Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2022

Mathematik

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - 6 \cdot x + 8,\ x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

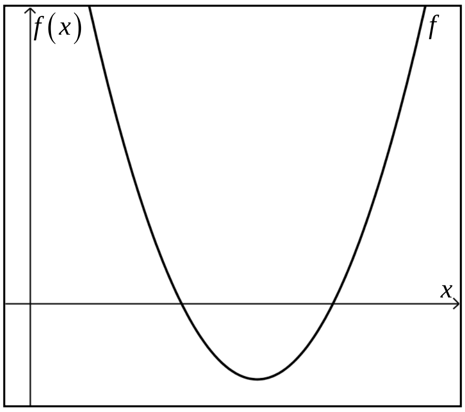

Abbildung 1

a) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(3 Punkte)

b) (1) *Berechnen Sie $f'(10)$.*

(2) Eine der drei *Abbildungen 2.1* bis *2.3* zeigt den Graphen von f'.

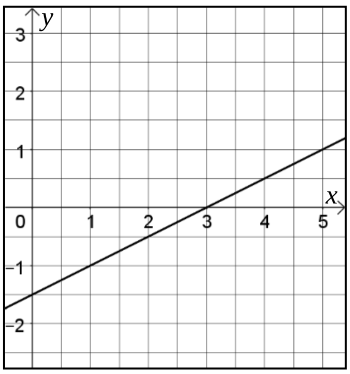

Abbildung 2.1

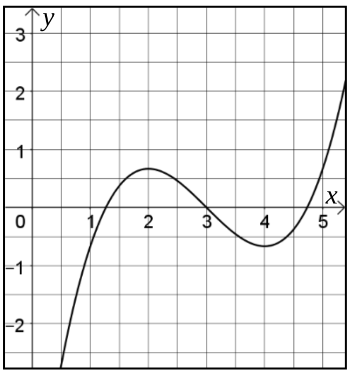

Abbildung 2.2

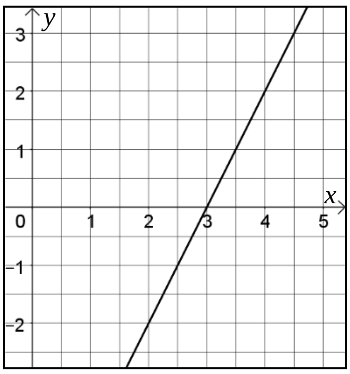

Abbildung 2.3

Geben Sie an, welche Abbildung den Graphen von f' zeigt.

(2 + 1 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2:

Teuer oder billig, kann man das schmecken?

Die 32 Kinder einer Klasse führen einen Schokoladentest durch. Acht Kinder erhalten teure Schokolade und die übrigen billige Schokolade. Nur die Lehrkraft weiß, zu welcher der beiden Preisklassen die Schokolade jeweils gehört.

Nach dem Verzehr äußert jedes Kind eine Vermutung darüber, zu welcher Preisklasse seine Schokolade gehört.

In der folgenden *Tabelle* sind bereits einige der Werte eingetragen, die sich bei diesem Test ergeben haben.

	Kind hat teure Schokolade erhalten.	Kind hat billige Schokolade erhalten.	Summe
Kind vermutet: Die Schokolade ist teuer.			12
Kind vermutet: Die Schokolade ist billig.	6	14	20
Summe			32

Tabelle

(1) *Geben Sie die fehlenden Werte in der Tabelle an.*

(2) Ein Kind wird zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Kind die Preisklasse seiner Schokolade richtig vermutet.

(3) Ein zufällig ausgewähltes Kind vermutet, es habe eine billige Schokolade erhalten.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind tatsächlich aber eine teure Schokolade erhalten hat.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2022

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{27}{125} \cdot x^3 - \frac{27}{25} \cdot x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

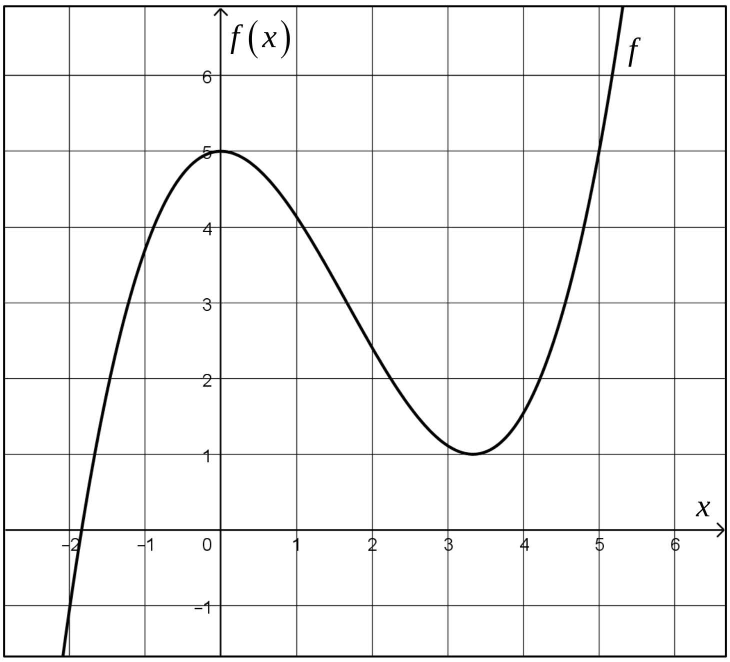

Abbildung 1

a) *Prüfen Sie, ob der Punkt* $P\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{16}{5}\right)$ *auf dem Graphen der Funktion f liegt.*

(2 Punkte)

Name: ____________________

b) *Geben Sie* $f'(x)$ *an und bestimmen Sie rechnerisch – ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden – die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.*

[Zur Kontrolle: Der lokale Tiefpunkt liegt an der Stelle $x_T = \frac{10}{3}$.]

(7 Punkte)

c) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $Q(5|f(5))$.

[Zur Kontrolle: $t: y = \frac{27}{5} \cdot x - 22$.]

(2) Die Tangente t und der Graph von f besitzen einen weiteren gemeinsamen Punkt R.

Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

(4 + 3 Punkte)

d) Für eine Funktion g gilt: $g(x) = f(x) + a,\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$.

(1) *Begründen Sie, warum die Graphen von* g' *und* f' *identisch sind.*

(2) Wenn der Graph von g genau drei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen soll, dann dürfen für a nur Werte aus einem bestimmten Bereich eingesetzt werden.

Geben Sie diesen Bereich an.

(2 + 3 Punkte)

Aufgabe e) folgt auf Seite 3.

Name: ____________________

e) Die *Abbildung 2* zeigt den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = f(x-b) + c$, $x \in \mathbb{R}$.

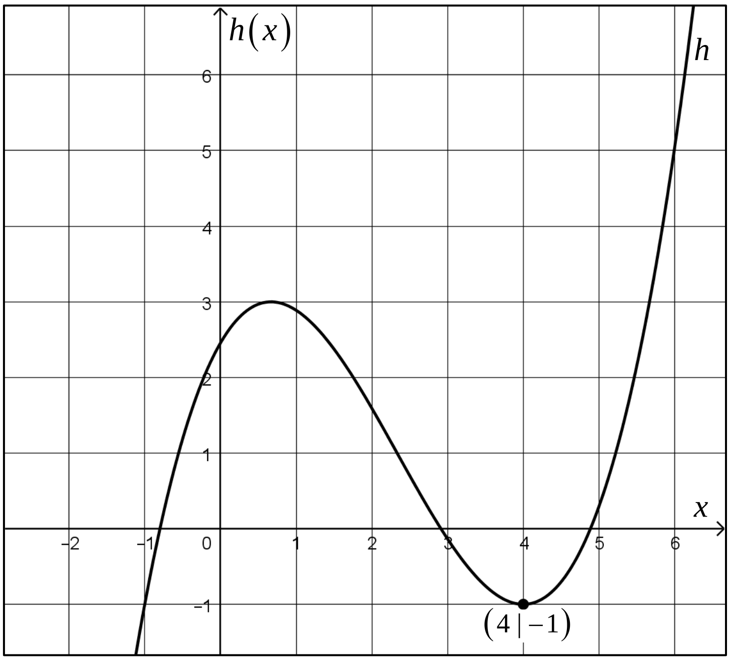

Abbildung 2

Ermitteln Sie b und c.

(3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

Ein „Pumptrack“ ist eine speziell geschaffene Mountainbike-Strecke. Auf einem Pumptrack ist es das Ziel, am Rad allein durch Heben und Senken des Körpers Geschwindigkeit aufzubauen.

Das seitliche Profil für einen Abschnitt eines Pumptracks wird für $0 \leq x \leq 8$ durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}24 \cdot x^2 - 1{,}545 \cdot x + 2{,}12,\ x \in \mathbb{R},$$

modelliert.

Dabei entspricht eine Längeneinheit in dem Koordinatensystem 1 m in der Realität. Die x-Achse entspricht dem Niveau des Geländes, das den Pumptrack umgibt.

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

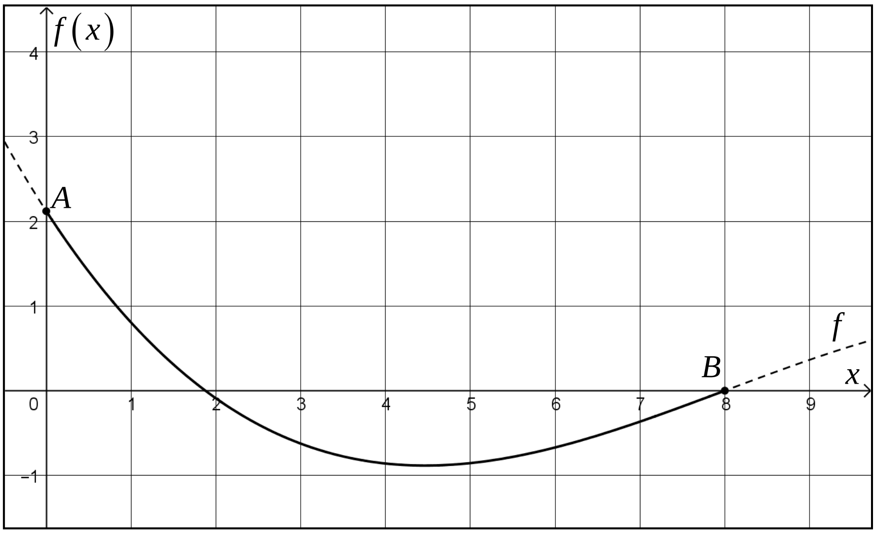

Abbildung 1

Die Aufgaben a) und b) beziehen sich auf das mit dem Graphen der Funktion f modellierte seitliche Profil des Pumptrack-Abschnitts.

a) (1) *Geben Sie die genaue Höhe des Punktes A über dem Niveau des umgebenden Geländes an.*

(2) Die durchschnittliche Steigung zwischen dem Punkt A und dem Punkt B (siehe *Abbildung 1*) wird mit $-0{,}265$ angegeben.

Prüfen Sie diese Angabe.

Name: ____________________

(3) *Erklären Sie, warum die durchschnittliche Steigung nur wenig über den Verlauf des Pumptrack-Abschnitts aussagt.*

(4) Die durchschnittliche Steigung $-0{,}265$ kommt auch als Steigung in einem Punkt des seitlichen Profils vor.

Geben Sie $f'(x)$ *an und berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.*

(1 + 3 + 2 + 4 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch – ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden –, wie tief unterhalb des Niveaus des umgebenden Geländes der niedrigste Punkt des Pumptrack-Abschnitts liegt.*

(7 Punkte)

Aufgabe c) folgt auf Seite 6.

Name: ____________________

Das seitliche Profil für den weiteren Verlauf des Pumptracks wird für $8 \le x \le x_C$ durch den Graphen der Funktion *g* mit der Gleichung

$$g(x) = 0{,}015 \cdot x^3 - 0{,}51 \cdot x^2 + 5{,}655 \cdot x - 20{,}28,\ x \in \mathbb{R},$$

modelliert. Dabei ist x_C die Stelle im Bereich $x > 8$, an der der Graph von *g* den gemeinsamen Punkt *C* mit der *x*-Achse besitzt. Eine Längeneinheit in dem Koordinatensystem entspricht weiterhin 1 m in der Realität.

Die *Abbildung 2* zeigt die durch die Funktionen *f* und *g* modellierten Abschnitte des Pumptracks.

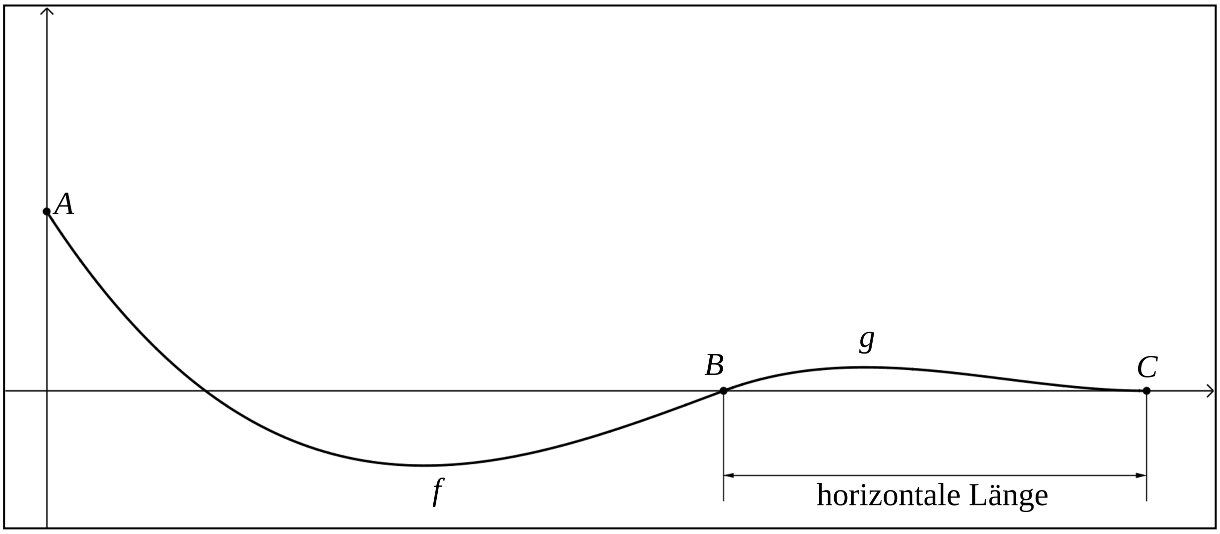

Abbildung 2

c) (1) Für einen glatten Übergang müssen die Graphen der Funktionen *f* und *g* knickfrei ineinander übergehen.

[„An einer Stelle knickfrei ineinander übergehen“ bedeutet: An dieser Stelle besitzen die Funktionen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.]

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Graphen der beiden Funktionen f und g an der Stelle $x = 8$ knickfrei ineinander übergehen.

(2) *Ermitteln Sie rechnerisch die horizontale Länge des zweiten Abschnitts (siehe Abbildung 2).*

(4 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung