $x = a$ **不必**在 $f(x)$ 的定义域之中，因为我们关注的是 $f(x)$ 当 x 可以无限接近 $x = a$ 的变化，而不在乎其是否在 $f(x)$ 处有定义.

记 $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ 为x_0 的 δ 领域;

记 $\mathring{U}(x_0, \delta) := (x_0 - \delta,\, x_0) \cup (x_0,\, x_0 + \delta)$ 为x_0 的去心 δ 领域.

定义 1.2 设 $f(x)$ 在点 a 的一个去心领域 $\mathring{U}(a)$ 内有定义，若存在实数 A，$\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 则称当 x 趋向于点 a 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A，或 $f(x)$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，或 $f(x) \to A$, $(x \to a)$.

注记 1.3 上定义表明，对任意小的 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 x 落入任意半径小于 δ 的 a 的去心领域中时，便可使 $f(x)$ 落入 $f(a)$ 的半径为 ϵ 的领域之内. 即 $\forall 0 < \delta' < \delta$，若 $x \in \mathring{U}(a, \delta')$，则 $|f(x) - A| < \epsilon$.

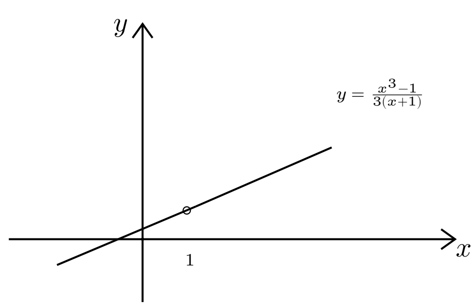
例 1.6 设 $f(x) = \frac{x^2-1}{3(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)}$.

分析： 当 $x \to 1$ 时，由于 x 只要求与 1 可无限接近（$\forall \epsilon > 0$，即要多接近就多接近），但不要求 $x = 1$，故在这一极限过程中，函数的表达式可化简为 $f(x) = \frac{x+1}{3}$. 也就是说，虽然函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有定义，但这不影响我们考察当 $x \to 1$ 时函数的极限，且在 x 无限接近 1 时，函数的取值与 $\frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$ 可无限接近，故我们期待 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{2}{3}$. 下严格证之.

证明： 当 $x \neq 1$ 时，有

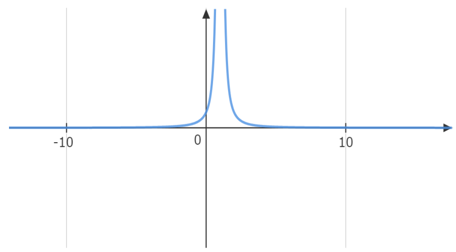
$$\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{x^2 - 1}{3(x-1)} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x+1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x-1|}{3}$$

故 $\forall \exists > 0$，要使 $\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x-1|}{3} < \epsilon$，只需 $|x - 1| < 3\epsilon$. 故取 $\delta = 3\epsilon$，则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时，有 $\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$. $\square$.



如果 $\forall A > 0$，$\exists \delta_0 > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时，有 $|f(x)| > A$，则称 $f(x)$ 在 a 处为无穷大，记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

例 1.7 对 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$，我们证明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$，由此 $x=1$ 是其图像的一条渐进线（见下图）.



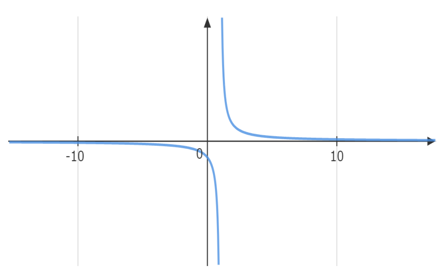
证明： $\forall A>0$，取 $\delta_0=\frac{1}{A}$，则当 $x\in \mathring{U}(1,\delta_0)$ 时，有 $|f(x)|=\frac{1}{(x-1)^2}>\frac{1}{\delta_0}>A$ $\square$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 反映了当 x 从 a 的两侧趋向于 a 时，函数取值的极限情形. 有时我们只关注当 x 从 a 的右边（$x>a$）或从 a 的左边（$x<a$）趋向于 a 是函数取值的极限情形. 故需下定义

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在点 a 的一个右领域 $(a,a+\delta_0)$ 内有定义，若存在实数 A，$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0\,(\delta<\delta_0)$，使得当 $a<x<a+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\epsilon$，则称 $f(x)$ 在 a 点的*右极限*（*right limit*）为 A，记为 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，或 $f(a+0)=A$. 类似地可定义*左极限*（*left limit*）$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$，或 $f(a-0)$ 的概念.

显然，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 都存在，且其值都等于 A.

例 1.8 设 $f(x)=\frac{1}{x-1}$，则由其图像可见，当 x 从 1 的右边无限接近 $x=1$ 时，$f(x)$ 变为正无穷大，而从 1 的左边无限接近 $x=1$ 时，$f(x)$ 为负无穷，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.



证明： $\forall A>1$，取 $\delta=\frac{1}{A}$，则当 $x\in(1,1+\delta)$，即 $1<x<1+\delta$ 时，有

$$f(x)=\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\delta}=A \quad \lim_{x\to 1+}f(x)=+\infty$$

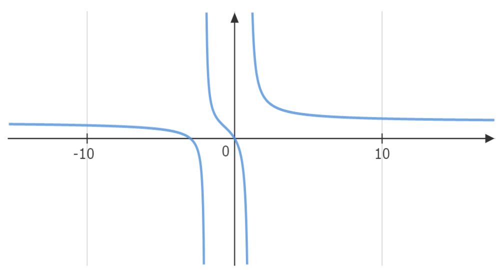
又 $\forall A>1$，取 $\delta=\frac{1}{A}$，则当 $x\in(1-\delta,1)$，即 $1-\delta<x<1$ 时，有

$$f(x)=\frac{1}{x-1}<-\frac{1}{\delta}=-A \quad \lim_{x\to 1-}f(x)=-\infty \qquad \square$$

例 1.9 对 $f(x)=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$，显然 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 下证

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to 1-}f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to -2+}f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to -1-}f(x)=-\infty$$

即 $x=1$ 和 $x=-2$ 是函数图像的两条纵向渐进线（*vertical asymptotic line*）.



证明： 只证明 $f(1+0)=+\infty$. 限制 $x\in(1,2]$，则 $\frac{x(x+3)}{x+2}\geq\frac{4}{3}$. 故当 $x\in(1,2]$ 时

$$\frac{x(x+3)}{(x+2)(x-1)}>\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}$$

则 $\forall A>0$, 为使 $f(x)>A$, 只需 $x-1<\frac{4}{3A}$, 即取 $\delta=\min\{\frac{4}{3A},1\}$, 则当 $x-1<\delta$ 时，有 $f(x)>A$. $\square$

定义： 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是 x 趋于 a 时的无穷小量，简称无穷小，记为 $f(x)=0(1)\ (x\to a)$.

显然，若在 a 的去心领域 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

例 1.10 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)$.

不难猜测极限为 6. 下面证明之. 为方便分析当 $x \to 1$ 时的表现，我们用变量 $u = x-1$ 将函数在 $x=1$ 附近重新整理为下面的形式（相当于，为更好地聚焦 $x=1$ 附近函数的表现，我们采用更恰当的坐标 u）

$$x^2+5 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 6$$

则易见当 $x \to 1$ 时，由于 $(x-1)^2$ 和 $x-1$ 皆是无穷小，故 $x^2+5 \to 0+0+6 = 6$. 故 $\forall \epsilon > 0$，我们希望找到 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x-1| < \delta$（即 $x \in \mathring{U}(1,\delta)$）时，有

$$|x^2+5-6| = |x^2-1| = (x+1)|x-1| < \epsilon$$

显然，当 x 在 1 的一个去心领域内变动时，$x+1$ 总是有界量，而 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时是无穷小. 则为方便估值，不妨将 δ 一开始就定于一个范围内，比如 $\delta \le 1$（这不影响我们的证明，因为我们只关心当 x 无限趋于 1 时函数的变动情况）. 在此限定之下，$x \le 1+\delta \le 2$，即 $|x+1| \le 3$. 从而 $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$，则当 $x \in \mathring{U}(1,\delta)$ 时，有

$$|x^2+5-6| = |x^2-1| = (x+1)|x-1| < 3|x-1| < 3\delta < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad \square$$

例 1.11 求极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}+1} - \sqrt{\frac{1}{1-x}-1}\right)$

分析： 函数表达式较复杂，不易化简，为此我们利用新变量 $y := \frac{1}{1-x}$，将函数表达为

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}$$

显然，当 $x \to 1^-$ 时，$y \to +\infty$，则不难看出所求极限为 0. 严格证明如下：

$\forall \epsilon > 0$，取 $M = 1 + \frac{4}{\epsilon^2}$，则当 $y > M$ 时，成立

$$0 < \sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}} < \frac{2}{\sqrt{y-1}} < \epsilon \quad \square$$

2 海涅定理，函数极限的性质及运算法则

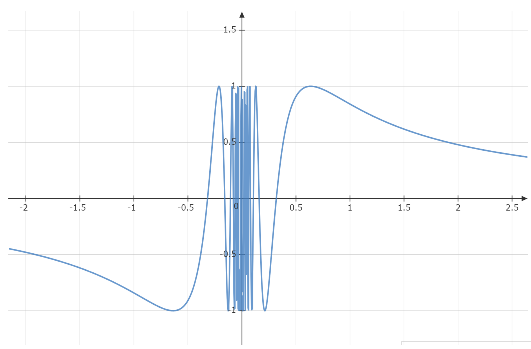
上节例 *1.11* 中的极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}(\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1})$ 与第一讲的例 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ 的结构和结果都是一致的. 这不是巧合，其关联机理凸显于下定理之中.

定理 2.1（海涅（*Heine*））$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充分必要条件是对**任意**满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $x_n \ne x_0\,(n = 1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

海涅定理建立了函数极限同数列极限之间的关联，利用该定理，可利用数列极限求

函数极限，也可利用函数极限求数列极限. 常利用海涅定理来证明函数极限不存在.

例 2.1 对函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，它当 $x\to 0$ 时振荡频率越来越高，以致于不能让它的值与某个固定的值可无限接近.



利用海涅定理，假若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则对任意 $x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在且都相等. 但可取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}, y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，显然它们的极限都是 0, 但 $f(x_n)=\sin 2\pi n=0\to 0$; $f(y_n)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1\to 1$. 从而与假设矛盾，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例 2.2 对迪利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 我们利用海涅定理证明它在任何一点都不存在极限. 给定 $x_0\in\mathbb{R}$，由于 $\mathbb{Q}$ 的稠密性，可找 $\mathbb{Q}$ 中数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x_0$，则 $D(x_n)=1\xrightarrow{n\to\infty}1$；同理，可取一数值为无理数的数列 $\{y_n\}$ 收敛于 x_0，但 $D(y_n)=0\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故函数 $D(x)$ 在任意 $x_0\in\mathbb{R}$ 都不存在极限. $\square$

海涅定理的证明：“$\Longrightarrow$” 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $\forall\epsilon>0, \exists\,\delta>0$，使得 $\forall x\in\mathring{U}(a,\delta)$，有 $|f(x)-A|<\epsilon$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $x_n\neq a\,(n=1,2,\cdots)$，故对上述 $\delta>0$，$\exists\,N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，成立 $0<|x_n-a|<\delta$. 故 $\forall n>N$，成立 $|f(x_n)-A|<\epsilon$.

“$\Longleftarrow$” 用反证法,假设 $f(x)$ 在 a 处的极限不存在,即 $\exists\,\epsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists\,x\in\mathring{U}(a,\delta)$, 有 $|f(x)-A|\geq\epsilon_0$. 故取一列 $\delta_n=\frac{1}{n}$，从而有

$$
\begin{gathered}
\text{对 }\delta_1=1,\ \exists\,x_1\in\mathring{U}(a,\delta_1),\ \text{使得 }|f(x_1)-A|>\epsilon_0;\\
\cdots\quad\cdots\\
\text{对 }\delta_k=\tfrac{1}{k},\ \exists\,x_k\in\mathring{U}(a,\delta_k),\ \text{使得 }|f(x_k)-A|>\epsilon_0;\\
\cdots\quad\cdots
\end{gathered}
$$

即找到趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$，但 $f(x_n)$ 不以 A 为极限，矛盾. $\square$

总利用定义证明极限是繁琐的，在实践中常利用极限的性质及其运算法则来计算极限. 函数极限的基本性质和运算法则和数列的情形是相似的，其证明的思路和方法也是一致的.

命题 2.1（唯一性）若 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，又 $\lim_{x\to a} f(x) = B$，则 $A = B$.

证明： $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$, 当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x)-A| < \epsilon/2$; 当 $0 < |x-a| < \delta_2$ 时，有 $|f(x) - B| < \epsilon/2$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \square$$

另证： 利用海涅归结定理：由于 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} f(x) = B$, 根据海涅归结定理, 对任意满足 $x_n \ne a$, 且 $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ 的数列, 皆有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$, 问题则转换为数列极限的唯一性了. $\square$

命题 2.2（局部有界性）若 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，则 $\exists \delta > 0$，使得函数在 $\mathring{U}(a, \delta)$ 内有界.

证明： 由于 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, 故对 $\epsilon = 1, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)-A| < 1$, 即当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时，有 $A - 1 < f(x) < A + 1$. 取 $M = \max\{|A-1|, |A+1|\}$，则当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时，成立 $|f(x)| < M$，即有界. $\square$

命题 2.3（局部保序性）设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x) = B$，且 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时，成立 $f(x) > g(x)$.

证明： 取 $\epsilon = \frac{A-B}{2}$，由 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，知 $\exists \delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \exists$，即有 $f(x) > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$. 同理，由 $\lim_{x\to a} g(x) = B$，知 $\exists \delta_2 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_2$ 时，有 $|g(x) - A| < \exists$，即有 $g(x) < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$ $\square$

推论 2.1（局部保号性）设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，且 $A > 0\,(A < 0)$，则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时，成立 $f(x) > \frac{A}{2} > 0\,(f(x) < \frac{A}{2} < 0)$.

证明： 在命题 2.2 的证明中，令 $B = 0$. $\square$

推论 2.2 若 $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 有 $f(x) \ge 0\,(f(x) \le 0)$, 且 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, 则必有 $A \ge 0\,(A \le 0)$.

证明： 假设 $A < 0$，由局部保号性知，在 a 的一某去心领域内有 $f(x) < 0$，这与 $f(x)$ 在 $\mathring{U}^0(a, \delta)$ 内小于零相矛盾（总可让“某个去心领域”包含于 $\mathring{U}(a, \delta)$ 之中） $\square$

定理 2.2（函数极限的运算法则）设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，$h(x)$ 在 a 的某个去心领域内有界，则有

1. $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)+lg(x)]=kA+lB$，其中 $k,l\in\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=AB$;
3. 若 $A=0$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x)=0$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$;
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{k}{m}}=A^{\frac{k}{m}}$，其中 k,m 为正整数，m 为偶数时 $f(x)\geq 0$（当 $k<0$ 时，通过 $[f(x)]^{\frac{k}{m}}=\frac{1}{[f(x)]^{-\frac{k}{m}}}$ 解决，故结论对有理数幂指数都成立）.

证明： 完全类似于对数列极限情形的证明. 记 $\alpha:=f(x)-A$，$\beta:=g(x)-B$. 则 α 和 β 都是当 $x\to a$ 时的无穷小量. 有

$$\text{对 } 1.\ kf(x)+lg(x)=k(A+\alpha)+l(B+\beta)=kA+lB+k\alpha+l\beta\xrightarrow{x\to a}kA+lB$$

$$\text{对 } 2.\ f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta\xrightarrow{x\to a}AB$$

对 3. 当 $f(x)$ 是无穷小量，$h(x)$ 为有界量时，即 $\forall\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0,\exists\,M>0$，使得当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，有 $|h(x)|\leq M$，且 $|f(x)|<\frac{\epsilon}{M}$，故有 $|f(x)h(x)|<\frac{\epsilon}{M}M=\epsilon$

$$\text{对 } 4.\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}=\frac{\frac{A}{B}+\frac{\alpha}{B}}{1+\frac{\beta}{B}}\xrightarrow{x\to a}\frac{\frac{A}{B}+0}{1+0}=\frac{A}{B}$$

对 5. 当 $m=1$ 时, 对正整数 k, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k\overset{2}{=\!=}A^k$; $k=0$ 时, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^0=\lim\limits_{x\to a}1=1=A^0$；对负整数 k，$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{[f(x)]^{-k}}\overset{\text{由 }4}{=\!=\!=}\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{-k}}\overset{\text{由正整数情形}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{A^{-k}}=A^k$.

当 $k=1$ 时，对正整数 m，我们证明 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{A}$.

- $A=0$ 时, $\forall\epsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leq\epsilon^m$, 则当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$, 有 $|f(x)^{\frac{1}{m}}|<(\epsilon^m)^{\frac{1}{m}}=\epsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{1}{m}}=0=A^{\frac{1}{m}}$.
- $A\neq 0$ 时，在公式 $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+b^{m-1})$ 中取 $a=\sqrt[m]{f(x)}$，$b=\sqrt[m]{A}$，得

$$\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[m]{A}=\frac{f(x)-A}{\sqrt[m]{[f(x)]^{m-1}}+\sqrt[m]{[f(x)]^{m-2}}A+\cdots+\sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

$$\Longrightarrow \qquad |\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[m]{A}|<\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

$\forall \epsilon>0, \exists \delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\sqrt[m]{A^{m-1}}\epsilon$，结合上面的放缩，便知 $\forall\epsilon>0$，当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，成立 $|\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[m]{A}|<\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}}<\epsilon$

由上面的分类讨论，知对任意的有理数 $\frac{k}{m}$ (k 为任意整数 m 为正整数)，都有

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{k}{m}}=\left[\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{1}{m}}\right]^k=\left(A^{\frac{1}{m}}\right)^k=A^{\frac{k}{m}} \qquad \square$$

问题： 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，那么对任意实数 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^\alpha=A^\alpha$ 是否成立?

例 2.3 对有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 P,Q 是多项式函数，设 $Q(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

设 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$；$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$. 若 $b_0\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0}{b_0}$$

另外，当 $x\to\infty$ 时，类似与数列极限的情形，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & n<m\\ \frac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$

定理 2.3 (夹逼定理) 若存在 a 的去心领域 $\mathring{U}(a,\delta)$, 使得在其中成立 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

证明： 利用海涅归结定理知，对任意满足 $x_n\neq a$ 且 $x_n\to a$ 的数列，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)=A$. 当 n 足够大时，可使 x_n 落入 $\mathring{U}(a,\delta)$ 中，故当 n 足够大时，有 $g(x_n)\leq f(x_n)\leq h(x_n)$，则由数列的夹逼定理可证函数的夹逼定理. $\square$

定理 2.4 (单调有界函数单侧极限存在定理) 若 $f(x)$ 在点 a 的某个右领域 $(a,a+\delta)$ 内单调有界，则其右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在；若 $f(x)$ 在点 a 的某个左领域 $(a-\delta,a)$ 内单调有界，则其左极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 存在.

证明： 不妨设 $f(x)$ 单调增加（单调减少的情形类似可证)，下面证明：$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\inf_{x\in(a,a+\delta)}\{f(x)\}:=m$. $\forall\epsilon>0$, 由于 $m+\epsilon$ 不是 $\{f(x)\mid x\in(a,a+\delta)\}$ 的下界，故存在 $x_0\in(a,a+\delta)$，使得 $f(x_0)<m+\epsilon$. 由 $f(x)$ 的单调性知，当 $x\in(a,x_0)$ 时，有 $f(x)<f(x_0)<m+\epsilon$，但显然，有 $f(x)>m-\epsilon$. 即当 $x\in(a,x_0)$ 时成立 $m-\epsilon<f(x)<m+\epsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to a^+}=m$. $\square$

推论 2.3 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调有界，则 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在.

在计算极限时，我们常引入新的变量以便简化极限表达式，或将其转变为已知极限，从而方便我们的计算. 且看下例

例 2.4 为计算 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$, 可令 $u=x+1$, 则当 $x\to-1$ 时, $u=x+1\to0$, 且

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}&=\frac{1}{u}-\frac{3}{(u-1)^3+1}=\frac{1}{u}-\frac{3}{u^3-3u^2+3u}\\&=\frac{1}{u}\left[1-\frac{3}{u^2-3u+3}\right]=\frac{1}{u}\frac{u^2-3u}{u^2-3u+3}=\frac{u-3}{u^2-3u+3}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{u\to0}\frac{u-3}{u^2-3u+3}=\frac{-3}{3}=-1$$

令 $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}$，令 $x=u-1$，则上计算过程相当于 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{u\to0}f(x(u))$. 其合理性由上计算可了解，并由下定理保障.

定理 2.5（变量替换）若 $\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, 且当 $x\in\mathring{U}(a)$ 时, $\varphi(x)\neq b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))=A$.

证明: 由 $\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$ 知, $\forall\epsilon>0$, $\exists\sigma>0$, 当 $0<|u-b|<\sigma$ 时, 有 $|f(u)-A|<\epsilon$. 又因 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, 知对上面的 $\sigma>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\sigma$ 时, 成立 $|\varphi(x)-b|<\sigma$. 综合可知，当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，成立 $|f(\varphi(x))-A|<\epsilon$. □

注记 2.1 定理 *2.5* 中的条件：在 a 的一去心领域内，$\varphi(x)\neq b$ 是必要的，因为函数 $f(u)$ 未必在 $u=b$ 处有定义.

例 2.5 证明：$\forall x_0>0$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$. 即自然对数函数在其定义域内任意一点处的极限都存在，且等于函数在该点的值.

证明: 利用变量 $u=\frac{x}{x_0}$，$\ln x=\ln\left(\frac{x}{x_0}x_0\right)=\ln\frac{x}{x_0}+\ln x_0=\ln u+\ln x_0$，故只需 $\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$. 它成立是因为 $\forall\epsilon>0$，为使 $|\ln u|<\epsilon$，只需 $e^{-\epsilon}<u<e^{\epsilon}$，即 $-e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1)<u-1<e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1)<e^{\epsilon}-1$. 取 $\delta=e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1)$，则可使 $0<|u-1|<\delta$ 时，成立 $|\ln x|<\epsilon$ □.

注记 2.2 对一般对数函数 $\log_a x$，由于 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，故知对任意 $x_0>0$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$.

例 2.6 证明：$\forall x_0\in\mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$ $(a>0)$

证明: 当 $a=1$ 时结论显然成立；假设当 $0<a<1$ 时，结论成立，则当 $a>1$ 时，

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}}\frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to} x_0(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^{x_0}} = a^{x_0}$$

从而只需表明当 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. 又由于 $a^x = a^{x_0}a^{x-x_0}$，利用变量替换 $u=x-x_0$，则问题可转化为证明：当 $0<a<1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

由于函数 a^x 在 $(0,1)$ 内单调有界，故由定理 *2.4* 知极限 $\lim\limits_{x\to 0} a^x$ 存在，为计算它，根据海涅归结定理，取趋向于 0 的数列 $\{\frac{1}{n}\}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. $\square$

3 两个基本极限及极限计算举例 I

下面两个极限有基本的重要性，不仅其本身重要，且很多极限问题都能通过转化到它们而得以求解.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

第二讲，第八节，例 *8.9* 中我们证明了不等式：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，有 $\sin x < x < \tan x$. 即有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad 0<|x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2}$$

则由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

注记 3.1 上面用到了：$0 \leq 1-\cos x \leq \frac{x^2}{2}$，由此得知 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

对第二个极限，只需表明：当 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. 因为当 $x\to-\infty$ 时，利用变量替换 $u=-x$，得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{u-1}\right)^u =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right) = e$$

当 $x>1$ 时，因为 $[x] \leq x < [x]+1$，故有

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{[x]}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

令 $x \to +\infty$，左边

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1+\frac{1}{[x]+1}} = e$$

右边

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e$$

由夹逼定理知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \square$$

注记 3.2 令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，故上极限的另一种常见形式是

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

例 3.1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

例 3.2 证明: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}}$.

证明： $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

例 3.3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}$$

例 3.4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

例 *3.2* 表明分母有极限 $\frac{1}{2}$，下证分子也有极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

例 3.3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{5}{x}}$.

$$\textbf{解：}\lim_{x\to 0}\left((1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}\right)^{\frac{-3x}{1}\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}\right)^{-15}$$

$$\xlongequal{t=-3x}\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-15}=e^{-15}$$

极限计算举例 I

例 3.4 证明: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$

证明： 令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to\infty$，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{t\to\infty}t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

令 $u=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$，则当 $t\to\infty$ 时，$u\to e$，又由例 *2.5* 知道 $\lim\limits_{u\to e}\ln u=\ln e=1$

例 3.4′ 证明: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0)}$

证明： 令 $a^x-1=y$，则当 $x\to 0$ 时，有例 *2.6* 知 $y\to 0$，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=(lna)\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\xlongequal{\text{例 }3.4}\ln a$$

例 3.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\ (a,b\geq 0)$

分析： 当 $n\to\infty$，$\sqrt[a]{a},\sqrt[n]{b}\to 1$，所以该极限的形式是 1^∞. 这令我们想起了基本的极限 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$，它也是 1^∞ 形式. 受此启发，我们尝试将极限写成基本极限的形

式，即考虑变形如下

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right)^{\left(\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}\right)}\right]^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\xlongequal{\text{例 } 3.4'}\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$

注记 3.3 上面最后一步用到了结论，如果 $f(x)>0, g(x)$ 当 $x\to a$ 时极限都存在，且 $\lim_{x\to a}f(x)=A$，$\lim_{x\to a}g(x)=B$，则 $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B$. 这是因为 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，且 $\ln f(x)\to\ln A$，则由极限运算法则的乘法规则可知：$f(x)^{g(x)}\to e^{B\ln A}=A^B$

例 3.6 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

分析： 难处理的部分时 $\sqrt[n]{1+x}$，不如用 $t=\sqrt[n]{1+x}$ 代之，则原式变换为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{1+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\cdots+\binom{n}{n}t^n-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\binom{n}{1}+t\left(\binom{n}{2}+\cdots\right)}=\frac{1}{\binom{n}{1}}=\frac{1}{n}$$

例 3.7 求极限 $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$. 由于当 $x\neq 0$ 时成立：$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq x$. 故

$$\begin{cases}1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1 & x>0\\ 1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq 1 & x<0\end{cases}$$

故由夹逼定理知 $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

例 3.7 求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\tan x}$.

分析： 极限类型为 1^∞，故考虑将其写成基本极限 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 的形式.

解： 令 $\sin x = 1+t$，则当 $x \to \frac{\pi}{2}^-$ 时，$t \to 0^-$. 则有 $\tan x = \frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}$. 从而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}} = \lim_{t\to 0^-}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{t(1+t)}{\sqrt{1-(1+t)^2}}}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\sqrt{\frac{t(1+t)^2}{-2-t}}} = e^0 = 1$$

例 3.8 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+x+1}$

解： $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\right)^{x^2+x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\left(\frac{-2}{x^2+1}\right)\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right]^{\frac{-2}{x^2+1}(x^2+x+1)} = e^{-2}$$

例 3.9 求常数 a，使得 $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ x^2+a & x\le 0 \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时极限存在.

解： $g(x)$ 在 $x=a$ 处的极限存在当且仅当其在 $x=a$ 处的左、右极限都存在且相等.

$$\lim_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0}(x^2+a) =; \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$$

故当且仅当 $a=0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 存在，且此时 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

例 3.10 证明：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sin x + b\cos x)$ 存在，则必有 $a=b=0$.

证明： 设 $f(x) = a\sin x + b\cos x$. 假设 a, b 不全为 0, 不妨设 $b\neq 0$. 取 $x_n = n\pi$, 有海涅归结定理知 $\{f(x_n)\}$ 亦收敛，但此时 $f(x_n) = b\cos n\pi = b(-1)^n$. 由此可知 $b=0$. 矛盾. 该矛盾表明 $a=b=0$. □

4 无穷小量与无穷大量的阶及其比较

无穷小量是**动态量**，虽然最终趋向是一致的，但其趋向于零的过程可以各有千秋，比如当 $x\to 0$ 时，$x, x^2, \sin x, e^x-1, 1-\cos x$ 等都是无穷向量，那么该如何区分它们（当 x 无限接近 0 的过程中）呢？

直观上来看, x^2 要比 x 趋向零的速度更快, 比如令 $x=\frac{1}{n}$ 的“步调”趋向零（$n\to\infty$,

则 x^2 以 $\frac{1}{n^2}$ 的“步调”趋向零，显然 x^2 以更快的速度趋向零，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

同理 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 表明 $\sin x$ 和 x 趋于 0 的速度也是一样的. 但由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\frac{x}{\sin x}=(\lim_{x\to 0}x)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)=0$$

故 x^2 趋向于 0 的速度必 $\sin x$ 趋向于 0 的速度要快. 但由例 *3.2* 知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，所以 $1-\cos x$ 和 $\frac{x^2}{2}$ 趋向于 0 的速度是一致的.

定义 4.1 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x\to a$ (a 可为无穷) 时的无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=l$

1. 若 $l=0$,则称 $x\to a$ 时,$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小(*higher order infinitesimal*), 记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$ $(x\to a)$;
2. 若 $l\neq 0$,则称 $x\to a$ 时,$\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小,记为 $\beta(x)=O(\alpha(x))$ $(x\to a)$;
3. 特别地，若 $l=1$，则称 $x\to a$ 时，$\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 等价的（*equivalent*）无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(x\to a)$.

注记 4.1 当 $l\neq 0$ 时，$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是 $x\to a$ 时的有界量. $l=1$ 时，即 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(x\to a)$，也称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 当 $x\to a$ 时具有相同的渐进性态.

命题 4.1 $x\to a$ 时，$\alpha(x)\sim\beta(x)$ 当且仅当 $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$

证明: “$\Leftarrow$”: 若 $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1+\lim_{x\to a}\frac{o(\beta(x))}{\beta(x)}=1+0=1,\ \text{即 } \alpha(x)\sim\beta(x)$$

“$\Rightarrow$”: 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(x\to a)$，即 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则 $\alpha(x)=\beta(x)+(\alpha(x)-\beta(x))$，且

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=1-1=0\qquad\square$$

例 4.1 当 $x\to 0$ 时，$x^2=o(x)$，一般地 $x^n=o(x^m)$ $(n>m)$

例 4.2 当 $x\to 0$ 时,$\boxed{\sin x\sim x}$ $\boxed{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}}$ $\boxed{\tan x\sim x}$ $\boxed{\arcsin x\sim\arctan x\sim x}$.

例 4.3 例 *3.4* 及例 *3.4′* 表明：当 $x \to 0$ 时

$$\boxed{\ln(1+x) \sim x} \qquad \boxed{a^x - 1 \sim (\ln a)x}$$

特别地，$\boxed{e^x - 1 \sim x}$

例 4.4 例 *3.6* 表明：当 $x \to 0$ 时，$\boxed{\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}}$ 一般地，有

$$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \to 0)}$$

证明（不太严格的）： 首先可证当 α 是有理数时成立；当 α 是无理数时，取一收敛于 α 的有理数数列 $\alpha_n t \to \alpha$，在 $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^{\alpha_n}}{x} = \alpha_n$ 两边同时令 $n \to \infty$，得结论对无理数 α 也成立. □

命题 4.2 等价无穷小是等价关系（*equivalent relation*），即

1. 反身性：$\alpha(x) \sim \alpha(x)$；
2. 对称性：如 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\beta(x) \sim \alpha(x)$；
3. 传递性：如 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，且 $\beta(x) \sim \gamma(x)$，则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

我们把相互等价的无穷小量看做一类，该如何对某一极限过程中所有的无穷小量进行分类呢？首先，注意到：当 $x \to a$ 时 $(x-a)^k \, (k \geq 1)$ 是标准的（k 阶）无穷小，常用其衡量无穷小量的阶，即有如下定义

定义 4.2 如 $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$，且 $\exists$ 常数 $c \neq 0$，及整数 $k > 0$，使得

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^k} = c$$

即当 $x \to a$ 时，$\alpha(x)$ 与 $(x-a)^k$ 同阶，则称 $\alpha(x)$ 是k 阶无穷小（*k-th order infinitesimal*），并称 $c(x-a)^k$ 为其主部（*principal part*）. 此时，有

$$\alpha(x) = \underbrace{c(x-a)^k}_{\text{主部}} + o((x-a)^k)$$

且 $o((x-a)^k)$ 是**更高阶**的无穷小，即 $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k} = 0}$

故可按无穷小的阶来对无穷小进行分类，即将有共同阶的无穷小看成是一类，其中任何一个无穷小可代表该类. 我们常用 $(x-a)^k$ 来代表 $x \to a$ 时的 k 阶无穷小的类.

例 4.5 $a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n\ (a_k \neq 0)$ 是 $x \to 0$ 时的 k 阶无穷小，$a_k(x-a)^k$ 是其主部. 换言之

$$a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n \sim a_k(x-a)^k\ (x \to a)$$

例 4.6 $\sin x$ 是 $x \to 0$ 时的一阶无穷小，x 是其主部；$1-\cos x$ 是 $x \to 0$ 时的二阶无穷小，$\frac{x^2}{2}$ 是其主部.

例 4.7 考察 $\tan x - \sin x$，它是 $x \to 0$ 时的无穷小量，我们求其阶及其主部. 设其阶是 k，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k \cos x}$$

$$\xlongequal{k=3} \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\right] = \frac{1}{2}$$

即 $\tan x - \sin x$ 是 $x \to 0$ 时的三阶无穷小，且其主部是 $\frac{x^3}{2}$，换言之

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)\ (x \to 0)$$

例 4.8 $\ln x - \ln a$ 是 $x \to a\,(a > 0)$ 时的几阶无穷小?

解: 假设阶是 k，则应有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k}$ = 非零常数. 但

$$\frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{(x-a)^k} = \frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right]}{(x-a)^k} \xlongequal{t:=\frac{x}{a}-1} \frac{\ln(1+t)}{a^k t^k}$$

由 $\ln(1+x) \sim x\ (x \to 0)$ 知：$k = 1$. 此时

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{at} = \frac{1}{a}$$

故 $\ln x - \ln a$ 是 $x \to a\,(a > 0)$ 时的 1 阶无穷小，且其主部是 $\frac{x-a}{a}$.

例 4.9 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}$ 是 $x \to 0$ 时的几阶无穷小?

解: $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} = \frac{2\tan x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}$. 当 $x \to 0$ 时，分母为有界量，而分子中 $\tan x \sim x$，故知无穷小的阶是 1，且因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

即其主部是 x.

类似地，我们有无穷大的阶及其分类概念.

定义 4.3 如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是 $x \to a$（a 可为 $\pm\infty$，亦可只考虑左、右极限）时的无穷大量，即极限等于 ∞，若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = L$，则

1. 若 $L = \infty$，则称 $u(x)$ 是比 $v(x)$，在 $x \to a$ 时的高阶无穷大（或 $v(x)$ 是比 $u(x)$ 低阶的无穷大）；
2. 若 $L < \infty$，即 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在 x 的去心领域内有界，则称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是当 $x \to a$ 时的同阶无穷大，记为 $u(x) = O(v(x))$；
3. 特别地,若 $L = 1$,则称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是当 $x \to a$ 时的等价无穷大,记为 $u(x) \sim v(x)$.

注记 4.2 当 $u(x)$ 是无穷大时，$\frac{1}{u(x)}$ 是（同一个极限过程下的）无穷小，故关于无穷大的讨论可转换为关于无穷小的讨论，反之亦然.

当 $x \to a$ 是，最基本的（k 阶）无穷大是 $\frac{1}{(x-a)^k}$

定义 4.4 设 $u(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷大量，则如果 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^k u(x) = c$（$c$ 为非零常数），则称 $u(x)$ 是 $x \to a$ 时的 k 阶无穷大，并称 $\frac{c}{(x-a)^k}$ 是其（当 $x \to a$ 时的，或 $x = a$ 附近的）主部. 显然，此时有 $u(x) \sim \frac{c}{(x-a)^k}$.

注记 4.3 当 $x \to \infty$ 时，x^k 是基本的 k 阶无穷大. 假设 $u(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷大，若 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x^k} = c$ (非零常数)，则称 $u(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的 k 阶无穷大，且 $\frac{x^k}{c}$ 是其主部. 显然，此时有 $u(x) \sim \frac{x^k}{c}$.

例 4.10 当 $x \to \infty$ 时，$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ 是 n 阶无穷大，且其主部为 $a_n x^n$，即 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \sim a_n x^n$ $(x \to \infty)$.

例 4.11 判断 $x^3 \sin\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的阶.

解: 由于当 $x \to \infty$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 是有无穷小量，其 $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. 故其作为无穷大量的阶应等同于 $x^3\frac{1}{x} = x^2$ 的阶，即阶为 2，下面严格验证之.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

例 4.12 $\forall \alpha > 0$，当 $x \to \infty$ 时，x^α 显然是无穷大量；另外，$\ln x$ 也是 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，我们比较一下它们趋于无穷的速度.

解: 对任意 $\alpha > 0$，都有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \xlongequal{y:=x^\alpha} \frac{1}{\alpha} \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{\alpha} 0 = 0$$

这说明: 对任意 $\alpha > 0$, $\ln x$ 当 $x \to +\infty$ 趋于正无穷的速度都小于 x^α 趋于正无穷的速度, 故 x^α $(\alpha > 0)$ 是比 $\ln x$ 更高阶的无穷大. 也可以说 $\ln x$ 作为 $x \to +\infty$ 时的无穷大是**不存在**阶的, 即没有最大阶.

注记 4.4 对 $\ln \frac{1}{x}$，当 $x \to 0^+$ 时，它是无穷大量，下面的计算说明，它当 $x \to 0^+$ 时也不存在阶.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$$

注记 4.5 上面利用到了 $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$，它可由如下考虑看出. 由于 $\frac{\ln y}{y}$ 当 x 足够大时单调减少有下界，故其极限存在. 从而 $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{\frac{1}{y}}$ 亦存在，且其值等于 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$（见《第二讲》例 *4.3*）. 由此可知

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = \lim_{y\to+\infty} \ln y^{\frac{1}{y}} = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \ln 1 = 0$$

例 4.12′ 在例 *4.12* 中的计算中, 令 $x = e^u$, 则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = 0$$

取 $\alpha = 1$, 则当 $u \to +\infty$ 时, e^u 相比于 u, 是更高阶的无穷大. 事实上, 可证明: 当 $x \to \infty$ 时, e^x 没有阶, 即当 $x \to +\infty$ 时, 对任意 $\beta > 0$, 它比 x^β 趋向无穷大的速度都要快.

证明: 由于

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{(u^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{(e^u)^\alpha} = \left(\lim_{u\to+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{e^u}\right)^\alpha = 0 \quad \xRightarrow{\beta=\frac{1}{\alpha}} \quad \lim_{u\to+\infty} \frac{u^\beta}{e^u} = 0 \quad \square$$

注记 4.6 无穷小 (大) 的阶可以不是正整数. 比如对 $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, 当 $x \to +\infty$ 时

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

故 $u(x) \sim \sqrt{x}$ $(x \to +\infty)$. 而当 $x \to 0^+$ 时

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = 1$$

故 $u(x) \sim \sqrt[4]{x}$ $(x \to 0^+)$.

5 无穷小（大）等价代换与极限计算举例 II

例 5.1 我们知道：若 $a_0, b_0 \neq 0$，下极限成立

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^l + a_1x^{l-1} + \cdots + a_l}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & 若\, l = m; \\ 0, & 若\, l < m; \\ \infty, & 若\, l > m. \end{cases}$$

我们也知道当 $n \to \infty$ 时

$$a_0x^l + a_1x^{l-1} + \cdots + a_l \sim a_0x^l; \qquad b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m \sim b_0x^m$$

而

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^l}{b_0x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & 若\, l = m; \\ 0, & 若\, l < m; \\ \infty, & 若\, l > m. \end{cases}$$

即在计算极限时，我们用分子、分母的用其等价无穷大替换了.

例 5.2 在计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 时，如果直接用等价替换 $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$，则将得到极限为 0 的错误论断. 产生这种错误的根源在于：$\sin x - \tan x$ 的无穷小阶要大于 $\sin x$ 和 $\tan x$ 的阶，所以如果贸然代替，则会产生代替后的无穷小的阶小于原无穷小的阶的情况，从而产生错误（类似于用放缩发证明极限时放缩过度的情形）. 也可从运算角度理解为：$\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{(x+o(x))-(x+o(x))}{x^3} = \frac{o(x)-o(x)}{x^3}$，但我们只知道分子上的两个 $o(x)$ 都是大于 1 阶的无穷小，但其差完全不能确定，即直接替换太粗糙了，不能给出更有效的关于极限状态的信息.

解：

$$\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$$

由于 $\sin x \sim x$，$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$，故尝试用 x 替代 $\sin x$；用 $\frac{x^2}{2}$ 代替 $1 - \cos x$，可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\frac{x^2}{2}}{x^3 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

即得到了有限的极限，故必是原极限的值. 这是因为：当 $x \to 0$ 时，分母的无穷小是三阶的 x^3，而分子上

$$\sin x(1 - \cos x) = (x + o(x))\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + \underbrace{xo(x^2) + \frac{x^2}{2}o(x^2) + o(x)o(x^2)}_{=o(x^3)} = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

则

$$\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \frac{x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

注记 5.1 由上例可知，对于无穷小相减（加）时，往往需要用更高阶的无穷小来替代各无穷小，才能保障计算的正确性. 比如，之后我们会知道，当 $x \to 0$ 时，对于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 有更精确的估计：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

从而

$$\sin x - \tan x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \underbrace{o(x^3 - o(x^3))}_{=o(x^3)} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

则

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

例 5.2 的解采用了将和差的形式化为乘除形式，然后利用无穷小等价替换，使得分子上无穷小的阶不小于分母上无穷小的阶. 其合理性由下定理给出.

定理 5.1 设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\widetilde{\alpha(x)}$, $\widetilde{\beta(x)}$ 都是同一自变量变化过程中的无穷小，并且 $\alpha(x) \sim \widetilde{\alpha(x)}$，$\beta(x) \sim \widetilde{\beta(x)}$，若 $\lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}$ 存在，则

$$\lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}$$

证明:

$$\lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \left(\frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}} \cdot \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)} \cdot \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}\right) =$$

$$\left(\lim \frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}}\right)\left(\lim \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)}\right)\left(\lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}\right) = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \quad \square$$

极限计算举例 II

例 5.3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}(1-\cos x)}{x\ln(1+2x)}$.

解: $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x}(1-\cos x)}{x\ln(1+2x)}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x(2x)}=\frac{e}{4}$

例 5.4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$

$$\text{解：}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\csc^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\csc^2 x\ln(\cos x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例 5.5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

分析: 已知 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (x\to 0)$，即 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$. 又 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$，即 $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. 故

$$\text{解：}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-\sqrt[3]{1+\cos x-1}}{x^2+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{\cos x-1}{2}+o(\cos x-1)\right]-\left[1+\frac{\cos x-1}{3}+o(\cos x-1)\right]}{x^2+o(x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)+o(x^2)\right)}{x^2+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{6}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{0(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+0}{1+0}=-\frac{1}{12}$$

例 5.6 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}$

分析: 如果直接用替代: $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$，将得到极限为零的错误结论. 这是因为，分子上的无穷小是 1 阶，小于分母的无穷小阶. 我们将分子化为乘积的形式

$$\text{解：}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=\frac{(1+x)-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}\xrightarrow{x\to 0}-\frac{1}{8}$$

注记 5.2 如果要用无穷小等价替换解上题，需要分子上至少是 2 阶无穷小. 已知 $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}\ (x\to 0)$，即 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$. 为找到更高阶的无穷小形式，我

们需确定最小的 k，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^k}=c\,(\text{非零常数})$$

因为：$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^k\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{4}}{x^k\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$$

$$\overset{k=2}{=\!=\!=}-\frac{1}{8}$$

即当 $k=2$ 时，极限值 $c=-\frac{1}{8}$. 从而有

$$\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-1-\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{8}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1}=\frac{-\frac{1}{8}+0}{1}=-\frac{1}{8}$$

例 5.7 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解： 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\overset{t:=\frac{1}{n}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\sin^2\pi\left(\frac{\sqrt{1+t}}{t}\right)\overset{\sqrt{1+t}\sim 1+\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\sin^2\pi\left(\frac{1+\frac{t}{2}}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right)\overset{n=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos^2 n\pi=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$$

注记 5.3 如果不用等价替换，我们可按如下方面计算. 注意到 $\sin^2\pi n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi\sqrt{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}\right)(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$