



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2024 Mathematik

### Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

#### Aufgabe 1:

Gegeben ist die Ableitungsfunktion  $f'$  mit

$$f'(x) = x^2 + 4 \cdot x - 12, x \in \mathbb{R}.$$

$f'$  ist die Ableitung einer Funktion  $f$ .

a) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f'$ . (2 Punkte)

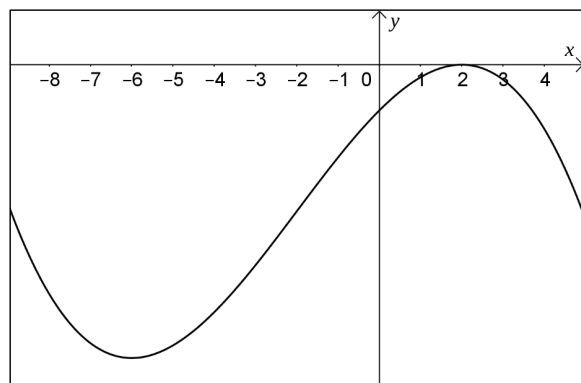
b) (1) Geben Sie  $f''(x)$  an.

(2) Es gilt:  $f''(-2) = 0$  und  $f'''(-2) \neq 0$ .

Geben Sie an, welche Bedeutung diese Aussage für die Funktion  $f$  hat.

(1 + 1 Punkte)

c) Begründen Sie, warum es sich bei dem Graphen in der folgenden Abbildung nicht um den Graphen der Funktion  $f$  handeln kann.



Abbildung

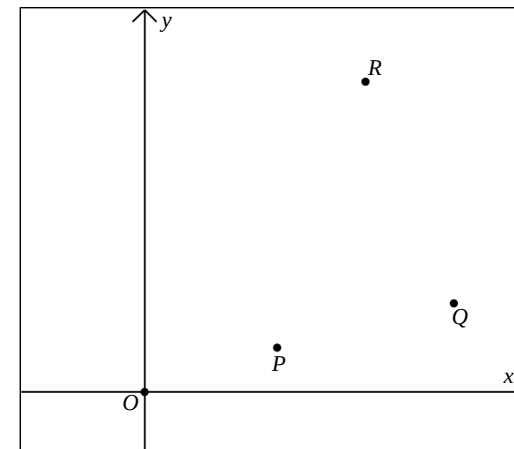
(2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

#### Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte  $P(3|1)$ ,  $Q(7|2)$  und  $R(5|7)$  (siehe Abbildung).



Abbildung

a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Vektors  $\overrightarrow{QR}$  an.

(2) (i) Berechnen Sie  $\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{QR}$ .

(ii) Geben Sie die geometrische Bedeutung des berechneten Vektors an.

(1 + 2 Punkte)

b) Zu den Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  soll ein vierter Punkt  $S$  so hinzugefügt werden, dass das Viereck  $PQRS$  ein Parallelogramm ist.

(1) Zeichnen Sie das Parallelogramm  $PQRS$  in die Abbildung ein.

(2) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $S$ .

(1 + 2 Punkte)

#### Hinweis:

Zeichengeräte sowie ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung sind zugelassen.



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2024 Mathematik

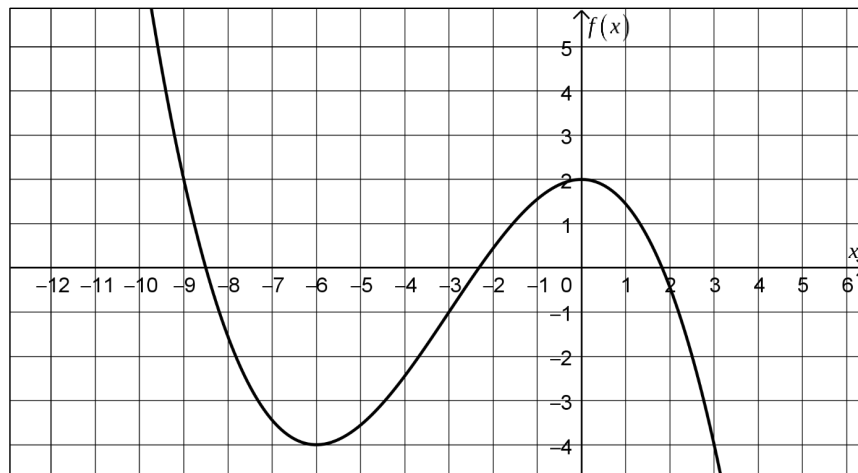
### Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

#### Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -\frac{1}{18} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2, x \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion  $f$ .



Abbildung

a) Geben Sie anhand des Graphen von  $f$  den Bereich an, in dem  $f'(x) \geq 0$  gilt.

(2 Punkte)

b) Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion  $f$  auf Wendestellen.

(5 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

c) (1) (i) Berechnen Sie eine Gleichung der Normale  $n$  des Graphen von  $f$  im Punkt  $W(-3|f(-3))$ .

[Zur Kontrolle:  $n: y = -\frac{2}{3} \cdot x - 3$ .]

(ii) Zeichnen Sie die Normale  $n$  in die Abbildung ein.

(2) Zeichnen Sie die Tangente  $t: y = \frac{3}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $W$  ebenfalls in die Abbildung ein.

(3) Die Normale  $n$ , die Tangente  $t$  und die  $y$ -Achse schließen ein Dreieck ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(6 + 1 + 3 Punkte)

d) Ausgehend von der Funktion  $f$  werden nun die Gleichungen zweier transformierter Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  gesucht.

Der Graph von  $f$  besitzt den lokalen Tiefpunkt  $T(-6|-4)$ .

(1) Der Graph der Funktion  $f_1$  entsteht durch Verschiebungen aus dem Graphen der Funktion  $f$ . Der lokale Tiefpunkt  $T$  wird dabei in den Ursprung des Koordinatensystems verschoben.

Geben Sie eine Gleichung von  $f_1$  an.

[Hinweis: Eine Vereinfachung der Gleichung von  $f_1$  ist nicht erforderlich.]

(2) Der Graph der Funktion  $f_2$  entsteht durch eine Streckung in  $x$ -Richtung aus dem Graphen von  $f$ . Der lokale Tiefpunkt des Graphen von  $f_2$  ist  $T_{\text{neu}}(-12|-4)$ .

Geben Sie eine Gleichung von  $f_2$  an.

[Hinweis: Eine Vereinfachung der Gleichung von  $f_2$  ist nicht erforderlich.]

(2 + 2 Punkte)

e) Die Funktion  $f$  ist die Ableitungsfunktion einer Funktion  $F$ .

Geben Sie an, wie viele lokale Minimal- und wie viele lokale Maximalstellen die Funktion  $F$  besitzt, und begründen Sie Ihre Angaben.

(3 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

#### Aufgabe 4:

Als Alternative zu Gas und Öl können auch Holzpellets als Brennstoff für Heizungen genutzt werden. Holzpellets werden aus Abfallprodukten der Holzindustrie hergestellt. Im Gegensatz zu Gas und Öl handelt es sich hierbei um einen nachwachsenden Rohstoff.

Der jeweilige Preis (in €) für eine Tonne Holzpellets im Jahr 2022 kann für  $0 \leq t \leq 12$  näherungsweise mithilfe der auf  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$  mit

$$f(t) = -2,5 \cdot t^3 + 39,375 \cdot t^2 - 101,25 \cdot t + 370$$

beschrieben werden, wobei  $t$  die Zeit in Monaten angibt.

$t = 0$  entspricht dem 01.01.2022,

$t = 1$  entspricht dem 01.02.2022,

$t = 2$  entspricht dem 01.03.2022 usw.

Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion  $f$ .

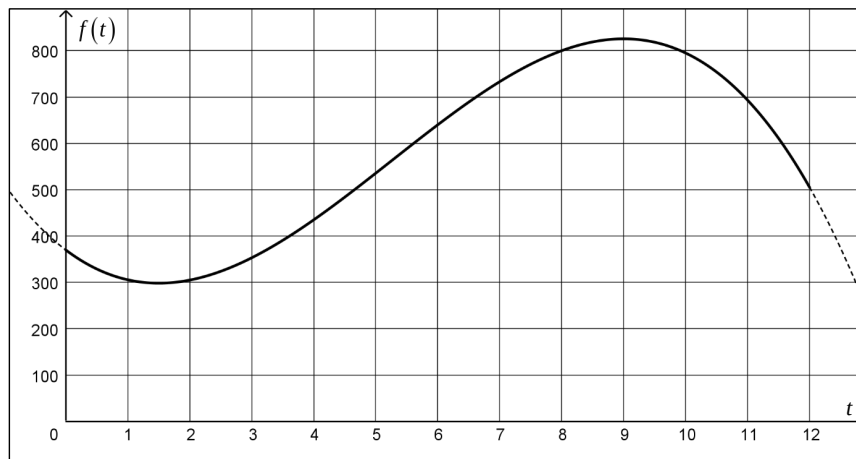


Abbildung 2

<sup>1</sup> Bild: Urheber **Tom Bruton**, Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Holzpellet#/media/File:Pellets\\_hand.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Holzpellet#/media/File:Pellets_hand.jpg),



Name: \_\_\_\_\_

a) (1) Berechnen Sie den Preis für eine Tonne Holzpellets am 01.03.2022 und am 01.05.2022.

(2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Preis in diesem Zeitraum gestiegen ist.

(2 + 2 Punkte)

b) Bei der Lösung einer Aufgabenstellung im gegebenen Sachzusammenhang wurden Berechnungen durchgeführt. Dabei ergab sich:

- $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1,5 \vee t = 9.$

- $f(0) = 370, f(1,5) \approx 298,28, f(9) \approx 825,63, f(12) = 505.$

(1) Geben Sie eine passende Aufgabenstellung im Sachzusammenhang zu den angegebenen Berechnungen an.

(2) Erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.

(3) Formulieren Sie einen Antwortsatz zu Ihrer Aufgabenstellung.

(2 + 3 + 1 Punkte)

c) (1) Zeichnen Sie in Abbildung 2 die Sekante  $s$  durch den Tiefpunkt und den Hochpunkt des Graphen von  $f$  ein.

(2) Ermitteln Sie die Steigung der Sekante  $s$  und interpretieren Sie diese Steigung im Sachzusammenhang.

(1 + 4 Punkte)

d) Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt der Preis der Holzpellets am schnellsten gestiegen ist.

(6 Punkte)

e) Eine Familie wird zu einem Zeitpunkt  $t$  im Jahr 2022 mit 3500 kg Pellets beliefert. Neben den Kosten für Holzpellets fallen dafür auch Lieferkosten in Höhe von 90 € an.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion  $p$  an, durch die der Gesamtpreis  $p(t)$  (in €) für diese Lieferung in Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $t$  gegeben ist.

(3 Punkte)

#### Zugelassene Hilfsmittel:

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung