Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2023
Mathematik

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Ableitungsfunktion f' mit

$$f'(x) = x^2 - 2 \cdot x - 8,\ x \in \mathbb{R}.$$

f' ist die Ableitung einer Funktion f.

a) *Berechnen Sie* $f'(-4)$. (1 Punkt)

b) *Berechnen Sie die beiden Nullstellen der Ableitungsfunktion* f'. (2 Punkte)

c) Für die Ableitungsfunktion f' gilt:

x	-3	-2	1	4	5
$f'(x)$	7	0	-9	0	7

Die Funktion f besitzt zwei lokale Extremstellen.

(1) *Geben Sie diese an.*

(2) *Entscheiden Sie begründet anhand der Tabelle, um welche Art von lokaler Extremstelle es sich jeweils handelt.*

(1 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2023

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3-3\cdot x^2+\frac{9}{2}\cdot x-1,\ x\in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist in der folgenden *Abbildung 1* dargestellt.

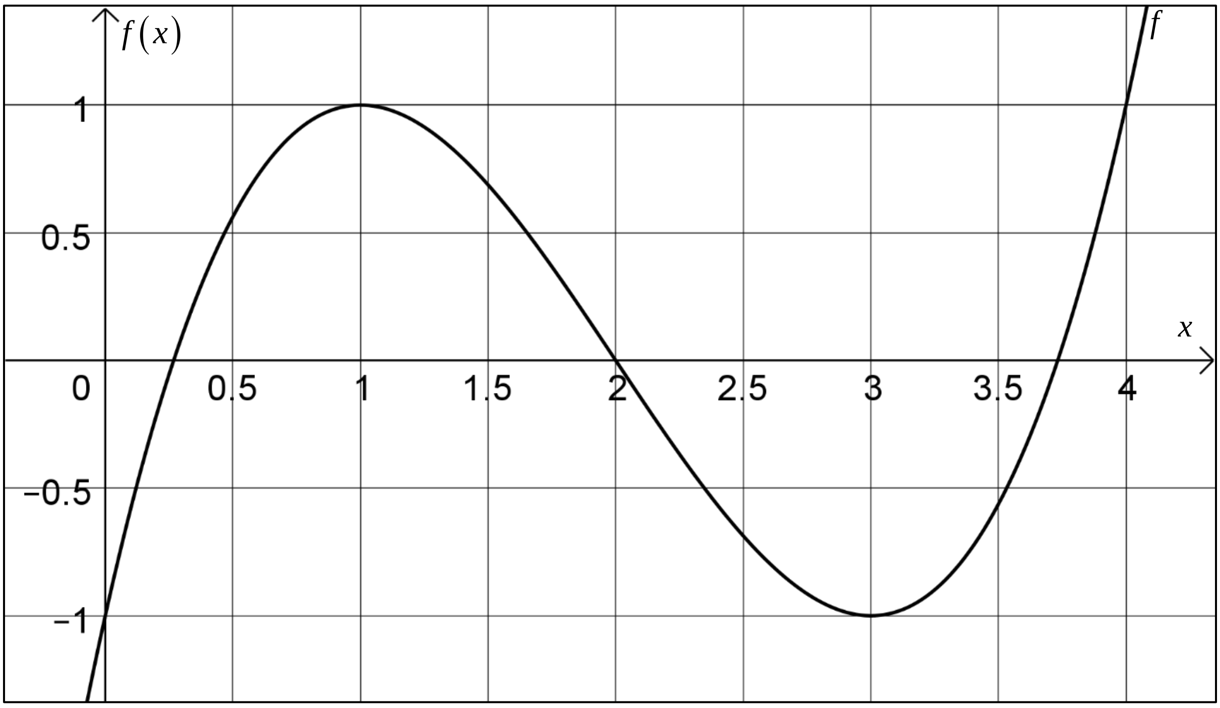


Abbildung 1

a) Die Funktion f besitzt neben der in der *Abbildung 1* ablesbaren Nullstelle $x=2$ zwei weitere Nullstellen.

Berechnen Sie diese und geben Sie die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

(2 Punkte)

Name: ____________________

b) *Geben Sie $f'(x)$ an und bestimmen Sie rechnerisch – ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden – die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.*

(7 Punkte)

c) Für die gegebene Funktion f gilt die folgende Aussage:

Die Anzahl der lokalen Extremstellen ist um eins geringer als die Anzahl der Nullstellen.

Entscheiden Sie, ob diese Aussage für alle ganzrationalen Funktionen dritten Grades gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(3 Punkte)

d) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte $P(1|f(1))$ und $Q(3|f(3))$ verläuft.*

[Zur Kontrolle: g: $y=-x+2$.]

(2) Die Gerade *g* schneidet den Graphen von f in einem weiteren Punkt *R*.

Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

(3) Es gibt Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden *g* verlaufen.

Berechnen Sie diese Stellen und geben Sie die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

(3 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

e) In den folgenden *Abbildungen 2.1* bis *2.3* sind für verschiedene Werte von h ($h > 0$) die zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ veranschaulicht.

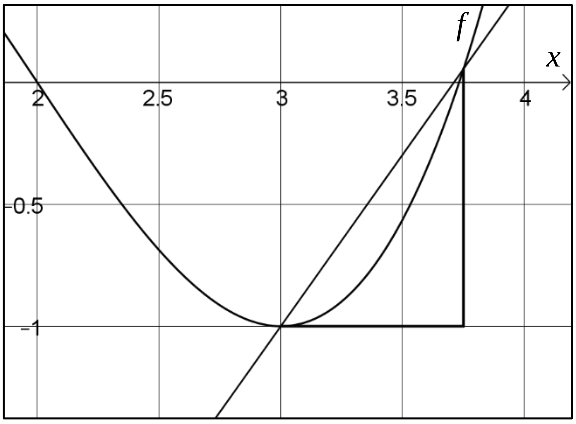


Abbildung 2.1

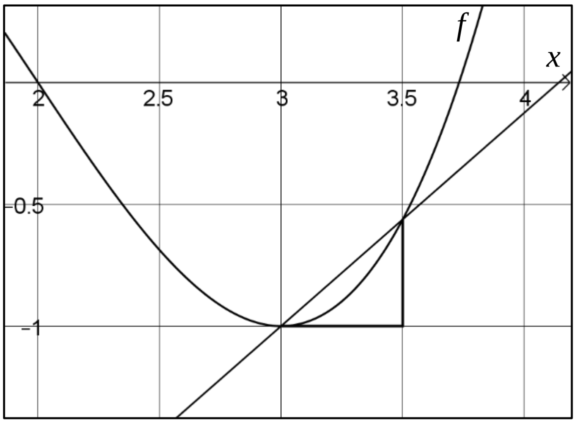


Abbildung 2.2

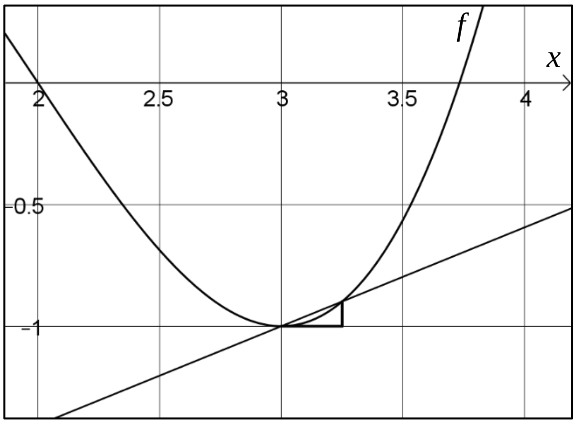


Abbildung 2.3

(1) *Entscheiden Sie, welche der Abbildungen 2.1 oder 2.3 zu dem Wert* $h = 0{,}25$ *gehört.*

(2) *Geben Sie an, welcher Wert von h zu der Abbildung 2.2 gehört.*

(3) Wenn h immer kleiner wird, dann nähert sich der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ einer bestimmten Zahl an.

Geben Sie diese Zahl an und begründen Sie Ihre Angabe.

(1 + 1 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

Der Ederstausee in Hessen ist einer der größten Stauseen in Deutschland. Wenn er bis zum Überlauf gefüllt ist (Vollstau), dann enthält er eine Wassermenge von 200 Millionen m³.

Im Sommer 2022 herrschte in Deutschland eine extreme Trockenheit. Dadurch nahm die Wassermenge im Ederstausee immer weiter ab.

Die Füllmenge des Ederstausees in Millionen m³ von Anfang Januar 2022 bis Mitte September 2022 kann für $0 \leq t \leq 8{,}5$ näherungsweise mithilfe der Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}17 \cdot t^5 - 3{,}49 \cdot t^4 + 25{,}2 \cdot t^3 - 83{,}4 \cdot t^2 + 136{,}8 \cdot t + 93,\ t \in \mathbb{R},$$

beschrieben werden, wobei *t* die Zeit in Monaten angibt.

($t = 0$ entspricht dem 01. Januar 2022, $t = 1$ entspricht dem 01. Februar, $t = 2$ entspricht dem 01. März usw.)

Der Graph von f ist in der *Abbildung 1* für $0 \leq t \leq 8{,}5$ dargestellt.

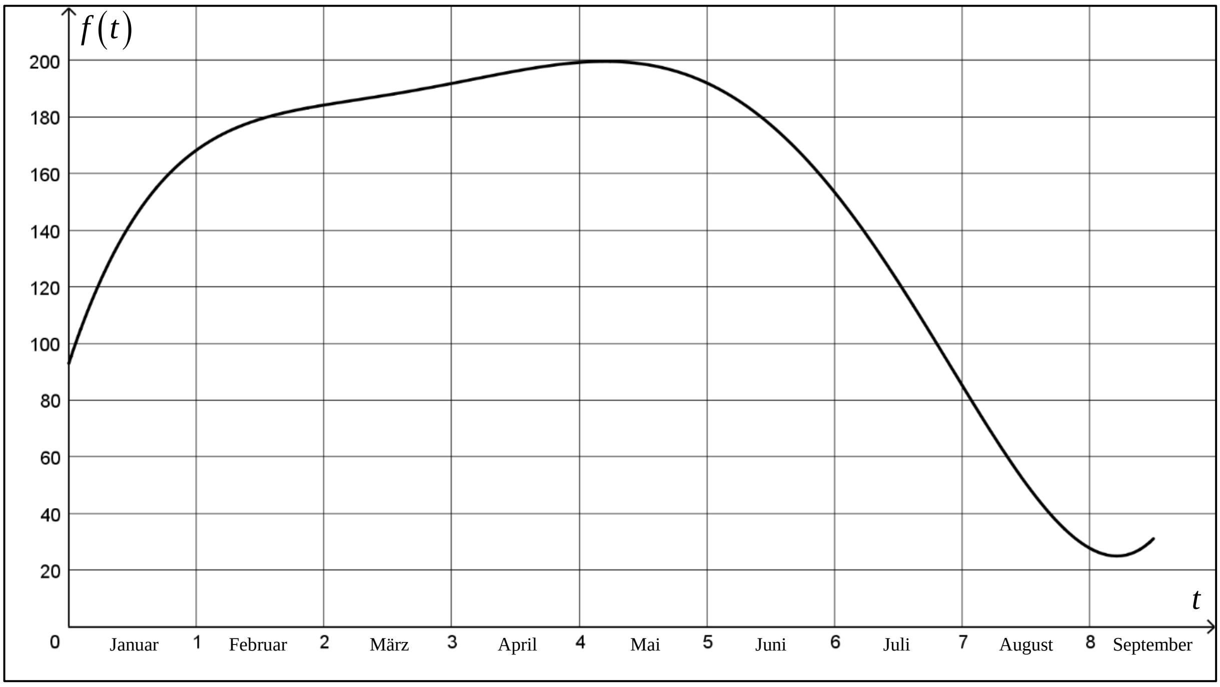


Abbildung 1

a) *Berechnen Sie die Füllmenge des Ederstausees am* 01. *April* 2022.

(2 Punkte)

Name: ____________________

b) Bei der Entstehung des Ederstausees vor mehr als 100 Jahren wurden Bauwerke überflutet. Einige davon werden bei Niedrigwasser wieder sichtbar, das „Edersee-Atlantis“. Das am besten erhaltene Bauwerk ist die Aseler Brücke.

Abbildung 2: Aseler Brücke bei Niedrigwasser des Ederstausees[1]

Die Aseler Brücke ist begehbar, wenn der Ederstausee nur noch 43 % der Füllmenge enthält, die bei Vollstau vorliegt.

Bestimmen Sie, ab wann die Aseler Brücke im Jahr 2022 *begehbar war.*

[Hinweis: Die Angabe eines exakten Datums ist nicht erforderlich.]

(4 Punkte)

c) *Berechnen Sie* $\frac{f(7)-f(5)}{7-5}$ *und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.*

(4 Punkte)

d) *Geben Sie* $f'(t)$ *an und bestimmen Sie rechnerisch – ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden – die geringste Füllmenge des Ederstausees im Zeitraum von Anfang Januar* 2022 *bis Mitte September* 2022.

(8 Punkte)

[1] Ausschnitt eines Fotos von Hubert Berberich, CC BY-SA 3.0.

Name: ____________________

In der *Abbildung 3* ist neben dem Graphen von f noch der Graph einer Funktion g dargestellt. Mit der Funktion g wird die aus den Daten der letzten dreißig Jahre ermittelte **mittlere Füllmenge** des Ederstausees von Anfang Januar bis Mitte September modelliert.

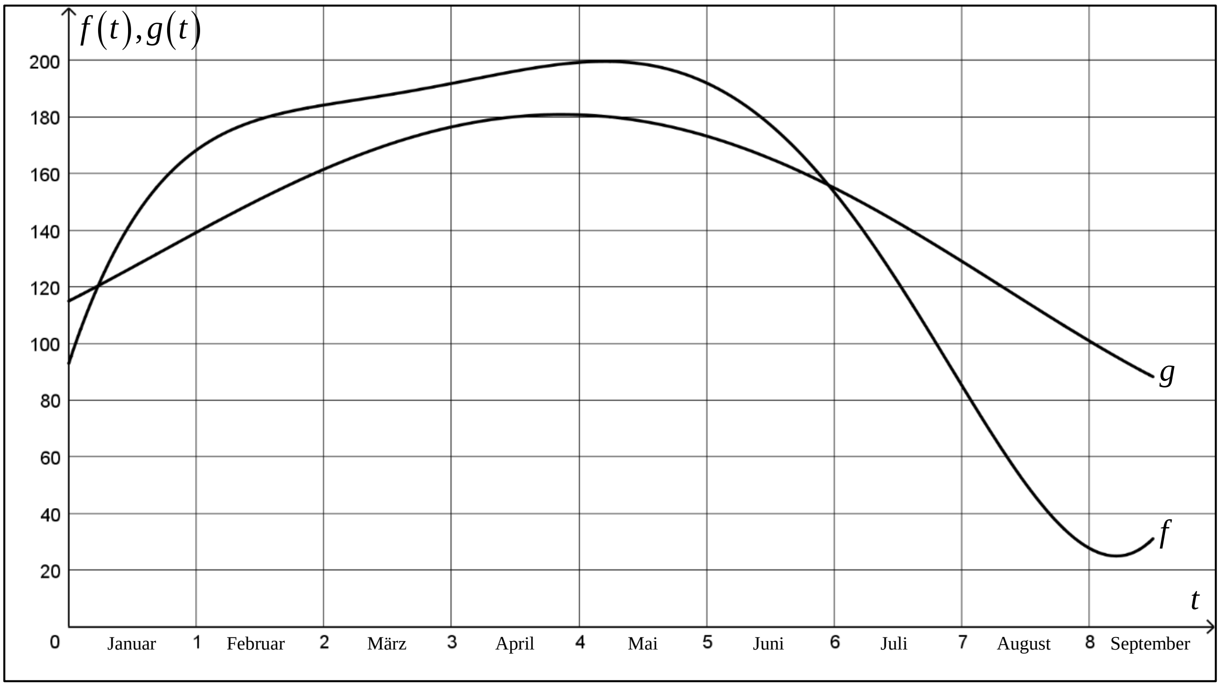


Abbildung 3

e) (1) *Geben Sie für* $0 \leq t \leq 8{,}5$ *näherungsweise die Bereiche an, in denen* $f(t) < g(t)$ *gilt, und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Bereiche im Sachzusammenhang.*

(2) Für $t \approx 8{,}0$ liegt der größte vertikale Abstand (Abstand in y-Richtung) der Graphen von f und g im Bereich $0 \leq t \leq 8{,}5$ vor.

Ermitteln Sie näherungsweise diesen Abstand und interpretieren Sie den ermittelten Wert im Sachzusammenhang.

(3 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Aufgabe 1:

Modelllösung a)

$$f'(-4) = (-4)^2 - 2\cdot(-4) - 8$$
$$= 16 \quad +8 \quad -8 = 16.$$

Modelllösung b)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1^2 + 8} = -2 \vee x = 1 + \sqrt{1^2 + 8} = 4.$$

Modelllösung c)

(1) Die Extremstellen von f sind $x = -2$ und $x = 4$.

(2) An der Stelle $x = -2$ liegt ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und damit eine lokale Maximalstelle von f vor.

An der Stelle $x = 4$ liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' und damit eine lokale Minimalstelle von f vor.

Aufgabe 2:

Modelllösung

(1)

	H	A	**Summe**
T	14	**9**	**23**
$\overline{T}$	**4**	7	**11**
Summe	18	16	**34**

(2) $P(H \cap T) = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$.

(3) $P(\overline{T}) = \frac{11}{34}$.

(4) $P(H|T) = \frac{14}{23}$.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

Die Gleichung $f(x)=0$ hat neben der Lösung $x=2$ die beiden weiteren Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 \approx 0,27$, und $x_2 \approx 3,73$.

Modelllösung b)

$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2-6\cdot x+\frac{9}{2}$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x)=0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen $x=1$ und $x=3$.

Zusätzlich gilt $f'(0)=\frac{9}{2}>0$, $f'(2)=-\frac{3}{2}<0$ und $f'(4)=\frac{9}{2}>0$. An der Stelle $x=1$ liegt also ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und damit ein lokales Maximum von f vor. An der Stelle $x=3$ liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' und damit ein lokales Minimum von f vor.

Mit $f(1)=1$ und $f(3)=-1$ folgt, dass $H(1|1)$ der lokale Hochpunkt und $T(3|-1)$ der lokale Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Modelllösung c)

Die Aussage ist falsch.

Die Funktion n mit $n(x)=f(x)+2$ ist ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die zwei lokale Extremstellen, aber nur eine Nullstelle besitzt.

Modelllösung d)

(1) Ansatz: $g: y = m \cdot x + b$.

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{-1-1}{3-1} = -1, \; f(1) = 1.$$

Einsetzen in $y = m \cdot x + b$ liefert:

$1 = -1 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2$.

Gleichung der Geraden $g: \; y = -x + 2$.

(2) Durch Gleichsetzen ergibt sich die Gleichung $f(x) = -x + 2$ mit den Lösungen $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$.

Mit $f(2) = 0$ gilt dann $R(2\,|\,0)$.

(3) Die Gleichung $f'(x) = -1$ hat die beiden Lösungen x_3 und x_4 mit $x_3 \approx 1{,}42$ und $x_4 \approx 2{,}58$.

Der Graph von f hat an den Stellen $x_3 \approx 1{,}42$ und $x_4 \approx 2{,}58$ Tangenten, die parallel zur Geraden g verlaufen.

Modelllösung e)

(1) Zu dem Wert $h = 0{,}25$ gehört die Abbildung 2.3.

(2) Zu der Abbildung 2.2 gehört der Wert $h = 0{,}5$.

(3) Der Wert des Differenzenquotienten nähert sich der Zahl 0.

Wenn h immer kleiner wird, dann nähert sich der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ dem Wert $f'(3)$ an.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

$f(3) = 191{,}82.$

Am 01. April 2022 betrug die Füllmenge des Ederstausees ungefähr 191,82 Millionen m^3.

Modelllösung b)

Die Gleichung $f(t) = 0{,}43 \cdot 200$ hat die Lösungen t_1, t_2 und t_3 mit $t_1 \approx -0{,}05$, $t_2 \approx 6{,}99$ und $t_3 \approx 9{,}04$. Die Lösungen t_1 und t_3 liegen nicht im Modellierungsbereich.

Im Jahr 2022 war die Aseler Brücke ab Anfang August begehbar.

Modelllösung c)

$\frac{f(7) - f(5)}{7-5} = -53{,}35$.

Von Anfang Juni 2022 bis Ende Juli 2022 nahm die Füllmenge des Ederstausees pro Monat um durchschnittlich 53,35 Millionen m^3 ab.

Modelllösung d)

$f'(t) = 0{,}85 \cdot t^4 - 13{,}96 \cdot t^3 + 75{,}6 \cdot t^2 - 166{,}8 \cdot t + 136{,}8.$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen t_4 und t_5 mit $t_4 \approx 4{,}20$ und $t_5 \approx 8{,}21$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = 136{,}8 > 0$, $f'(6) = -56{,}16 < 0$ und $f'(8{,}5) \approx 44{,}97 > 0$. An der Stelle t_4 liegt also ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und damit ein lokales Maximum von f vor. An der Stelle t_5 liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' und damit ein lokales Minimum von f vor.

Wegen $f(0) = 93$, $f(t_5) \approx 24{,}93$ und $f(8{,}5) \approx 31{,}07$ liegt bei t_5 auch das absolute Minimum von f im Intervall $[0;8{,}5]$ vor.

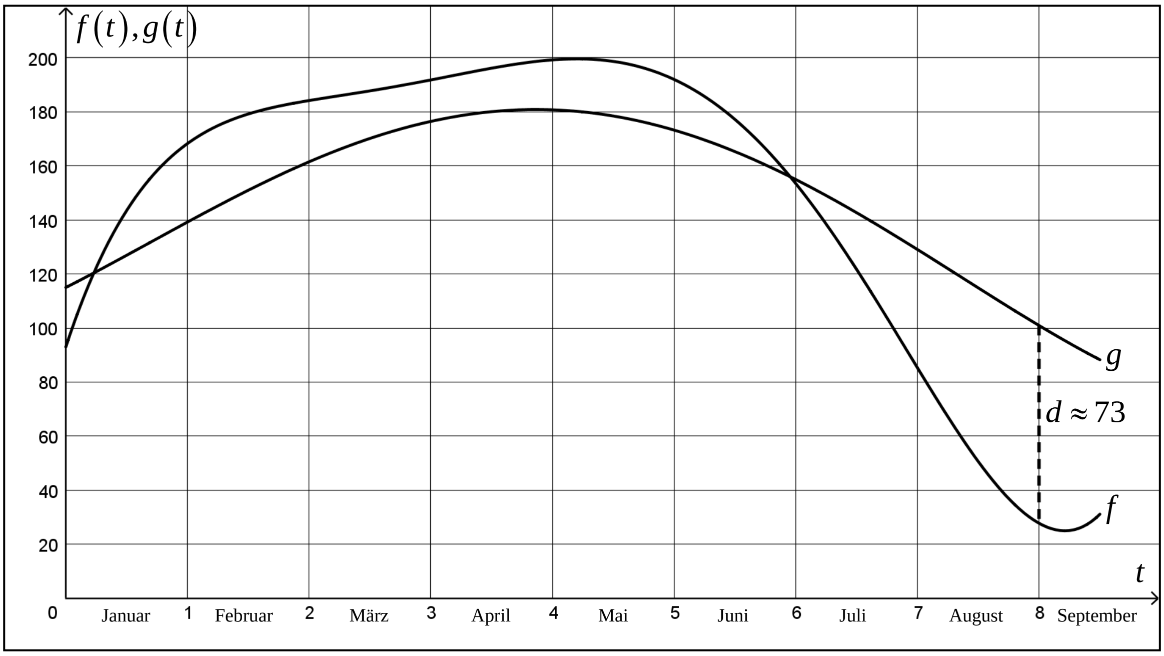
Die geringste Füllmenge des Ederstausees im Zeitraum von Anfang Januar 2022 bis Mitte September 2022 betrug ungefähr 24,93 Millionen m^3.

Modelllösung e)

(1) Die Bedingung $f(t) < g(t)$ gilt für $0 \le t \le 8{,}5$ näherungsweise in den Bereichen $0 \le t < 0{,}25$ und $5{,}9 < t \le 8{,}5$.

Durch diese Bereiche sind die Zeiträume zwischen Anfang Januar 2022 und Mitte September 2022 gegeben, in denen die Füllmenge des Ederstausees geringer war als die entsprechende mittlere Füllmenge der letzten dreißig Jahre.

(2)



Für $t \approx 8{,}0$ beträgt der vertikale Abstand d der Graphen von f und g ungefähr 73 LE.

Anfang September 2022 war die Füllmenge des Ederstausees 73 Millionen m^3 geringer als die entsprechende mittlere Füllmenge der letzten dreißig Jahre. Dies war die größte Abweichung der Füllmenge nach unten von der mittleren Füllmenge zwischen Anfang Januar 2022 und Mitte September 2022.