Investigación de Operaciones
Teoría de Colas

Nicolás Rojas Morales
nicolas.rojasm@usm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Introducción

¿Dónde esperamos por obtener un servicio?

Introducción

¿Dónde esperamos por obtener un servicio?

NACIONAL

Cómo es vivir en el “gueto vertical”: 360 familias, 3 ascensores y torniquetes para entrar

Por El Dínamo | 10 de Abril de 2017

María Santos lleva diez meses viviendo en el **edificio de Estación Central** que protagonizó la polémica la semana pasada y que fue calificado por el **intendente Claudio Orrego** como **“gueto vertical”**. Allí convive con **360 familias**, en una torre que cuenta con **24 pisos y solo tres ascensores.**

Todo esto sumado al **ruido, la falta de privacidad y el hacinamiento**, la ha llevado a tomar la decisión de cambiarse de casa. **“Había buscado en otros lados pero necesitaba algo más económico y con transporte cerca, pero cada día me dan ganas de salir arrancando”**, confesó al diario La Segunda. Agregó, además, que **“prefiero salir porque es incómodo quedarse. No puedo estar tranquila. Hay ‘boche’ y música alta hasta las dos de la mañana”.**

Si durante el día son las construcciones de otros edificios lo que molestan a María, en la noche son los televisores y las discusiones lo que no la dejan dormir. **“Tengo siempre las ventanas cerradas porque se ve todo. Y el fin de semana es imposible dormir, el ruido es el que más agota, estresa”**, afirmó.

Pese a que Santos vive en el tercer piso y no ha tenido que enfrentar esta situación, reveló que **para tomar el ascensor se arman largas filas de espera, donde en horario de alta concurrencia, las personas pueden esperar hasta 20 minutos** para poder subirse en uno de los tres que hay disponibles.

Introducción

¿Dónde esperamos por obtener un servicio?

Introducción

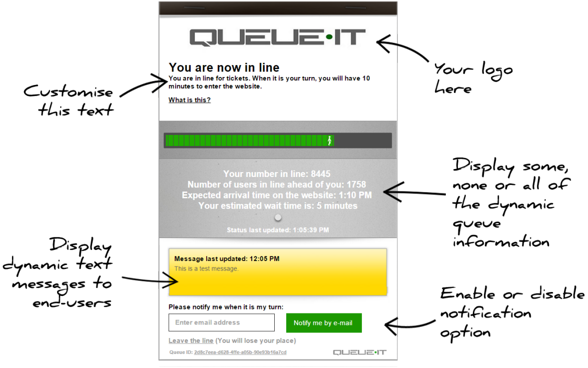
¿Dónde esperamos por obtener un servicio?

Introducción

¿Dónde esperamos por obtener un servicio?

Introducción

¿Dónde esperamos por obtener un servicio?



Introducción

¿Para qué estudiamos Teoría de Colas?

Introducción

¿Para qué estudiamos Teoría de Colas?

Para diseñar y comprender sistemas que puedan funcionar de manera "óptima" bajo algún criterio determinado

Introducción

¿Para qué estudiamos Teoría de Colas?

Para diseñar y comprender sistemas que puedan funcionar de manera "óptima" bajo algún criterio determinado

- Maximizar Ganancias $\rightarrow$ Disminuir la cantidad de cajas en un supermercado

Introducción

¿Para qué estudiamos Teoría de Colas?

Para diseñar y comprender sistemas que puedan funcionar de manera "óptima" bajo algún criterio determinado

- Maximizar Ganancias $\rightarrow$ Disminuir la cantidad de cajas en un supermercado ¿Qué pasa con los clientes?

Introducción

¿Para qué estudiamos Teoría de Colas?

Para diseñar y comprender sistemas que puedan funcionar de manera "óptima" bajo algún criterio determinado

- Maximizar Ganancias → Disminuir la cantidad de cajas en un supermercado ¿Qué pasa con los clientes?
- Minimizar Tiempos de Espera de Clientes

Introducción

¿Cómo diseñamos un sistema adecuado?

Introducción

¿Cómo diseñamos un sistema adecuado?

Estudiando algunas medidas cuantitativas de desempeño del sistema:

Introducción

¿Cómo diseñamos un sistema adecuado?

Estudiando algunas medidas cuantitativas de desempeño del sistema:

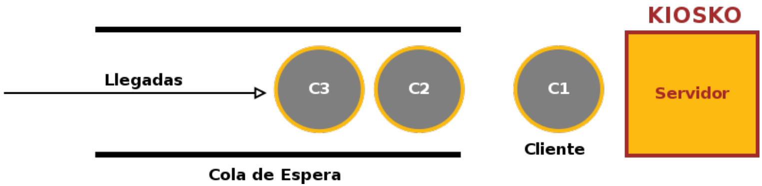
- Cantidad de Clientes en la Cola
- Tiempo promedio de espera en la Cola
- Probabilidad de que llegue un cliente y tenga que esperar

Componentes de un Sistema de Colas

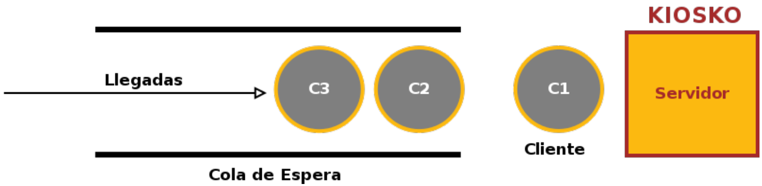
Componentes de un sistema de Colas

Componentes de un sistema de Colas

Componentes de un sistema de Colas



Componentes de un sistema de Colas



- **Llegadas** → Clientes llegan al sistema bajo una *tasa de llegada*
- Espera en Cola → Los clientes esperan a ser atendidos en una (o más) cola(s)
- Servicio → Clientes son atendidos y dejan el sistema

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas

- Describe cómo llegan los clientes al sistema
- Nacimiento Puro
- Puede ser Determinista o **Probabilista**:
  - Un dentista tiene una lista de pacientes para un día X $\rightarrow$ Sabe cuántos clientes van a llegar y a qué hora
  - Una clínica que atiende Urgencias, los clientes llegan cuando lo necesitan
- En caso de ser Probabilista, las llegadas se pueden modelar con una distribución de probabilidad

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas

- Si las llegadas satisfacen algunas condiciones, pueden ser modeladas por una distribución Poisson:
  1. Orden: Los clientes llegarán "ordenadamente" (de a uno)

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas

- Si las llegadas satisfacen algunas condiciones, pueden ser modeladas por una distribución Poisson:
    1. Orden: Los clientes llegarán “ordenadamente” (de a uno)
    2. Estacionarias: Para un intervalo de tiempo determinado Δt, la probabilidad que lleguen clientes en Δnt es la misma que en Δt. **Los intervalos deben ser iguales.**

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas

- Si las llegadas satisfacen algunas condiciones, pueden ser modeladas por una distribución Poisson:
  1. Orden: Los clientes llegarán "ordenadamente" (de a uno)
  2. Estacionarias: Para un intervalo de tiempo determinado Δt, la probabilidad que lleguen clientes en Δnt es la misma que en Δt. **Los intervalos deben ser iguales.**
  3. Independientes: La llegada de un cliente no depende ni influye en la llegada de otros

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas

- Si las llegadas satisfacen algunas condiciones, pueden ser modeladas por una distribución Poisson:
  1. Orden: Los clientes llegarán “ordenadamente” (de a uno)
  2. Estacionarias: Para un intervalo de tiempo determinado Δt, la probabilidad que lleguen clientes en Δnt es la misma que en Δt. **Los intervalos deben ser iguales.**
  3. Independientes: La llegada de un cliente no depende ni influye en la llegada de otros
- Si se cumplen estas condiciones, la probabilidad de que lleguen k personas durante un periodo de tiempo t, puede ser expresado por una variable aleatoria $X \sim$ Poisson

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Llegadas $\sim$ Poisson

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k * \exp^{-\lambda t}}{k!} \tag{1}$$

Es la probabilidad que lleguen k personas en un período de tiempo t con:

- λ: Cantidad de llegadas promedio por unidad de tiempo
- t: Tamaño del intervalo de tiempo

Componentes de un sistema de Colas

Doctor Simi

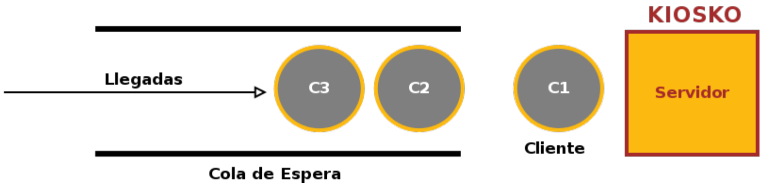
La Farmacia del Doctor Simi abre todos los días a las 8AM. Juan, que atiende en la farmacia, cree que los clientes llegan siguiendo una distribución de Poisson. Los días Jueves, entre 8 y 9AM, llegan en promedio 6 clientes a la tienda. Juan salió a una fiesta el Miércoles por la noche y quiere dormir una hora más el Jueves. El sabe que si abre una hora más tarde puede perder varios clientes. Por ende, Juan quiere saber la probabilidad de que lleguen 0, 1, 2 o 3 clientes entre las 8 y 08:30 AM (el Jueves en la mañana).

Investigación de Operaciones
Teoría de Colas

Nicolás Rojas Morales
nicolas.rojasm@usm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Componentes de un sistema de Colas



- Llegadas → Clientes llegan al sistema bajo una *tasa de llegada*
- **Espera en Cola** → Los clientes esperan a ser atendidos en una (o más) cola(s)
- Servicio → Clientes son atendidos y dejan el sistema

Componentes de un sistema de Colas

Colas

Existen algunas características que se deben definir para modelar una Cola:

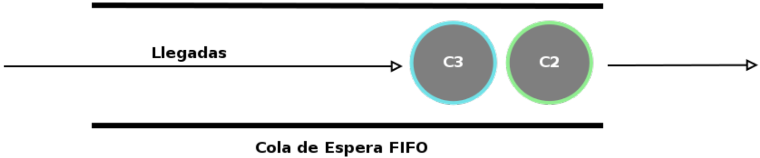
- Reglas de Prioridad
  - First In First Out
  - Last In First Out
- Configuración
  - 1 Cola / 1 Servidor
  - 1 Cola / Múltiples Servidores
  - Múltiples Colas / Múltiples Servidores
  - Colas Tandem

Componentes de un sistema de Colas

First In First Out

Componentes de un sistema de Colas

First In First Out

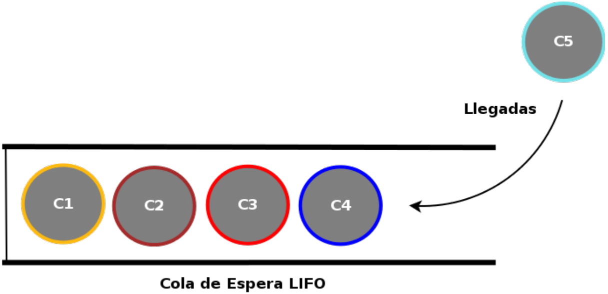


Componentes de un sistema de Colas

First In First Out

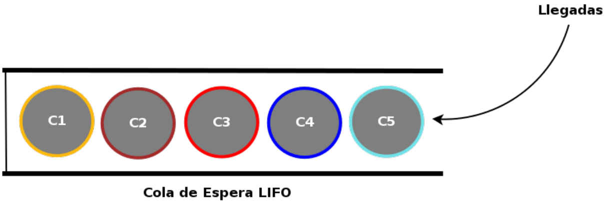
Componentes de un sistema de Colas

Last In First Out



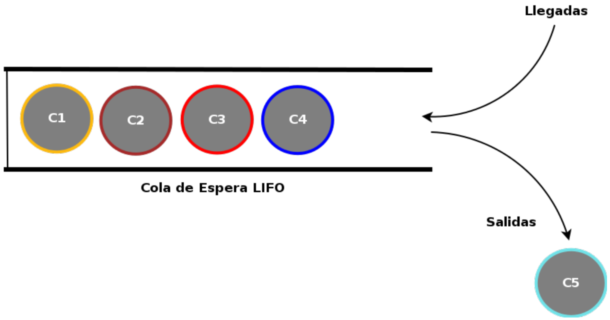
Componentes de un sistema de Colas

Last In First Out



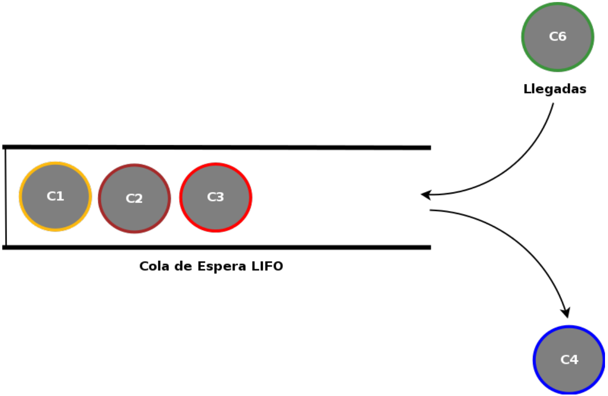
Componentes de un sistema de Colas

Last In First Out



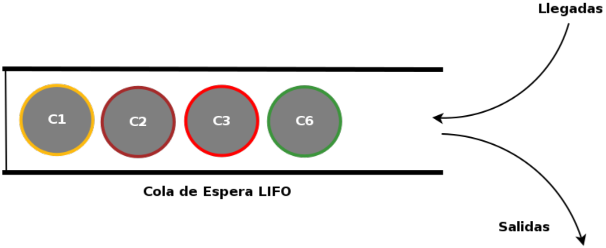
Componentes de un sistema de Colas

Last In First Out

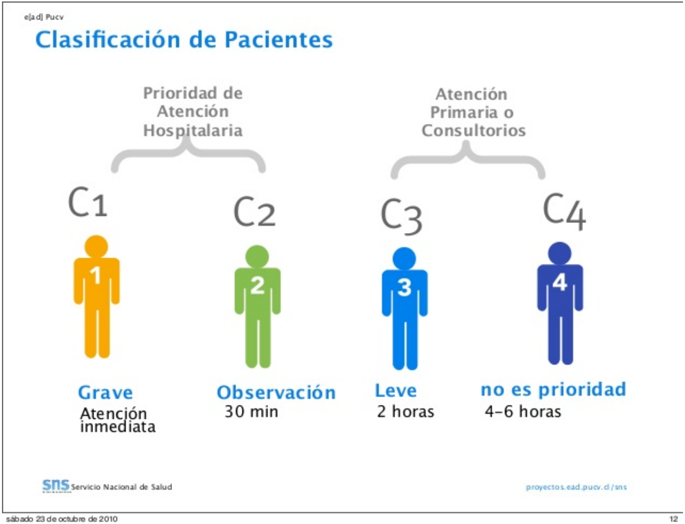


Componentes de un sistema de Colas

Last In First Out



Componentes de un sistema de Colas

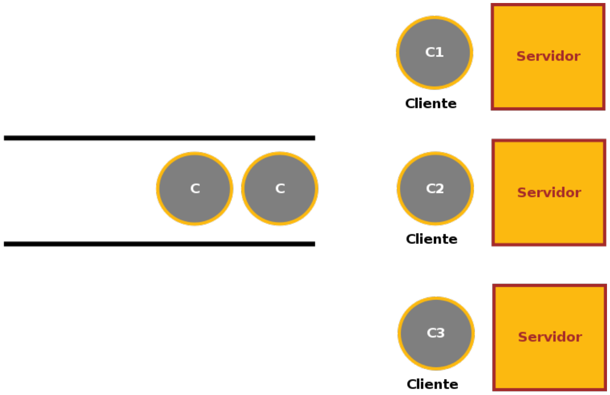


Componentes de un sistema de Colas

Configuración de una Cola:

Componentes de un sistema de Colas

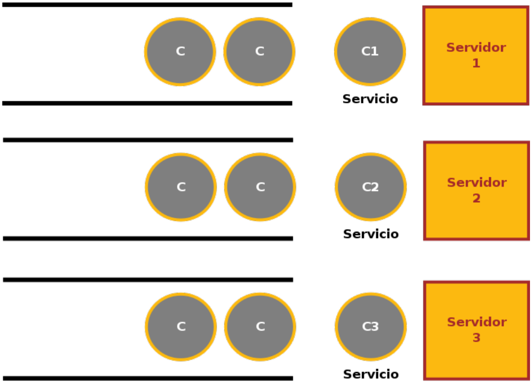
Configuración de una Cola:



1 Cola / Múltiples Servidores

Componentes de un sistema de Colas

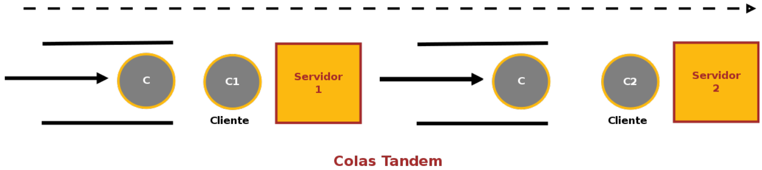
Configuración de una Cola:



Múltiples Colas / Múltiples Servidores

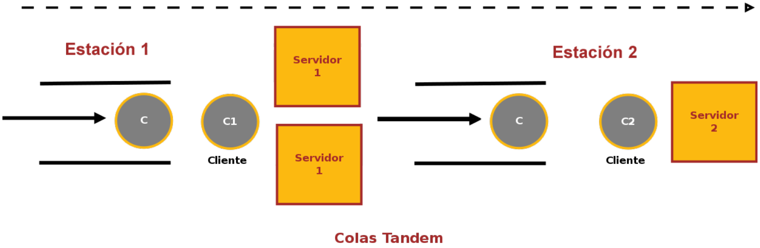
Componentes de un sistema de Colas

Configuración de una Cola:

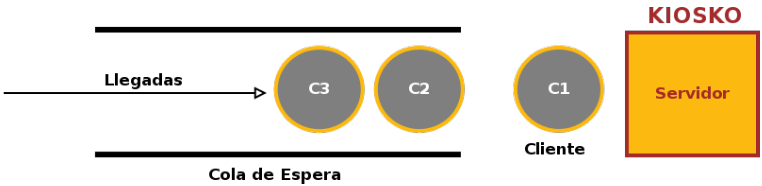


Componentes de un sistema de Colas

Configuración de una Cola:



Componentes de un sistema de Colas



- Llegadas → Clientes llegan al sistema bajo una *tasa de llegada*
- Espera en Cola → Los clientes esperan a ser atendidos en una (o más) cola(s)
- **Servicio** → Clientes son atendidos y dejan el sistema

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Servicio

- Se refiere al tiempo que demora en atender a una persona
- Debido a que estos tiempos varían constantemente se utilizan distribuciones de probabilidad
- Se puede utilizar cualquier distribución, pero por "simpleza" utilizaremos la Distribución Exponencial donde:

$$f(X) = \mu \exp^{-\mu X} \tag{2}$$

  es la Función de Densidad, μ es la cantidad promedio de clientes que pueden ser atendidos por período de tiempo (ej. μ clientes por hora)
- Por otro lado, $\frac{1}{\mu}$ es el tiempo promedio que demora en atender a un cliente

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Servicio $\sim$ Exponencial

Usando esta distribución, podemos calcular la probabilidad de que el tiempo de servicio X sea menor que t:

$$P(X \leq t) = 1 - \exp^{-\mu t} \tag{3}$$

Componentes de un sistema de Colas

Proceso de Servicio $\sim$ Exponencial

Usando esta distribución, podemos calcular la probabilidad de que el tiempo de servicio X sea menor que t:

$$P(X \leq t) = 1 - \exp^{-\mu t} \quad (3)$$

Nota: t y μ deben estar en las mismas unidades

Componentes de un sistema de Colas

Doctor Simi - cont.

Juan estima que se demora en promedio 4 minutos en atender a un cliente en la farmacia del Doctor Simi. Además cree que los tiempos de servicio siguen una distribución Exponencial. Juan debe realizar un trámite en el centro, por lo que quiere atender a sus clientes más rápido para poder ir. Juan necesita saber la probabilidad de que demore menos de 3 minutos en atender al próximo cliente.

Investigación de Operaciones
Teoría de Colas

Nicolás Rojas Morales
nicolas.rojasm@usm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Componentes de un sistema de Colas

Propiedad de la distribución Exponencial:

- Al observar el tiempo que demora en atender una persona, solo podemos saber que distribución de probabilidad describe el servicio

Componentes de un sistema de Colas

Propiedad de la distribución Exponencial:

- Al observar el tiempo que demora en atender una persona, solo podemos saber que distribución de probabilidad describe el servicio

Componentes de un sistema de Colas

Propiedad de la distribución Exponencial:

- Al observar el tiempo que demora en atender una persona, solo podemos saber que distribución de probabilidad describe el servicio

Componentes de un sistema de Colas

Propiedad de la distribución Exponencial:

- Al observar el tiempo que demora en atender una persona, solo podemos saber que distribución de probabilidad describe el servicio

- La distribución Exponencial no tiene memoria
- La probabilidad de que Juan demore menos de 3 minutos es la misma

Componentes de un sistema de Colas

Resumen

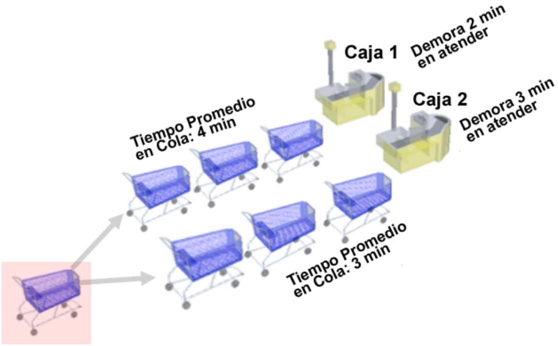
Llegadas	
Tasa de Llegadas	λ
Prob. de k llegadas en t horas	$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k * \exp^{-\lambda t}}{k!}$
Tiempo promedio entre llegadas	$\frac{1}{\lambda}$
Prob. de que ocurra una llegada en t horas	$P(X \leq t) = 1 - \exp^{-\lambda t}$
Prob. de que no ocurran llegadas en las próx. t horas	$\exp^{-\lambda t}$

Servicio	
Tasa de Servicio	μ
Prob. de servir a k personas en t horas	$P(X = k) = \frac{(\mu t)^k * \exp^{-\mu t}}{k!}$
Tiempo promedio entre servicios	$\frac{1}{\mu}$
Prob. de que el servicio se complete en t horas	$P(X \leq t) = 1 - \exp^{-\mu t}$
Prob. que el servicio se complete en más de t horas	$\exp^{-\mu t}$

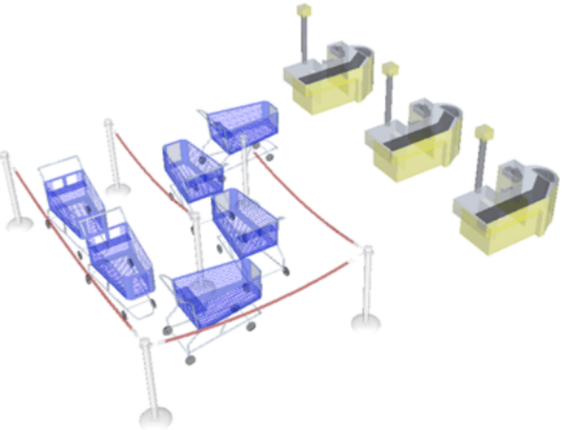
Tiempo en el Sistema $\sim$ Exponencial$(\mu - \lambda)$

Medidas de Desempeño

Medidas de Desempeño



Medidas de Desempeño



Medidas de Desempeño

Estado Estacionario

- Llegan λ clientes al sistema por unidad de tiempo
- Se atienden μ clientes por unidad de tiempo
- La probabilidad de que hayan n clientes en el sistema se mantienen constantes en el tiempo

Medidas de Desempeño

Estado Estacionario

Existen ciertas condiciones para estar en Estado Estacionario:

- 1 Servidor

$$\lambda < \mu \tag{4}$$

- k Servidores (con diferente tasa de servicio)

$$\lambda < \mu_1 + \cdots + \mu_k \tag{5}$$

- k Servidores (con igual tasa de servicio)

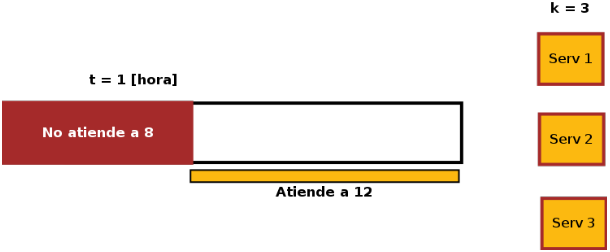
$$\lambda < k * \mu \tag{6}$$

Medidas de Desempeño

Si $\lambda = 20[cl/hora]$ y $\mu = 4[cl/hora]$

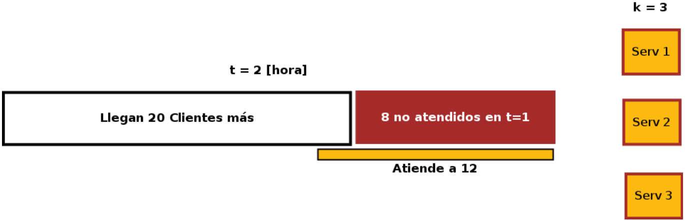
Medidas de Desempeño

Si $\lambda = 20[cl/hora]$ y $\mu = 4[cl/hora]$



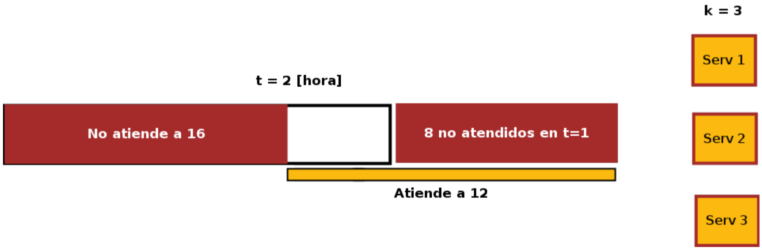
Medidas de Desempeño

Si $\lambda = 20[cl/hora]$ y $\mu = 4[cl/hora]$



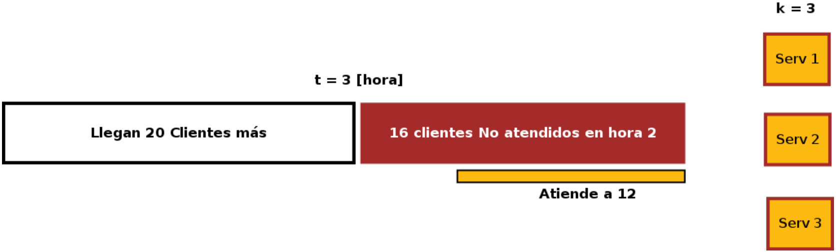
Medidas de Desempeño

Si $\lambda = 20[cl/hora]$ y $\mu = 4[cl/hora]$



Medidas de Desempeño

Si $\lambda = 20[cl/hora]$ y $\mu = 4[cl/hora]$



Medidas de Desempeño

Notación

Llegadas / Servicio/ #Servidores / Tamaño Cola / Tamaño Población

Las llegadas / servicio pueden ser:

- Markoviano (M): Llegadas - Poisson(λ) / Servicio - Exponencial(μ)
- Determinista (D): Llegadas - Constante (λ) / Servicio - Constante (μ)
- General (G): Llegadas y Servicio con alguna distribución de probabilidad con media y varianza conocida

Medidas de Desempeño

Notación

Llegadas / Servicio/ #Servidores / Tamaño Cola / Tamaño Población

Las llegadas / servicio pueden ser:

- Markoviano (M): Llegadas - Poisson(λ) / Servicio - Exponencial(μ)
- Determinista (D): Llegadas - Constante (λ) / Servicio - Constante (μ)
- General (G): Llegadas y Servicio con alguna distribución de probabilidad con media y varianza conocida

Ejemplo: G/D/5

Medidas de Desempeño

Las medidas de desempeño que estudiaremos serán:

- P_0: Probabilidad de que no hayan clientes en el sistema
- P_n: Probabilidad de que hayan n clientes en el sistema
- L_S: Cantidad promedio de personas en el sistema
- L_q: Cantidad promedio de personas en la cola
- W_S: Tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema
- W_q: Tiempo promedio que pasa un cliente en la cola
- P_w: Probabilidad de que un cliente deba esperar cuando llegue al servicio
- ρ: Tasa de utilización del servidor

Modelo M/M/1

- Modelo que considera tanto llegadas como servicio Markoviano y con 1 servidor
- Requiere que el sistema esté en Estado Estacionario ($\frac{\lambda}{\mu} < 1$)
- Medidas de desempeño:

$$P_0 = 1 - \rho \tag{7}$$

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \tag{8}$$

$$L_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{9}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{10}$$

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{11}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} \tag{12}$$

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu} \tag{13}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{14}$$

Modelo M/M/1

Existen ciertas relaciones entre las medidas de desempeño

- Debido a que en M/M/1 hay un servidor

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{15}$$

- Como ρ es la tasa de ocupación del servidor o la cantidad promedio de clientes que están siendo atendidos

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{16}$$

Modelo M/M/1

Problema M/M/1

Considere una línea de espera con un solo servidor donde las tasas de llegada y de atención son constantes y están dadas por $\lambda = 4$ clientes/hora y $\mu = 5$ clientes/hora para $n \geq 0$. Determine:

- ¿Cuál es la probabilidad de que al llegar al sistema haya que esperar?
- La probabilidad de tener a lo más 3 personas en el sistema.
- Número esperado de clientes en la fila.
- Tiempo de espera en la fila.
- Número esperado de clientes en el sistema.
- Tiempo de espera en el sistema.
- Porcentaje de utilización del servidor.
- El número esperado de clientes en el servicio.
- El porcentaje de tiempo que el servidor está desocupado

Investigación de Operaciones
Teoría de Colas

Nicolás Rojas Morales
nicolas.rojasm@usm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Modelo M/M/k

- Modelo que considera tanto llegadas como servicio Markoviano y con k servidores
- Requiere que el sistema este en Estado Estacionario ($\frac{\lambda}{k * \mu} \leq 1$)
- Medidas de desempeño:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-2} \frac{(\rho k)^n}{n!}\right] + \frac{(\rho k)^{k-1}}{(k-1)!(1-\rho)}} \tag{17}$$

$$P_n = \frac{(\rho k)^n}{n!} P_0 \text{ para n} \leq \text{k} \tag{18}$$

$$P_n = \frac{\rho^n k^k}{k!} P_0 \text{ para n} > \text{k} \tag{19}$$

Modelo M/M/k

$$L_q = \frac{\rho^{k+1} k^{k-1}}{(k-1)!(1-\rho)^2} P_0 \tag{20}$$

$$L_S = L_q + \rho k \tag{21}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{22}$$

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda} \tag{23}$$

$$P_W = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right) P_0 \tag{24}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu} \tag{25}$$

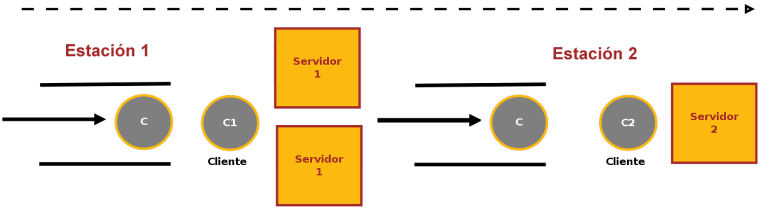
Colas Tandem

Colas Tandem

Colas Tandem

Colas Tandem

Colas Tandem



Colas Tandem

Cliente debe pasar por varios servidores antes de salir del Sistema

- Llegan λ_1 clientes a la estación 1 con una distribución Poisson
- Algunos clientes pasarán a la siguiente estación, otros podrían desertar.
- Si $\lambda_1 < k * \mu$, los clientes (deberían) pasar a la siguiente estación con distribución Poisson

Colas Tandem

PC Factory

PC Factory es una cadena de tiendas de computación ubicada en Chile. Cuando un cliente llega a PC Factory, debe esperar a ser atendido, pedir lo que desea adquirir, pagar en caja y luego retirar en el mesón de entrega. Antonio necesitaba comprar un cargador para su notebook y lo atendieron durante 10 minutos para encontrar el modelo que necesitaba. Luego, demoró 3 minutos en pagar y 2 minutos en retirar su nuevo cargador. PC Factory cuenta con 8 vendedores que reciben los pedidos, 3 cajeros y 2 empleados en el mesón que entregan los productos. PC Factory quiere diseñar un sistema de colas en su sucursal de Viña del Mar y observaron que los días sábado llegan 40 clientes por hora, de los cuales un 75 % realmente compra algo. Además, los tiempos de servicio siguen una distribución Exponencial y los clientes llegan con una distribución Poisson. PC Factory quiere determinar cuánto tiempo pasa una persona que realiza una compra en la tienda