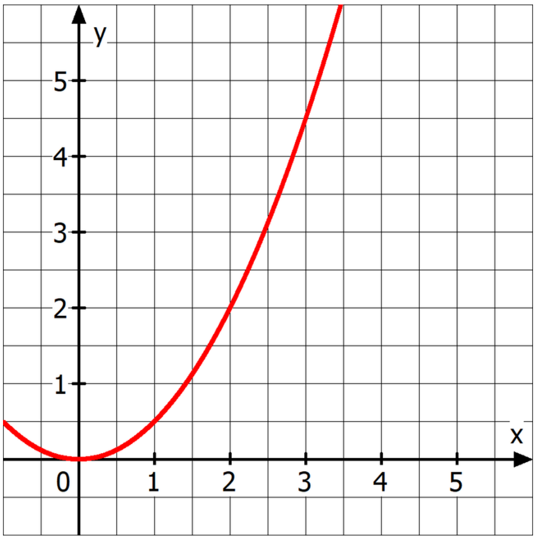
Idee zur näherungsweisen Bestimmung der momentanen Änderungsrate

Animation GeoGebra



Differenzenquotient mit h:

Beispiel: $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = 2$

h	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	h	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
1		-1	
0,1		-0,1	
0,01		-0,01	
0,001		-0,001	

Die h-Methode

Die näherungsweise Bestimmung der momentanen Änderungsrate durch eine Tabelle ist sehr aufwendig. Die h-Methode liefert ein anderes Vorgehen, den Grenzwert (Limes) des Differenzenquotienten zu bestimmen.

Ableitung & Differentialquotient

Die momentane Änderungsrate an der Stelle x_0 ist der Wert der Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Man schreibt $f'(x_0)$.

Den Grenzwert für $h \to 0$ des Differenzenquotient wird als Differentialquotient bezeichnet.

Man schreibt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Beispiel:

$f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = 2$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}5 \cdot (2+h)^2 - 0{,}5 \cdot 2^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}5 \cdot (4+4h+h^2)-2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2+2h+0{,}5h^2-2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h+0{,}5h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 2 + 0{,}5h$$
$$= 2$$

9 Arina hat Ableitungen berechnet. Geben Sie an, welche Fehler Arina gemacht hat, und korrigieren Sie diese.

a) $f(x) = -4x^2 \qquad f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4 \cdot 1^2 + h - (-4 \cdot 1^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

b) $f(x) = x^2 - x \qquad f'(2)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^2 + h - 2 + h - 2^2 - 2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 2 + h - 4 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2-4)}{h}$$
$$= \lim -2 = -2$$