姓名:

学号:

学院和年级:

上海科技大学

2022-2023 学年第二学期期中考试卷

开课单位：数学科学研究所

授课教师：陈浩，李铮，赵俐俐，朱佐农

考试科目：《高等数学 II》

课程代码:

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为.
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置.
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料.

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

一、　选择题（每小题 3 分，共 15 分）

$(-1,2,1)$　$(1,0,-1)$　$(1,-1,-1)$

1. 三个平面$-x+2y+z-3=0$，$x-z-1=0$，$x-y-z+1=0$的位置关系

是（ B ）．　$x-z-1-2(x-y-z+1)=-x+2y+z-3=0$

(A)其中两个平面平行，且都与另一个平面相交；

(B)三个平面相交于同一条直线；

(C)两两相交，三条交线相交于一点；

(D)两两相交，三条交线两两平行．

2. 对函数　$|y+x\sin\frac{1}{y}|\le|y|+|x|$

$$f(x,y)=\begin{cases} y+x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right), & y\neq 0; \\ 0, & y=0, \end{cases}$$

下面三个极限（ C ）．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y),\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

(A)全都不存在；　(B)仅有一个存在；

(C)仅有两个存在；　(D)全都存在．

$r^2+2r+1=0$

3. 微分方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的特解是（ C ）．

(A) $(ax+b)e^{-x}$；　(B) $x(ax+b)\cos x$；

(C) $x^2(ax+b)e^{-x}$；　(D) $(ax+b)\sin x$．

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（ D ）．

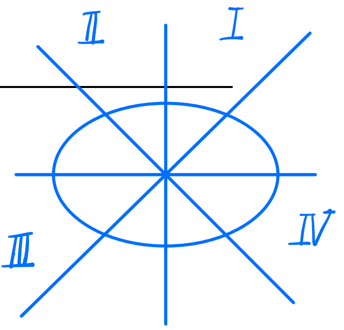
(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$；　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$．

5. 设D_k是椭圆区域$D=\{(x,y)|x^2+4y^2\le 1\}$ 位于第k象限的部分，记二重积分

$I_k=\iint_{D_k}(y^2-x^2)dxdy$，则（ C ）．

(A)；$I_1 > 0$；　　(B)$I_2 > 0$；　　(C)$I_3 < 0$；　　(D)$I_4 > 0$.



$(x,y) \to (y,x)$

二、　填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 若曲线$x = t, y = t^2, z = t^3$在点P处的切线平行于平面$x + 2y + z = 4$，则P点对应的参数$t =$ $-\frac{1}{3}$ 或 -1 .

$(1, 2t, 3t^2) \cdot (1,2,1) = 0 \Rightarrow 1 + 4t + 3t^2 = 0$

7. 设函数$z = e^{xy}$，则$dz|_{(1,2)} =$ $e^2(dy + 2dx)$.

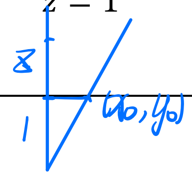
$dz = e^{xy}(x\,dy + y\,dx)$

$\vec{l}\ (1,2,3)$

8. 函数$u = x^2 + y^2 + z^2$在椭球面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$上一点$P_0(1,1,1)$沿椭球面向外的**单位**法线方向的方向导数为 $\frac{12}{\sqrt{14}}$.

$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \hat{l} = (2,2,2) \cdot \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$

9. 设锥面S以原点为顶点，以空间曲线$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ z = 1 \end{cases}$为准线. S上一点$P_0(4,2,2)$处的法线方程为 $x-4 = y-2 = \frac{z-2}{-3}$.

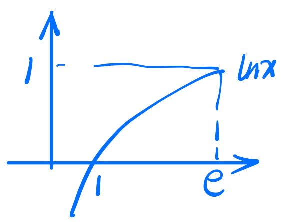


$\frac{z}{1} = \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$，$x_0^2 + 2y_0^2 = 6$

$\therefore (\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 6$

$\therefore z^2 = \frac{x^2 + 2y^2}{6}$

10. 交换积分次序$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy =$ $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$.



三、　多元函数的微分计算（每小题 7 分，共 14 分）

11. 设隐函数$z = z(x, y)$由方程$x + y + z = e^{-(x+y+z)}$确定.

求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

习题课已讲

12. 在$x+2y+3z=6(x,y,z>0)$的条件下, 用拉格朗日乘数法求函数$u=xy^2z^3$的最大值点和最大值.

$x、y、z>0$，求 $u=xy^2z^3$ 最值即求 $v=\ln u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 最值

$f=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x+2y+3z-6)$

$=\ln x-\lambda x+2(\ln y-\lambda y)+3(\ln z-\lambda z)-6$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{x}-\lambda=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2\left(\frac{1}{y}-\lambda\right)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}&=3\left(\frac{1}{z}-\lambda\right)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}&=-(x+2y+3z-6)=0 \end{aligned}\right\}$$

$x=y=z=\frac{1}{\lambda}=1\rightarrow$ 唯一驻点

$\therefore$ 最大值点$(1,1,1)$，最大值 1

四、 二重积分的计算（每小题 10 分，共 20 分）

13. 计算螺旋面 要用到9.4节知识

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \varphi$$

上满足$0 < r < a$且$0 < \varphi < 2\pi$的部分的面积.

$$\vec{R} = (x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$$

$$\vec{R}_r = (x_r, y_r, z_r) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\vec{R}_\varphi = (x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)$$

$$\vec{R}_r \times \vec{R}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = (\underset{A}{\underset{\parallel}{\sin\varphi}}, \underset{B}{\underset{\parallel}{-\cos\varphi}}, \underset{C}{\underset{\parallel}{r}})$$

$$\therefore S = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{1+r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})\right]$$

$$= \pi\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})\right]$$

14. 计算

$$\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy\, ,$$

其中D是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

换元: $x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta\ ,\ 0\leq\rho\leq 1$

$$\frac{dxdy}{d\rho d\theta}=\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$$

原积分变为: $\iint_D \sqrt{1+\rho^2}\, ab\rho\, d\rho\, d\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho$

$= ab\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

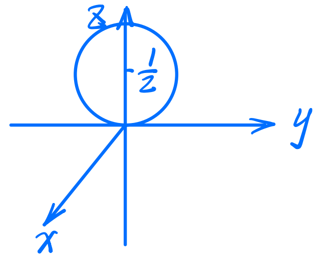
$= \frac{2\pi}{3}ab\,(2\sqrt{2}-1)$

五、　三重积分的计算题（每小题 10 分，共 20 分）

15. 计算

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,,$$

其中V是区域$x^2+y^2+z^2 \le z$.



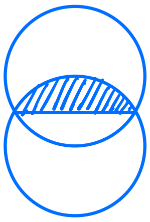
$x^2+y^2+z^2 \le z \Rightarrow x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$

球坐标换元，$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$

$$\iiint\limits_V r\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,dr$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{10}$$

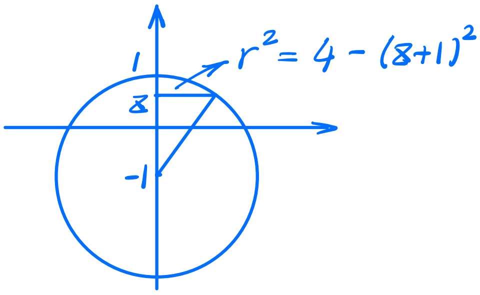
16. 两个大小一样的球体, 每个球的球心都在另一个球的球面上. 求两球相交部分体积占单个球体体积的比例.



不妨设球半径为 2

先求阴影部分体积,

用柱坐标



$$V = \int_0^1 dz \cdot \pi r^2 = \int_0^1 \pi [4 - (z+1)^2]\, dz$$

$$= -\pi \int_0^1 z^2 + 2z - 3 \ dz$$

$$= -\pi \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{5}{3}\pi$$

∴ 相交部分比例: $\dfrac{2V}{\frac{4}{3}\pi \cdot 8} = \dfrac{5}{16}$

六、　应用题（8 分）

17.（费马点）设锐角三角形ABC，平面上一点P到三角形顶点的距离和$|PA|+|PB|+|PC|$最小. 利用多元函数极值的知识，证明$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$. （提示：作为热身练习，可先验证$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$的梯度是单位向量.）

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $P(x,y)$, $\vec{r_1}=\vec{PA}$, $\vec{r_2}=\vec{PB}$, $\vec{r_3}=\vec{PC}$

$r_1(x,y)=|PA|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

$\nabla r_1=\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\hat{i}+\frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\hat{j}=\hat{r}_1$ (沿$\vec{r_1}$的单位向量)

对 $d(x,y)=r_1+r_2+r_3$，极值处 $\frac{\partial d}{\partial x}=\frac{\partial d}{\partial y}=0$

即 $\nabla d=0\Rightarrow\nabla(r_1+r_2+r_3)=0$

$\therefore\ \hat{r}_1+\hat{r}_2+\hat{r}_3=0\Rightarrow$ 3个单位向量和为0

$\therefore\ \vec{r_1}$、$\vec{r_2}$、$\vec{r_3}$ 夹角为$120°$

七、　证明题（8 分）

18. 设$f(x)$与$g(x)$都是$[a,b]$区间上的连续递增函数．证明不等式

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$

$f(x), g(x)$ 递增：对 $\forall\ x, y\in[a,b]$，

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\ f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)\ \text{---}\ *$$

对 $*$ 两端分别积分：

$$LHS=\int_a^b\int_a^b (f(x)g(x)+f(y)g(y))\,dxdy$$

$$=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\,dy=2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$RHS=\int_a^b\int_a^b (f(x)g(y)+f(y)g(x))\,dxdy$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(y)\,dy+\int_a^b f(y)\,dy\int_a^b g(x)\,dx$$

$$=2\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx$$

由 $*$，$LHS\geqslant RHS$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$