UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Computación Gráfica – Transformaciones 2D

Versión 220311

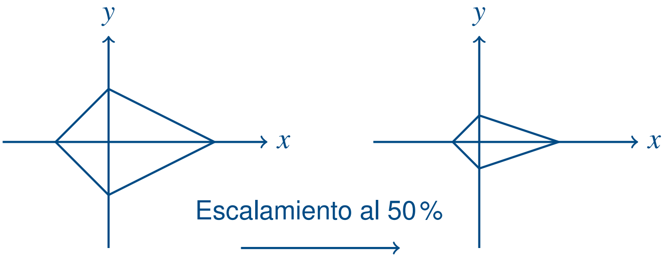
Geometría bidimensional

Muchos problemas de ingeniería requieren modelos bidimensionales (2D) La visualización de estos modelos requiere de:

- Un sistema gráfico.
- La creación de entidades geométricas : Líneas, círculos, rectángulos, etc.
- La aplicación de transformaciones geométricas a estas entidades: Translaciones, Escalamientos, Rotaciones, ...

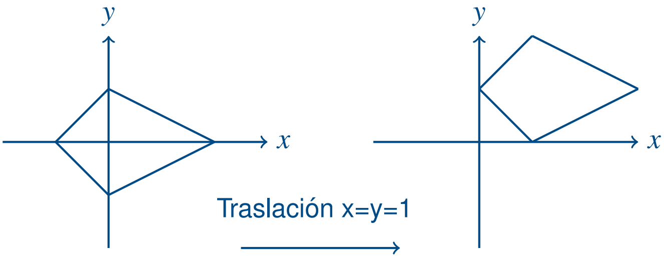
Geometría bidimensional

Las transformaciones geométricas: permiten la creación y vistas de modelos. Son una parte importante de los CAD.



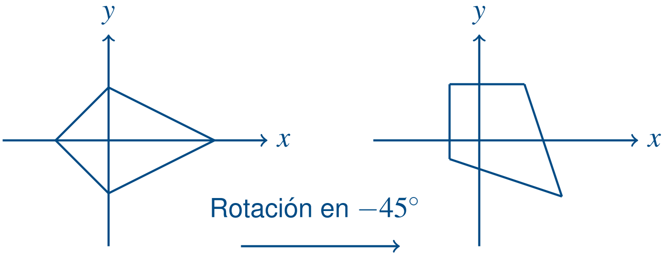
Geometría bidimensional

Las transformaciones geométricas: permiten la creación y vistas de modelos. Son una parte importante de los CAD.



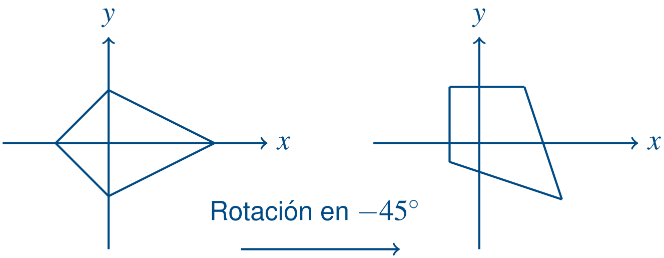
Geometría bidimensional

Las transformaciones geométricas: permiten la creación y vistas de modelos. Son una parte importante de los CAD.



Geometría bidimensional

Las transformaciones geométricas: permiten la creación y vistas de modelos. Son una parte importante de los CAD.



Notar que, dado que la figura no está centrada en el eje x en un comienzo, el resultado que se obtiene tras la rotación tampoco estará "centrado" con respecto al eje y.

Representación

¿Cómo representar un objeto 2D?

Representación

¿Cómo representar un objeto 2D?

- mediante una especificación numérica.
- dentro de un sistema de coordenadas, por ejemplo, el cartesiano x, y.

El sistema de coordenadas permite la aplicación de transformaciones como las mencionadas.

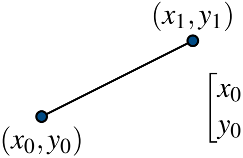
Representación

Punto: elemento básico para la representación de objetos. Se representa vectorialmente en función de la cantidad de dimensiones con que se está trabajando.

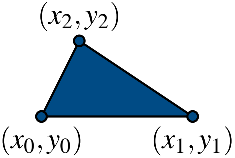
Todo objeto puede ser representado a través de un conjunto de puntos.

Representación

Ejemplo: una línea se representa por sus 2 puntos extremos en una matriz de 2×2, mientras que un triángulo será representado por sus 3 vértices en una matriz de 2×3.



$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{bmatrix}$$

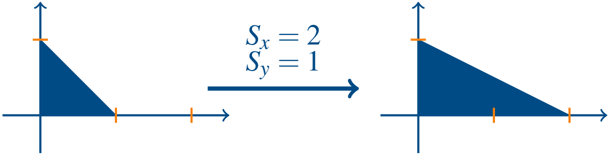


$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

Escalamiento

Factores (S_x, S_y) que permiten incrementar o decrementar el valor de las coordenas (x, y) del objeto:

$$x' = S_x * x$$
$$y' = S_y * y$$



Escalamiento

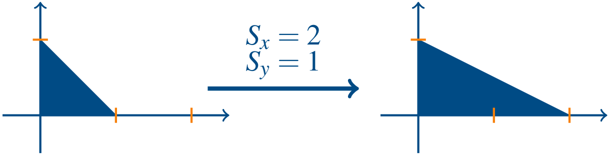
Escalamiento:

$$x' = S_x * x$$
$$y' = S_y * y$$

Representación Matricial

$$P' = S \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Ventaja: la operatoria se simplifica

Ejercicio: se tiene un objeto formado por un conjunto de coordenadas $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. Amplifique en $20\,\%$ las coordenadas de la figura y luego reduzca a $70\,\%$ solo x.

Representación matricial

El objeto queda representado matricialmente como:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Las matrices de escalamiento serían:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación matricial

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definiendo:

$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}84 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{bmatrix}$$

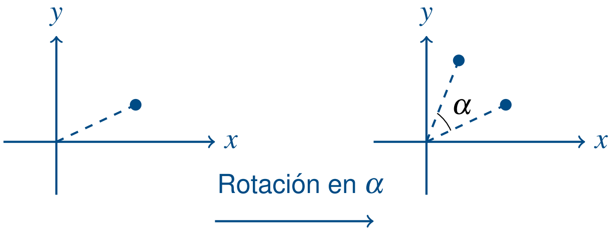
Entonces la transformación final se obtiene mediante:

$$P' = S \cdot P$$

Notar que para este caso se cumple: $S = S_2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2$, pero sabemos que la multiplicación de matrices no es conmutativa, luego el orden en que se multiplican las matrices sí será relevante.

Rotación

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$
$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$



Representación matricial

El objeto P:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Al ser rotado en ángulo α queda representado matricialmente como:

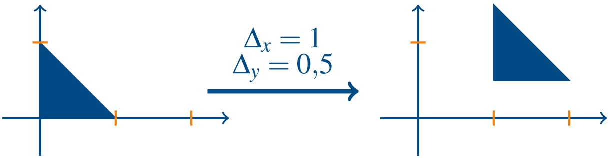
$$P' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Escalamiento:

$$x' = \Delta_x + x$$
$$y' = \Delta_y + y$$

Representación Matricial

$$P' = S \cdot P$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Coordenadas homogéneas

- Punto 2D se representa en el espacio tridimensional
- Todo punto 2D (P) puedes ser representado por cualquier punto a lo largo del rayo 3D (llamado espacio homogéneo)

Coordenadas homogéneas

- Punto 2D se representa en el espacio tridimensional
- Todo punto 2D (P) puedes ser representado por cualquier punto a lo largo del rayo 3D (llamado espacio homogéneo)

Cada punto 2D ahora se escribirá:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix} \qquad x_h = x/h, \qquad y_h = y/h$$

Notar que $h = 0$ no está permitido y para efectos del curso, $h = 1$.

Coordenadas homogéneas

Escalamiento:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

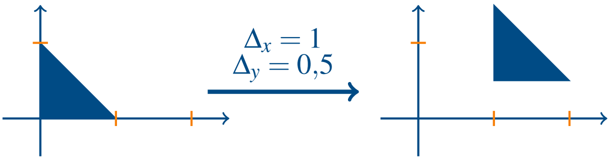
Rotación:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación:

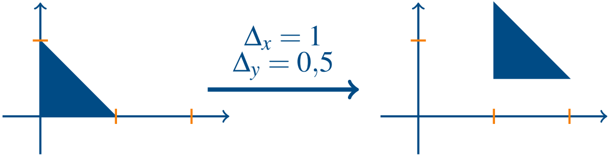
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 1 & \Delta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = T \cdot P =$$

Traslación



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Composición de transformaciones

¿Cómo aplicar más de una transformación a un conjunto de puntos P?

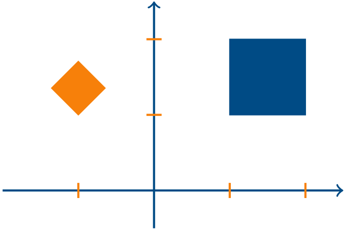
Primera transformación: $P_1 = M_1 \cdot P$

Segunda transformación: $P_2 = M_2 \cdot P1 = M_2 \cdot M_1 \cdot P$

En consecuencia: $P_n = (M_n \cdot M_{n-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1) \cdot P$

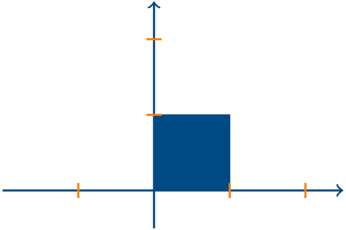
Composición de transformaciones
Ejemplo

Transformar el objeto Azul: cuadrado de lado 1 en el objeto “Amarillo”: cuadrado de lado 0.5 y rotado en 45°.



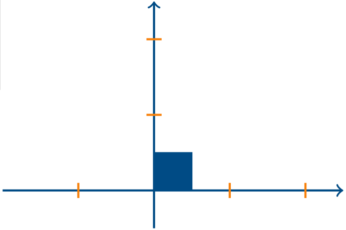
Trasladar al origen

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



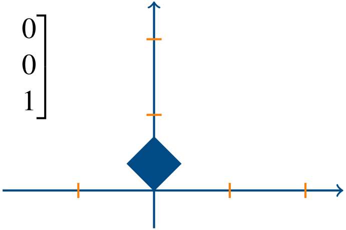
Escalar al $50\,\%$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotar en 45°

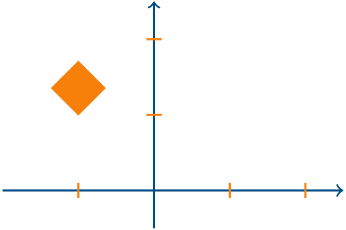
$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Composición de transformaciones
Ejemplo

Trasladar a la posición final

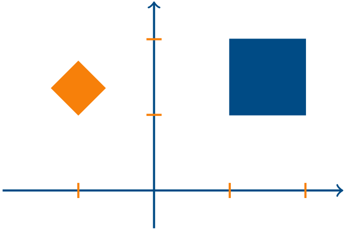
$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Matriz de transformación final:

$$M = T_2 \cdot R_1 \cdot S_1 \cdot T_1$$

Y entonces $P' = M \cdot P$

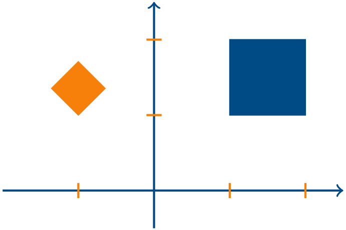


$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación final:

$$M = T_2 \cdot R_1 \cdot S_1 \cdot T_1$$

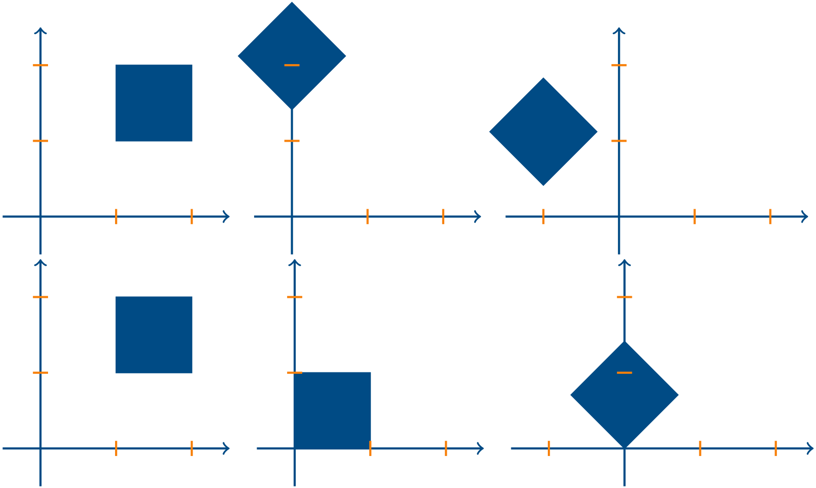
Y entonces $P' = M \cdot P$



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

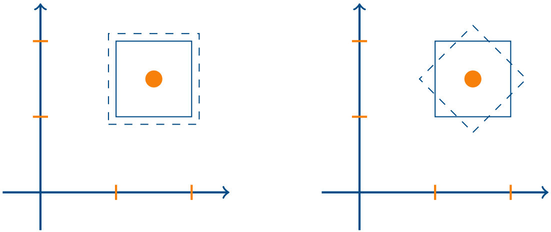
Composición de transformaciones
Orden importa

$$T(-1,-1)Rot(45^\circ) \neq Rot(45^\circ)T(-1,-1)$$



Transformaciones “arbitrarias”

¿Cómo lograr escalamiento o rotación con respecto a un punto arbitrario?

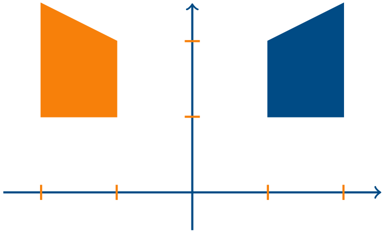


Llevar dicho punto al origen, luego escalar o rotar y trasladar en la cantidad opuesta a la inicial.

Reflexiones

Reflexión con respecto al eje Y:

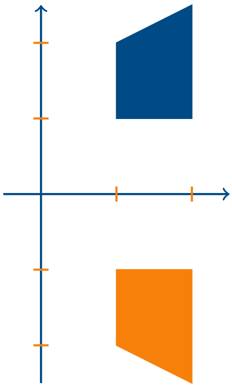
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexiones

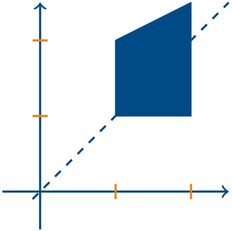
Reflexión con respecto al eje X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexión con respecto a un eje arbitrario:

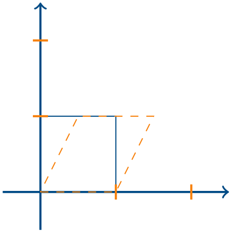
- Rotar el eje en α hasta hacerlo coincidir con un eje.
- Hacer la reflexión con respecto a dicho eje.
- Rotar en $-\alpha$.



Shearing en X

$$x' = x + SH_x \cdot y$$
$$y' = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & SH_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Shearing en Y

$$x' = x$$
$$y' = y + SH_y \cdot x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ SH_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$