第五讲：积分及其应用

目录

第五讲：积分及其应用

1 概念回顾及概念导引

通过上一章节的学习，我们已初步掌握了无穷小计算的基本原理，其核心要点是导数和微分的概念. 导数衡量函数一点处的变化率，而微分是将一点附近自变量增量 Δx 转化为函数实际增量 Δf 的一阶近似 $df = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ 的一个（线性）**映射机制**，即 $\Delta x \longmapsto df \approx \Delta f$，且项 $R(x) = \Delta f - df = o((\Delta x))$, i.e.,

$$\frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$$

上极限要求：一点处的微分若存在，则它唯一地由该点处的导数所确定. 可导即可微，可微即可导. 从几何上看，利用微分 df 近似 Δf 相当于在一点切线上计算相应于 Δx 的线性改变量，即

$$\underbrace{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{切线方程}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{df|_{x=x_0}(\Delta x)}_{\text{微分作为映射}} = \underbrace{\Delta y}_{\text{切线改变量}} = f'(x_0)\Delta x$$

为了得到更好的近似效果，我们利用二阶微分 $d^2f := f''(x)dx^2 = f''(x)(\Delta x)^2$ 对一阶近似 df 给一 2 阶微扰，得到如下二阶近似

$$\Delta f \approx df + \frac{1}{2!}d^2f = f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2$$

$$f(x+\Delta x) = \underbrace{f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2}_{\text{二阶泰勒多项式: } P_2(x+\Delta x)} \quad \Longrightarrow$$

$$R_2(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) - P_2(x+\Delta x) \xlongequal{\exists\, 0<\theta<1} \underbrace{\frac{f''(x+\theta\Delta x)}{2!}(\Delta x)^2}_{o((\Delta x)^2)}$$

一般地，若 $f(x)$ 在 x 附近至少 $n+1$ 阶可导，逐渐添加高阶微扰项，得到函数 f 在 x 附近的如下 n 阶近似

$$\Delta f \approx \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2f + \frac{1}{3!}d^3f + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf$$

其中高阶微分记作

$$d^kf := f^{(k)}(x)dx^k = f^{(k)}(x)(\Delta x)^k$$

故上近似可写成如下泰勒展开模式

$$f(x+\Delta x) = \underbrace{f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n}_{n\ \text{阶泰勒多项式:}\ P_n(x+\Delta x)} \quad \Longrightarrow$$

$$R_n(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) - P_n(x+\Delta x) \xlongequal{\exists\, 0<\theta<1} \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}}_{o((\Delta x)^n)}$$

下面看看无穷小方法应用的另一个重要场景.

微分从函数提取无穷小量，以便聚焦函数局部的变化特征. 另一方面，现实中很多应用场景是希望将局部的无穷小累加成整体的有界量——便是**积分**概念之发凡.

先看两个可体现出本章知识内核的概念图景.

图景 I: 设函数 $F(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $F'(x) = f(x)$，则任取区间 $[a,b]$ 的一个分划：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$，我们都有

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$

$$= \underbrace{F(x_n) - F(x_{n-1})}_{[x_{n-1},x_n]\ \text{上的局部变差}} + \underbrace{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}_{[x_{n-2},x_{n-1}]\ \text{上的局部变差}} + \cdots + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{[x_1,x_2]\ \text{上的局部变差}} + \underbrace{F(x_1) - F(x_0)}_{[x_0,x_1]\ \text{上的局部变差}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)}_{\text{小区间段上的局部变差之和}} \xlongequal[\text{分别运用拉格朗日中值定理}]{\text{在区间}\ [x_i,x_{i-1}],\ i=1,2,\cdots,n\ \text{上}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{小区间段上的局部变差之和}}$$

当 $\Delta x_i \to 0$，或等价地 $n \to \infty$ 时，局部变差是无穷小量. 如上式右端的极限存在，我们便将函数 $F(x)$ 的整体变差 $F(b) - F(a)$ 表示为无限多个无穷小变差之累加了.

注记 1.1 将图景一中的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 单独拿来看，可视其为一函数 $f(x)$ 的值对自变量 x 的累积，该形式在日常应用中十分常见，比如路程作为速度对时间之累积；功作为力对位移之累积；电量作为电流密度对时间之积累；三维体积作为截面积对高之累积等等. 由图景 I 知：函数 $f(x)$ 对自变量 x 在一区间上的积累可由其原函数（即任意使得 $F'(x) = f(x)$ 的 $F(x)$）在区间上的整体变差计算而得.

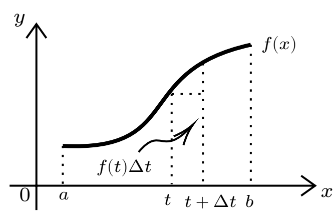
定义 1.1 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x), \forall x \in I$，则称 $F(x)$ 时 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

我们已知不是所有的函数都具有原函数（c.f. 见导函数的介值定理），且由拉格朗

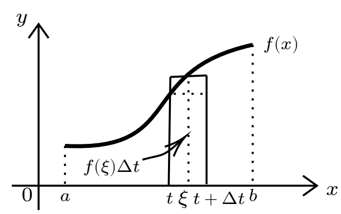
日中值定理知函数 $f(x)$ 的原函数是不唯一的，但任意两个原函数只差一个常数，即若 $f(x)$ 具有原函数 $F(x)$，则 $F(x)+C$（对任意常数）是 $f(x)$ 的所有原函数. $f(x)$ 的全体原函数称为是 $f(x)$ 的不定积分（*indefinite integral*），并将其记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{（其中 } C \text{ 为任意常数）}$$

图景 II: 设 $y=f(x)\in C[a,b]$，且设 $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$. 记 $S(t)$ 为曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$, $x=t$ 和 x 轴围成的曲边梯形的面积. 下面我们证明：$S(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $S'(t)=f(t)$.



$S(t+\Delta t)-S(t)\approx f(t)\Delta t$



$S(t+\Delta t)-S(t)= f(\xi)\Delta t$

直观上，当 Δt 很小时，可用矩形面积 $f(t)\Delta t$ 来近似 $S(t+\Delta t)-S(t)$ 的值，且 Δt 越小，则近似的误差越小. 特别地，我们期待：当 $\Delta t\to 0$ 时，有

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t\to 0} f(t) = S'(t)$$

则 $S(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且其导数 $S'(t)=f(t)$. 然后在 $[t,t+\Delta t]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(t,t+\Delta t)$，使得

$$S(t+\Delta t)-S(t) = S'(\xi)\Delta t = f(\xi)\Delta t$$

严格论证:（调用基层逻辑）由于 $f(x)\in C[t,t+\Delta t]$，故 $f(x)$ 在 $[t,t+\Delta t]$ 上具有极大值 M 和极小值 m，即 $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[t,t+\Delta t]$. 从而

$$m\Delta t \leq S(t+\Delta t)-S(t) \leq M\Delta t \quad\Longrightarrow\quad m\leq \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\leq M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知：$\exists\xi\in(t,t+\Delta t)$，使得

$$f(\xi) = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \xRightarrow{\Delta t\to 0\ \Rightarrow\ \xi\to t} f(t) = S'(t) \qquad \square$$

图景 II ⇒ 图景 I: 图景 II 中展示了面积函数的可微性，即若曲线由函数 $f(x)$ 描述，则 $f(x)$ 具有原函数 $S(x)$，即 $\int f(x)dx = S(x)+C$（不同的计算面积的起

点 a 的选取，对应于不定积分中不同常数 C 的选取）．反之，我们可以将局部面积元累加为整体面积（或让 $f(x)$ 对 x 进行累积）．为此，任取区间 $[a,b]$ 的一个分划：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$，则易见

$$
\begin{aligned}
&S(b)-S(a)= \\
&=[S(x_n)-S(x_{n-1})]+[S(x_{n-1})-S(x_{n-2})]+\cdots+[S(x_2)-S(x_1)]+[S(x_1)-S(x_0)] \\
&\xlongequal{\text{利用拉格朗日中值定理}} S'(\xi_n)\Delta x_n+S'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}+\cdots+S'(\xi_2)\Delta x_2+S'(\xi_1)\Delta x_1 \\
&=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i
\end{aligned}
$$

但如果中值点的选取是**任意的** $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，则上面和式 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 不再是 $S(b)-S(a)$ 的精确值，而是其一个近似，即有

$$
S(b)-S(a)\quad\approx\quad\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\qquad \begin{array}{c}\text{对任意分划 }\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}\\ \text{以及 }\forall\,\xi_i\in(x_{i-1},x_i)\end{array}
$$

直观上，如果分划取得越来越“精细”，即 $n\to\infty$（等价地，$\Delta x_i\to 0,\ \forall i$）时，则有

$$
\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\longrightarrow S(b)-S(a)
$$

而由于在图景 II 中，不论分划如何，上述和的极限如存在，都是计算同一个面积值 $S(b)-S(a)$，故上极限的存在性及其值应不依赖于具体划分的选取以及诸点 ξ_i 的选取．这启发我们下面定积分的一般定义（放宽 f 连续这一条件，而只关心它对 x 累积的极限）：

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且有界．对 $[a,b]$ 做任意分划：

$$
\pi:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b
$$

又 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$（$i=1,2,\cdots,n$），作和 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$，（其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$）为小区间的长度．若当 $\lambda(\pi):=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$，上述和式总有极限 I，即

$$
\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=I
$$

则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼（*Riemann*）可积（简称可积），记为 $f\in R[a,b]$；极限值 I 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分（*definite integral*），记为 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 a,b 分别称为积分的下限和上限，$[a,b]$ 称为积分区间，f 称为被积函数（*integrand*），x 称为积分变量. 积分与积分变量的选取无关，因其只是标记加项的符号.

用 $\epsilon-\delta$ 语言叙述，$f\in R[a,b]$ 意味着：存在实数 I，使得 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要对 $[a,b]$ 的划分对应的 $\lambda<\delta$，则无论 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 如何选择，都成立

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\epsilon$$

图景 I 导致下面著名结果：

牛顿-莱布尼茨公式（*Newton-Leibniz formula*）设函数 $f(x)\in R[a,b]$，且在 (a,b) 上有原函数 $F(x)$，即 $\forall x\in(a,b)$，有 $F'(x)=f(x)$，则必有

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)}$$

证明： 任选 $[a,b]$ 的一个划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 有

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=$$

$$=F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots+F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0)$$

$$\xlongequal[\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)]{\text{拉格朗日中值定理}} F'(\xi_n)\Delta x_n+F'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}+\cdots+F'(\xi_1)\Delta x_1$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \quad (\text{当 } \lambda:=\max\{\Delta x_i\}\to 0) \qquad \square$$

记号： 通常记 $F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a)$, 所以 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \int^x f(x)dx\Big|_a^b$. 又由于 $dF(x)=f(x)dx$，故也有

$$\int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b \qquad \text{特别地} \quad \int_a^b dx = x\Big|_a^b = b-a$$

2 定积分作为极限之计算实例

连续是比可积更强的条件. 事实上，如果 $f(x) \in C[a,b]$，则必有 $f(x) \in R[a,b]$. 此外，函数可积的充分条件还有（证明见第三节）

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点;
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

由此可知: 改变函数在有限个点处的值不改变其可积性，若其可积，则其积分不变.

例 2.1 为计算 $\int_0^1 x^2\,dx$，即计算抛物 $y=x^2$，$x=0$,$x=1$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积. 由于面积值不依赖与分划及 ξ_i 的选取. 所以，为了便于计算，不妨将 $[0,1]$ n 等分，即分划的分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，从而 $\lambda=\frac{1}{n}$. 取 $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$. 则有

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

当然我们知道 $\dfrac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数，故根据牛顿-莱布尼茨公式，得

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1^3-0^3}{3}=\frac{1}{3}$$

例 2.2 在计算 $\int_1^2\frac{dx}{x}$ 时, 如将 $[1,2]$ 等分后计算反而不易处理. 但注意到, 如果分点取成 $x_i=q^i$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 q 是待定公比. 要求: $1=x_0=q^0$，$2=x_n=q^n$，从而可取 $q=2^{\frac{1}{n}}$, 则有 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=q^{i-1}(q-1)$. 由 $q>1$ 知 $\lambda=q^{n-1}(q-1)=2-2^{\frac{n-1}{n}}$. 再取 $\xi_i=x_{i-1}=q^{i-1}$. 注意到 $\lambda\to 0$（即 $n\to\infty$），有

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\xi_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{q^{i-1}(q-1)}{q^{i-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}n(q-1)=\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}-1}{1/n}=\ln 2$$

不难看出，$\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，从而

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln x\bigg|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

例 2.3 狄利克雷（*Dirichlet*）函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 不是（黎曼）可积的. 任给 $[0,1]$ 的分划 $\{x_i\}$，在每个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 中一定是既有有理数又有无理数. 故将 ξ_i 全部取为有理数时 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=1$；但如将 ξ_i 全部取为无理数时，则有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0$

注记 2.1 上例表明：闭区间上的有界函数未必可积，下节会证明：闭区间上的可积函数必有界.

例 2.4 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1+\frac{1}{n-1}, & 1-\frac{1}{n}\le x\le 1-\frac{1}{n+1},\ n=2,3,4,\cdots\end{cases}$$

它虽然有无穷多个间断点，但是由于它是单调的，故它也在 $[0,1]$ 上是可积的，且

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}$$

例 2.5 为计算 $\int_0^1 x^p dx\ (p>0)$，将 $[0,1]$ n 等分，得分点 $x_i=\dfrac{i}{n}\,(i=0,1,2,\cdots,n)$，故 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，并取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$，则当 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{1}{n}\to 0$ 时，有

$$\int_0^1 x^p dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

不难看出，x^p 的一个原函数是 $\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$，从而

$$\int_0^1 x^p dx=\left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1=\frac{1}{p+1}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

例 2.6 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1/n}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1/n}{1+\frac{n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

3 可积性条件（*）

例 2.3 表明: **闭区间上的有界函数未必可积**, 但下面的定理表明: **闭区间上的可积函数必有界**.

定理 3.1 设 $f(x)\in R[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

证明: 设 $\int_a^b f(x)dx=I$，则对 $\epsilon=1$，存在 $[a,b]$ 的一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得对任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，都成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<1$$

下面证明函数 $f(x)$ 在任意子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都有界，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 我们从上面的不等式中提取 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的信息:

$$I-1<f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j<I+1$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{1}{\Delta x_i}\left(I-1-\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right)<f(\xi_i)<\frac{1}{\Delta x_i}\left(I+1-\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right)$$

由于 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的选取是任意的，故知 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上有界. □

例 2.3 也表明: 并非所有函数都可积. 我们希望有简单易行的可积性判别准则.

由上定理知，可积函数必有界，故对 $f(x)\in R[a,b]$，可设其在 $[a,b]$ 上的上确界和下确界分别是 M 和 m，即有 $m\le f(x)\le M$. 另外，对 $[a,b]$ 的任一划分 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 M_i 和 m_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界，即 $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$; $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$，$i=1,2,\cdots,n$. 那么，给定任意的

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则对黎曼和，我们有如下估计

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}_{\underline{S}(\pi)} \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}_{\overline{S}(\pi)}$$

上面的 $\underline{S}(\pi)$ 和 $\overline{S}(\pi)$ 分别称为分划 π 对应的达布下和及达布上和，简称下和及上和. 它们给出了积分值 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 的一个下界和一个上界.

我们期望：如果 $f(x)$ 可积，则当划分越来越精细（密），即 $\lambda(\pi) = \max\limits_{1\le i\le n} |\Delta x_i| \to 0$ 时，下和 $\underline{S}(\pi)$ 和上和 $\overline{S}(\pi)$ 都将趋向于积分值 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. 但问题是：$\underline{S}(\pi)$ 和 $\overline{S}(\pi)$ 究竟是如何收敛的? 对该问题的回答将导致可积的充分必要条件，由此可进一步推出判断可积的简单易行的准则，即第 *2* 节开头罗列的三个可积的充分条件.

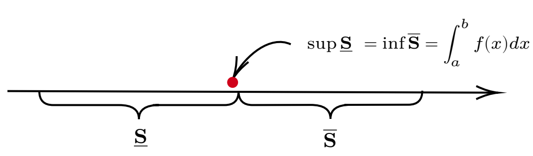
若函数 $f(x) \in R[a,b]$，按定义，其积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 是不依赖于计算它所采用的具体划分的. 为考察积分定义的精细结构，我们考察 $[a,b]$ 不同划分之间的关系.

如果划分 π 的分点的集合包含于划分 π' 的分点, 则称划分 π' 比 π 更精细（*finer*)），记为 $\pi' \succeq \pi$. 显然，对两个划分 π 和 π'，将它们的分点合并所得到的划分 $\pi\cup\pi'$ 是比 π 和 π' 都精细的划分，即 $\pi\cup\pi' \succeq \pi$；同理，由它们公共分点所形成的划分 $\pi\cap\pi'$ 的精细程度不超过 π 和 π' 的精细程度，即 $\pi, \pi' \succeq \pi\cap\pi'$.

显然对区间的分划可无限精细：对给点划分不断添加分点便可得到越来越精确的划分. 记 $\underline{\mathbf{S}}$ 为所有划分对应的（达布）下和的集合；记 $\overline{\mathbf{S}}$ 为所有分划对应的（达布）上和的集合，即 $\underline{\mathbf{S}} := \left\{\underline{S}(\pi) : \forall \text{划分}\ \pi\right\}$；$\overline{\mathbf{S}} := \left\{\overline{S}(\pi) : \forall \text{划分}\ \pi\right\}$. 对任意划分 π，显然有

$$m(b-a) \le \underline{S}(\pi) \le \overline{S}(\pi) \le M(b-a)$$

故 $\underline{\mathbf{S}}$ 和 $\overline{\mathbf{S}}$ 都是有界集合. 下引理表明：$\overline{\mathbf{S}}$ 中的任何数都是 $\underline{\mathbf{S}}$ 的上界.



引理 3.1 如果 $\pi' \succeq \pi$，则有 $\underline{S}(\pi') \ge \underline{S}(\pi)$，$\overline{S}(\pi') \le \overline{S}(\pi)$. 即当分划加细时，大和不增，下和不减.

注记 3.1 对任意两种分划 π, π'，都有：$\underline{S}(\pi') \le \overline{S}(\pi)$，也即，下和永不超上和. 见上图所示. 这是因为，根据上引理，得 $\underline{S}(\pi') \le \underline{S}(\pi\cup\pi') \le \overline{S}(\pi\cup\pi') \le \overline{S}(\pi)$.

证明: 设 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 不失一般性, 设 π' 只比 π 多一个新分点 $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. 记 $M_i' := \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$, $M_i'' := \sup\limits_{x \in [x', x_i]} f(x)$, 则显然有 $M_i' \le M_i$, $M_i'' \le M_i$, 从而

$$M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') \le M_i(x_i - x_{i-1})$$

由于 $\overline{S}(\pi')$ 和 $\overline{S}(\pi)$ 中的其它项都相同, 故 $\overline{S}(\pi') \le \overline{S}(\pi)$. 同理 $\underline{S}(\pi') \ge \underline{S}(\pi)$. $\square$

即上和的全体 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的数在分划加细后是单调减少且有下界的, 故它有下确界, 记为 $L := \inf \overline{\mathbf{S}}$; 下和的全体 $\underline{\mathbf{S}}$ 中的数在分划加细后是单调增加且有上界的, 故它有上确界, 记为 $l := \sup \underline{\mathbf{S}}$. 显然, 对任意划分 π, π', 都有 $\underline{S}(\pi') \le l \le L \le \overline{S}(\pi)$.

定理 3.2 只要函数 $f(x)$ 有界（注意这里尚不要求其可积）, 则对任意分划 π', 当 $\lambda' := \max_{1 \le i \le k} \Delta x_i' \to 0$ 时, 必有 $\lim\limits_{\lambda' \to 0} \overline{S}(\pi) = L$, $\lim\limits_{\lambda' \to 0} \underline{S}(\pi) = l$.

证明: $\forall \epsilon > 0$, 由下确界的性质知 $\exists \pi' : a = x_0' < x_1' < \cdots < x_k' = b$, 使得

$$0 \le \overline{S}(\pi') - L < \frac{\epsilon}{2}$$

需证 $\forall \pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 当 $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, 都有 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \overline{S}(\pi) = L$, 即证 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 只要 $\lambda < \delta$, 有 $0 \le \overline{S}(\pi) - L \le \epsilon$. 为此, 考虑加细分划: $\pi \cup \pi' = \{x_i\}_{i=1}^n \cup \{x_i'\}_{i=1}^p$. 由引理 *3.1* 知: $\overline{S}(\pi \cup \pi') \le \overline{S}(\pi')$. 下面分析 $\overline{S}(\pi)$ 和 $\overline{S}(\pi \cup \pi')$ 的关系. 我们将证明: 当 $\lambda < \delta$ 时, 有

$$0 \le \overline{S}(\pi) - \overline{S}(\pi \cup \pi') \le \frac{\epsilon}{2} \qquad (*)$$

从而 $0 \le \overline{S}(\pi) - L = \underbrace{\left[\overline{S}(\pi) - \overline{S}(\pi \cup \pi')\right]}_{\le \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left[\overline{S}(\pi \cup \pi') - \overline{S}(\pi')\right]}_{\le 0} + \underbrace{\left[\overline{S}(\pi') - L\right]}_{\le \frac{\epsilon}{2}} = \epsilon.$

现证明 $(*)$. 如 (x_{i-1}, x_i) 中不含 π' 的分点, 则此时 $\overline{S}(\pi)$ 和 $\overline{S}(\pi \cup \pi')$ 中的相应项同为 $M_i \Delta x_i$; 如 (x_{i-1}, x_i) 中含有 π' 的分点, 由于两种分法的端点相同, 故这样的区间最多有 $k-1$ 个. 取 $\delta := \min\left\{\Delta x_1', \cdots, \Delta x_k', \dfrac{\epsilon}{2(k-1)(M-m)}\right\}$, 则当 $\lambda < \delta$ 时, 有 $\Delta x_i \le \delta \le \Delta x_j'$, $\forall i, j$. 从而在 (x_{i-1}, x_i) 中只有一个新插入的分点 x_j'. 此时, $\overline{S}(\pi)$ 和 $\overline{S}(\pi \cup \pi')$ 中相应项的差为（记号同上引理证明中的记号）

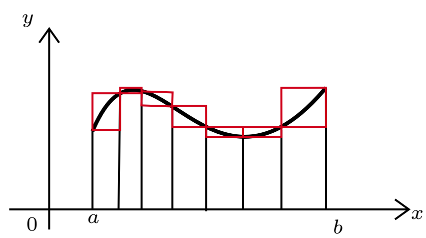
$$M_i(x_i - x_{i-1}) - \left[M_i'(x_j' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x_j')\right] \le (M-m)(x_i - x_{i-1}) < (M-m)\delta$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \overline{S}(\pi) - \overline{S}(\pi \cup \pi') \le (p-1)(M-m)\delta \le \frac{\epsilon}{2} \qquad \square$$

定理 3.3（可积的充要条件）有界函数 $f(x) \in R[a,b]$ 当且仅当：对于任意分划 π，当 $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ 时，其上和与下和的极限相同，即

$$\lim_{\lambda\to 0} \overline{S}(\pi) = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S}(\pi) \quad \xLeftrightarrow{\text{定理 } 3.2} \quad L = l$$

换言之，若记 $\omega_i := M_i - m_i$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，则上条件也等价于：当 $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ 时，有 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$. 即下图中红框框住部分的面积之和当划分无限加细时趋于零.



证明:（充分性）对任意分划 π，有 $\underline{S}(\pi) \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(\pi)$. 故若 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \overline{S}(\pi) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \underline{S}(\pi) = I$，那么两边求极限，可知 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$. 即 f 在 $[a,b]$ 上可积.

（必要性）设 $\int_a^b f(x)dx = I$，则 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得对任意分划 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要 $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} < \delta$，便有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

由于 $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$，故一定可取到 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，使得

$$0 \le M_i - f(\xi_i) < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \Longrightarrow$$

$$\left| \overline{S}(\pi) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\xi_i))\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \overline{S}(\pi) - I \right| = \left| \overline{S}(\pi) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \overline{S}(\pi) = I$；同理可证 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \underline{S}(\pi) = I$. 从而 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \overline{S}(\pi) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \underline{S}(\pi)$. $\square$

事实上, 定理 *3.2* 的证明过程表明: $\forall\epsilon>0$, 只要有分划 π', 使得 $0\le\overline{S}(\pi')-L<\dfrac{\epsilon}{2}$（或 $0\le l-\underline{S}(\pi')<\dfrac{\epsilon}{2}$），则一定存在 $\delta>0$，使得对任意满足 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 的分划 π，必有 $0\le\overline{S}(\pi)-L<\dfrac{\epsilon}{2}$（或 $0\le l-\underline{S}(\pi)<\dfrac{\epsilon}{2}$），结合定理 *3.3*，可知

定理 3.3′（可积的充要条件）有界函数 $f(x)\in R[a,b]$ 当且仅当：$\forall\epsilon>0$，存在分划 π，使得相应的振幅满足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\epsilon$.

反之, 如 $\exists\,\epsilon_0>0$, 使得对任意的分划 π, 都有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\ge\epsilon_0$, 则 $f(x)$ 不可积. 比如对例 *2.3* 中的狄利克雷函数, 对 $[0,1]$ 的任意分划, 都有 $\omega_i\equiv1$, $\forall i$, 从而 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=1$, 故它不可积.

有了定理 *3.3* 和定理 *3.3′* 给出的可积性充要条件，我们可推出下面比较方便的判断一函数是否（黎曼）可积的判别条件，即可积的充分条件.

推论 3.1 闭区间上的单调函数必可积.

证明: 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，其在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$. $\forall\epsilon>0$, 需找 $\delta>0$，使得当 $\lambda:=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，便有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\epsilon$. 即

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\delta\left(f(b)-f(a)\right)$$

由此可见，取 $\delta=\dfrac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ 即可. □

推论 3.2 闭区间上的连续函数必可积，即 $f\in C[a,b]\ \Rightarrow\ f\in R[a,b]$.

证明: 见后.

推论 3.3 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必可积.

证明: 我们只证有一个不连续点的情形，一般情形可类似处理. 假设 $p\in[a,b]$ 是函数 $f(x)$ 的一个不连续点. 如 p 是端点, 不妨设 $p=a$, 此时 $\forall\epsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\epsilon}{2(M-m)}$, 其中 M,m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的上界和下界. 则由于函数 f 在 $[a-\delta,b]$ 上是连续的, 则由推论 *3.2* 知 $f\in R[a-\delta,b]$, 故存在 $[a-\delta,b]$ 的分划: $a-\delta=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\epsilon}{2}$. 现考虑加了左端点的加细分划：$a<a-\delta=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 由于函数 $f(x)$ 有界，故虽然它在 a 处不连续，但其在 $[a,a-\delta]$ 上的振幅 $\omega_a\le M-m$.

从而对该加细分划，对应振幅的加权和有如下估计：

$$\omega_a\delta+\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le(M-m)\delta+\frac{\epsilon}{2}<(M-m)\frac{\epsilon}{2(M-m)}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

即 $f\in R[a,b]$; 如果不连续点 p 在 $[a,b]$ 内部, 证明方法完全类似, 只需选 δ 足够小, 使得 $[p-\delta,\,p+\delta]\subsetneq[a,b]$，则 $f\in R[a,p-\delta]\cap R[p+\delta,b]$，分别取 $[a,p-\delta]$ 和 $[p+\delta,b]$ 的可使的相应振幅加权和足够小的分划 π,π'，然后考虑加细分划 $\pi\cup\pi'\cup\{p-\delta,p+\delta\}$. 其余完全类似与上情形的处理; 如果不连续点多于一个, 则对每个不连续点做如上处理, 需注意不连续点的 δ 领域须选得互不相交才便于技术性处理. $\square$

下面转向推论 *3.2* 的证明. 这里需要用到闭区间上连续函数的一个重要性质（其证明放到《附录 *I*》中)，即如果 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\forall\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得 $\forall\,x',\,x''\in[a,b]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，则有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$. 即函数具有比在每点处都连续**更强**的性质：它在 $[a,b]$ 上每点的连续的程度都是一致的，此时我们称函数在 $[a,b]$ 上是一致连续（*uniform continuous*）的.

释意：$f(x)$ 在一点 x_0 连续的“程度”可由与 $\forall\epsilon>0$ 所对应的最小的使得 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 的 $\delta_{inf}>0$ 来决定. 这个 δ_{inf} 通常既是 ϵ，又是 x_0 的函数，且不同点 x_0 对应的 δ_{inf} 往往相差很大，反映出函数在不同点连续“程度”的不同. 比如对 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\forall\,x,x_0\in(0,1)$，为使 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|<\epsilon$，即 $\dfrac{1}{x_0}-\epsilon<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x_0}+\epsilon$，反解出 $\dfrac{-x_0^2}{1+x_0\epsilon}<x-x_0<\dfrac{x_0^2\epsilon}{1-x_0\epsilon}$. 由此可得

$$\delta_{inf}(x_0,\epsilon)=\min\left\{\frac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon},\,\frac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon}\right\}=\frac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon}$$

显然，当 ϵ 给定是，$\delta_{inf}(x_0,\epsilon)$ 对 $x_0\in(0,1)$ 的取值的依赖是相当敏感的，特别地，当 $x_0\to0$ 时，$\delta_{inf}(x_0,\epsilon)\to0$. 因此不存在一个对所有 $x_0\in(0,1)$ 都统一的 δ，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，便有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 即知 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不是一致连续的.

推论 3.2 的证明: 由于 $f(x)\in C[a,b]$, 故它在 $[a,b]$ 上一致连续, 即 $\forall\epsilon>0,\exists\,\delta>0$, 使得 $\forall x',x''\in[a,b]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\epsilon}{b-a}$. 从而对任意分划，只要 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，函数在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅 $\omega_i<\dfrac{\epsilon}{b-a}$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\epsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\epsilon\qquad\square$$

4 可积函数的性质

在 $\int_a^b f(x)dx$ 中，当积分下限 a 大于积分上限 b 时，我们规定：

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

这个规定是合理的，可以理解为划分中 $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i < 0$，然后累加求极限. 显然，规定 $\int_a^a f(x)dx = 0$ 也是合理的. 在此规定下，不论 a, b 的相对大小关系如何，只要函数 $f(x) \in R[a,b]$，表达式 $\int_a^b f(x)dx$ 总有意义. 这也方便叙述定积分的运算性质：

性质 4.1（线性性）设 $f, g \in R[a,b]$，又 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则 $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

证明： 由于 $f, g \in R[a,b]$，给出 $[a,b]$ 的任一划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，及 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，都有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\, \Delta x_i = \alpha \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad \square$$

特别地 $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, 取 $\alpha = -1$, 有 $\int_a^b (-f(x))\, dx = -\int_a^b f(x)dx$. 由此可定义减法如下：

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \left(-\int_a^b g(x)dx\right)$$

如此，线性性可拓广为

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

从而，求定积分 $\int_a^b$ 运算实现了从线性空间 $R[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个线性变换：

$$\int_a^b: \quad R[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

性质 4.2（区间可加性）设函数 $f \in R[a,b]$，$\forall c \in (a,b)$，则 $f \in R[a,c]$，$f \in R[c,b]$，且有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

证明： 如 $f \in R[a,b]$，则 $\forall \epsilon > 0$，存在分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$，令 c 是其中一个分点，即 $x_k = c$. 则 $[a,c]$ 和 $[c,a]$ 分别有如下分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c; \qquad c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

则显然有 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ 和 $\sum_{i=k+1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$. 由此可知 $f \in R[a,c]$ 且 $f \in R[c,b]$.

反之，如果 $f \in R[a,c]$ 且 $f \in R[c,b]$，则 $\forall \epsilon > 0$，$\exists\, [a,c]$ 和 $[c,b]$ 的如下分划

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{n_1} = c; \quad c = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_{n_2} = b$$

使得 $\sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\epsilon}{2}$，且 $\sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2}$. 将这两个分划合并起来称为 $[a,b]$ 的一个分划 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$，其中 $n = n_1 + n_2$. 从而

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i + \sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

故 $f \in R[a,b]$，下证此时 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. 记 $I = \int_a^b f(x)dx$，$I' = \int_a^c f(x)dx$，$I'' = \int_c^b f(x)dx$. 则 $\forall \epsilon > 0$，存在 $[a,c]$ 的分划 π' 和 $[c,b]$ 的分划 π''，并存在 $\delta > 0$，使得当 $\lambda(\pi'), \lambda(\pi'') < \delta$ 时，成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i)\Delta x'_i - I'\right| < \frac{\epsilon}{2}; \quad \left|\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi''_i)\Delta x''_i - I''\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

那么 $\pi := \pi' \cup \pi''$ 是 $[a,b]$ 的一个分划，且对此分划，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i')\Delta x_i' + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i'')\Delta x_i''\right| \quad \Longrightarrow$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I' - I''\right| = \left|\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i')\Delta x_i' - I' + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i'')\Delta x_i'' - I''\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i')\Delta x_i' - I'\right| + \left|\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i'')\Delta x_i'' - I''\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即证得 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I' + I''$ $\qquad\square$.

注记 4.1 由于我们规定了 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，所以即便 c 不在 $[a,b]$ 内部，仍然成立 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. 比如 $c < a$，此时，按上定理，有

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx =$$

$$= \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

性质 4.3（乘积可积性）设 $f, g \in R[a,b]$，则 $fg \in R[a,b]$.

证明: 存在 $M > 0$，使得 $\forall x \in [a,b]$，都有 $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$. 则由于 f 和 g 的可积性，$\forall \epsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的任意分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2M}, \sum_{i=1}^{n} \omega_i'' \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2M}$，其中 ω_i' 和 ω_i'' 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 下面估计 $f(x)g(x)$ 的振幅，对 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的任意两点 x', x''，有

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x') + f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')|$$

$$= |g(x')\left(f(x') - f(x'')\right) + f(x'')\left(g(x') - g(x'')\right)| \leq M\left(|f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \omega_i \leq M(\omega_i' + \omega_i'') \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leq M\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i'' \Delta x_i\right) <$$

$$< M\left(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}\right) = \epsilon \qquad \square$$

注记 4.2 一般而言 $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$. 比如当 $[a,b]=[0,1]$，$f(x)=x, g(x)=x^2$ 时，有

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

但 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right) =$

$$= \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 x^2 dx\right) = \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\right)\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

性质 4.4（保序性）设 $f, g \in R[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上恒成立 $f(x) \le g(x)$，则必有

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

证明： 只需证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. 而这是极限保序性的自然结果：任给 $[a,b]$ 的一个分划：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，由于 $f(x) \ge 0$，都有 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$，则由极限的保号性，其在 $\lambda \to 0$ 的极限也是非负的，即积分 $\int_a^b f(x)dx$ 非负. □

性质 4.4′（估值不等式）设 $f(x) \in R[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上有 $m \le f(x) \le M$，则有 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

证明： 由与在 $[a,b]$ 上有，$m \le f(x) \le M$，则由积分的保序性知，

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

即 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. □.

性质 4.5（绝对可积性）设 $f \in R[a,b]$，则 $|f| \in R[a,b]$，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

证明： 由于对任意 x', x''，都有估计 $||f(x')| - |f(x'')|| \le |f(x') - f(x'')|$，估值对

任意分划，函数的振幅满足 $\omega_i(|f|)\le\omega_i(f)$，从而 $|f|$ 的可积性可由 f 的可积性推出. 又因为 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$，则由保序性得

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx\quad\Longleftrightarrow\quad\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx\ \square$$

注记 4.3 一般不能由 $|f|$ 的可积性推出 f 的可积性. 比如对函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad x\in[0,1]$$

则 $|f(x)|\equiv1$，显然在 $[0,1]$ 上可积，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内任意子区间上的振幅为 2，故 $f(x)$ 是不可积的.

例 4.1 由于函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2+x^3}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上的取值范围是：$\frac{\sqrt{69}}{9}\le f(x)\le1$，从而有估计：

$$\frac{\sqrt{69}}{18}\le\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2+x^3}\,dx\le\frac{1}{2}$$

例 4.2 设 $f\in C[a,b]$, 且在 $[a,b]$ 上有 $f(x)\ge0$. 若 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$, 证明: $f(x)\equiv0$.

证明: 假设 f 在 $[a,b]$ 上不恒为零，则存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$，由于 $f(x)\in C[a,b]$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则由极限的局部保号性，知存在 x_0 的一个领域 $U(x_0,\delta):=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，成立 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}>0$. 从而由积分的可加性、保序性，知

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx$$

$$\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx>\frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx=\frac{f(x_0)}{2}(2\delta)=f(x_0)\delta>0$$

这于已知条件 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 相矛盾了，从而 $f(x)\equiv0$，$\forall x\in[a,b]$. $\square$

例 4.3 先回忆著名的柯西-施瓦茨不等式及其经典证明. 对任意 $a_i,b_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

证明: 记 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{u} := (a_1, \cdots, a_n)$; $\mathbf{v} := (b_1, \cdots, b_n)$，则在欧几里得空间的标准内积及范数下，柯西-施瓦兹不等式等价于 $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 \cdot ||\mathbf{v}||^2$. 为证明它，我们考虑函数 $f(t) = ||t\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2$（假设 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 时不等式显然成立）. 显然 $f(t) \geq 0$，$\forall t$, 即

$$f(t) = \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = t^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

$$= ||\mathbf{u}||^2 t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + ||\mathbf{v}||^2 \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

由于 $f(t)$ 的图像时开口朝上的抛物线，故 $f(t)$ 非负当且仅当判别式 $\Delta \leq 0$，即

$$\Delta = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 \leq 0$$

即得柯西-施瓦兹不等式，且 " = " 成立当且仅当 $\Delta = 0$，当且仅当 $f(t)$ 的图像与 x-轴相交于一点，即存在 t_0，使得 $f(t_0) = ||t\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = 0$，即 $t\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. 也就是说，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 线性相关（平行）. $\square$

由于积分可看成是连续求和，即求和的极限（无限求和），上面离散的柯西-施瓦兹不等式自然可推广位连续的柯西-施瓦兹不等式.

柯西-施瓦茨不等式: 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$，则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

证明 I: 将区间 $[a, b]$ n 等分, 即令 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 且 $x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$. 则由离散形式的柯西-施瓦茨不等式得

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i) \right)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g^2(x_i) \right)$$

由于 f, g 可积，故 fg，f^2 和 g^2 都可积，故令 $n \to \infty$，便得所需. $\square$

证明 II: 当 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 0$(或 $\displaystyle\int_a^b g^2(x)dx = 0$)时, 由例 *4.2* 中的结论知: $f(x) \equiv 0$（或 $g(x) \equiv 0$），结论显然成立. 下设两积分都不为零.

1. 当 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b g^2(x)dx = 1$，由于 $f(x)g(x) \leq \dfrac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right]$，则根据定

积分的保序性和线性性，可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx\right] = 1$$

结论成立.

2. 一般地, 令 $\varphi(x) := \dfrac{f(x)}{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}$, $\psi(x) := \dfrac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}}$, 则 $\varphi(x), \psi(x) \in C[a,b]$,

且 $\displaystyle\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1 = \int_a^b \psi^2(x)dx$，则由情形 1 知 $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \leq 1$，即

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}} \cdot \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}} \leq 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad \square$$

例 4.4 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $f(x) > 0$，则 $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

证明: 将 $[0,1]$ n 等分,则 $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\Longrightarrow \quad e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

由算术-平均值不等式 $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$，两边求极限，结合极限的保序性，得

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \qquad \square$$

5 积分中值定理

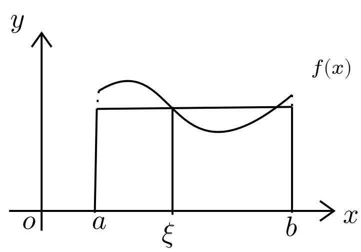
设函数 $f \in C[a,b]$, 则由闭区间连续函数的性质知它在区间 $[a,b]$ 上有最小值 m 和最大值 M，即 $\forall x \in [a,b]$，有 $m \le f(x) \le M$，那么由积分的保序性，可得

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Longleftrightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

则由闭区间上连续函数的介值性知，$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (5.1)$$

该公式的几何含义是, 如果曲线是连续的, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 是的它与 $x=a, x=b$, x 轴围成区域的面积等于以 $f(\xi)$ 为长，以 $b-a$ 为宽的长方形的面积.



公式 5.1 常被称为是积分中值公式，它也可写作 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，右边称为是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均（*average*）. 即连续函数在一区间上的平均可被函数取到.

关于平均概念的释疑: 我们知道, 一组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平均是 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 为得到合理的关于一连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均概念，我们将区间 $[a,b]$ 分划为 n 等分：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，并任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 当 $n \to \infty$ 时，可近似认为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上为恒定值 $f(\xi_i)$，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平均的近似为

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\frac{b-a}{n}\left(f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)\right)$$

则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均应为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n} =$

$$= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

更一般地，对一组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我们给每个数分别赋予权重（*weight*）w_i（其中 $w_i \geq 0$，且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$），则这组数在该权重下的加权平均（*weighted average*）为 $\sum\limits_{i=1}^n w_i a_i$. 为便于推广，我们将权重写成 $w_i = \dfrac{\lambda_i}{n}$（其中 $\lambda_i \geq 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = n$），则加权平均为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i$.

问题：对于 $f(x) \in C[a,b]$ ，有没有连续形式的加权平均概念呢?

首先，离散情形下的权重概念应推广为权重函数（*wight function*）的概念，即 $[a,b]$ 上的非负函数 $w(x) \geq 0$，且满足 $\displaystyle\int_a^b w(x)dx = 1$. 接下来，仿效从前，将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，并任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$\sum_{i=1}^n w(\xi_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n w(\xi_i) \approx 1$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上对权函数 $w(x)$ 的加权平均可近似于

$$\sum_{i=1}^n w(\xi_i)f(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b w(x)f(x)dx$$

由此知**连续形式的加权平均**：给定 $f \in C[a,b]$，设权函数为 $w(x) \in R[a,b]$，即 $w(x) \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b w(x)dx = 1$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上相对于权函数 $w(x)$ 的加权平均定义为 $\displaystyle\int_a^b w(x)f(x)dx$.

自然地，我们要问：对连续函数 $f(x)$ 及任意的权函数 $w(x)$，函数 $f(x)$ 是否可取到其相对于 $w(x)$ 的加权平均?

答案是肯定的. 由于 $w(x)$ 非负，故 $mw(x) \leq w(x)f(x) \leq Mw(x)$，从而

$$\underbrace{\int_a^b mw(x)dx}_{m} \leq \int_a^b w(x)f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b Mw(x)dx}_{M}$$

从而由连续函数的介值性，知 $\exists\,\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \displaystyle\int_a^b w(x)f(x)dx \quad \square$.

显然，当权函数 $w(x) \equiv 1$ 时，我们便得到了连续平均的概念. $w(x)$ 也称为是概率密度（*probability density*），而 $\displaystyle\int_a^b w(x)f(x)dx$ 也称为随机变量 $f(x)$ 相对于由 $w(x)$ 描述的概率分布下的期望（*expectation*）.

更一般地，积分中值公式可推广

定理 5.1（积分中值定理）设函数 $f \in C[a,b]$，$g \in R[a,b]$，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

证明： 不妨设 $g(x) \geq 0$，如果 $\int_a^b g(x) = 0$，则对 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ 积分，然后利用保序性，可知 $\int_a^b f(x)g(x) = 0$，从而结论显然成立. 故设 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$，则下面函数是一个权函数

$$w(x) := \frac{g(x)}{\int_a^b g(x)dx}$$

则连续函数可取到其加权平均值，即 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \int_a^b w(x)f(x)dx$，即

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b g(x)f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x) \qquad \square$$

例 5.1 为求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 的值，令 $f(x) = x^n$，$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$，

则由定积分中值定理，知 $\exists \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，使得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

当由于 $0 \leq \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，故由夹逼定理知所求极限为 0.

注记 5.1 对上题，如果按下面的操作，即将求极限和求积分顺序替换，则结果虽然碰巧正确，但这种操作通常会导致错误.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^2 0dx = 0$$

比如，对函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1, \text{或 } x = 0 \end{cases}$$

显然，对一切 $x \in [0,1]$，成立 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$，即 $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$，但另一方面，有

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = n\frac{1}{n} = 1$$

从而 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$

例 5.2 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$，又 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$. 证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

证明： 令 $F(x) = xf(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，$F(1) = f(1)$，$F(0) = 0$. 由积分中值公式（5.1)，知 $\exists \eta \in [0,1]$，使得

$$f(1) = 2 \cdot \frac{1}{2}\eta f(\eta) = \eta f(\eta) = F(\eta)$$

即 $F(\eta) = F(1)$. 由罗尔定理, $\exists \xi \in (\eta, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$. □

例 5.3 设对任意 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 有函数列 $f_n(x) \in C[0,1]$，满足 $\int_0^1 f_n^2 dx = 1$. 证明：存在 N 和常数 c_i, $i = 1, 2, \cdots, N$，使得

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2 = 1, \quad \max_{x\in[0,1]} \left| \sum_{i=1}^{N} c_n f_n(x) \right| > 100$$

证明： 由题设可得 $\int_0^1 \left(f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_N^2(x)\right) dx = N$，根据积分中值公式，知 $\exists \xi$，使得

$$f_1^2(\xi) + f_2^2(\xi) + \cdots + f_N^2(\xi) = N$$

即 $\mathbb{R}^N$ 中向量 $\mathbf{u} := (f_1(\xi), f_2(\xi), \cdots, f_N(\xi))$ 的长度是 $\sqrt{N}$. 则问题转化为：寻找 $\mathbb{R}^N$ 中的单位向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N)$ 使得

$$|\mathbf{c} \bullet \mathbf{u}| = |c_1 f_1(\xi) + c_2 f_2(\xi) + \cdots + c_N f_N(\xi)| > 100$$

但这是容易取到的, 只需然 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{u}$ 同向, 则 $|\mathbf{c} \bullet \mathbf{u}| = ||\mathbf{u}|| = \sqrt{N}$, 为使它大于 100, 只需 $\sqrt{N} > 100$，即 $N = 10001$ 便可. 也就是说，可取

$$c_i = \frac{f_i(\xi)}{\sqrt{N}}, \quad i = 1, 2, \cdots, N = 10001. \quad \square$$

6 微积分基本定理

设 $f(x) \in R[a,b]$，仿照"图景 II"中面积函数 $S(t)$ 的定义，我们考虑变上限积分函数，简称变上限积分，即

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

虽然现在只要求 $f(x)$ 可积（不假设更强的连续性），但下面定理表明，此时 $\Phi(x)$ 必是连续的！

定理 6.1 设函数 $f \in R[a,b]$，则 $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$.

证明： 由定理 *3.1* 知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M > 0$，使得 $\forall t \in [a,b]$，有 $|f(t)| \leq M$. 则对任意 $x \in [a,b]$，取 Δx 使得 $x + \Delta x \in [a,b]$，都有

$$|\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| = \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq M|\Delta x| \to 0 \ (\Delta x \to 0) \qquad \square$$

定理 6.2（微积分基本定理） 设函数 $f \in C[a,b]$，则 $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \in D[a,b]$，且有

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

证明： 对任意 $\xi[a,b]$，取 Δx 使得 $x + \Delta x \in [a,b]$，我们估计

$$\Delta\Phi := \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

由假设 $f(t) \in C[a,b]$，根据积分中值定理，可知 $\exists\xi$ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，使得

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) \xlongequal{f\in C[a,b]} f(x), \ i.e., \frac{d\Phi}{dx} = f(x) \quad \square$$

总结：可积函数的变上限积分连续，连续函数的变上限积分可导，且其导函数回到其自身. 即闭区间上的连续函数必有由其变上限积分给出的原函数.

利用微积分基本定理，可给出牛顿-莱布尼茨公式的另证:

证明：我们知道当 $f \in C[a,b]$ 时，变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $\Phi(a) = 0$. 对 $f(x)$ 的任意原函数 $F(x)$，它与 $\Phi(x)$ 只差一个常数 C，即

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

在上式中令 $x = a$，得常数 $C = -F(a)$，从而有 $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. 特别地，令 $x = b$，即得牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. $\square$

推论 6.1 设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数，则

$$\int_a^x F'(t)dt = \int_a^x dF(t) = F(x) - F(a),\ \forall x \in [a,b]$$

即（变上限）积分一个函数的导函数回到这个函数本身（加一个常数）.

注 6.1 给定 $[a,x]$ 的任一分划 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$，及 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，有 $\int_a^b F'(t)dt \approx \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)\Delta x_i \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}}\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)$$

注意：在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上我们利用割线斜率 $\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_i}$ 近似切线斜率，但 $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ 时，"$\approx$" 变为 "$=$".

换言之，一函数之微分 dF 在一区间上的累积 $\int_a^b dF$ 即为函数在该区间两端点取值之差. 上公式还是一种有启发性的写法，即

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

特别地, 这表明: 在点 $x = a$ 附近，$F(x)$ 的值，相对于 $F(a)$ 而言，其净增长是由其增长速率（由导数衡量）对"时间"变量 t 在 $[a,x]$ 上的积累给出的. 比如，当 $F = s(t)$ 是位移函数时表示：位移的改变由速度 $v(t) := s'(t)$ 对时间的累积给出，这当然是我们非常熟悉的情景.

将上式与拉格朗日中值定理说给出的下估计相对比

$$F(x)=F(a)+F'(a+\theta(x-a))(x-a)\quad 0<\theta<1$$

即 $\exists\xi$ 介于 a 和 x 之间，使得 $\displaystyle\int_a^x F'(t)dt=F'(\xi)(x-a)$. 当然，这无非是积分的中值公式.

类似地，也可考虑变下限积分 $\Psi(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)dt$, $x\in[a,b]$，它与变上限积分有关系 $\displaystyle\int_x^b f(t)dt=-\int_b^x f(t)dt$.

例 6.1 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2dt$ 的导数.

解： 令 $u(x)=\sqrt{x}$，$\Phi(u):=\displaystyle\int_0^u\cos t^2dt$，则函数 $F(x)=\Phi(u(x))$. 有符合函数求导的链式法则，得

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{dx}=\sin u^2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

例 6.2 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}dt}{\ln(1+x^3)}\xlongequal{\ln(1+x^3)\sim x^3}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}dt}{x^3}=$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{2x\arctan x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

例 6.3 设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 且 $f'(t)\geq0$ $(t\in(a,b))$, 记 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$. 证明：$\forall x\in(a,b)$，成立 $F'(x)\geq0$.

证明： $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$. 又由积分中值公式，知 $\exists\xi\in[a,x]$，使得 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$，从而有

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\geq0\ (\text{因 } f'(x)\geq0)\quad\square$$

例 6.4 证明 $\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$.

证明: 记 $F(x)=\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$，则 $F'(x)=$

$$-\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}-\frac{d}{dx}\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\equiv 0$$

从而 $F(x)=C$ (常数)，令 $x=1$，得 $C=0$，从而等式得证. □

注记 6.2 不难看出，$\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，从而所证等式等价于 $\arctan t\Big|_x^1=\arctan t\Big|_1^{\frac{1}{x}}$，即 $\frac{\pi}{4}-\arctan x=\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{4}$，也即 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，而这是显然成立.

7 定积分的换元公式

回顾例 *2.2* 中关于积分 $\int_1^2\frac{dx}{x}$ 的计算. 如不用牛顿-莱布尼茨公式，则需划分区间、取点、然后求对应黎曼和的极限. 还记得当时是将分点取为 $x_i=q^i$ $(q=2^{1/n})$，$\xi_i=x_i$，然后可方便求出黎曼和的极限是 $\ln 2$. 但既然函数可积，则其积分值是不依赖于分划方式及取点方式的，那么如果将 $[1,2]$ 等分为 n 份，即取分点 $x_i=1+\frac{i}{n}$, $i=0,1,\cdots,n$，并令 $\xi_i=x_i$，则该分划对应的黎曼和为 $\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+i}$. 也就是说，一定有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+i}=\ln 2$$

左边的极限直接算是比较困难的，但当识别出它是某个积分则计算就简单多了. 当然，如果直接从上面极限的形式出发，我们也可按如下方式将它转变为一个积分:

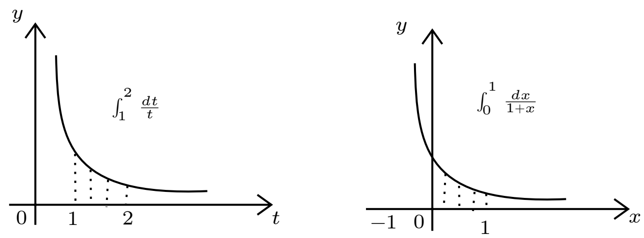
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$$

这可以看做是 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分 $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$. 既然两个积分都表示的是相同的极限，我们自然有如下等式

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

这个积分等式也可以看成是做了“变量替换”: $t=1+x$ 而得的. 在该变量替换下,

被积函数从 $\frac{1}{1+x}$ 变为 $\frac{1}{t}$；微分 dx 变为 $d(t-1)=dt$；而积分下限从变量 x 的取值 0 变为 t 的取值 1，同理上限从 1 变为 2. 当然，从求面积的角度来说，上面的变量替换相当于对同一面积的平移，所以对应积分不变是显而易见的！见下图：



用积分的极限定义，从根由解释起，也是不难的. 任给区间 $[0,1]$ 的一个分划：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 及选点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\xi_i}\Delta x_i$. 但在新变量 $t=1+x$ 下，上面对 x-轴上区间 $[0,1]$ 的分划转变为对 t 轴上 $[1,2]$ 的如下分划

$$1=\underbrace{1+x_0}_{t_0}<\underbrace{1+x_1}_{t_1}<\cdots<\underbrace{1+x_n}_{t_n}=2$$

且 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 则转化为 $\eta_i:=1+\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$. 注意到：

$$\Delta t_i=(1+x_i)-(1+x_{i-1})=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$$

从而对应黎曼和之极限有如下转化

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\eta_i}\Delta u_i=\int_1^2\frac{dt}{t}$$

上例中的变量替换原则及其解释具有一般性，我们需将其中的要点萃取，并加以条件限制，便得一般定积分的变量替换规则及其证明.

定理 7.1（定积分换元公式）设函数 $f(x)\in C[a,b]$. 如果可导函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件 $\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta]$，且 $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$，$\varphi$ 的值域 $R(\varphi)\subseteq[a,b]$，则有

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt}\qquad(7.1)$$

注记 7.1 上面引导例子中，$x=t-1$，即 $\varphi(t)=t-1$，故 $\varphi(1)=0,\ \varphi(2)=1$，且

$$f(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f[\varphi(t)]=\frac{1}{1+(t-1)}=\frac{1}{t}.$$

注记 7.2 如果加限制条件：$\varphi'(t)$ 连续，且 $\varphi(t)$ 从 $a=\varphi(\alpha)$ 单调地变到 $b=\varphi(\beta)$，则我们延续上例中的讨论，可从原始定义出发对换元公式加以论证，现勾勒如下：不妨假设 φ 单调增加. 取 $[\alpha,\beta]$ 的任一分划 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，它对应于 $[a,b]$ 的如下分划：

$$a=\underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0}<\underbrace{\varphi(t_1)}_{x_1}<\cdots<\underbrace{\varphi(t_n)}_{x_n}=b$$

由于 $x=\varphi(t)$ 一致连续，当 $\lambda:=\max_{1\le i\le n}\Delta t_i=\max_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1})\to 0$ 时，有

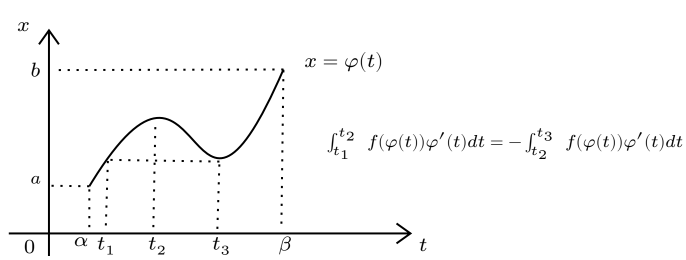
$$\max_{1\le i\le n}\Delta x_i=\max_{1\le i\le n}\{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\}\to 0$$

任取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，它对应于 $\eta_i:=\varphi(\xi_i)\in[x_{i-1},x_i]$，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 对应于该分划及取点 η_i 的黎曼和有如下变换

$$\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))\xlongequal[\exists\mu_i\in(t_{i-1},t_i)]{\text{由拉格朗日中值定理}}\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\mu_i)\Delta t_i$$

$$\xrightarrow[\varphi(t)\ \text{连续}]{\lambda\to 0}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)\Delta t_i=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\quad\square$$

在定理 *7.1* 的假设：$\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta]$ 下，两可积函数的乘积 $f(t)\varphi'(t)$ 也是可积的. 此时由于 $\varphi(t)$ 没有整体的单调性, 故不易通过原始定义按上面的模式直接加以处理（虽然理论上可将 $[\alpha,\beta]$ 划分成小区间，使得 $\varphi(t)$ 在每一小区间上都单调，然后在每一小区间上按注记中处理，这些积分中有些相互抵消掉后会得到 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，相互抵消的情形见下图所示）.



这样证明起来显然过于繁琐，但我们发现如果利用牛顿-莱布尼茨公式从整体出发思考，则可绕过上面的技术麻烦.

定理 7.1 的证明: 由于 $f(x)\in C[a,b]$,故其变上限积分是一原函数,即 $f(x)$ 存在原函

数, 所以计算 $\int_a^b f(x)dx$ 时可利用牛顿莱布尼茨公式进行. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数, 考虑复合函数 $\Phi(t) := F(\varphi(t))$, 则其导函数为 $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, 从而由牛顿莱布尼茨公式，得

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

注意到，利用微分的定义，公式 (7.1) 也可写作：$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$.

换个视角来看，也就是说，我们将 $f(x)dx$ 看成个整体，则换元法的精髓在于想法子**凑微分**，即将 $f(x)dx$ 重新整理为 $g(h(x))h'(x)dx = g(h(x))dh(x)$，从而凑出个微分 dh，然后令 $u = h(x)$ 为新的变元，若 $a \le x \le b$ 对应为 $\alpha \le u \le \beta$，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(u)du} \qquad (7.2)$$

而凑微分的目的是使得以 u 变量来看积分是更容易积的，即更容易找到 $g(u)$ 的原函数；或将积分划归为熟知积分类型及其变形. 对某些积分，可能需要多次换元才能将其简化到直接可积分的类型.

例 7.1 对积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$，几何上，它代表四分之一圆：$x^2 + y^2 = a^2$，$0 \le x \le a, y \ge 0$ 的面积，即 $\frac{\pi a^2}{4}$. 下面我们用两种方法进行换元求解.

方法 I: 令 $u = \sqrt{a^2 - x^2}$，则 $x = \sqrt{a^2 - u^2}$，且 $dx = \frac{-udu}{\sqrt{a^2 - u^2}}$，并注意到当 x 从 0 变到 a 时，u 从 a 变到 0，从而以变元 u 来看，所求积分为

$$-\int_a^0 \frac{u^2du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\int_0^a \frac{-u^2du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\int_0^a \frac{(a^2 - u^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - u^2}}du$$

$$= -\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2}du + a^2 \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

即得到了积分等式

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = -\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2}du + a^2 \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

即 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.

对最后这个积分，其被积函数让人想到公式 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 我们再进行一次变量替换 (或凑微分), 以便将积分转换为可用上求导公式直接处理的形式. 令 $u = at$, 则 $du = adt$, 上面 u-积分变为下面的 t-积分

$$\frac{a^2}{2}\int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin t\Big|_0^1 = \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

方法 II: 更简洁的处理方法是, 注意到 $x^2+y^2 = a^2$ 有自然的参数化 $x = a\cos t$, $y = \sin t$. 故可令 $x = a\cos t$, 此时 $dx = -a\sin t dt$, 当 x 从 0 变到 a 时, t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0. 从而有

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,(-a\sin t)dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt -$$

$$-\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

例 7.2 求 $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx \quad (a>0)$.

方法 I: 根号部分难直接处理, 想办法把根号给替换掉. 回忆起三角恒等式 $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$, 可考虑变元替换: $x = a\sec t$, 则 $dx = a\sec t\tan t dt$, 积分下限 $x = a$ 变为 $t = 0$, 积分上限 $x = 2a$ 变为 $t = \frac{\pi}{3}$, 故积分可写成

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a\tan t}{a^4\sec^4 t}a\sec t\tan t dt = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\,\underbrace{\cos t dt}_{\text{可凑微分}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t d\sin t = \frac{1}{a^2}\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}$$

方法 II: 分母上有高次项也是导致积分难直接处理的原因, 为此我们采用变元替

换：$x=\frac{a}{t}$，则积分转化为

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx \xlongequal{x=\frac{a}{t}} \int_1^{1/2}\frac{\sqrt{\frac{a^2}{t^2}-a^2}}{\frac{a^4}{t^4}}\left(-\frac{adt}{t^2}\right)=\frac{1}{a^2}\int_{1/2}^1 t\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{-1}{a^2}\int_{1/2}^1\sqrt{1-t^2}\underbrace{(-tdt)}_{\text{可凑微分}}=\frac{-1}{2a^2}\int_{1/2}^1\sqrt{1-t^2}\,d(1-t^2)$$

$$=\frac{-1}{2a^2}\int_{1/2}^1\frac{2}{3}d(1-t^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{-1}{3a^2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1/2}^1=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$$

例 7.3 (*) 求 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. 一个巧妙的换元：$x=\frac{1-t}{1+t}$ 可破解此积分. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=1$ 时 $t=0$，且 $dx=\frac{-2dt}{(1+t)^2}$，从而

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_1^0\frac{\ln\left(1+\frac{1-t}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\left(\frac{-2dt}{(1+t)^2}\right)$$

$$\int_0^1\frac{2\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)dt}{(1+t)^2+(1-t)^2}=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

$$=\ln 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt \qquad \Longrightarrow$$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\ln 2}{2}\arctan t\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

如果被积函数是偶（奇）函数，且被积区间具有原点对称性（或能划分出具有对称性的部分），则可依据对称性来简化计算，提高求解效率.

例 7.4 设 $f(x)\in R[-a,a]$，则有

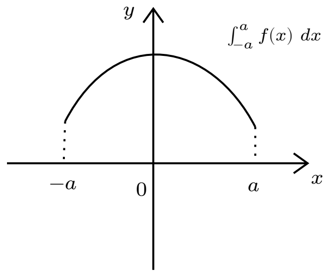
$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}0, & f\text{ 为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)dx, & f\text{ 为偶函数}\end{cases}$$

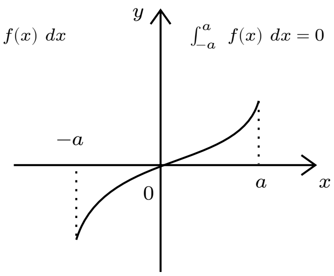
证明： $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$，但

$$\int_{-a}^0 f(x)dx \xlongequal{x=-t} -\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx \quad \Longrightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x)\right) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数} \\ 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx, & f \text{ 为偶函数} \end{cases} \qquad \square$$





例 7.5 由对称性，轻易可知 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = 0.$

对称原则需灵活运用. 比如当 $f(x) = f(a-x)$ 时，有 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$；当 $f(x) = -f(a-x)$ 时，有 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 0.$

这是因为，令 $x = \dfrac{a}{2} - x$，则 $f(x) = \pm f(a-x)$ 表明：$f\left(\dfrac{a}{2} - x\right) = \pm f\left(\dfrac{a}{2} + x\right)$. 故条件 $f(x) = f(a-x)$ 说明函数关于直线 $x = \dfrac{a}{2}$ 是偶函数；而 $f(x) = -f(a-x)$ 说明函数关于直线 $x = \dfrac{a}{2}$ 是奇函数.

例 7.6 对积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx$，其中 a, b 不同时为零. 注意到在变量替换 $x \to \pi - x$ 下，由于 $\cos(\pi - x) = -\cos x$；$\sin(\pi - x) = \cos x$，即被积函数 $f(x)$ 在变替换下变为 $-f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $[0, \pi]$ 的中点 $\frac{\pi}{2}$ 是奇函数，从而积分为零. 另一种看法是，直接做变量替换 $t = x - \dfrac{\pi}{2}$，则原积分变为 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}dt = 0.$

例 7.7 对积分 $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$，做变量替换 $x = -t$，则

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx \xlongequal{x=-t} \int_{2}^{-2} (-t)\ln(1+e^{-t})d(-t) = -\int_{-2}^{2} t(\ln(1+e^t) - t)dt$$

$$= -\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx + \int_{-2}^{2} x^2dx \quad \Longrightarrow \quad \int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx = 0$$

例 7.7′ 对任意实数 a，恒成立 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^a x} = \frac{\pi}{4}$. 类似与上题思路，虽然被积函数对于积分区间不具有奇偶性，但又很接近于具有奇偶性的情形.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^a x} \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-dt}{1+\tan^a\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cot^a t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a t dt}{\sin^a t+\cos^a t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^a t}{1+\tan^a t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\tan^a t}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^a x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$$

具有周期性函数的积分结果不依赖于被积区间的周期平移，即有

命题 7.1 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数，则有 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$，更进一步有 $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$.

证明: 由区间可加性，得 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$，对第二个积分用变元替换 $x=t+T$，得

$$\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x=t+T} \int_0^a f(t+T)dt \xlongequal{f(t+T)=f(t)} \int_0^a f(t)dt$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \square$$

注意到例 7.7′ 中的计算过程中,我们实际上得到了 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^a x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^a x}$ 的结果,即将被积函数看成是 $f(\sin x)$,则结论相当于是说 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$. 事实上，这是一个一般结论，即有下命题:

命题 7.2 设函数 $f \in C[0,1]$. 则成立下列公式

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx; \qquad 2)\ \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$3)\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

证明： 对 1) 中的积分，令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$$

对 2) 中的积分，$\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$

$$\xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

对 3) 中的积分，令 $x=\pi-t$，有 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=$

$$=\int_{\pi}^0(\pi-t)f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)(-dt)=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \qquad \square$$

例 7.7″ 对例 *7.7′* 中的积分 $\displaystyle I:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^a x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt$，利用上面公式 1)，可得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt \quad\Longrightarrow\quad 2I=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^a t}{\sin^a t+\cos^a t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad I=\frac{\pi}{4}$$

例 7.8 对积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$，利用 3) 中的结论，直接可得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \xlongequal{\text{凑微分}} -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$\xlongequal{u=\cos x}\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}\arctan u\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{4}$$

例 7.3′(*) 对例 *7.3′* 中的积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. 我们之前用了一个相当巧妙的变

量替换 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$ 而将其破解. 这里我们注意到分母 $1+x^2$ 可用三角恒等式 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 来转化，即令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$，从而

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t}\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

这仍是一个不简单的积分，但它里面包含三角函数，故可从探测其结构的对称性入手. 通常为了探测函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上是否具有某种对称性，需观察 $f(a-x)$ 和 $f(x)$ 的关系. 在我们的例子中，考虑

$$\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)$$

$$=\ln 2-\ln(1+\tan t)\quad\Longrightarrow$$

$$\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)-\frac{\ln 2}{2}=-\left(\ln(1+\tan t)-\frac{\ln 2}{2}\right)$$

也就是说：函数 $h(t):=\ln(1+\tan t)-\dfrac{\ln 2}{2}$ 关于 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 的中点是奇函数，也即其图形在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上关于点 $\dfrac{\pi}{8}$ 是中心对称的，从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}h(t)dx=0\quad\Longrightarrow\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

另解:（本质同上，只是省却了几何直观奇偶性的过程）直接利用变量替换 $x=\dfrac{\pi}{4}-t$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan t))\,dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

$$\Longrightarrow\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

8 积分技术盘点

8.1 换元法

首先，基本积分表中的积分要记住，然后就是利用变元替换这一关键技术将未知积分变换位已知积分或可直接积出来的积分类型.

类似与定积分换元公式（当牛顿-莱布尼茨公式可用时）的证明，我们可证明不定积分的换元公式.

定理 8.1.1（第一换元法）设函数 $F(u)$ 时 $f(u)$ 在区间 I 上的一个原函数，即 $\int f(u)du = F(u) + C$，又 $u = \varphi(x)$ 在区间 I 上可导且其值域 $R(\varphi) \subseteq I$，则有

$$\int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)dx}_{\text{凑微分}} = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) =$$

$$\xlongequal{t=\varphi(x)} \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$$

证明： 由复合函数求导的链式法则，得

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \qquad \square$$

定理 8.1.2（第二换元法）设函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 I 上可导且 $\varphi'(t) \neq 0$，且 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$，则 $\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$，其中 $t = \varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数. 即

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}_{\text{有原函数 } F(t)} = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

证明： 由复合函数求导的链式法则，得

$$\frac{d}{dx}\left(F(\varphi^{-1}(x))\right) = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) \qquad \square$$

先就基本积分表中的几个积分做一点解释.

例 8.1.1

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a>0)$. 如果按第一换元的模式，即想办法凑微分，可按如下处理

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,d\left(\frac{x}{a}\right)}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

如果按第二换元的模式，即直接用变量替换化成容易的积分，则可按如下处理

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal[dx=a\cos t dt]{x=a\sin t} \int \frac{a\cos t dt}{a\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

- 同理，令 $x = a\tan t$，可求得 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0)$.

- 对积分 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$. 一种方法是注意到

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

从而有

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} + \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| + \ln|x+a|\right) + C$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

也可考虑用换元 $x = a\sec t$，则 $dx = a\sec t\tan t dt$，从而有

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{a\sec t\tan t dt}{a^2\tan^2 t} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec t}{\tan t}dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin t}dt$$
$$= \frac{1}{a}\int \csc t dt = \frac{1}{a}\ln|\csc t - \cot t| + C$$

我们还需换回用原变量 x 的表达式. 一种方法是利用三角恒等式：已知 $\sec t = \frac{x}{a}$，求 $\cot t$ 和 $\csc t$? 即已知 $\cos t = \frac{a}{x}$，那么

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{a/x}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}; \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

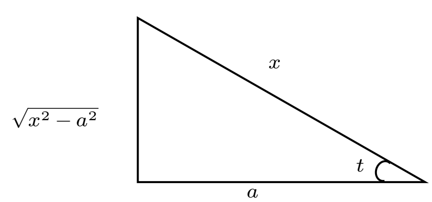
从而

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{a/x}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

上面的求解过程稍显繁琐，比较简介的求法是利用图示，即我构造一个直角三角形，使得 $\sec t = \dfrac{x}{a}$ 在其中成立，然后求解该直角三角形以得到我们所需的信息.
注意： 在解直角三角形时，我们不需要考虑角度取值带来的的多种可能性，对求不定积分而言，我们只需找到一个原函数就可以了，而其它的原函数与它差任意常数.



在上三角形中，轻易可知 $\csc t = \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$；$\cot t = \dfrac{a/x}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$，剩下的过程同上.

- 在上个积分的求解中，我们用到了 $\displaystyle\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$；类似地，还有 $\displaystyle\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$. 可证明如下：

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$\xlongequal{u=\sin x} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|u+1| - \ln|u-1|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|} + C =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \square$$

- 对积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$ 用换元 $x=a\tan t$，积分可转化为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int \sec t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t}+\tan t\right|+C=\ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\frac{x}{a}\right|+C$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right)+C=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\underbrace{-\ln a+C}_{\text{仍是任意常数}}$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

- 利用代换 $x=a\sec t$，同理可证：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\ \ (a>0)$

例 8.1.2 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}dx=-\int(\sin x+\cos x)dx$

$$=-\int \sin xdx-\int \cos xdx=\cos x-\sin x+C$$

例 8.1.3 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}=\int \frac{dx}{x^2}-\int \frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\arctan x+$ C

例 *8.1.2*，例 *8.1.3* 是化简后直接积的类型.

例 8.1.4 $\int \sin^5 x\cos xdx=\int \sin^5 xd(\sin x)=\int u^5du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$

例 8.1.5 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \sin\sqrt{x}d(\sqrt{x})=-2\cos\sqrt{x}+C$

例 8.1.6 $\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \xlongequal{\text{凑微分}} -\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

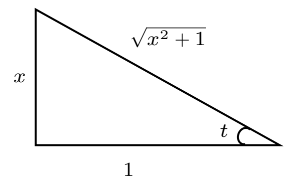
例 8.1.7 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int \frac{d\ln x}{\ln x\ln(\ln x)}=\int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln\ln x}=\ln|\ln(\ln x)|+C$

上面几例都是凑微分后直接积的类型.

例 8.1.8 对积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$，一种方法是直接用三**角代换** $x=\tan t$，则有

解法一: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \xlongequal{x=\tan t} \int \frac{\sec^2 tdt}{\tan t\sec t}=\int \frac{\sec tdt}{\tan t}=\int \csc tdt=$

$$= \ln|\csc t - \cot t| + C$$



由上图，知 $\csc t = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$； $\cot t = \dfrac{1}{x}$. 故

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \ln|\csc t - \cot t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$

分母上关于 x 的次数大也是造成积分困难的原因，所以考虑 $t = \frac{1}{x}$ 将积分变换，希望得到易处理的形式.

解法 II: $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \xlongequal[dx=-\frac{dt}{t^2}]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C = \ln\left(\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\right) = \ln\left(\sqrt{t^2+1}-t\right) =$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) + C = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) & x > 0 \\ \ln\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right) & x < 0 \end{cases} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$

解法 III: 令 $\sqrt{x^2+1} = x + t$，则 $x = \dfrac{1-t^2}{2t}$， $dx = -\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$，所以有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \xlongequal{\sqrt{x^2+1}=x+t} \int \frac{-\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{1-t^2}{2t}\frac{1+t^2}{2t}}dt = 2\int \frac{1}{t^2-1}dt$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$\xlongequal{t=\sqrt{x^2+1}-x} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}\right| + C$$

例 8.1.9 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \xlongequal{\text{凑微分}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

或者，令 $x = \sin^2 t$， $t \in (0, \frac{\pi}{2})$，则 $dx = 2\sin t\cos t dt$， $\sqrt{x(1-x)} = \sin t\cos t$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int 2dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C$$

例 8.1.10 $\int \frac{3x+5}{x^2+x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$

$$\xlongequal{\text{凑微分}} \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{7}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+x-1} + \frac{7}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right| + C$$

例 8.1.11 $\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx \xlongequal{\text{凑微分}} \frac{1}{2}\int \sqrt{x^4+x^2}\,dx^2 =$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2} - \frac{1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 + C \quad \left(C = C_1 + \frac{\ln 2}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

例 8.1.12 $\int \frac{x\tan\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx \xlongequal{\sqrt{1+x^2}=u} \int \frac{\sqrt{u^2-1}\tan u}{u}\frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}} = \int \tan udu$

$$\xlongequal{\text{例 }8.6} -\ln|\cos u| + C = -\ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + C$$

8.2 分部积分

由莱布尼茨法则：$d(uv) = udv + vdu$. 两边同时求不定积分，得

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\int udv}_{\text{难}} = uv - \underbrace{\int vdu}_{\text{易}}$$

如果 $u = f(x), v = g(x)$，上面分部积分公式也可写成

$$\underbrace{\int f(x)g'(x)dx}_{\text{难}} = f(x)g(x) - \underbrace{\int g(x)f'(x)dx}_{\text{易}}$$

对定积分也有相应的分部积分公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

证明： 由分部积分知：$f(x)g'(x)$ 有原函数 $f(x)g(x) - \underbrace{\int g(x)f'(x)dx}_{=:F(x)+C}$. 从而

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x) - F(x) + C)\ \Big|_a^b$$

$$= (f(b)g(b) - F(b) + C) - (f(a)g(a) - F(a) + C) =$$

$$(f(b)g(b) - f(a)g(a)) - (F(b) - F(a)) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \quad \square$$

例 8.2.1 $\int xe^{-x}dx$. 按之前换元思路，可令 $t = e^{-x}$，则积分变为

$$\int xe^{-x}dx \xlongequal{t=e^{-x}} -\int t\ln t(-\frac{1}{t})dt = \int \ln t dt$$

仍不易看出. 故我们考虑用分部积分公式，将积分结构做一根本调整.

$$\int xe^{-x}dx = -\int \underbrace{xde^{-x}}_{udv} = -\left(\underbrace{xe^{-x}}_{uv} - \int \underbrace{e^{-x}dx}_{vdu}\right)$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

当然，对 $\int \ln t dt$，我们也可用分部积分求解. 将 u 看成 $\ln t$，将 v 看成 t 本身，则有

$$\int \ln t dt = t\ln t - \int t\frac{dt}{t} = t\ln t - t + C \xlongequal{t=e^{-x}} -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

更一般地，$\int \log_a x dx = x\log_a x - \int x\frac{dx}{x\ln a} = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$

例 8.2.2 类似地，将变量本身看成 v 利用分部积分求解的还有 $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

例 8.2.3 $\int x^2 \sin x dx = -\int x^2 d\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx$

$$= -x^2\cos x + 2\int x d\sin x = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right)$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

这是用了两次分部积分求解的例子.

例 8.2.4 求 $I = \int e^{ax}\sin bx dx\ (a \neq 0)$.

$$I = \frac{1}{a}\int \sin bx\, d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax} d(\sin bx)$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\, d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2} + C_1$$

$$\Longrightarrow \quad I = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C \quad \text{其中 } C = \frac{a^2 C_1}{a^2+b^2} \text{ 仍为任意常数.}$$

同理可求 $\int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$.

例 8.2.5 $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$

$$x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

同理可求 $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C$.

如果用换元 $x = a\sec t$，则 $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = a^2\int \sec t\tan^2 t dt =$

$$= a^2\int \frac{\tan^2 t\sec^2 t dt}{\sec t} = a^2\int \frac{\tan^2 t d\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \xlongequal{u=\tan t} a^2\int \frac{u^2 du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= a^2\int\sqrt{1+u^2}du - a^2\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = a^2u\sqrt{1+u^2} - a^2\int\frac{u^2du}{\sqrt{1+u^2}} - a^2\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2\int\frac{u^2du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{a^2}{2}u\sqrt{1+u^2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}u\sqrt{1+u^2} - \frac{a^2}{4}\left(u\sqrt{u^2+1} + \ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\right) + C$$

考虑到还要换回变量 x 的表达，该方法显然太繁琐，不及一开始就用分部积分法求解来得简易. 当然，这种“试验”，乃至“试错”还是有必要的，多加总结，便成宝贵经验，遂可无心而直道自通.

反复利用分部积分公式还能得出求积分的递推公式，在应用中也是方便的.

例 8.2.6 求 $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$.

$$I_0 = \int \sin^0 x dx = \int dx = x + C; \qquad I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$n \geq 2$ 时，有 $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x +$

$$+(n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$-\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \quad \Longrightarrow \quad I_n = \frac{1}{n}\left[(n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x\cos x\right]$$

例 8.2.7 计算 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.（两积分相等可由换元 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ 看出），利用上例中的计算可得，当 $n \geq 2$ 时，有

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= 0 + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad \Longrightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n \geq 2)$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

从而可知 $I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$ 其中当 n 为偶数时，$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$；当 n 为奇数时，$n!! = n(n-2)\cdots 3\cdot 1$.

8.2.8 $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int xd\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)=$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}\quad\Longrightarrow\quad I_{n+1}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{x}{2n(x^2+a^2)^n}\right]$$

例 8.2.9 求 $I_{m,n}=\int\cos^m x\sin^n xdx$ 的递推公式.

$$I_{m,n}=\int\cos^{m-1}x\sin^n xd\sin x=\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x-\int\sin xd(\cos^{m-1}x\sin^n x)$$

$$\int\sin xd(\cos^{m-1}x\sin^n x)=\int\sin x\left[-(m-1)\cos^{m-2}x\sin^{n+1}x+n\cos^m x\sin^{n-1}x\right]dx$$

$$=-(m-1)\int\cos^{m-2}x(1-\cos^2 x)\sin^n xdx+n\int\cos^m x\sin^n xdx$$

$$=-(m-1)I_{m-2,n}+(m+n-1)I_{m,n}$$

代入，整理可得 $I_{m,n}=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$

例 8.2.10 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3f'(x)dx$.

$$\int x^3f'(x)dx=\int x^3df(x)=x^3f(x)-3\int x^2f(x)dx\xlongequal{f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}$$

$$=x^3f(x)-2\int x^2d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=x^3f(x)-2\int x^2\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$$

$$=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-2\int x\cos xdx+2\int\sin xdx=x(x\cos x-\sin x)-$$

$$-2\int x\sin x-2\cos x=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$$

例 8.2.11（β 函数）设 m,n 是自然数，$B(m,n)=\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ 是一个著名的积分，其计算如下：$B(m,n)=\frac{1}{m}\int_0^1(1-x)^{n-1}dx^m=$

$$\left.\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\right|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1x^m(1-x)^{n-2}dx=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)\quad\Longrightarrow$$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

例 8.2.12（*Taylor* 公式的积分型余项）设 $f(x)$ 在 x_0 的一个领域内有 $n+1$ 阶连续导函数，则对 x_0 近旁的 x，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$（积分型余项）

证明： 我们知道 $R_n^{(k)}(x_0)=0$, $k=1,2,\cdots,n$，$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$. 从而有

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x}R_n'(t)dt=\int_{x_0}^{x}R_n'(t)d(t-x)=(t-x)R_n'(t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}R_n''(t)(x-t)dt$$

$$=\int_{x_0}^{x}R_n''(t)(x-t)dt\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}R_n'''(t)(x-t)^2dt=\cdots$$

$$\cdots=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \qquad \square$$

注记 8.2.1 对上面的余项用积分的第一中值定理（被积函数看成是 $f^{(n+1)}(t)$ 和 $(x-t)^n$ 的乘积），知 $\exists$ 介于 x_0 和 x 之间的 ξ，使得

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\text{（拉格朗日余项）}$$

将被积函数看成是 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 和 1 的乘积，然后利用第一中值定理，知 $\exists$ 介于 x_0 和 x 之间的 ξ，使得

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x}dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$$

$$\xlongequal{\xi=x_0+\eta(x-x_0),\,0\le\eta\le1}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\eta(x-x_0))(1-\eta)^n(x-x_0)^{n+1}\text{（柯西余项）}$$

8.3 有理函数积分的部分分式展开法及几类可积类型

有理函数是指形如 $R(x)=\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ 的函数，其中 $p_n(x)$，$q_m(x)$ 分别是 n,m 次实系数多项式. 一般地，总可假定 $p_n(x)$ 和 $q_m(x)$ 没有公因子（将公因子约掉即可）.

如 $n<m$，则称 $R(x)$ 是真分式，否则称为是假分式. 通过多项式的带余除法，总能将假分式化为一个多项式和一个真分式子和，即有

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}=p_{n-m}(x)+\frac{r(x)}{q_m(x)}$$

其中 p_{n-m} 是 $n-m$ 次多项式，而 $r(x)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多项式，从而

$$\int\frac{p_n(x)}{q_m(x)}dx=\int p_{n-m}(x)dx+\int\frac{r(x)}{q_m(x)}dx$$

故对有理函数的积分就转化为多项式函数的积分和对真分式的积分, 下面讨论如何对真分式进行积分，方法是部分分式展开. 其基本模式如下例所示:

在计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}$ 时，我们用到过下面的部分分式展开:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

也就是说分母上两个一次因子各贡献来形如 $\dfrac{A}{x-a}$ 的展开项.

有如，计算 $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)^2}$ 时，除了直接凑微分方法之外，还可以考虑部分分式展开

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{x}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

也可以方便求解出来. 在实数域上，多项式可能有二次不可约因子（对应于它在复数域上有一对共轭复根的情形）$x^2+px+q\,(\Delta=p^2-4q<0)$. 如果分母上有二次不可约因子，该如何分解呢? 我们考察下面的例子

$$\frac{x+2}{x^2+x+1}\ (\text{已是最简形式，可直接积分})$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|+C$$

如果分母有多重二次不可约因子，该如何处理？比如 $\int\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx$，很显然也是可直接积的，且一般地，有

$$\int\frac{Bx+D}{(x^2+px+1)^k}dx \xlongequal{\text{凑微分}} \frac{B}{2}\int\frac{d(x^2+px+1)}{(x^2+px+q)^k}+$$

$$+\frac{2D-Bp}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2\right]^k}\text{（其中 }\Delta=p^2-4q<0\text{）}$$

在给出一般操作流程之前，我们先分析两个典型例子，由此一般情形自明.

例 8.3.1 我们知道 $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$，试问：$\int\frac{dx}{1+x^3}$ 该如何计算？

解： 在实数域上，$1+x^3$ 可分解为 $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$. 即 $x^3+1=0$ 的所有根是 $-1,\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，也就是说，在复数域 $\mathbb{C}$ 上，有如下因式分解

$$x^3+1=(x+1)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=(x+1)(x^2-x+1)$$

如果要将被积函数 $\frac{1}{1+x^3}$ 部分分式展开，也就是说展开中的每一项的分母子乘积要等于 $1+x^3$，则表明，展开中必须有形如 $\frac{A}{x+1}$ 及 $\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ 的项存在，即有

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

其中 A,B,C 为待定常数. 先通分，得 $1=A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C)$，然后比对两边多项式的系数，知 A,B,C 满足如下线性约束：

$$\begin{cases} x^2:\ 0=A+B \\ x:\ 0=-A+B+C \\ 1:\ 1=A+C \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases} \implies$$

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{\ln|x^2-x+1|}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{\ln|x^2-x+1|}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

例 8.3.2 对积分 $\int \frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$，先对被积函数做分式展开，被积函数是个真分式，且分母有一个一次因子 $x-1$ 及一个 2 重不可约二次因子 $(x^2+1)^2$，所以，它的展开里必包含 $\frac{A}{x-1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$.

但这里有个问题：被积有理函数的分子是个四次多项式，它由 5 个系数决定，而如果展开只有这两项的话，则只有 A,D,E 三个自由变量，显然是不够的. 故完整的展开应添加 $\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$ 这一项，即

$$\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

刚刚好，有 A,B,C,D,E 五个未知常数需确定，它们满足约束：

$$x^4+x^3+3x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

可以通过对比左右两端的系数而得到未知常数间的线性方程组，求解可得.

但注意到，如果令 $x=1$，我们有 $4=4A$，即知 $A=1$；又令 $x=i=\sqrt{-1}$，则有 $-3-i=(Di+E)(i-1)=-D-E+(E-D)i$，即 $-D-E=-3, D-E=1$，从而解得 $D=2,E=1$. 为求 B,C，我们比较两边 x^4 的系数，得 $1=A+B$，从而得 $B=1-A=0$；然后比较两边 x^3 的系数，得 $1=C$. 故

$$\int \frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \ln|x-1| + \arctan x + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

这种利用带入特殊值再结合对比系数的方法，比之直接对比系数求解线性方程组，

往往来得更快捷高效.

由上面例子中的讨论，对真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分规则可总结如下：

1. 将分母 $Q(x)$ 在实数范围内因式分解, 则分解结果中只包含两种类型的因子：一种是 $(x-a)^k$，另一种是 $(x^2+px+q)^k$，其中 k 是正整数，且 $\Delta = p^2-4q<0$.

2. 当 $Q(x)$ 中包含 $(x-a)^k$ 时，$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的展开中包含如下形式的部分分式：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

但 $Q(x)$ 中包含 $(x^2+px+q)^k$ 时，则 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的展开中包含如下形式的部分分式：

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}$$

其中 A_i, B_i, D_i 都是待定常数.

例 8.3.2 计算 $\displaystyle\int\frac{x^5-x^3-2x^2+27x}{x^4-x^2-2x+2}dx$. 其中的有理函数不是真分式，故先用带余除法将它写成多项式加真分式的形式.

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x \\ \cline{2-2}
x^4-x^2-2x+2 & \big)\,x^5-x^3-2x^2+27x \\
 & \underline{-\;\;x^5-x^3-2x^2+2x} \\
 & 25x
\end{array}$$

即 $x^5-x^3-2x^2+27x = x(x^4-x^2-2x+2)+25x$，故

$$\int\frac{x^5-x^3-2x^2+27x}{x^4-x^2-2x+2}dx=\int x dx+\int\frac{25x\,dx}{x^4-x^2-2x+2}$$

$$\frac{25x}{x^4-x^2-2x+2}=\frac{25x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}$$
$$\Longrightarrow\quad 25x=A_1(x-1)(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Bx+D)(x-1)^2$$

令 $x=1$，得 $25=5A_2$，即 $A_2=5$. 对比式子 x^3 两边的系数，得 $0=A_1+B$；再对比 x^2 的系数，得 $0=A_1+A_2-2B+D$；再对比 x 的系数，得 $25=2A_2+B-2D$；最后对比两边的常数项，得 $0=-2A_1+2A_2+D$. 不难求出：$A_1=1, B=-1, D=-8$.

从而可得

$$\int \frac{x^5-x^3-2x^2+27x}{x^4-x^2-2x+2}dx = \int \left(x+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}-\frac{x+8}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}-\frac{\ln x^2+2x+2}{2}-7\arctan(x+1)+C$$

要熟练掌握积分技术，关键在其“灵活性”，所以不要抱着“一招鲜吃遍天”的想法. 固执于一种方式而不知变通，反会陷入困境. 比如对下面的例子，如尝试部分分式展开，将十分不易，但如能巧用凑微分，则可迅速破解.

例 8.3.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^9\,dx}{x^{10}+1} =$

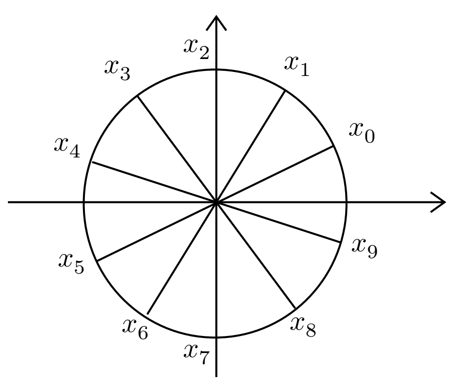
$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} = \ln|x| - \frac{\ln(x^{10}+1)}{10}+C$$

注记 8.3.1 如果非要用部分分式展开求解上积分，则首先须要对 $x^{10}+1$ 经行因式分解，为此，须求得 $x^{10}+1=0$ 的所有根. 设 $x=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$ 是方程的根，则 $x^{10}=r^{10}e^{i10\theta}=r^{10}(\cos 10\theta+i\sin 10\theta)=-1$，从而有

$$r^{10}=1,\ \cos 10\theta=-1, \sin 10\theta=0 \quad\Longrightarrow\quad r=1,\ 10\theta=\pi+2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{10},\ k\in\mathbb{Z}$$

由此看出，$x^{10}+1=0$ 的全部 n 个根为：$x_k=e^{\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{10}\right)i}$，$k=0,1,\cdots,9$. 其中，$x_k$ 和 x_{9-k} $(k=0,1,2,3,4)$ 是互为共轭的复根，即 $\overline{x_k}=x_{9-k}$. 这 10 个根将单位圆 10 等份，见下图.



故有 $x^{10}+1=\prod_{k=0}^{9}(x-x_k)=\prod_{k=0}^{4}(x-x_k)(x-x_{9-k})=\prod_{k=0}^{4}(x-x_k)(x-\overline{x_k})=$

$$=\prod_{k=0}^{4}\left(x^2-2\left(Re\,x_k\right)x+|x_k|^2\right)=\left(x^2-2\cos\frac{\pi}{10}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{3\pi}{10}x+1\right)$$

$$\left(x^2-2\cos\frac{5\pi}{10}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{7\pi}{10}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{9\pi}{10}x+1\right)$$

从而存在唯一常数 A, B_k, C_k（$k=1,2,3,4,5$）使得

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2-2\cos\frac{\pi}{10}+1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2-2\cos\frac{3\pi}{10}+1}+$$

$$+\frac{B_3x+C_3}{x^2-2\cos\frac{5\pi}{10}+1}+\frac{B_4x+C_4}{x^2-2\cos\frac{7\pi}{10}+1}+\frac{B_5x+C_5}{x^2-2\cos\frac{9\pi}{10}+1}$$

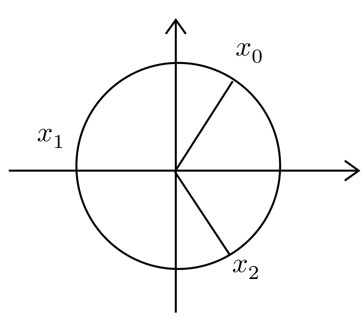
虽然繁琐，但理论上是可行的．下面我们按这一思路对 x^3+1 进行因式分解．设 $x=e^{i\theta}$ 是 $x^3+1=0$ 的根，则 $e^{3i\theta}=-1$，即

$$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

从而 $x^3+1=0$ 的全部根是 $x_0=e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})i}, k=0,1,2$. 其中 $x_0=e^{\frac{\pi i}{3}}$ 和 $x_2=e^{\frac{5\pi i}{3}}$ 互为共轭，且 $x_1=e^{\pi i}=-1$. 故有分解

$$x^3+1=(x+1)\left(x-e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\left(x-e^{\frac{5\pi i}{3}}\right)=$$

$$=(x+1)\left(x^2-2\cos\frac{\pi}{3}x+1\right)=(x+1)(x^2-x+1)$$

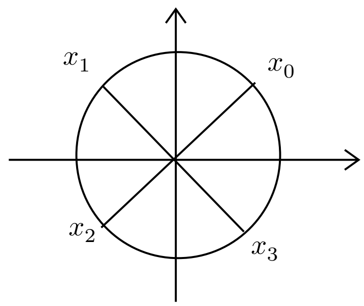


再考虑 $\int\frac{dx}{1+x^4}$. 如果要用部分分式展开来计算，需先考虑 x^4+1 的分解．首先，

注意到：$x^4+1=0$ 有根 $x_k=e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})i}$, $k=0,1,2,3.$ 且

$$x_0=e^{\frac{\pi i}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\quad x_3=\overline{x_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_1=e^{\frac{3\pi i}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\quad x_2=\overline{x_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$



故 $x^4+1=(x-x_0)(x-x_3)(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_0)(x-\overline{x_0})(x-x_1)(x-\overline{x_1})=$

$=\left(x^2-2Re(x_0)x+1\right)\left(x^2-2Re(x_1)x+1\right)=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$

从而 $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$，即

$$1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

对比两边多项式的系数，得

- $x^3:0=A+C$
- $x^2:0=\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D$
- $x:0=A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D$
- $1:1=B+D$

解得 $A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $D=\dfrac{1}{2}$. 从而 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^4}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2-\sqrt{2}x+1}$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x-1)}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x+1)}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x-1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x+1+C$$

如不想陷入上面的繁琐，则下面的巧思值得借鉴．令 $M(x)=\int\frac{dx}{1+x^2}$, $N(x)=\int\frac{x^2dx}{1+x^4}$，则 $M(x)+N(x)=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

$$M(x)-N(x)=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=-\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$$

从而 $\int\frac{dx}{1+x^4}=M(x)=\frac{1}{2}\left[M(x)+N(x)+M(x)-N(x)\right]=$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

可化为有理函数积分的无理函数积分： 有些含有根式的无理函数的积分通过变量替换可转化为有理函数的积分.

例 8.3.4 对 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$，如想将其中的根式全部替换掉，可令 $x=t^6$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}=6\int\frac{(t-1)(t^2+t+1)+1}{t-1}dt$$

$$=6\int(t^2+t+1)dt+6\int\frac{dt}{t-1}=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C$$

$$=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$$

例 8.3.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} \xlongequal[x=(t^2+1)^2]{t=\sqrt{\sqrt{x}-1}} \int \frac{4t(t^2+1)dt}{t} = 4\int (t^2+1)dt$

$$= \frac{4}{3}t^3 + 4t + C = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\frac{3}{2}} + 4(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

例 8.3.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}} = \int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}dx.$

令 $t^2 = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}$，则 $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$，$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{t^3-1}{2t^3}$，$dx = \dfrac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$，从而

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

三角函数有理式的积分： 所谓三角函数有理式指的是形如 $R(\sin x, \cos x)$ 的函数，其中 $R(u,v)$ 是将 u,v 经有理运算（即加、减、乘、除）而得的表达式. 我们将说明这种类型的积分是一定可以通过变量替换转化为有理函数的积分的，故属于可积类型.

在介绍处理一般的 $R(\sin x, \cos x)$ 的积分的统法（我们会看到，它本质起源于单位圆的有理参数化）之前，我们先看些它的特殊形式，比如对形如 $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x dx$ 和 $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x dx$ （其中 $R(u)$ 是有理函数），可直接通过变量替换 $u = \sin x$ 和 $u = \cos x$ 将其直接化为有理函数的积分.

例 8.3.7 $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{-\sin^2 x}{2+\cos x}d\cos x \xlongequal{u=\cos x} \int \frac{u^2-1}{u+2}du =$

$$= \int \frac{u^2-2^2+3}{u+2}du = \int \frac{(u-2)(u+2)+3}{u+2}du = \int (u-2)du + \int \frac{3du}{u+2}$$

$$= \frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln|u+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$$

例 8.3.8 对积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x}$，为了凑出微分，我们进行变形 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x} =$

$$\int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \int \frac{d\cos x}{(\cos^2 x-1)(2\cos^2 x-1)} \xlongequal{u=\cos x} \int \frac{du}{(u^2-1)(2u^2-1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{u^2-1} - \frac{2}{2u^2-1}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}\right| + C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C$$

例 8.3.9 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$. 对这个积分，由于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂次都是偶数，所以按上例那样凑微分是不方便的，但注意到 $d\tan x=\sec^2 xdx=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$，且

$$\frac{1}{\sin^4 x}=\csc^4 x=\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)^2$$

故有

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}\xlongequal{u=\tan x}\int\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2du=\int\frac{(1+u^2)^2}{u^4}du=$$

$$\int\left(\frac{1}{u^4}+\frac{2}{u^3}+1\right)du=-\frac{1}{3u^3}-\frac{2}{u}+u+C=\frac{-1}{3\tan^3 x}-\frac{2}{\tan x}+\tan x+C$$

一般地，不难看出对 $\displaystyle\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$ 型积分，做变换 $u=\tan x$ 即可将其变换为有理函数的积分类型.

对最一般的情形 $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)dx$，令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$（**万能代换**），则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

从而 $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$ 就转化为有理函数的积分了，便可用部分分式展开直接求解.

比如对上例中的积分，利用万能代换，可得

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{(1+t^2)^4}{(2t)^4}\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{1}{8}\int\frac{(1+t^2)^5dt}{t^4(1-t^2)^2}$$

不难看出，虽然万能代换法是直接可行的，但有时却不是最高效的求解途径，所以还是要灵活运用各种方法.

例 8.3.10 对 $\displaystyle\int\frac{dx}{5+3\cos x}$，微分的方法用起来不方便，此时可考虑万能替换：令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\displaystyle\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{8+2t^2}=\int\frac{dt}{t^2+4}$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

对于形如 $\int\cos mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$ 和 $\int\cos mx\sin nxdx$ 型的积分, 通常利用积化和差公式直接化简后积分.

例 8.3.11 $\displaystyle\int\frac{\cot xdx}{1+\sin x}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{\frac{1-t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{1-t^2}{t^3+2t^2+t}dt$

$$=\int\frac{1-t^2}{t(t+1)^2}dt\xlongequal{\text{部分分式展开}}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)dt=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\right|+C$$

对本例，如一开始直接凑微分，则可更迅捷地加以求解.

$$\int\frac{\cot xdx}{1+\sin x}=\frac{\cos xdx}{\sin x(1+\sin x)}=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)d(\sin x)=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C$$

注记 8.3.2 利用欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，可统一简洁地推导出和差化积公式. 注意到 $e^{ix}e^{iy}=e^{i(x+y)}$，按欧拉公式将两边展开，得

$$\underbrace{(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)}_{(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\cos y\sin x+\cos x\sin y)i}=\cos{(x+y)}+i\sin{(x+y)}$$

$$\Longrightarrow\quad\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\quad\sin{(x+y)}=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\Longrightarrow\quad\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;\quad\sin{(x-y)}=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\Longrightarrow\quad\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{\cos{(x+y)}+\cos{(x-y)}}{2}\\ \\ \sin x\sin y=\frac{\cos{(x-y)}-\cos{(x+y)}}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{\sin{(x+y)}+\sin{(x-y)}}{2}\\ \\ \cos x\sin y=\frac{\sin{(x+y)}-\sin{(x-y)}}{2}\end{cases}$$

例 8.3.12 $\displaystyle\int\cos 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx=$

$$=\frac{1}{10}\int\cos 5x\,d(5x)+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin x}{2}+C$$

注记 8.3.3 对 $\int R(\cos x,\sin x)dx$ 之所以可用“万能替换”求解，其本质在于单位圆的“有理参数化”，见《第一讲第 5 节例 5.6′》. 为进一步凸显其实质，并便于推广，我们将该积分换一种表达方式. 令 $u=\cos x$, $v=\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$，则

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R(u,v)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\int R(u,v)\frac{du}{v}=\int\widetilde{R}(u,v)du$$

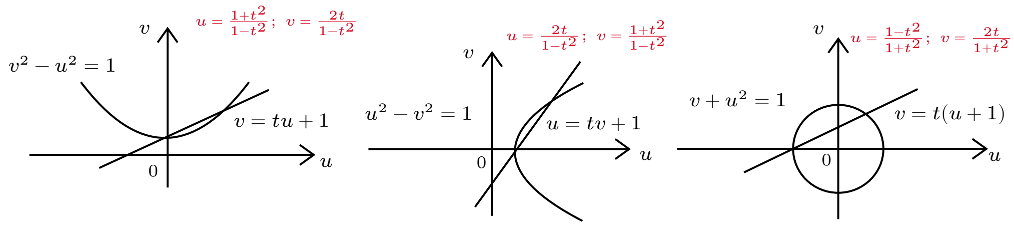
其中 $\widetilde{R}$ 仍是有理函数. 由此可见，上积分本质上是形如 $\int R(x,y)dx$ 这样的积分，其中 $R(x,y)$ 是 x,y 的有理函数，且 x,y 满足关系：$x^2+y^2=1$. 因为这一形式特点，故 $x=\frac{2t}{1+t^2}$, $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 可将积分 $\int R(x,y)dx$ 化为有理函数积分. 一个自然的问题是，如果 x 和 y 间的约束不是 $x^2+y^2=1$（即点 (x,y) 不是位于单位圆上），而是位于一般的曲线之上时，$\int R(x,y)dx$ 是否有特别的积分方法？特别地，当 (x,y) 位于一般圆锥曲线上时，是否有类似上面“万能代换”的换元法呢？

首先，当 (x,y) 位于一般圆锥曲线时，类似的“万能代换”是存在的，几何上，它根植于圆锥曲线可有理参数化这一事实；在求积分时，它表现为如下变量替换.

即我们考虑形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ 的积分，通过配方 $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a^2}$ 加变元替换，我们只需处理 $b=0$ 的情形. 令 $x=\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}u$，则有

$$\sqrt{a^2+c}=\begin{cases}\sqrt{c}\sqrt{u^2+1}; & a>0, c>0\\ \\ \sqrt{|c|}\sqrt{u^2-1}; & a>0, c<0\\ \\ \sqrt{c}\sqrt{1-u^2}; & a<0, c>0\end{cases}$$

则问题转化为对曲线 $v=\sqrt{u^2+1}$，$v=\sqrt{u^2-1}, v=\sqrt{1-u^2}$ 的有理参数化为题了，而这是简单的，见下图所示：



即在如下变量替换（有理参数化）下，积分转化为有理积分了：

$$\begin{cases}u=\frac{2t}{1-t^2},\ \sqrt{u^2+1}=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ a>0, c>0\\ \\ u=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \sqrt{u^2+1}=\frac{2t}{1-t^2};\ a>0, c<0\\ \\ u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sqrt{u^2+1}=\frac{2t}{1+t^2};\ a<0, c>0\end{cases}$$

当 x,y 之间的关系是一般的二元三次约束时：$y^2=x^3+ax^2+b$（假设右边多项式

无重根)，该曲线称为椭圆曲线，它没有有理参数化，故与之相关的积分（称为椭圆积分）无法转化成为有理函数积分. 另外，我们知道，当 x, y 之间的约束是二次时，(x, y) 所位于的圆锥曲线可被单周期的三角函数可（超越）参数化，而对于椭圆曲线，我们则需要双周期的椭圆函数来（超越）参数它. 关于椭圆积分的起源及其应用可参考附录 II.

9 瑕（反常）积分及其计算

瑕积分（或广义积分、反常积分）相比与通常定积分是“反常的”. 通常积分要求被积区间有限，但瑕积分考虑在无限区间上的积分（第一类反常积分）；通常积分要求被积函数在被积区间上有界，而瑕积分会考虑对无界函数的积分（第二类反常积分）.

第一类反常积分有以下几种形式:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 在积分区域内的任意有限区间上都是可积的.

第二类反常积分有以下几种形式:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad (f(x) \text{ 在 } a \text{ 处无界}) \qquad \int_{a}^{b} f(x)dx \quad (f(x) \text{ 在 } b \text{ 处无界})$$

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 c 处无界，则 $\int_{a}^{b} f(x)dx$ **一定要理解为**:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

而右边积分是属于上面两种形式. 如果函数在区间内多个点处是无界的（称为函数的奇异点，或简称为奇点），则在每个奇点处对区间切割处理即可.

回忆通常积分的定义：若 $f(x) \in R[a, b]$，则对区间 $[a, b]$ 的**任一分划**：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，及对**任意的** $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，都有

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中 $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \, (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$. 由此可知，第一类反常积分的反常在于对其被积区域无法划分为有限份；而第二类反常积分的反常在于当点 ξ_i 取为函数的奇点时，定义右边的和式无意义. 所以，对瑕积分而言，定积分的原始定义不适于它（或

它对原始定义是反常的），故须瑕积分重新定义才行.

关键在于我们可以将瑕积分定义为通常积分的某种极限，只要该极限存在，则认为称瑕积分有意义，并按极限计算即可. 由此搭建了反常和常态之间的“极限”桥梁. 下面对不同反常类型一一处理，但万变不离其宗，其要旨是：先避开“反常”或“奇异处”，从而使积分有意义，然后极限逼近即可.

第一类反常积分的处理： 定义 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

若该极限存在，则称反常积分收敛（*convergent*），反之，则称其发散（*divergent*）. 同理，可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

而对 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 型反常积分，我们任选一点 c，则由积分的区间可加性，得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

然后分别令 $a\to-\infty$，$b\to+\infty$，若极限存在，则说明该反常积分收敛，且将其值定义为极限值，否则称其发散. 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

第二类反常积分的处理： 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义，b 是 $f(x)$ 的奇点（即函数在该点任意领域内无界），且 $\forall\epsilon>0\,(\epsilon<b-a)$，$f(x)$ 在 $[a,b-\epsilon)$ 上可积，则将反常积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 定义为：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \left(= \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(x)dx\right)$$

如该极限存在，则称反常积分收敛，其值即为极限值；反之则称反常积分发散. 同理，若 $x=a$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一奇点，且 $\forall\epsilon>0$，$f(x)\in R[a+\epsilon,\,b]$，则可定义

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \left(= \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(x)dx\right)$$

又若 $c \in (a,b)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一奇点，则可定义

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\text{区间可加性}} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx$$

例 9.1 具有基本重要性的是所谓第一类 p-积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$. 当 $p = 1$ 时，我们有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_a^b = +\infty$$

故当 $p = 1$ 时，积分发散；当 $p \neq 1$ 时，有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases}$$

总结： 对第一类反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$，当 $p \leq 1$ 时发散；当 $p > 1$ 时收敛. 同样的结果对 $\displaystyle\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$ 也成立.

例 9.2 具有基本重要性的还有第二类 p-积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$. 当 $p = 1$ 时，我们有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln x \Big|_\epsilon^1 = -\infty$$

故当 $p = 1$ 时，积分发散；当 $p \neq 1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\epsilon^1 = \begin{cases} -\infty, & p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1 \end{cases}$$

总结： 对第二类反常积分（p-积分）$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$，当 $p \geq 1$ 时发散；当 $p < 1$ 时收敛. 同样的结果对一般的 $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 也成立（只需做个变量替换：$x - a = u$，则可将其化为基本类型）.

如果能记住上两例中的结论, 则有时不用计算积分便可判断反常积分是否收敛或发

散. 其基本原理是最简单的比较法, 即当 $x > M$（M 为任一正数）时, 如有 $0 \le f(x) \le \frac{1}{x^p}\,(p > 1)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty$$

故此时反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 反之，如过要证明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则需对 $f(x)$ 做如下放缩:

$$f(x) > \frac{1}{x^p}\ (p \le 1), \quad x \ge M > 0$$

同理，对第二类反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ （设 a 是 $f(x)$ 的一奇点)，如有放缩:

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{(x-a)^p}\,(p < 1), \quad 0 < x - a < \delta$$

则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\delta} f(x)dx + \int_{a+\delta}^b f(x)dx \le \int_a^{a+\delta} \frac{dx}{(x-a)^p} + \int_{a+\delta}^b f(x)dx < \infty$$

从而可知 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如有放缩 $f(x) > \frac{1}{x^p}\,(p \ge 1)$, $0 < x < x + \delta$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

注记 9.1 比较原则的运用需灵活，比如你已知道 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，且知道当 $x > M > a$ 时，有 $0 \le f(x) \le g(x)$，则可断定 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 亦收敛.

对 $\int_a^b f(x)dx$（其中 a 是奇点），则可先通过变量替换 $u = x - a$ 将积分转为 0 是奇点的类型，然后尝试将 $f(x)dx = f(u+a)du$ 同 $\frac{du}{u^p}$ 在 $u = 0$ 附近作比较.

当试图与 p 积分做比较时，基本思路类似于之前对函数在一点处做泰勒展开，看出当 $x \to \infty$ 或 $x \to$ “奇点” 时对积分的主要贡献项. 本质仍是线性近似或其延升.

例 9.3 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. 这是个第一类反常积分，它可以看成是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

被积函数是非负的，且在两区间上都小于 $\frac{1}{x^2}$，故由比较发知积分收敛，为计算它，我们只需将其按极限处理，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{0} + \arctan x \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \arctan 0 - \underbrace{\arctan(-\infty)}_{\text{理解为 } \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x} + \underbrace{\arctan(+\infty)}_{\text{理解为 } \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x} - \arctan 0$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \pi$$

注记 9.2 一般地，如 $f(x)$ 在 $[a, +\infty$ 上具有原函数 $F(x)$，则可记

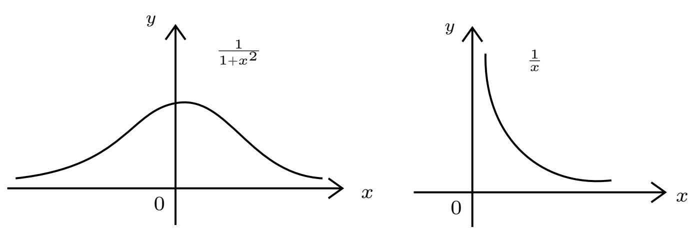
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

其它情形可类似处理.

注记 9.3 对上例，如果注意到被积函数在积分区间上是偶函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\arctan x\Big|_{0}^{+\infty} = \pi$$

注记 9.4 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 计算的是函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 与 x 轴所围的图形的面积，虽然该图形无界，但它的面积确是有限的. 考虑到该图形是有界图形的极限图形，它的面积也是有限面积的极限，该结果也就无甚惊奇了. 当然一般无界图形的 *1* 面积往往是无限的（即便它）. 比如 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ 计算的也是无界图形的面积，但该面积是无穷大.



注记 9.5 对第二类反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$，如果忽视了函数在 $x=0$ 处的奇异性，而套用牛顿-莱布尼茨公式则显然会得到错误的结果，正确的处理是：

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\epsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\epsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\eta\to 0^+}\int_{\eta}^{1}\frac{dx}{x}=-\infty-\infty$$

故积分发散. 它发散的原因是两个极限 $\epsilon\to 0^-$ 和 $\eta\to 0^+$ 是两个独立的极限过程. 但如果我们令 ϵ 和 η **同步**趋于零，即令 $\epsilon=-\eta$，则此时有

$$\lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\eta}\frac{dx}{x}+\int_{\eta}^{1}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\eta\to 0^+}(\ln|\eta|-\ln|-1|+\ln 1-\ln\eta)=$$

$$=\lim_{\eta\to 0^+}(\ln\eta-\ln\eta)=0$$

将上极限定义为反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ 的**柯西主值**，记作 $(cpv)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$. 上面的计算表明：虽然反常积分本身发散，但其柯西主值却收敛. 当然，几何上来看，这一结果也是有意义的，由于 $\frac{1}{x}$ 在对称区间上 $[-1,1]$ 上是奇函数，故从面积来看，当极限过程同步化后，正负面积可相互抵消，导致柯西主值为 0.

注记 9.6 一般地，若 $c\in(a,b)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一奇点，则可定义反常积分的柯西主值（cpv）为：

$$(cpv)\int_{a}^{b}f(x)dx:=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a}^{c-\epsilon}f(x)dx+\int_{c+\epsilon}^{b}f(x)dx$$

同理对第一类反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$，也可定义其柯西主值:

$$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$$

显然，如果上面的反常积分本身是收敛的，则其柯西主值必存在且等于反常积分的值，这为我们计算反常积分提供了便利性，因为柯西主值明显易算些. 但上条注记中的例子说明：也有积分本身发散但其柯西主值存在的情形. 再如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ 显然发散，但其柯西主值为 $(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\sin x dx=-\lim_{R\to+\infty}(\cos A-\cos(-A))=0.$

注记 9.7 当然，无穷区间的反常积分和无界函数的反常积分是可以转换的，比如

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int_{\frac{1}{a}}^0 \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \xlongequal{g(t):=\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)} \int_0^{\frac{1}{a}} g(t)dt$$

比如对 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$，令 $x = \frac{1}{t}$，则积分转换为 $-\int_{+\infty}^1 t^p \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}}$. 由此可知，当 $2-p>1$，即 $p<1$ 时，积分收敛，与之前结果相同.

例 9.4 对第二类反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$，可直接用分部积分计算

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - \lim_{x\to 0^+} x\ln x - 1 = -1$$

或做变量替换 $\ln x = t$，则 $\int_0^1 \ln x dx = \int_{+\infty}^0 te^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$

$$= -te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 0 + \int_0^{+\infty} de^{-t} = -1$$

例 9.5 更一般地，记 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$（$n$ 是非负整数）. 易知 $I_0 = 1$，且由上例知 $I_1 = 1$；当 $n \geq 1$ 时，利用分部积分，得

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}$$

从而，当 $n \geq 2$ 时有，$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2}\cdots = n!I_0 = n!$. 综合可知，对任意 $n \geq 0$，有 $I_n = n!$.

例 9.6 上例中的反常积分可推广到 n 不是非负整数的情形，即考虑反常积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \quad s>0$$

下面将证明：上反常积分当 $s \in (0,+\infty)$ 时是收敛的，从而上定义了 $(0,+\infty)$ 上的函数 $\Gamma(s)$，即伽马函数（*Gamma function*），它是数学物理中一个十分重要的函数. 结合上例，可知 $\Gamma(n+1) = n!$，从而可知伽马函数推广了非负整数阶乘这一概念，也就是

说，对任意正数 s，可定义“阶乘”$(s-1)! := \Gamma(s)$.

首先积分 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 的反常性既表现为积分区间的无限性，也表现为 0 是奇点，故先利用积分的区间可加性将积分写成如下形式，然后分而治之.

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx}_{I_1(s)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx}_{I_2(s)}$$

- 先考虑 $I_2(s)$，我们知道对任意 s，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{s-1}}{e^x} = 0$，那么

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

  也就是说，存在 $M > 0$，使得当 $x > M$ 时，恒成立 $0 < x^{s-1}e^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$，故由比较法知：$\forall s$，$I_2(s)$ 是收敛的.

- 对 $I_1(s)$，我们注意到：当 $s-1 \geq 0$，即 $s \geq 1$ 时，它无反常性，故收敛. 下面考虑当 $s < 1$ 是的情形. 不难看出，当 $x \in (0,1)$ 时恒成立

$$0 < x^{s-1}e^{-x} = \frac{1}{x^{1-s}e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}$$

  由例 *9.2* 中关于第二类 p-积分的结论可知，当 $1-s < 1$，即 $s > 0$ 时，$\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{1-s}}$ 收敛，从而由比较法知 $I_1(s)$ 亦收敛.

综合上面的讨论，可知当 $s > 0$ 时 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 同时收敛，从而 $\Gamma(s)$ 收敛.

注记 9.8 回忆我们在例 *8.2.11* 中介绍过欧拉贝塔（*beta*）函数的特殊情形：设 m, n 是自然数，$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$，并利用分部积分导出的递推式得到：

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

事实上，可证明 $B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 当 $p, q > 0$ 时收敛，从而定义了一般的贝塔函数，且贝塔函数和伽马函数的上关系对任意 $p > 0, q > 0$ 也是成立的.

注记 9.10 我们看出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 不足以保证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；反之，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$

收敛也**不能**保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，甚至**不能**保证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的有界性！比如对定义于 $[1,+\infty)$ 上的如下函数：

$$f(x)=\begin{cases} n+1, \quad x\in\left[n,\, n+\frac{1}{n(n+1)^2}\right], \\ \\ 0, \qquad x\in\left(n+\frac{1}{n(n+1)^2},\, n+1\right), \end{cases} \qquad n=1,2,\cdots$$

$f(x)$ 显然是无界的. 但我们将表明 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛的. $\forall A>1$，可找到 n 使得 $A\in[n,n+1)$，由于 $f(x)$ 非负，从而

$$\int_1^n f(x)dx\le\int_1^A f(x)dx\le\int_1^{n+1} f(x)dx$$

由积分的区域可加性，可知

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx=$$

$$2\frac{1}{1\cdot 2^2}+3\frac{1}{2\cdot 3^2}+\cdots+n\frac{1}{(n-1)n^2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n+1} f(x)dx$，故由夹逼定理，知积分收敛.

例 9.7 对积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+101x^5+3x^4+x^2+2}}$，用直接积分判定其是否收敛显然不现实，为此我们分析当 $x\to+\infty$ 时被积函数的表现，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+101x^5+3x^4+x^2+2}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}}=1$$

故知 $\forall\epsilon>0$，$\exists M>0$，使得当 $x>M$ 时，有

$$\left|\frac{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+101x^5+3x^4+x^2+2}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}}-1\right|<\epsilon \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^7+101x^5+3x^4+x^2+2}}<\frac{1+\epsilon}{x^{\frac{7}{5}}}<\frac{2}{x^{\frac{7}{5}}}$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{7}{5}}}$ 收敛，从而由比较法知给定积分亦收敛.

例 9.8 讨论反常积分 $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^p\,dx$ 的敛散性. 当 $p=0$ 时，积分正常. 当 $p>0$ 时，积分在 $x=0$ 处无意义，但 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln x|^p}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}|\ln x|^p=0$，即存在 $\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时，成立 $0<|\ln x|^p<\dfrac{1}{x^{1/2}}$，则由比较法知当 $p>0$ 时积分收敛. 下面讨论 $p<0$ 时的情形，此时，虽然 $\ln 0$ 无意义，但由于 $p<0$，可知 $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\ln x|^p=0$，故 0 其实不是被积函数的奇点. 但 $x=1$ 是奇点，我们需要探讨 $|\ln x|^p$ 当 $x\to 1^-$ 时的表现，从而判断积分的收敛性.

$$|\ln x|^p=|\ln(1-(1-x))|^p\sim(1-x)^p=\frac{1}{(1-x)^{-p}}\ (x\to 1^-)$$

由比较法知当 $-p\geq 1$ 时积分发散，而当 $-p<1<0$ 时积分收敛.

例 9.9 讨论 $\displaystyle\int_0^{1/e}\frac{dx}{x^p\ln x}$ 的敛散性. 当 $p\leq 0$ 时，由于 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^p\ln x}=0$，故被积函数此时无奇性，从而积分收敛，下讨论 $p>0$ 时的情形，此时 $x=0$ 是被积函数的唯一奇点. 我们需将其与 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ 相比较. 注意 $\dfrac{-1}{x^p\ln x}$ 在 $(0,1/e]$ 上恒正，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{-1/x^p\ln x}{1/x^q}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^q}{x^p\ln x}$. 由此可见，当 $0<p<1$ 时，取 $q=\dfrac{1+p}{2}\in(p,1)$，则极限为零，从而积分收敛; 类似地，当 $p>1$ 时，取 $q=\dfrac{1+p}{2}$，此时极限发散，故积分发散. 最后，当 $p=1$ 时，直接计算可得

$$\int_0^{1/e}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\epsilon>0^+}\ln|\ln x|\Big|_{\epsilon}^{1/e}=-\infty$$

综上可知 $\displaystyle\int_0^{1/e}\frac{dx}{x^p\ln x}$ 当 $0<p<1$ 时收敛，当 $p\geq 1$ 时发散.

例 9.10 讨论反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^2)}$ $(p>0)$ 的敛散性. 将积分写成

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^2)}=\underbrace{\int_0^1\frac{dx}{x^p(1+x^2)}}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^2)}}_{I_2}$$

其中 I_1 的反常是由奇点 $x=0$ 导致的，但当 $0<x<1$ 时，有 $\dfrac{1}{x^p(1+x^2)}<\dfrac{1}{x^p}$，故知当 $0<p<1$ 时 I_1 收敛，而当 $p>1$ 时，I_1 发散；其中 I_2 的反常是由积分区间无限导致的，当 $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{1}{x^p(1+x^2)}\approx\dfrac{1}{x^{p+2}}$，即知当 $p+2>1$，即 $p>1$ 时收敛.

综上所述，可知当 $0<p<1$ 时积分收敛，当 $p\geq 1$ 时发散.

例 9.11 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ $(n\in\mathbb{N})$. 由于 n 是自然数，故 $x=1$ 唯一奇点，在 $x=1$ 附近：$\dfrac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}}\approx\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$，故积分收敛. 为计算它，可用变量替换 $x=\sin^2 t$ 消除根号来处理，即有

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} \xlongequal{x=\sin^2 t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} t}{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}\cdot 2\sin t\cos t dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$$

例 9.12 $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+$，计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$. 当 $x\to+\infty$ 时，被积函数 $\approx\dfrac{1}{x^{2+\alpha}}$，故积分收敛. 为计算其值，考虑三角换元 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\xlongequal{x=\tan t}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t dt}{(1+\tan^2 t)(1+\tan^\alpha t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt$$

$$\Longrightarrow\quad I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad I=\frac{\pi}{4}$$

注意计算结果与 α 的具体取值无关（当然 α 的取值也不影响积分的收敛性），既然如此，令 $\alpha\to 0$，则我们期望

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\xlongequal{\alpha\to 0^+}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\arctan x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

注记 9.11 显然 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$ 是发散的，但其柯西主值 $(cpv)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=0$$

即概率论中柯西分布的期望值在柯西主值意义下为零.

10 一些重要积分的特殊计算方法

11 积分综合应用

12 一些题型训练

13 附录 I：一致连续及闭区间上连续函数的一致连续性

定义： 如果 $f(x) \in C[a,b]$，且 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x', x'' \in [a,b]$，只要 $|x' - x''| < \delta$，有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$，则称函数在 $[a,b]$ 上是一致连续（*uniform continuous*）的.

下引理提供了比直接利用定义更为便捷的关于一致连续性的判别准则.

引理： 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续当且仅当：对任意 I 中的点列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = 0$.

证明：（必要性）$f(x)$ 在 I 上一致连续，故 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x', x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$，便有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 对上面的 $\delta > 0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，知 $\exists N \in \mathbb{N}_{>0}$，使得 $\forall n > N$，有 $|x_n' - x_n''| < \delta$，从而 $|f(x_n') - f(x_n'')| < \epsilon$.

（充分性）用反证法，假设 f 在 I 上不是一致连续的，那么 $\exists \epsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists x', x'' \in I$，满足：$|x' - x''| < \delta$，但 $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$. 特别地，取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$，$n = 1, 2, \cdots$，则得点列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$，满足：$|x_n' - x_n''| < \dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon_0$. 也就是说此时 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，但 $\{f(x_n') - f(x_n'')\}$ 不可能收敛于 0，这与假设矛盾，从而可知反证的假设不成立，即 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的. □

例： 有了上面的判别条件，对 $(0,1)$ 上的函数 $\dfrac{1}{x}$，取 $x_n' = \dfrac{1}{2n}$，$x_n'' = \dfrac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0, \text{ 但 } \lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = \lim_{n\to\infty}(2n - n) = \infty$$

故它在 $(0,1)$ 上不是一致连续的. 但可用类似方法验证它在 $[x_0, 1]$ $(\forall x_0 > 0)$ 上是一致连续的.

定理（康拖（*Cantor, 1945-1918*））若 $f(x) \in C[a,b]$，则它在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明： 假设 f 不一致连续，则 $\exists \epsilon_0 > 0$ 及点列 $\{x_n'\}$，$\{x_n''\}$ 满足：$|x_n' - x_n''| < \dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon_0$. 由于 $\{x_n'\} \subseteq [a,b]$ 有界，故由凝聚定理知它有收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$，设其极限为 ξ. 然后在 $\{x_n''\}$ 取下标与 $\{x_{n_k}'\}$ 相同的子列 $\{x_{n_k}''\}$，则由于 $|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \dfrac{1}{n_k}$，$k = 1, 2, \cdots$，得到

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'' = \lim_{k\to\infty}\left[x_{n_k}' + (x_{n_k}'' - x_{n_k}')\right] = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}' = \xi$$

由于 $\xi \in [a,b]$ 是函数 $f(x)$ 的连续点，从而有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = f(\xi)$. 但这与 $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon_0$ 发生了矛盾. 从而假设不成立，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致连续的. □

14　附录 II：第二积分中值定理，阿贝尔变换，欧拉求和

15 附录 III：单摆、几何算术平均值与椭圆积分