Recurso - 25/06/22

1)

R	B0	B1
A0	1	0
A1	0	1
A2	1	0
A3	0	1

S	A0	A1	A2	A3
B0	0	1	1	0
B1	1	1	0	1

P	A0	A1	A2	A3
A0	0	1	1	0
A1	0	0	0	1
A2	0	1	1	1
A3	1	0	0	0

Difuncional: se 2 inputs têm a mesma imagem, então têm exatamente o mesmo set de imagens.

Injetiva: máx. um 1 por fila

	R	S	P
Injetiva	✓	X	X
Difuncional	✓	X	X

2) $R \cdot in = [\perp, \pi_1 \cup R \cdot \pi_2]$

$\Leftrightarrow$ { Fusão-+, Eq-+ }

$$\begin{cases} R \cdot nil = \perp \\ R \cdot cons = \pi_1 \cup R \cdot \pi_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ { Introdução de variáveis; F2; F3 }

$$\begin{cases} y R [\,] = \perp \\ y R (h:t) \Leftrightarrow y(\pi_1 \cup R \cdot \pi_2)(h,t) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ { 5.57 }

$$\begin{cases} y R [\,] = \perp \\ y R (h:t) \Leftrightarrow y \pi_1 (h,t) \vee y(R(\pi_2(h,t))) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ { Def. π_1 e π_2 }

$$\begin{cases} y R [\,] = \perp \\ y R (h:t) \Leftrightarrow y = h \vee y R t \end{cases}$$

R é a relação de pertença em listas: aRx diz-se a ocorre na lista x.

3) $((R-S) \cup S) - S = R - S$

$((R-S) \cup S) - S \subseteq X$

$\Leftrightarrow$ { 5.138 }

$(R-S) \cup S \subseteq X \cup S$

$\Leftrightarrow$ { 5.59 }

$R - S \subseteq X \cup S \wedge S \subseteq X \cup S$

$\Leftrightarrow$ { 5.138; trivial }

$R \subseteq X \cup S \cup S$

$\Leftrightarrow$ { Redundância }

$R \subseteq X \cup S$

$\Leftrightarrow$ { 5.138 }

$R - S \subseteq X$

$\therefore$ { 5.24 }

$((R-S) \cup S) - S = R - S$

4) $R \cdot f^{\circ} \cup S \cdot g^{\circ}$ é simples

$\Leftrightarrow$ {S.70}

$$\begin{cases} R \cdot f^{\circ} \text{ é simples} \\ S \cdot g^{\circ} \text{ é simples} \\ R \cdot f^{\circ} \cdot (S \cdot g^{\circ})^{\circ} \subseteq id \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ {Simples def.; S.16; S.15}

$$\begin{cases} R \cdot f^{\circ} \cdot f \cdot R^{\circ} \subseteq id \\ S \cdot g^{\circ} \cdot g \cdot S^{\circ} \subseteq id \\ R \cdot f^{\circ} \cdot g \cdot S^{\circ} \subseteq id \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ {f e g injetivas}

$$\begin{cases} R \cdot R^{\circ} \subseteq id \\ S \cdot S^{\circ} \subseteq id \\ R \cdot f^{\circ} \cdot g \cdot S^{\circ} \subseteq id \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ {R e S são simples}

$R \cdot f^{\circ} \cdot g \cdot S^{\circ} \subseteq id$

$\Leftarrow$ { $\bot$ é absorvente da composição }

$f^{\circ} \cdot g = \bot$

$\Leftrightarrow$ {Variáveis e guardanapo}

$\neg \langle \exists k, k' :: f\, k = g\, k' \rangle$

5) $(R \dagger S) \dagger S$

$\Leftrightarrow$ { Def. $\dagger$ }

$S \cup (R \dagger S) \cap \bot / S^{\circ}$

$\Leftrightarrow$ { Def. $\dagger$ }

$S \cup ((S \cup R \cap \bot / S^{\circ}) \cap \bot / S^{\circ})$

$\Leftrightarrow$ { Distributiva; $\cap X$ é idempotente }

$S \cup (S \cap \bot / S^{\circ} \cup R \cap \bot / S^{\circ})$

$\Leftrightarrow$ { $S \cap \bot / S^{\circ} = \bot$ }

$S \cup R \cap \bot / S^{\circ}$

$\Leftrightarrow$ { Def. $\dagger$ }

$R \dagger S$

6) $P \cdot \Phi_p \subseteq \Phi_q \cdot T$

$\Leftrightarrow$ {5.159}

$\Phi_p \subseteq P \backslash \Phi_q \cdot T$

$\Leftrightarrow$ {Def Φ_p ; 5.19}

$\langle \forall s : s\left(id \cap \frac{pe}{true}\right)s : s(P \backslash \Phi_q \cdot T) \rangle$

$\Leftrightarrow$ {5.56 ; 5.13 ; Guardanapo ; 5.160

$\langle \forall s : ps : \langle \forall s' : s'Ps : s'(\Phi_q \cdot T)s \rangle\rangle$

$\Leftrightarrow$ {

$\langle \forall s : ps : \langle \forall s' : s'Ps : \langle \exists s'' : s'\Phi_q s'' : s''Ts \rangle\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow$ {_T_ = True ; Def. Φ_q ; 5.56 ; A.2 ; Guardanapo}

$\langle \forall s : ps : \langle \forall s' : s'Ps : \langle \exists s'' : s' = s'' : qs'' \rangle\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow$ {A.6}

$\langle \forall s : ps : \langle \forall s' : s'Ps : qs' \rangle\rangle$

7) $z \leq x \div y$

$\Leftrightarrow$ {F6 ; F9 }

$z \times y \leq (x \ominus y) + y$

$\Leftrightarrow$ {F7 }

$(z \times y) \ominus y \leq x \ominus y$

$\Leftrightarrow$ {F8 }

$(z \ominus 1) \times y \leq x \ominus y$

$\Leftrightarrow$ {F6 ; F7 }

$z \leq 1 + (x \ominus y) \div y$

:: {Igualdade indireta sobre $\mathbb{N}_0$}

$x \div y = 1 + (x \ominus y) \div y$

8) $hist \; ((R \times id)^* \leftarrow R^* \leftarrow (id \leftarrow R \leftarrow R)) \; hist$

$\Leftrightarrow$ { Reynold's Arrow }

$hist \cdot (id \leftarrow R \leftarrow R) \subseteq ((R \times id)^* \leftarrow R^*) \; hist$

$\Leftrightarrow$ { Shunting ; Variáveis }

$p \, (id \leftarrow R \leftarrow R) \, q \Rightarrow (hist \; p) \, ((R \times id)^* \leftarrow R^*) \; hist \; q$

$\Leftrightarrow$ { Reynold' arrow 2x } 5.13

$p \cdot R \subseteq (id \leftarrow R) \, q \Rightarrow (hist \; p) \cdot R^* \subseteq (R \times id)^* \cdot (hist \; q)$

$\Leftrightarrow$ { Variáveis ; Shunting }

$(b R a \Rightarrow p \, b \, (id \leftarrow R) \, q \, a) \Rightarrow (hist \; p) \cdot R^* \subseteq (R \times id)^* \cdot (hist \; q)$

$\Leftrightarrow$ { Reynold's arrow } 5.13 }

$(b R a \Rightarrow p \, b \cdot R \subseteq q \, a) \Rightarrow (hist \; p) \cdot R^* \subseteq (R \times id)^* \cdot (hist \; q)$

$\Leftrightarrow$ { Shunting ; Variáveis ; A.1 }

$\begin{cases} b R a \\ c R d \end{cases} \Rightarrow p \, b \, c = q \, a \, d \Rightarrow (hist \; p) \cdot R^* \subseteq (R \times id)^* \cdot (hist \; q)$

Para $R := r$,

$\begin{cases} b = r \, a \\ c = r \, d \end{cases} \Rightarrow p \, b \, c = q \, a \, d \Rightarrow (hist \; p) \cdot map \; r \subseteq map \, (r \times id) \cdot (hist \; q)$

$\Leftrightarrow$ { A.5 }

$p \, (r \, a) (r \, d) = q \, a \, d \Rightarrow (hist \; p) \cdot map \; r \subseteq map \, (r \times id) \cdot (hist \; q)$