Aufgabe 1:

Modelllösung a)

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4\cdot x-12=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{2^2+12} \ \vee x=-2+\sqrt{2^2+12}$$
$$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{16}=-6 \vee x=-2+\sqrt{16}=2\,.$$

Modelllösung b)

(1) $f''(x)=2\cdot x+4$.

(2) $x=-2$ ist eine Wendestelle von f.

Modelllösung c)

Mögliche Begründung:

Wegen $f''(2)=8>0$ kann an der Stelle $x=2$ kein lokaler Hochpunkt des Graphen von f vorliegen.

Bei dem Graphen in der *Abbildung* kann es sich daher nicht um den Graphen von f handeln.

Aufgabe 2:

Modelllösung a)

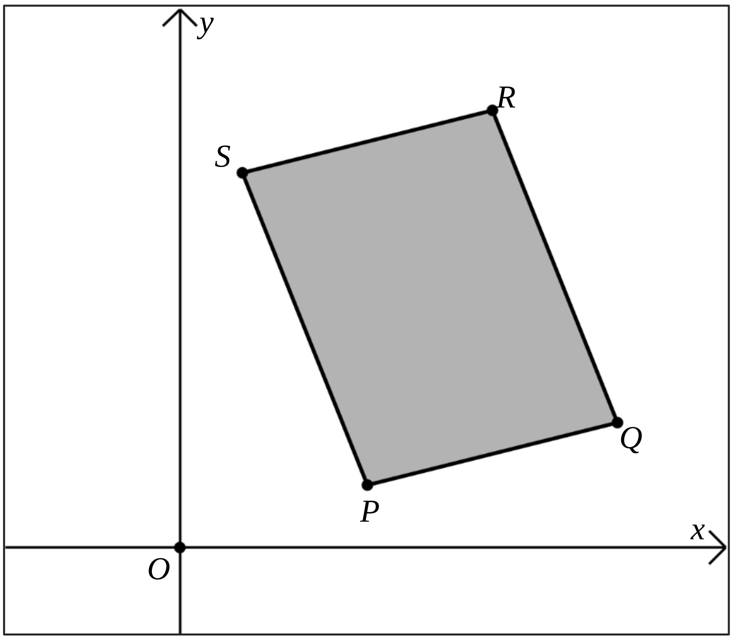
(1) $\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

(2) (i) $\overrightarrow{OQ}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4{,}5\end{pmatrix}$.

(ii) Der berechnete Vektor ist der Ortsvektor des Mittelpunkts der Strecke $\overline{QR}$.

Modelllösung b)

(1)



(2) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Der Punkt S hat die Koordinaten $S(1|6)$.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

Bereich, in dem $f'(x) \geq 0$ gilt: $[-6;0]$.

Modelllösung b)

$f'(x) = -\frac{1}{6} \cdot x^2 - x$, $f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot x - 1$, $f'''(x) = -\frac{1}{3}$.

Aus der notwendigen Bedingung $f''(x) = 0$ für Wendestellen ergibt sich:

$-\frac{1}{3} \cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Zusätzlich gilt: $f'''(-3) = -\frac{1}{3} \neq 0.$

Daher ist $x = -3$ die Wendestelle die Funktion f.

Modelllösung c)

(1) (i) Ansatz: n: $y = m \cdot x + b$.

$$m = -\frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

$$f(-3) = -1.$$

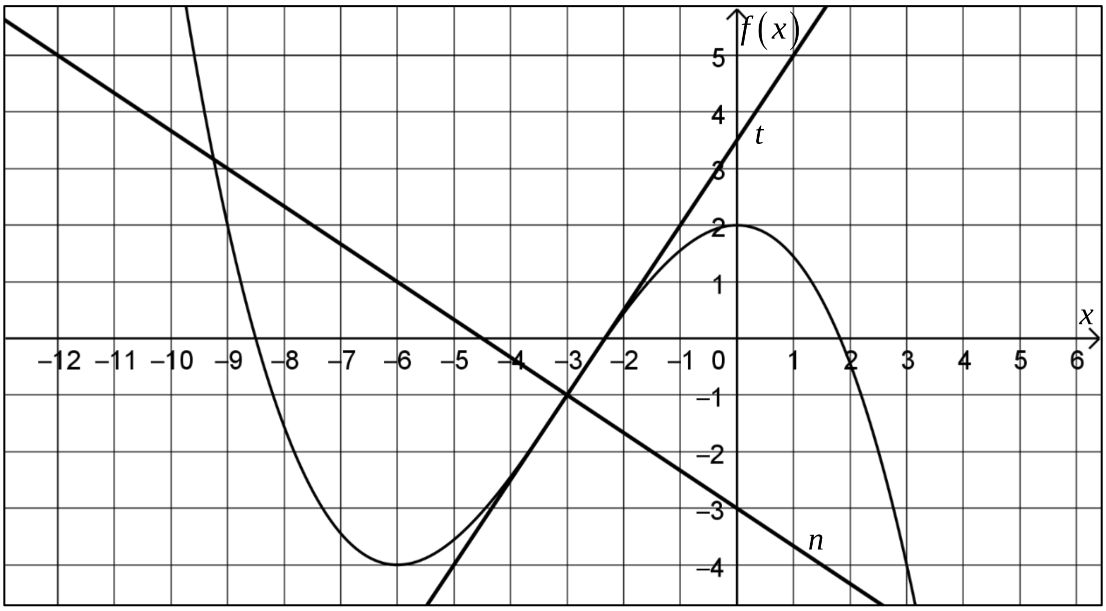
Einsetzen der Koordinaten des Punktes W in $y = m \cdot x + b$ liefert:

$$-1 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = -3.$$

Gleichung der Normale n: $y = -\frac{2}{3} \cdot x - 3$.

(1) (ii)

(2)



(3) $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5 - (-3)) \cdot 3 = 9{,}75$ [FE].

Modelllösung d)

(1) $f_1(x) = f(x-6) + 4$.

(2) $f_2(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$.

Modelllösung e)

Die Funktion F besitzt eine lokale Minimalstelle und zwei lokale Maximalstellen.

Begründung:

Die Ableitungsfunktion f der Funktion F besitzt eine Nullstelle, an der ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f vorliegt, und zwei Nullstellen, an denen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f vorliegen.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

(1) $f(2) = 305$, $f(4) = 435$.

Am 01.03.2022 betrug der Preis für eine Tonne Holzpellets 305 € und am 01.05.2022 betrug der Preis für eine Tonne Holzpellets 435 €.

(2) $\frac{435}{305} \approx 1{,}43 = 143\,\%$.

Der Preis ist in dem genannten Zeitraum um ca. 43 % gestiegen.

Modelllösung b)

(1) Eine passende Aufgabenstellung ist:

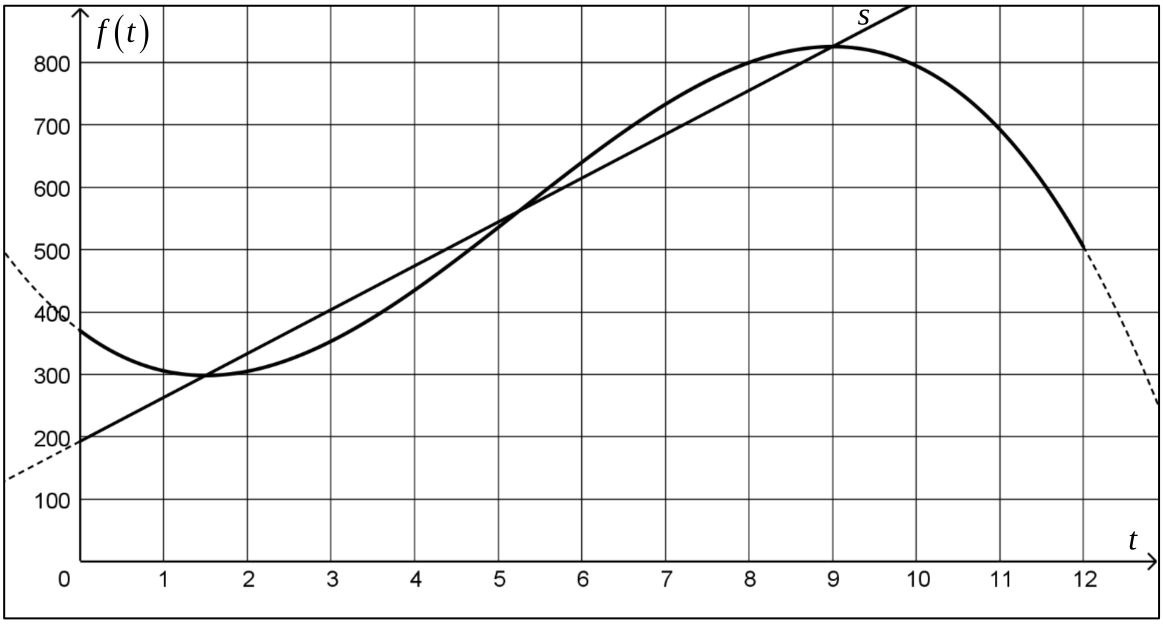
Ermitteln Sie die Zeitpunkte im Jahr 2022, zu denen die Preise für eine Tonne Holzpellets am höchsten bzw. am geringsten waren.

(2) Die absoluten Extremstellen von f können nur die Nullstellen von f' oder die Randstellen sein. Der Vergleich der Funktionswerte von f an diesen Stellen liefert die absoluten Extremstellen von f.

(3) Mitte Februar 2022 war der Preis für eine Tonne Holzpellets am niedrigsten, Anfang Oktober 2022 war der Preis am höchsten.

Modelllösung c)

(1)



(2) $m_s = \dfrac{f(9)-f(1{,}5)}{9-1{,}5} \approx \dfrac{825{,}63-298{,}28}{7{,}5} \approx 70{,}31$.

Während der Preissteigerung vom niedrigsten auf den höchsten Preis des Jahres 2022 stieg der Preis für eine Tonne Holzpellets durchschnittlich um ungefähr 70 € pro Monat.

Modelllösung d)

$f'(t) = -7{,}5 \cdot t^2 + 78{,}75 \cdot t - 101{,}25$, $f''(t) = -15 \cdot t + 78{,}75$.

Das absolute Maximum von f' kann nur an einer Nullstelle von f'' oder an einer Randstelle auftreten.

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow -15 \cdot t + 78{,}75 = 0 \Leftrightarrow t = 5{,}25$.

Zusätzlich gilt:

$f'(0) = -101{,}25$, $f'(5{,}25) \approx 105{,}47$, $f'(12) = -236{,}25$.

Zum Zeitpunkt $t = 5{,}25$ ist der Preis der Holzpellets am schnellsten gestiegen.

Modelllösung e)

$p(t) = 3{,}5 \cdot f(t) + 90$.