7º LABORATÓRIO de CCI-22 / 2022

CTA - ITA - IEC

Prof Juliana

Objetivo: Implementação de métodos numéricos para integração.

Entregar (através do Google Classroom):

a) Códigos utilizados SEM compactar.

b) Relatório (em pdf) para responder as questões abaixo, mostrando resultados e conclusões. Caprichar nas análises!

c) Desconto de 1 ponto na nota por dia de atraso.

Importante:

- Implementar as funções solicitadas em arquivos separados. Funções adicionais podem ser feitas e podem estar no arquivo da sua função principal.
- Obedeça a assinatura das funções.
- Nessas implementações não será permitido o uso de funções ou operadores do Matlab (ou outra ferramenta utilizada) que realizam o trabalho pedido (ou boa parte dele). Por outro lado, uma vez terminadas as implementações, você pode conferi-las com os resultados fornecidos pelas funções existentes. Nessas comparações, tenha em conta que os resultados não precisam ser rigorosamente idênticos: pode haver uma pequena diferença devido a erros de arredondamento.
- Para passar uma função como parâmetro, utilize o manipulador `@`.

  Ex: `f = @(x)(x^2)`

  Cuidado, pois pode ser necessário usar operações ponto-a-ponto.

  Ex: `f = @(x)(x.^2)`

<u>IMPLEMENTAÇÃO</u>: Implemente as funções abaixo.

`[I, e] = trapezioComposta(f, a, b, n):` calcula o valor da integral **`I`** de **`f`** no intervalo [**`a`**,**`b`**] usando a <u>Regra Trapézio Composta</u> com **`n`** divisões no intervalo. Calcula também o erro estimado (em módulo), considerando que as diferenças divididas de ordem 2 possibilitam uma estimativa do valor de $f^{(2)}(\xi)$. Obs: Fazendo **`n`** = 1 teremos a Regra Trapézio Simples.

$$T(h) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

$$E_{TC} = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi)$$

Atenção: Aqui é derivada segunda sempre para Regra do Trapézio!
Logo k = 2 em Obs1

Obs1: Como estimar $f^{(k)}(\xi)$, vide cap 5 sobre Interpolação (slide 37):

$f^{(k)}(\xi)$ = (máximo dos módulos das diferenças divididas de ordem k) * k!

Reutilize sua função de Tabela de Diferenças Divididas do Lab5!

Obs 2: Para estimar a diferenças divididas de ordem 2:

Se n=1:
Temos apenas dois pontos ($x_0 = a$, $x_1 = b$), logo não chegamos à coluna de ordem 2. Basta então criar outro ponto, por exemplo ($x_0 = a$, $x_0 = (a+b)/2$, $x_2 = b$), só para conseguir preencher a tabela até a ordem 2.
Pode-se até criar vários pontos, assim poderemos escolher o máximo dos módulos das diferenças divididas da ordem 2.

Se n>1: Não teremos problema.

`[I, e] = simpson13Composta(f, a, b, n):` calcula o valor da integral **`I`** de **`f`** no intervalo [**`a`**,**`b`**] usando a <u>Regra Simpson 1/3 Composta</u> com **`n`** divisões no intervalo. Obs: O método só funciona para **`n`** par (**`n`** >=2), logo a função deve dar mensagem de erro se **`n`** for inadequado. Calcula também o erro estimado (em módulo), considerando que as diferenças divididas de ordem 4 possibilitam uma estimativa do valor de $f^{(4)}(\xi)$. Obs: Fazendo **`n`** = 2 teremos a Regra Simpson 1/3 Simples.

$$S(h) = \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_n) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2}))]$$

$$E_{SC} = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$$

Obs 3: Vale Obs1 e Obs2 (adaptada a ordem desejada, no caso 4).

[I, qtdeRec, qtdeDiv] = quadAdaptativa(f,a,b,opcao,epsilon): calcula, com Quadratura Adaptativa, o valor da integral **I** de **f** no intervalo [**a**,**b**] com erro máximo **epsilon**. O parâmetro **opcao** é um valor inteiro no intervalo [1,4] que especifica o método a ser utilizado em toda a integração:

- **opcao** = 1: Regra simples do trapézio
- **opcao** = 2: Regra simples Simpson 1/3
- **opcao** = 3: Regra simples Simpson 3/8
- **opcao** = 4: Newton-Cotes de ordem 4

$$I(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$ Trapézio

$$I(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$ Simpson 1/3

$$I(f) = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$ Simpson 3/8

$$I(f) = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

Deve-se usar recursividade. Pode-se, então, definir uma função auxiliar para efetuar a recursão. O valor de retorno **qtdeRec** é o número de chamadas recursivas realizadas. Como as funções de cálculo gastam tempo constante, **qtdeRec** é uma estimativa do tempo total gasto. O valor de retorno **qtdeDiv** é o número de divisões (não necessariamente equidistantes) no intervalo [**a**,**b**] original quando se atinge o critério de parada.
Utilize o seguinte critério de parada:

$$|P_i - Q_i| < \varepsilon(2^p - 1)(x_{i+1} - x_i)/(b - a)$$

Obs : Na fórmula do erro acima, **a** e **b** são os do intervalo original!
Caso você precise "carregar/levar" **a** e **b** originais, uma dica de implementação é fazer uma função auxiliar:

```
function [I, qtdeRec, qtdeDiv]=auxiliar
(f,a,b,opcao,epsilon,a_original,b_original)
      //Aqui tem todo código
end
```

Depois chamar a função auxiliar a partir da função solicitada na questão, assim:

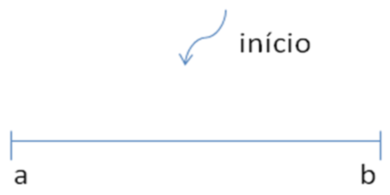
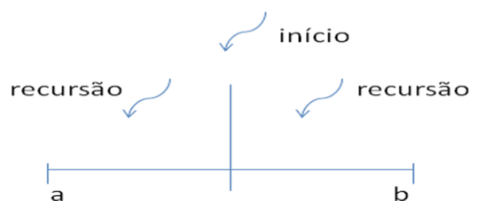
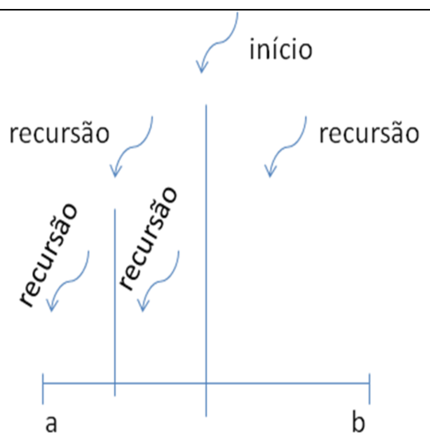
```
function [I, qtdeRec, qtdeDiv] = quadAdaptativa
(f,a,b,opcao,epsilon)
      [I, qtdeRec, qtdeDiv]=auxiliar(f,a,b,opcao,epsilon,a,b)
end
```

Lembrando que o valor de p (no fator 2^p) se comporta assim:

- **`p`** = 2 para Regra simples do trapézio
- **`p`** = 4 para Regra simples Simpson 1/3
- **`p`** = 4 para Regra simples Simpson 3/8
- **`p`** = 6 para Newton-Cotes de ordem 4

Dica de teste: Usando **`opcao`** = 2 e **`epsilon`** = 10^{-6}, você pode comparar com os resultados fornecidos pela função **`quad`** do *MatLab*.

Vamos considerar o seguinte para o cálculo de **`qtdeRec`** e **`qtdeDiv`**:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td><code>qtdeRec = 0</code>
<code>qtdeDiv =</code>
$\begin{cases} \texttt{2 se Trapézio} \\ \texttt{4 se Simpson 1/3} \\ \texttt{6 se Simpson 3/8} \\ \texttt{8 se Newton-Cotes m=4} \end{cases}$
Obs: Entenda <code>qtdeDiv</code> como quantidade de divisões (intervalos) do trecho inicial [<code>a</code>,<code>b</code>]
Obs: Para cada trecho, se calcula P e Q.
A resposta da integral é sempre Q.
Se P usa x intervalos, Q usa 2x intervalos.
Ex: Trapézio Simples usa 1 intervalo para P, e 2 intervalos então para Q.
Ex: Simpson 1/3 Simples usa 2 intervalos (logo 3 pontos) para P, e 4 intervalos então para Q.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><code>qtdeRec = 2</code>
<code>qtdeDiv =</code>
$\begin{cases} \texttt{2 + 2 se Trapézio} \\ \texttt{4 + 4 se Simpson 1/3} \\ \texttt{6 + 6 se Simpson 3/8} \\ \texttt{8 + 8 se Newton-Cotes m=4} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><code>qtdeRec = 4</code>
<code>qtdeDiv =</code>
$\begin{cases} \texttt{(2+2) + 2 se Trapézio} \\ \texttt{(4+4) + 4 se Simpson 1/3} \\ \texttt{(6+6) + 6 se Simpson 3/8} \\ \texttt{(8+8) + 8 se Newton-Cotes m=4} \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

<u>ANÁLISE</u>: Analise os casos abaixo.

OBS:

- TRABALHE SEMPRE COM ERROS EM <u>MÓDULO</u> NAS QUESTÕES 1 e 2.

- UTILIZE '<u>FORMAT LONG</u>' NO MATLAB PARA IMPRIMIR O VALOR DA INTEGRAL. ASSIM TEREMOS MAIS CASAS DECIMAIS PARA COMPARAR.

1) **(2 pontos)** Compare os métodos "Trapézio Composto" e "Simpson 1/3 Composto" através do cálculo da integral abaixo:

$$I = \int_1^2 x e^{x^2} dx$$

a) Seja **n** é a quantidade de divisões no intervalo [1,2]. Para valores de n = [2:2:100], plote um gráfico com o valor de n (eixo x) e o <u>erro absoluto</u> (eixo y). Sendo uma curva para cada método na mesma figura, de modo a compará-los. O <u>erro absoluto</u> deve ser calculado comparando o valor da integral calculada numericamente com o valor exato da integral calculado analiticamente (aqui pode usar o comado `int` do Matlab).
   - Faz sentido a tendência da curva dado o aumento de n? Comente.
   - Qual método foi melhor? Por que? Comente.

b) Somente para o método Trapézio Composto, desejamos saber se podemos confiar na estimativa de erro. Para valores de n = [2:2:100], plote um gráfico com o valor de n (eixo x) e o <u>erro absoluto</u> (eixo y). Na mesma figura, um gráfico com o valor de n (eixo x) e o <u>erro estimado</u> (eixo y) retornado pela função **`trapezioComposta`**.
   - O erro estimado é uma boa estimativa mesmo? Comente.

c) Idem ao item anterior, mas agora para o método Simpson 1/3 Composto.
   - O erro estimado é uma boa estimativa mesmo? Comente.

2) **(4 pontos)** Compare os métodos "Simpson 1/3 Composto" e "Quadratura Adaptativa usando Simpson Simples 1/3" através do cálculo das integrais indicadas na tabela. Preencha a tabela com as seguintes informações:

- Calcule a integral I com a função **`quad`** do *MatLab* (que realiza a Quadratura Adaptativa com Simpson 1/3).
  - Indique também o tempo de processamento usando **`tic/toc`**.
  - Obs1: Para o tempo, rode 5 vezes e pegue a média das últimas 3 vezes.
  - Obs2: Para o valor da integral, pegue o valor da última rodada.
- Calcule a integral I com a função **`quadAdaptativa (com Simpson Simples 1/3)`**: use **`opcao`** = 2 e **`epsilon`** = 10^{-6}. Registre também o valor de **`qtdeDiv`** (divisões <u>não necessariamente equidistantes</u> do intervalo que foram necessárias).
  - Indique também o tempo de processamento usando **`tic/toc`**.
  - Seguir Obs1 e Obs2 acima.
- Calcule a integral I com a função **`simpson13Composta`**: use **`n`** = **`qtdeDiv`** (obtida acima). Note que são conceitos diferentes: n são divisões igualmente espaças, e **`qtdeDiv`** são divisões usadas não necessariamente iguais (pois regiões abruptas podem ter mais divisões). Queremos ter apenas uma ideia do potencial da função **`simpson13Composta`**.
  - Indique também o tempo de processamento usando **`tic/toc`**.
  - Seguir Obs1 e Obs2 acima.
- Se o valor de I, obtido com a função **`simpson13Composta`**, não for satisfatório (estiver longe do esperado, usando **`quad`** como referência), estime o **`n`** <u>necessário</u>

para obter o erro **epsilon** desejado. Nesse caso, indique também I e tempo associados. Obs: Para estimar, você pode 'ir chutando/aumentando' **n** até o valor da integral ser próximo ao desejado.

- Comente os resultados encontrados para cada função. Plote cada função numa figura para facilitar a análise.
- Agora responda:
  - A função **quadAdaptativa** nos oferece bons resultados em tempo adequado? Comente.
  - A função **simpson13Composta** chega a bons resultados usando a quantidade de divisões indicada pela **quadAdaptativa**? Ou precisamos usar mais/menos divisões? Faz sentido? Comente.

Integral	**quad** do *MatLab*	**quadAdaptativa (com Simpson Simples 1/3)**	**simpson13Composta**
$\int_0^2 \frac{1}{x^3 - 2x - 5} dx$	**I =** **Tempo =**	**I =** **qdteDiv = 72*** **Tempo =**	**I =** **n = qtdeDiv** **Tempo =** **-----------------** **I =** **nNecessario =** **Tempo =**
$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$			
$\int_0^4 13(x - x^2)e^{-3x/2} \, dx$			

* Valor de referência para verificar se a sua função está coerente.

3) **(4 pontos)** Compare "Quadratura Adaptativa" (função **quadAdaptativa**) usando seus diferentes métodos para as funções indicadas. Preencha a tabela. Utilize **epsilon** = 10^{-6}.

- F1(x) = x^3 + 2*x^2 – 5 no intervalo [0, 4]
- F2(x) = 4*x^6 - 24*x^5 + 37*x^4 + 2*x^2 – 5 no intervalo [-7, 6]
- F3(x) = sen(x)^2 no intervalo [-pi, pi]
- F4(x) = exp(x) no intervalo [0, 4]
- F5(x) = sen(exp(x)) no intervalo [-5, 5]
- F6(x) = (sen(1/x)^2)*(cos(1/x)) no intervalo [0.1, 0.4]
- F7(x) = 13*(x-x^2)*exp(-3*x/2) no intervalo [0,4]

Função	**Regra simples do trapézio**	**Regra simples Simpson 1/3**	**Regra simples Simpson 3/8**	**Newton-Cotes de ordem 4**
F1	**I =** **qtdeRec =** **qtdeDiv =**			
F2		**I =** **qtdeRec = 1588*** **qtdeDiv = 3180***		
...				
F7				

* Valor de referência para verificar se a sua função está coerente.

- Comente os resultados encontrados para cada função. Plote cada função numa figura para facilitar a análise.
- Agora responda:
  - Em geral usar ordem maior na fórmula de integração nos permite realizar menos recursões (e consequentemente menos divisões do intervalo original)? Comente. Indique exemplos.
  - Funções ‘mal comportadas’ necessitam de mais recursões (e consequentemente mais divisões do intervalo original) para tratar os trechos críticos?

Avaliação da dupla

Aluno(a)	Atividade realizadas	Percentual merecido da nota
Fulano	*Fez Q1 e revisou Q2*	*30%*
Beltrano	*Revisou Q1, fez Q2 e Q3*	*100%*

Atenção: Dividir bem as tarefas da dupla. Não vale ter uma pessoa que só escreve relatório, ou que só testa/revisa. Todos devem ‘pôr a mão na massa’!

Bom trabalho!