Método de Lagrange para Optimización

Paricela Yana Jimena
Butron Maquera Tania Karin
Umiña Machaca Beatriz

June 3, 2025

¿Qué es el Método de Lagrange?

- Técnica matemática para hallar máximos o mínimos de una función.
- Se aplica cuando hay restricciones de igualdad: *optimización con restricciones*.
- Busca puntos donde la función objetivo es extrema bajo una condición.

Definición Formal

Problema:

Maximizar o minimizar $f(x, y, \dots)$
sujeto a $g(x, y, \dots) = 0$

Función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y))$$

Condición de optimalidad:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Pasos del Método de Lagrange

1. Identificar $f(x, y)$ y $g(x, y) = 0$
2. Construir $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
3. Calcular derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

4. Resolver el sistema para hallar x, y, λ
5. Evaluar $f(x, y)$ en los puntos encontrados

Aplicaciones del Método de Lagrange

- **Economía:** maximizar utilidades con presupuestos.
- **Ingeniería:** minimizar costos bajo restricciones técnicas.
- **Física:** se usa en el principio de mínima acción.
- **Machine Learning:** regularización y optimización de funciones.

Ejemplo práctico - Enunciado

Problema: Maximizar la función objetivo:

$$f(x, y) = xy$$

Sujeto a la restricción:

$$x + y = 10$$

Queremos encontrar los valores de x y y que **maximicen el producto** xy sin dejar de cumplir la condición de que $x + y = 10$.

Paso 1: Lagrangiana

Usamos el método de Lagrange para incorporar la restricción a la función objetivo:

Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(10 - x - y)$$

¿Qué significa esto?

- xy es la función que queremos maximizar. - λ es el multiplicador de Lagrange. - $(10 - x - y)$ es la forma reordenada de la restricción.

Así, convertimos un problema con restricción en uno sin restricción.

Paso 2: Derivadas parciales

Derivamos la Lagrangiana con respecto a cada variable:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - x - y = 0$$

¿Qué obtenemos?

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: x, y y λ.

Paso 3: Resolviendo el sistema

Tenemos el sistema:

$$y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda$$

$$x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$$

$$10 - x - y = 0 \Rightarrow x + y = 10$$

Sustituyendo:
Como $x = \lambda$ y $y = \lambda$, entonces:

$$x + y = 2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow x = 5, y = 5$$

Resultado final

Hemos encontrado el punto óptimo:

$$x = 5, \quad y = 5$$

Valor máximo:

$$f(5,5) = 5 \times 5 = 25$$

Interpretación: El producto xy es máximo cuando x y y valen ambos 5, cumpliendo la restricción $x + y = 10$.