Teste - 9/6/22

1) $R \wedge S = R \cap S/R^\circ$

Logo $R \wedge S \subseteq R$. Menor que simples é simples. Análogo para a injetiv.

2) $R \dotplus S = S \cup R \cap \bot/S^\circ$

Se $R \dotplus S$ é simples, por 5.70 temos:

- S é simples
- $R \cap \bot/S^\circ$ é simples
- $(R \cap \bot/S^\circ) \cdot S^\circ \subseteq id$

$\Leftarrow$

- R é simples
- S° distribui por $R \cap \bot/S^\circ$ por 5.62

$R \cdot S^\circ \cap \bot/S^\circ \cdot S^\circ \subseteq id$

$\Leftarrow \{$

$(\bot/S^\circ) \cdot S^\circ \subseteq \bot$

$\Leftrightarrow \{5.157\}$

$\bot/S^\circ \subseteq \bot/S^\circ$

3) $\mathsf{Maybe}\, R = in \cdot (id + R) \cdot in^\circ$

$\Leftrightarrow$

$\mathsf{Maybe}\, R \cdot in = [\underline{Nothing}, Just \cdot R]$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} y(\mathsf{Maybe}\, R)(Nothing) \Leftrightarrow Nothing = y \\ y(\mathsf{Maybe}\, R)(Just\, a) = \langle \exists b : y = Just\, b : b R a \rangle \end{cases}$

$y(\mathsf{Maybe}\, R)$ é paramétrico dando como resultado or=or

4) 1. Não, pois n/ é paramétrico

2. $any\; R_t\; any$

$\Leftrightarrow \{R_t\}$

$any\, (id \leftarrow R^* \leftarrow (id \leftarrow R))\, any$

$\Leftrightarrow$ {Reynold's arrow}

$any \cdot (id \leftarrow R) \subseteq (id \leftarrow R^*) \cdot any$

$\Leftrightarrow$ {Pointwise; Shunting}

$p\,(id \leftarrow r)\, q \Rightarrow (any\, p)\, (id \leftarrow R^*)\, any\, q$

$\Leftrightarrow$ {Reynold's arrow}

$p \cdot r \subseteq q \Rightarrow any\, p \cdot R^* \subseteq any\, q$

For functions, $R := r$, $q = p \cdot r$

$any\, p \cdot map\, r \subseteq any\, (p \cdot r)$

1

5) $((n+1)\times a) \ominus a \leq x$

$\Leftrightarrow$ { F2 - GC $\ominus a \vdash +a$ }

$((n+1)\times a) \leq x + a$

$\Leftrightarrow$ { Distribuição da multiplicação }

$a \times n + a \leq x + a$

$\Leftrightarrow$ { $+a$ é injetiva em $\mathbb{N}_0$ }

$a \times n \leq x + a$

:: { Igualdade indireta }

$((n+1)\times a) \ominus a = a \times n$

6) • $tale\ L \subseteq T \cdot L$

$\Leftrightarrow$ { 5.19; F5 }

$\langle \forall a,n :: a(L \cdot succ)n : a(T \cdot L)n \rangle$

$\Leftrightarrow$ { 5.11-2x }

$\langle \forall a,n : \langle \exists n' : aLn' : n'\,succ\,n \rangle : \langle \exists a' : aTa' : a'Ln \rangle \rangle$

$\Leftrightarrow$ { succ is a bijection; A.2; A.5; Def. succ }

$\langle \forall a,n : aL(n+1) : \langle \exists a' :: a'Ln \rangle \rangle$

Os índices são contíguos.

• $tale(a:L) \subseteq T \cdot (a:L)$

$\Leftrightarrow$ { F4; F5 }

$(a:L) \cdot succ \subseteq T \cdot [\underline{a}, L] \cdot in^{\circ}$

$\Leftrightarrow$ { F4 }

$[\underline{a}, L] \cdot in^{\circ} \cdot succ \subseteq T \cdot [\underline{a}, L] \cdot in^{\circ}$

$\Leftrightarrow$ { $succ = in \cdot i_2$; Fusão-+ }

$[\underline{a}, L] \cdot in^{\circ} \cdot in \cdot i_2 \subseteq [T \cdot \underline{a}, T \cdot L] \cdot in^{\circ}$

$\Leftrightarrow$ { in is a bijection; Natural-id; Cancelamento-+ }

$L \cdot in \subseteq [T \cdot \underline{a}, T \cdot L]$

$\Leftrightarrow$ { Fusão-+; Eq-+ }

$\begin{cases} L \cdot zero = T \\ L \cdot succ = T \cdot L \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ { F5 }

$\begin{cases} L \cdot zero = T \\ tale\ L = T \cdot L \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ { F7 }

invL

Rec

1)

7) $X \subseteq R \backslash (S/Q)$

$\Leftrightarrow \{5.159\}$

$R \cdot X \subseteq S/Q$

$\Leftrightarrow \{5.157\}$

$R \cdot X \cdot Q \subseteq S$

$\Leftrightarrow \{5.159\}$

$X \cdot Q \subseteq R \backslash S$

$\Leftrightarrow \{5.157\}$

$X \subseteq (R \backslash S)/Q$

$:: \{5.24\}$

$R \backslash (S/Q) = (R \backslash S)/Q$

8) Como Follows $\subseteq$ newFlwr v u Follows, o invariante está garantido por monotonia.

$inv_2(\text{newFlwr } v\ u \text{ Follows})$

$\Leftrightarrow \{F10\}$

$\text{newFlwr } v\ u \text{ Follows} \subseteq (\neq)$

$\Leftrightarrow \{F11\}$

$\text{Follows} \cup \underline{v} \cdot \underline{u}^{\circ} \subseteq (\neq)$

$\Leftrightarrow \{5.59\}$

$\text{Follows} \subseteq (\neq) \wedge \underline{v} \cdot \underline{u}^{\circ} \subseteq (\neq)$

$\Leftrightarrow \{5.46; 5.47\}$

$inv_2 \text{ Follows} \wedge id \subseteq \underline{v}^{\circ} \cdot (\neq) \cdot u$

$\Leftrightarrow$ {Pointwise; Guardanapo}

$inv_2 \text{ Follows} \wedge \underbrace{v \neq u}_{WP}$