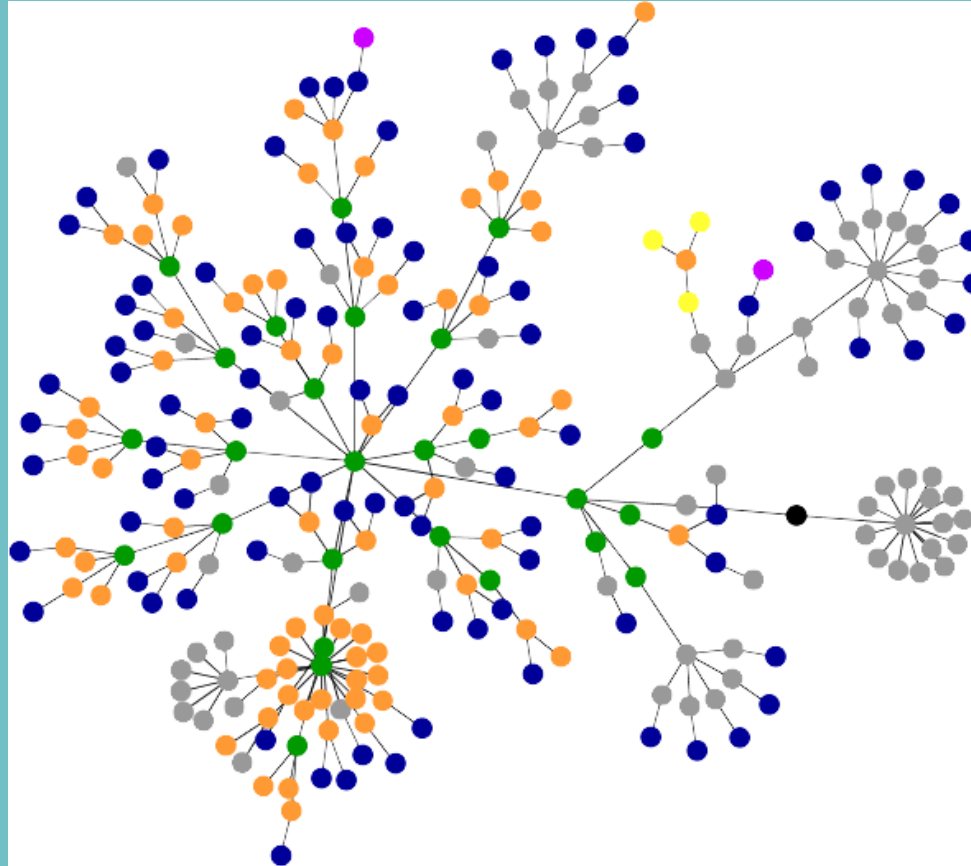


Percursos em Grafos

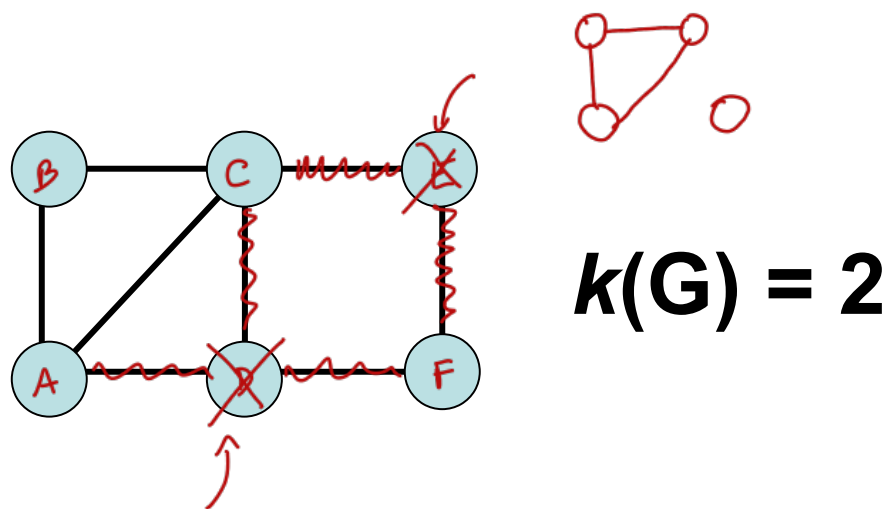


2022.1

Biconectividade

A **conectividade** $k(G)$ de um grafo G é o menor número de vértices que se removidos desconectam o grafo ou resulta no grafo trivial.

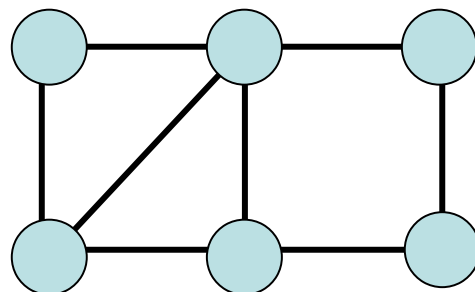
$k(G)$ é, portanto, a conectividade em vértices do grafo G .



Biconectividade

Um grafo **biconexo** é um grafo conexo que **permanece conexo mesmo após a remoção de qualquer vértice**.

Em outras palavras, para todo vértice do grafo, se ele for removido junto com suas arestas, o grafo resultante ainda terá um caminho entre quaisquer dois vértices restantes.



$$k(G) = 2$$

Biconectividade

Articulação

Um vértice v é dito uma articulação se $G - v$ possui mais componentes conexas do que G . É um vértice que, se removido, desconecta G .

Ponte

Uma aresta e é chamada de ponte se $G - e$ possui mais componentes conexas do que G .

Obs. Os vértices com grau maior que 1 que sejam terminais de uma ponte são articulações do grafo.

Biconectividade

Um grafo é dito **k -conexo** se $k(G) \geq k$

OBS1:

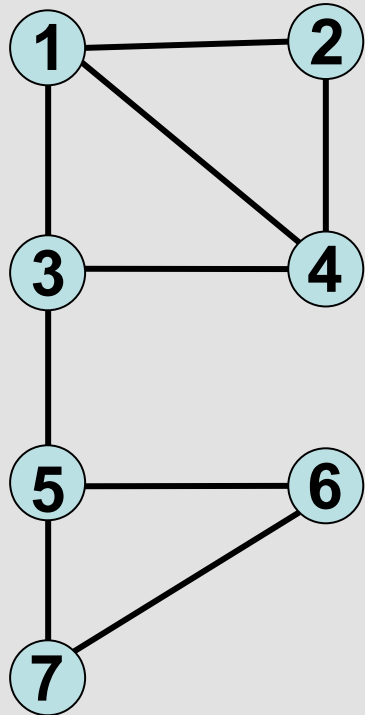
Um grafo conexo tem conectividade maior ou igual a 1.

OBS2:

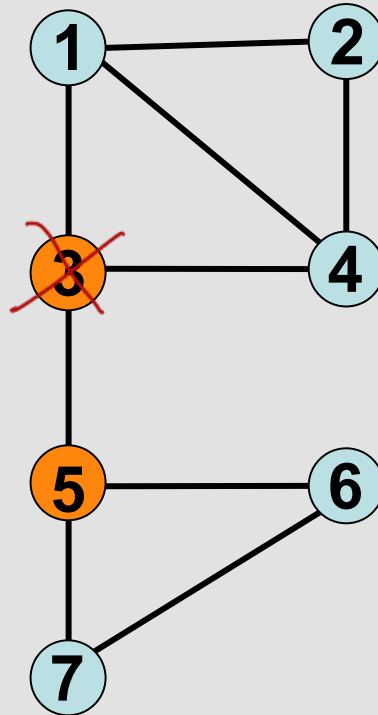
Se um grafo não possui articulações, então ele é 2-conexo (biconexo).

Biconectividade

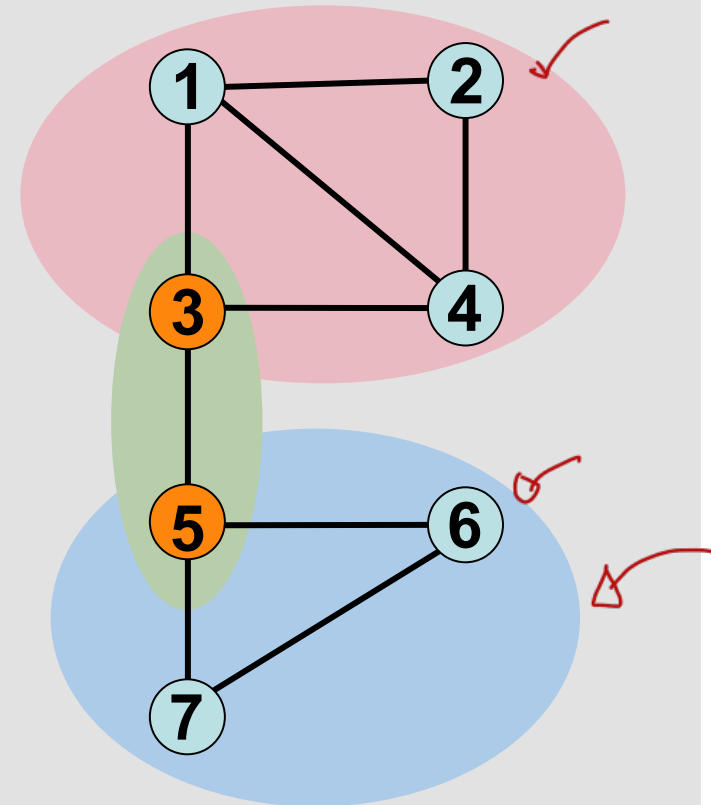
G



Articulação

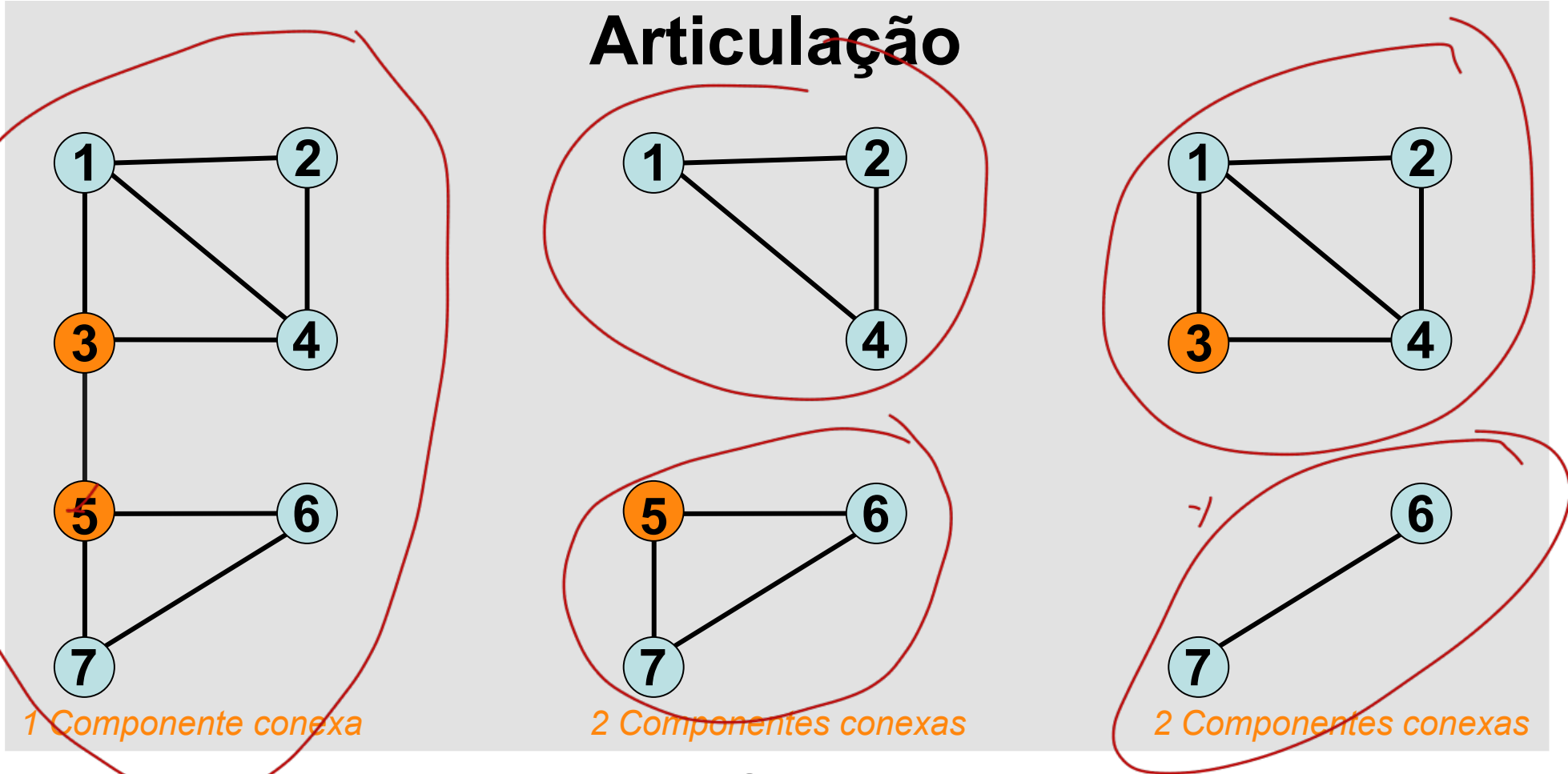


Blocos



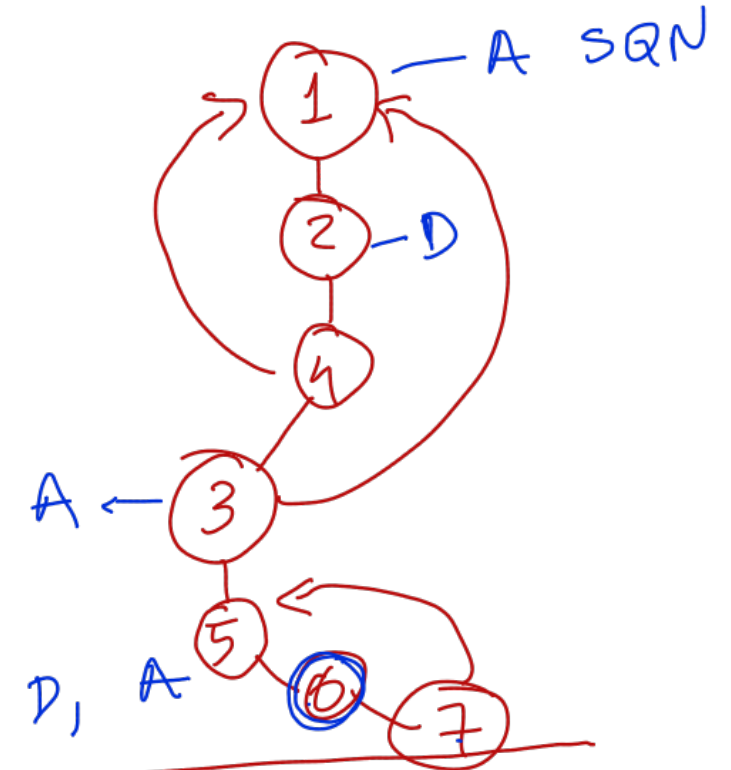
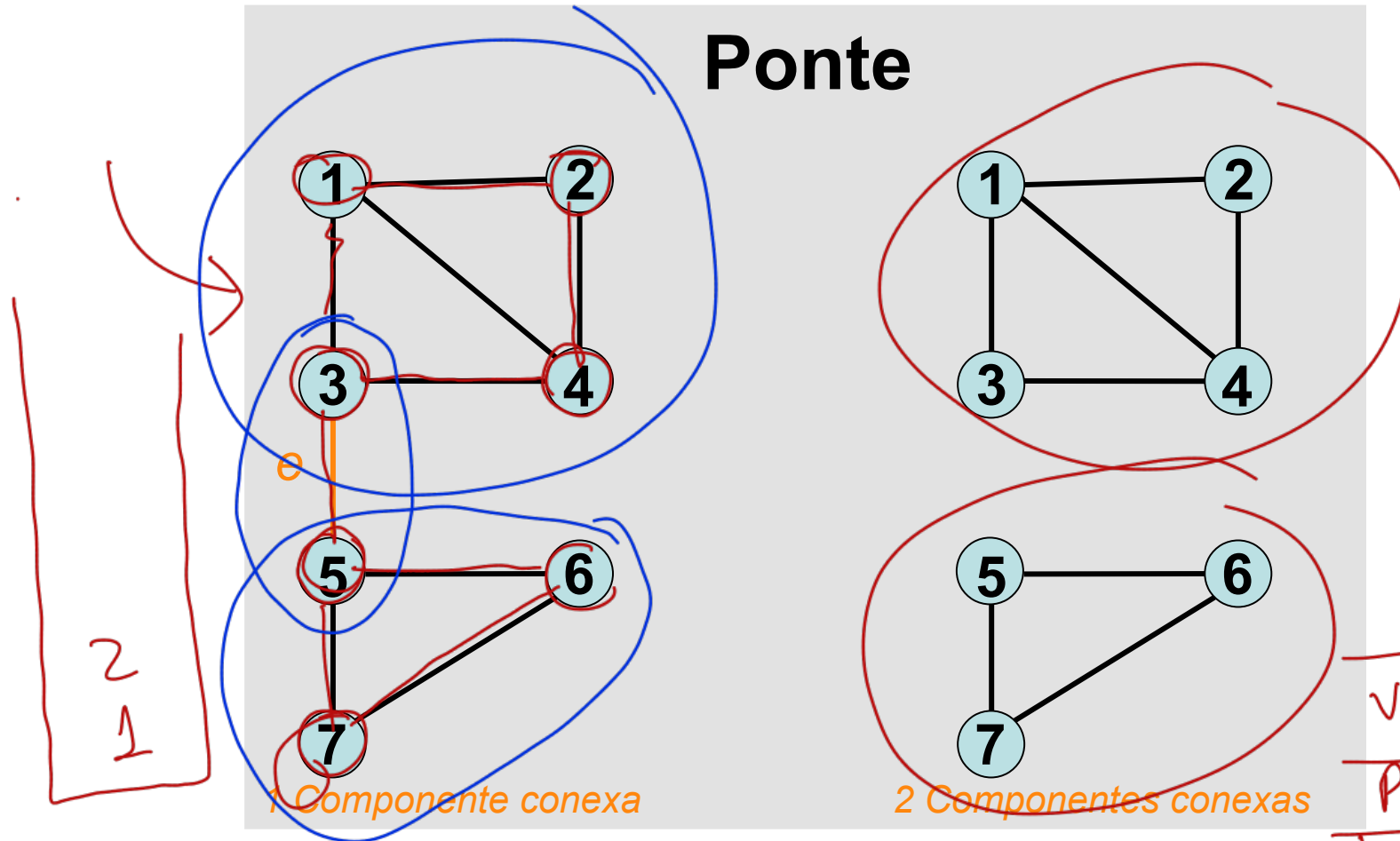
A **conectividade** $k(G)$ de um grafo G é o menor número de vértices que se removidos desconectam o grafo ou resulta no grafo trivial. $k(G)$ é, portanto, a conectividade em vértices do grafo G .

Articulação



Um vértice v é dito uma articulação se $G - v$ possui mais componentes conexas do que G . É um vértice que, se removido, desconecta G . (*nó crítico*)

A **conectividade** $k(G)$ de um grafo G é o menor número de vértices que se removidos desconectam o grafo ou resulta no grafo trivial. $k(G)$ é, portanto, a conectividade em vértices do grafo G .



v	1	2	3	4	5	6	7
P	-	1	4	2	3	5	6
LP	1	1	1	1	5	5	5

Ponte

Uma aresta **e** é chamada de **ponte** se $G - e$ possui mais componentes conexas do que G .
(conexão crítica)

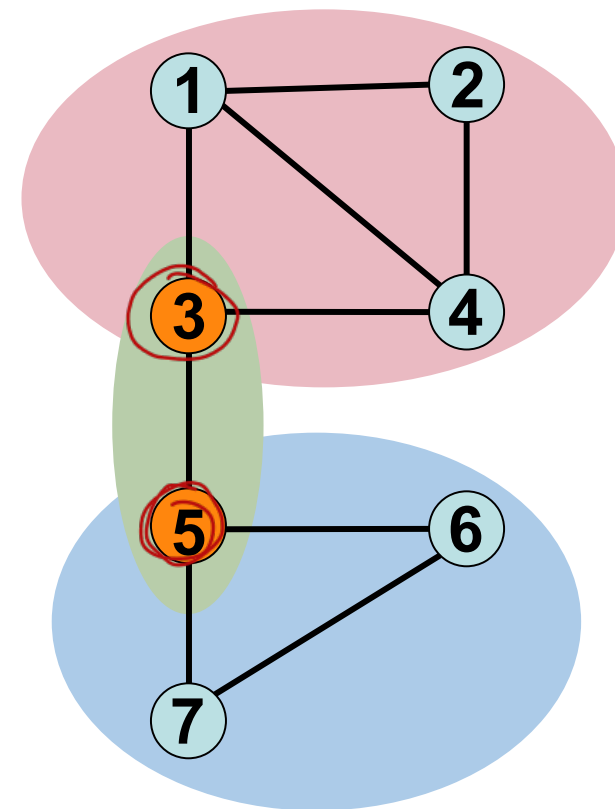
Biconectividade

um grafo **biconexo** pode ser decomposto em componentes biconexos (também chamados de **blocos**), que são subgrafos maximamente biconexos.

Biconectividade

Lema. Considere um grafo G

- (i) Cada aresta pertence a exatamente um bloco do grafo.
- (ii) Um vértice v só pertence a mais de um bloco se v for uma articulação.



Biconectividade

Aplicação do algoritmo de percurso em profundidade para a determinação de blocos

Considere um grafo $G(V, E)$ e uma árvore de profundidade $T(V_T, E_T)$ de G .

Define-se a função **Lowpt**: $v \rightarrow v$.

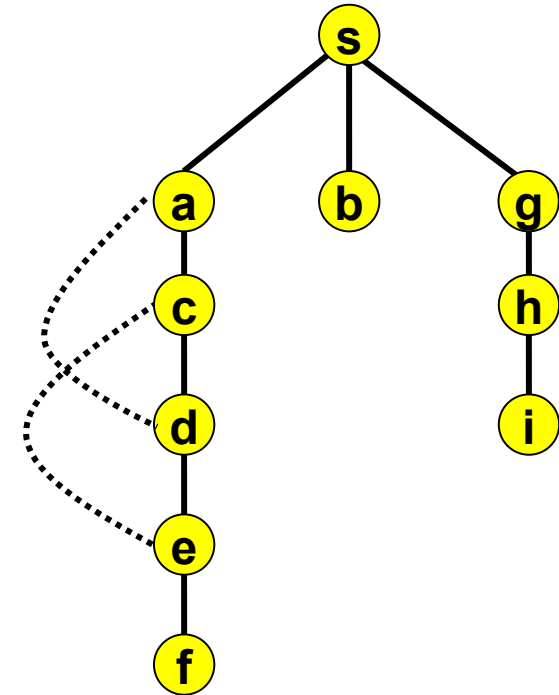
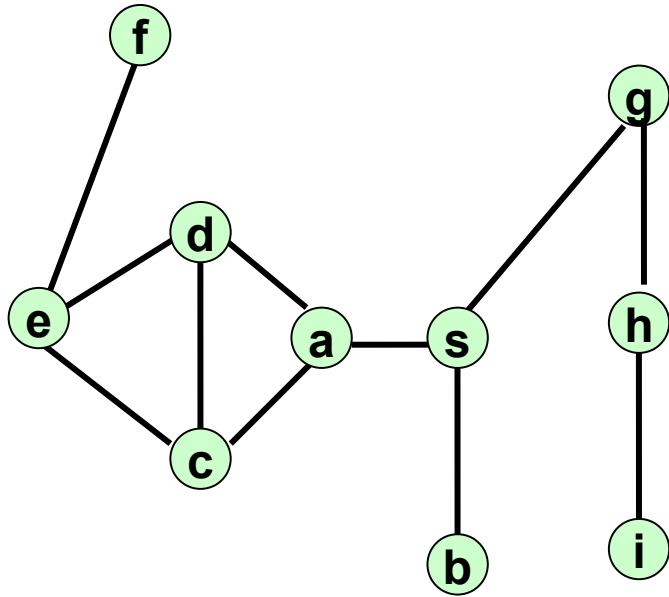
Biconectividade

$$\text{Lowpt}: V \rightarrow V$$

Para cada vértice $v \in V$, $\text{Lowpt}(v)$ é igual ao vértice mais próximo da raiz de T que pode ser alcançado a partir de v , caminhando-se em T para baixo através de zero ou mais arestas na árvore e, em seguida, para cima utilizando no máximo uma aresta de retorno.

Biconectividade

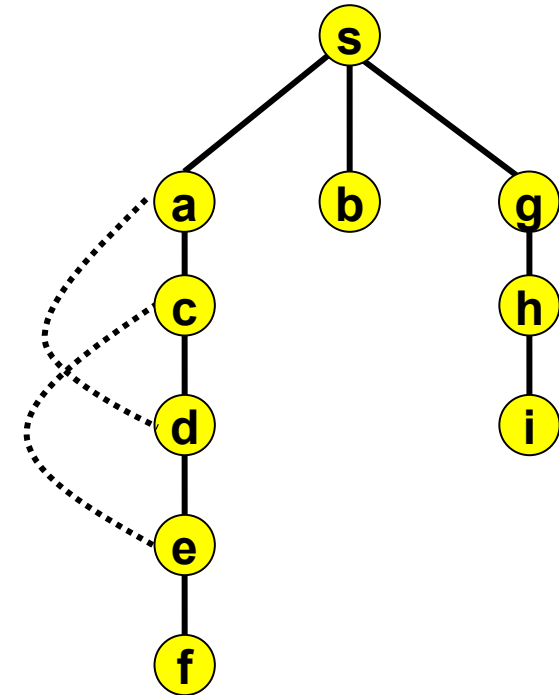
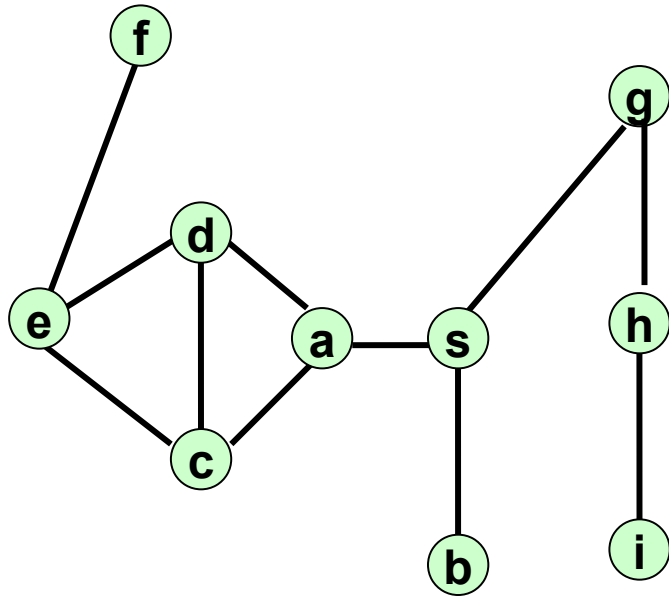
Lowpt: $V \rightarrow V$



v	s	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Lowpt	s	a	b	a	a	c	f	g	h	i

Biconectividade

Lowpt: $V \rightarrow V$



v	s	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Lowpt	s	a	b	a	a	c	f	g	h	i

Biconectividade

Lema. Considere $G(V, E)$ um grafo conexo e T uma árvore de profundidade de G ,

$v \in V$ é uma articulação se e somente se

→ (i) v é raiz de T e possui *mais de um filho*. ←

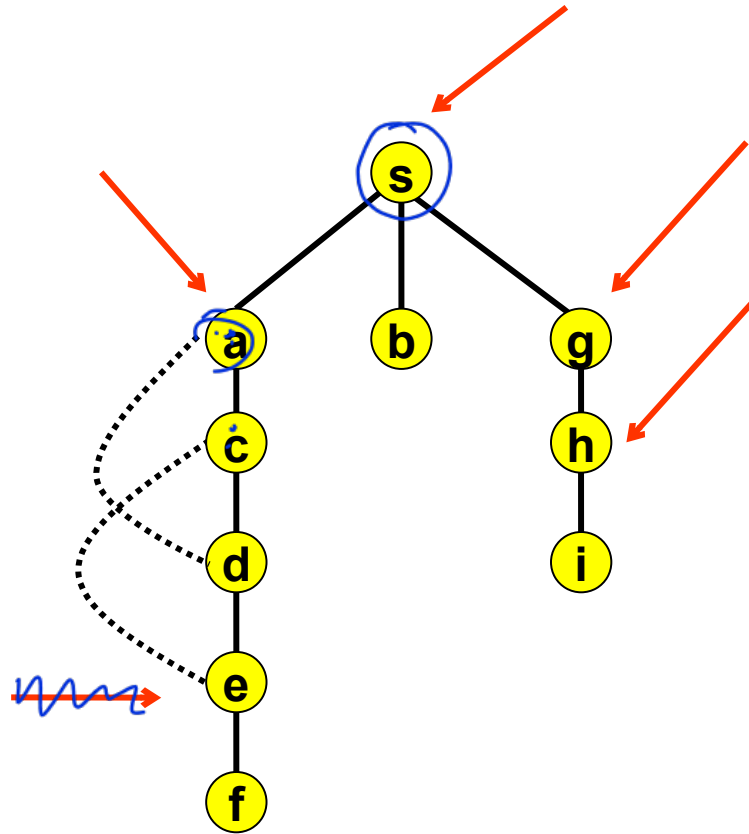
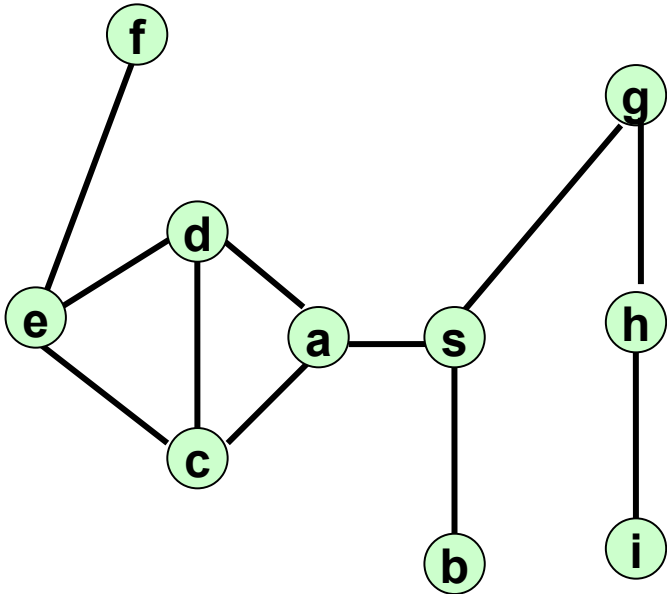
(ii) v não é raiz de T e v possui um filho w tal que
 $\text{Lowpt}(w) = v$ ou w .

PAI
↓

FILHO

}

Articulações



v
Lowpt

s	a	b	c	d	e	f	g	h	i
s	a	b	a	a	c	f	g	h	i

v é raiz de T e possui mais de um filho.

v não é raiz de T e v possui um filho w tal que:

$\text{Lowpt}(w) = v$ ou $\text{Lowpt}(w) = w$.

$\text{lowpt}(c) = a$

Biconectividade

Algoritmo para o cálculo de Lowpt

{ $g(v)$ é o ancestral de v mais alto em T tal que exista (v,w) aresta de retorno. Caso não exista $g(v) = v$ }

Se v é uma folha então

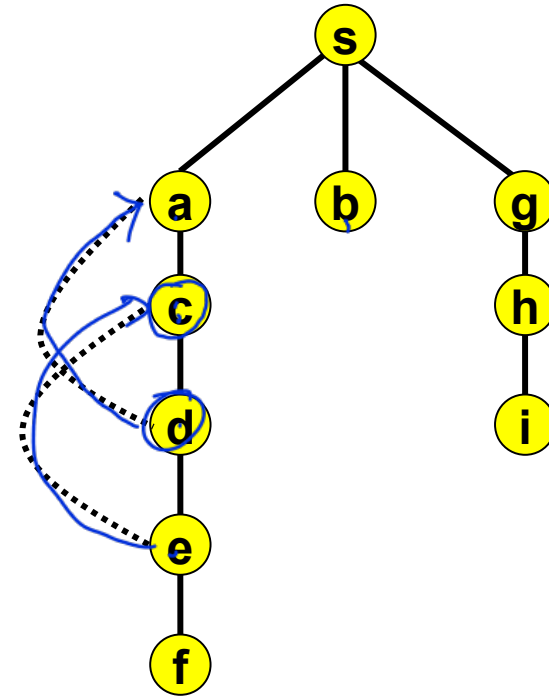
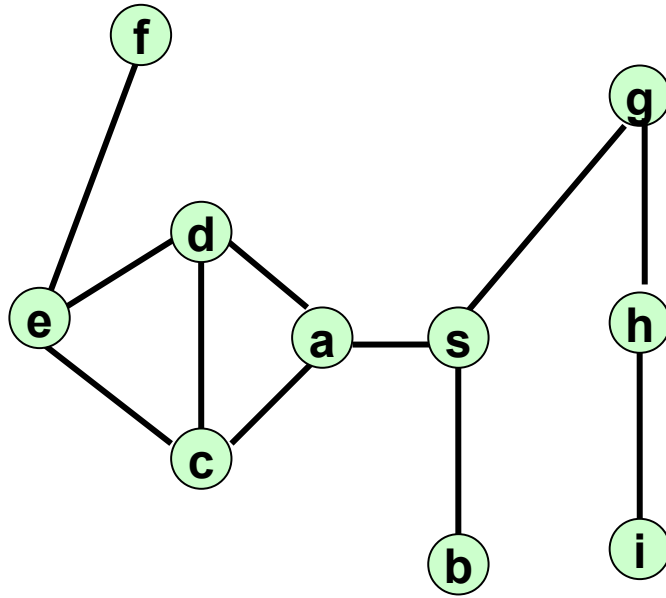
$\text{lowpt}(v) = g(v)$.

Senão

$\text{lowpt}(v) =$ vértice mais próximo à raiz

dentre $g(v)$ e $\text{lowpt}(w)$ para todo filho u de v .

Biconectividade



v	s	a	b	c	d	e	f	g	h	i
g(v)	s	a	b	<u>c</u>	<u>a</u>	<u>c</u>	<u>f</u>	<u>g</u>	<u>h</u>	<u>i</u>
Lowpt(v)	s	a	b	a	a	c	f	g	h	i

Biconectividade

Determinação dos blocos

Demarcador – vértice v com $\text{lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .


$\{v \text{ é demarcador de } w \text{ em } T\}$ ←

Articulação – Vértice pai de um ou mais demarcadores.

Obs. Os filhos da raiz são todos demarcadores. ←

Biconectividade

Lema.

Considere $G(V,E)$ um grafo, T uma árvore de profundidade de G e $v, w \in V$, w **demarcador** de v , tal que a subárvore T_w de T com raiz w não possui articulações. 
Então, os vértices de T_w juntamente com v induzem um **componente biconexo** de G .

Prova. Não existem vértices em T_w que sejam articulações.

Biconectividade

Determinação dos blocos

Aplicar o lema anterior repetidamente até que não haja mais demarcadores.

Obs. Se uma articulação v tem somente um demarcador w , ao se retirar T_w , v deixa de ser considerado articulação.

Biconectividade

Determinação dos blocos

Passo Inicial.

Identificar **demarcadores e articulações de G** , através de uma busca em profundidade que produz a árvore T .

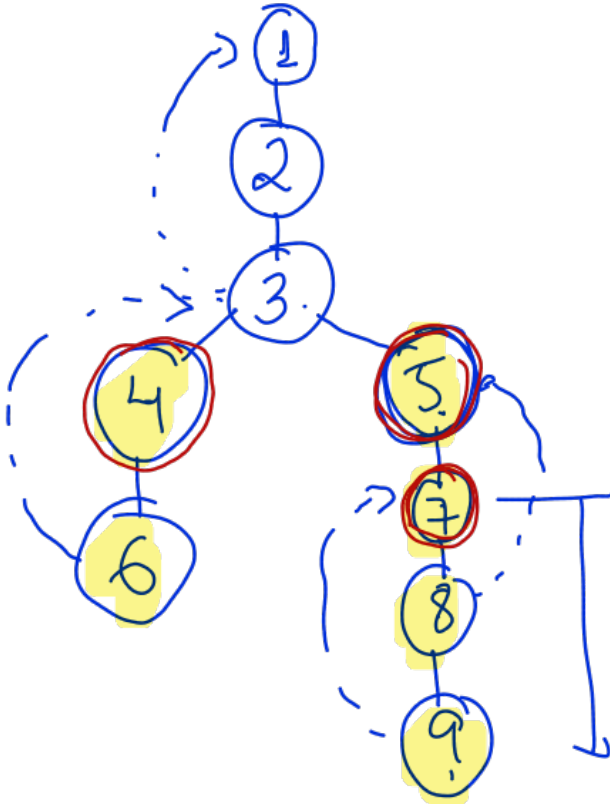
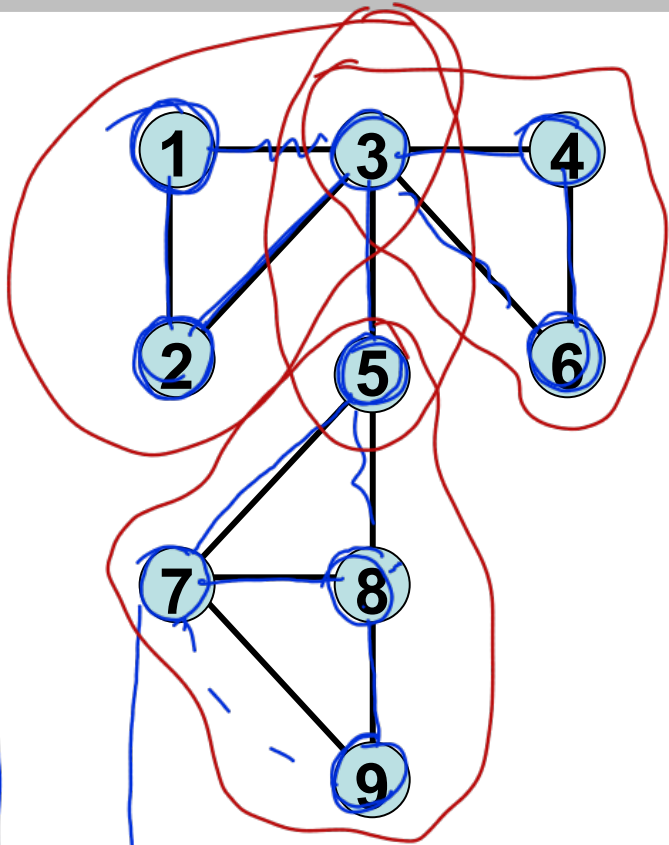
Passo Geral.

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w de T , com raiz w , não possui articulações de G .

$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

Biconectividade

$D = \{4, 7, 5\}$
 $A = \{3, 5, 3\}$



$L(2) = 1$

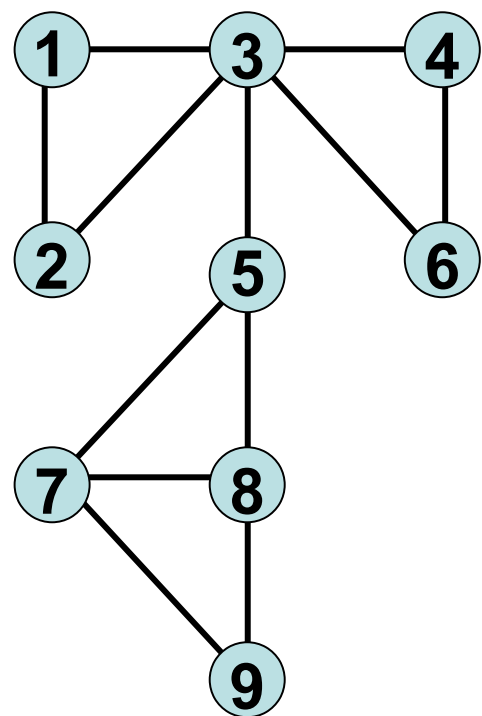
→ **Demarcador**
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
 $\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	—	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)	1	1	1	3	5	3	5	5	7

Biconectividade



1

Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

Passo Geral

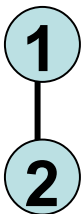
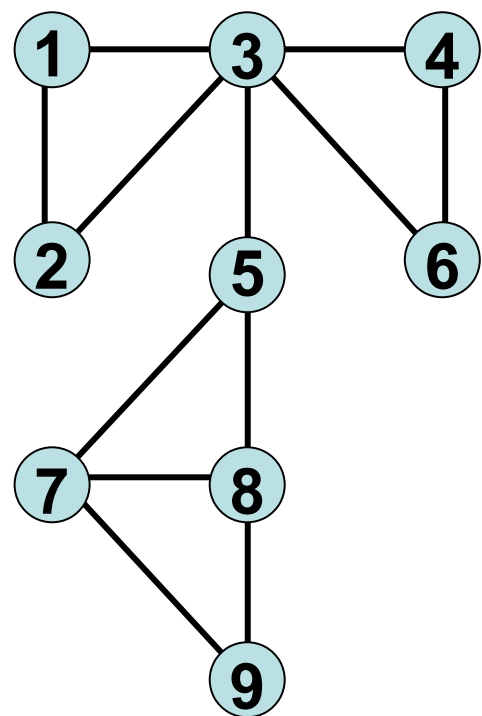
Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-								
Lowpt(v)									

1

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

Passo Geral

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1							
Lowpt(v)									

2



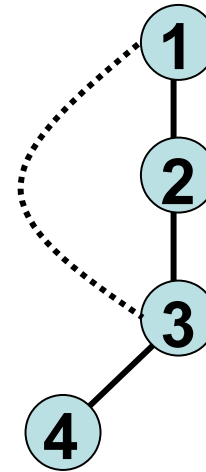
Vértice \mathbf{v} com
 $\text{Lowpt}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ou \mathbf{w} ,
 sendo \mathbf{w} pai de \mathbf{v} em \mathbf{T} .

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

Escolher demarcador \mathbf{w}
tal que a subárvore $\mathbf{T}_{\mathbf{w}}$
não possui articulações
de \mathbf{G} .

{v com $T_{\mathbf{w}}$ induz um bloco de G }

[illegible]

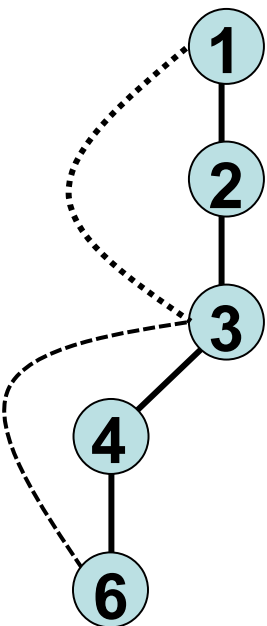
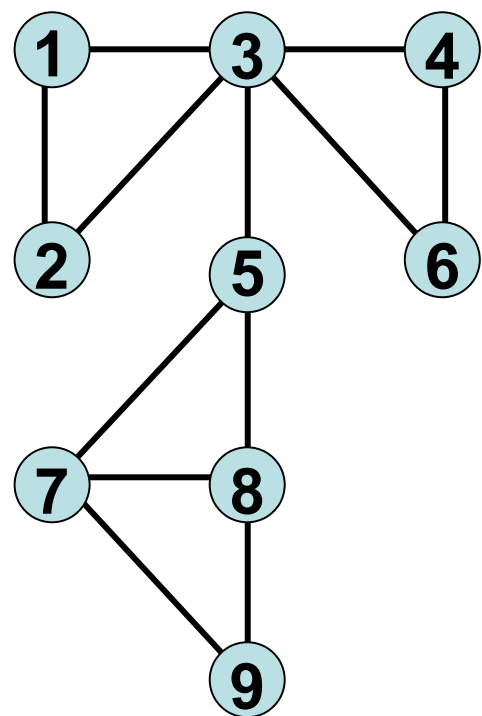


$\text{Lowpt}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ou \mathbf{w} ,
sendo \mathbf{w} pai de \mathbf{v} em \mathbf{T} .

Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

 $\{v \text{ com } Tw \text{ induz um bloco de } G\}$ [illegible]

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

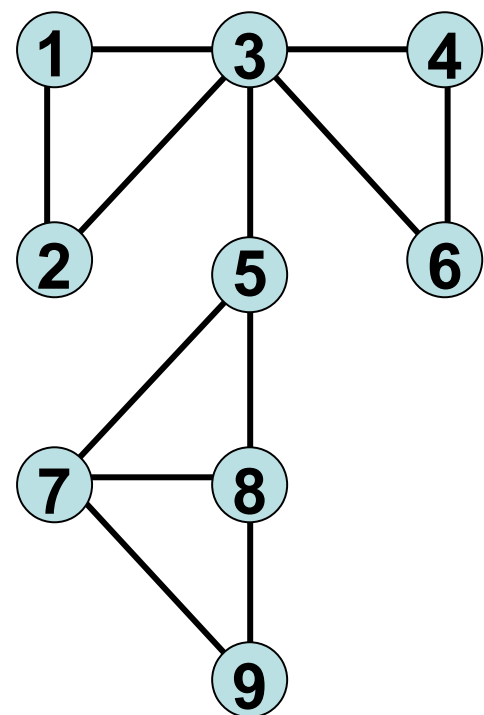
Passo Geral

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

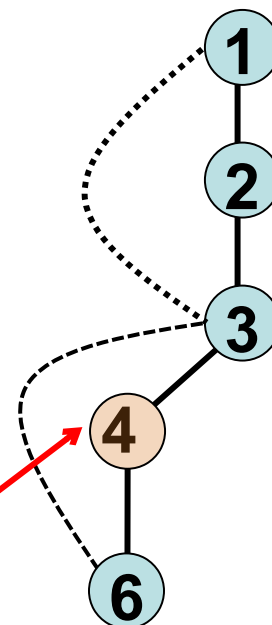
$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3		4			
Lowpt(v)						3			

Biconectividade



Lowpt(4) = 3
Demarcador



Demarcador

Vértice v com

$\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

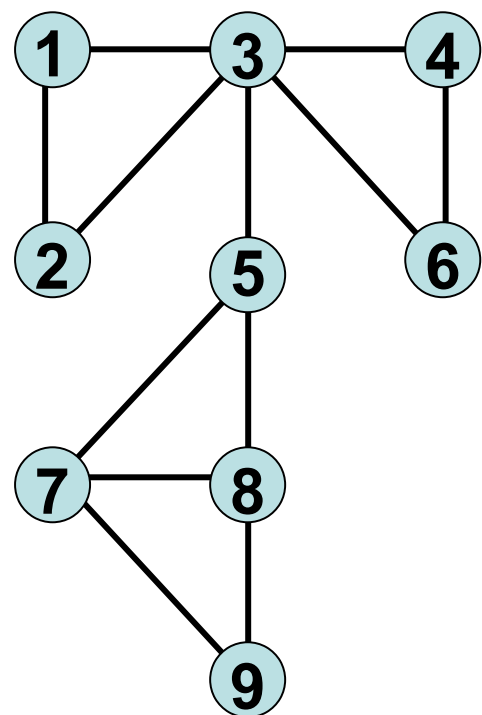
Passo Geral

Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .

{v com T_w induz um bloco de G }

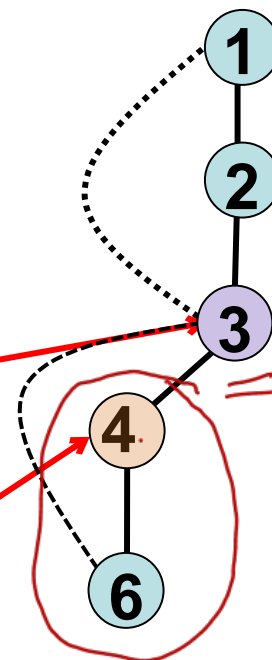
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3		4			
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



articulação

Lowpt(4) = 3
Demarcador



Demarcador

Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

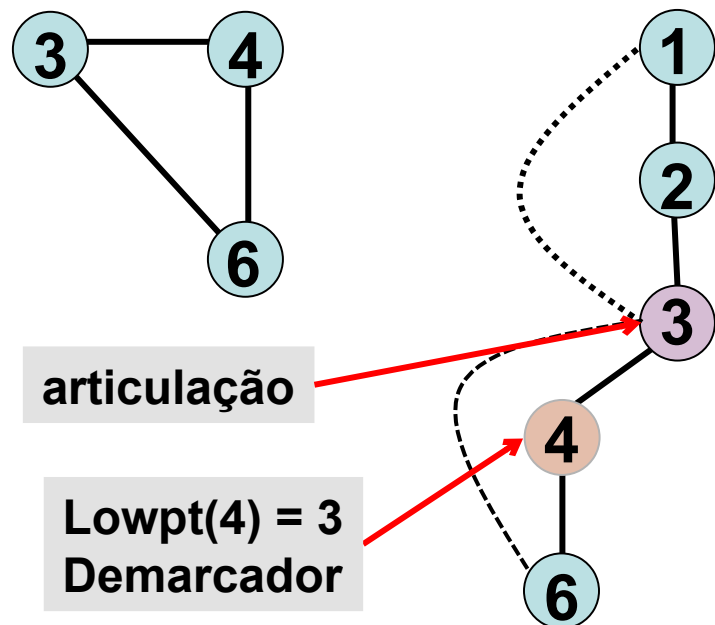
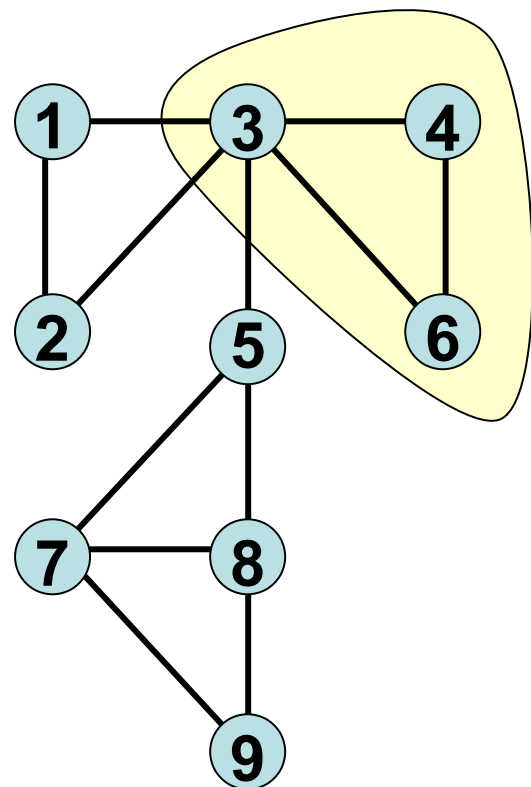
Passo Geral

Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .

{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3		4			
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

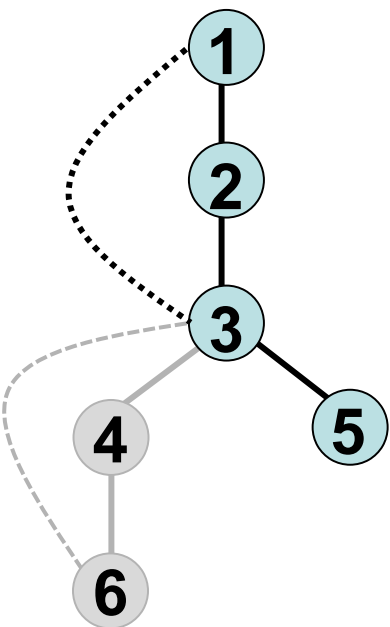
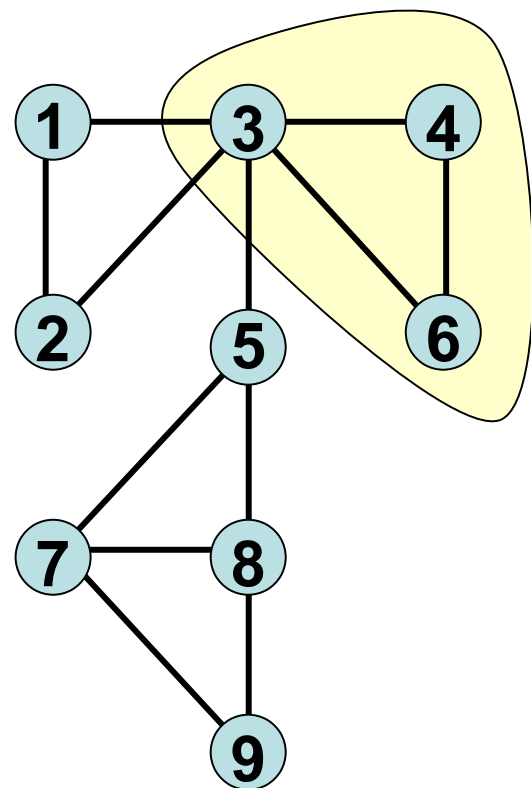
Passo Geral

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3		4			
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

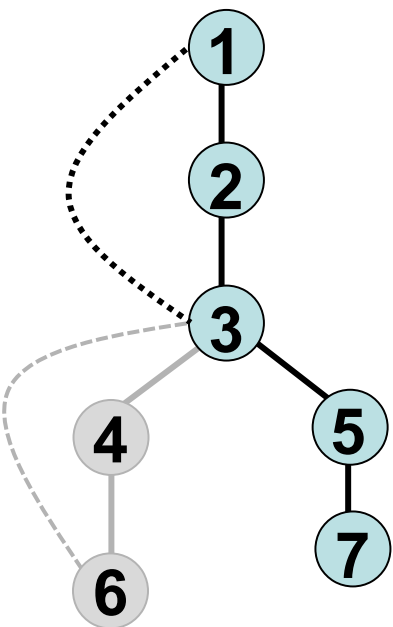
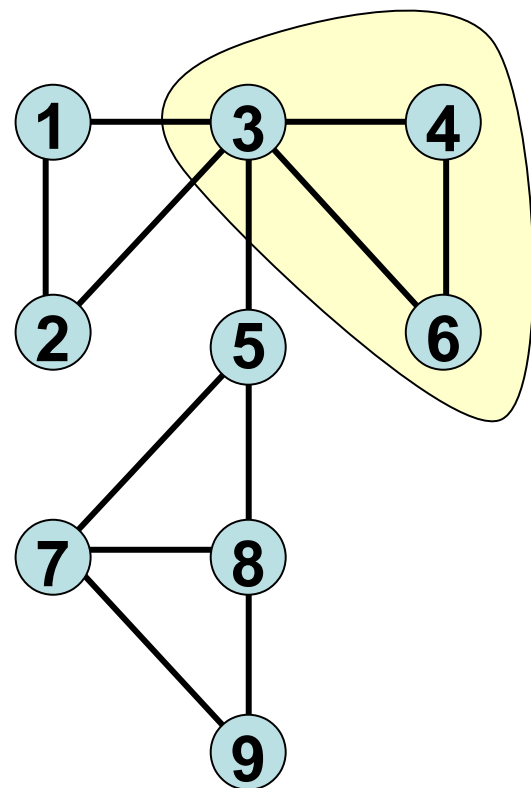
Passo Geral

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4			
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w , sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou mais demarcadores.

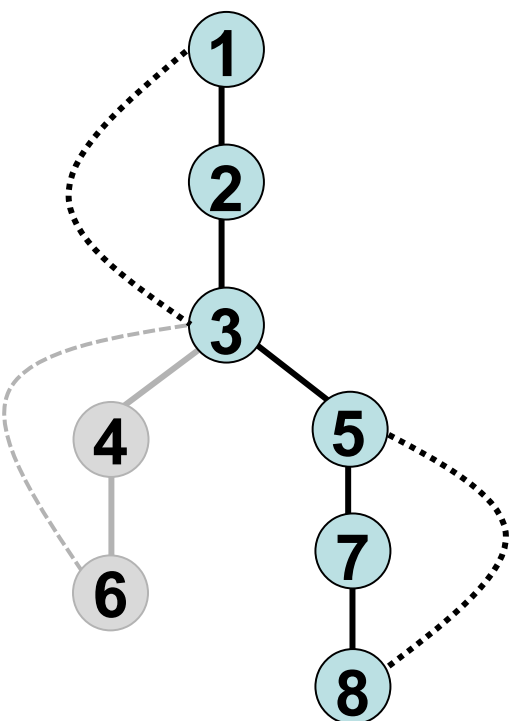
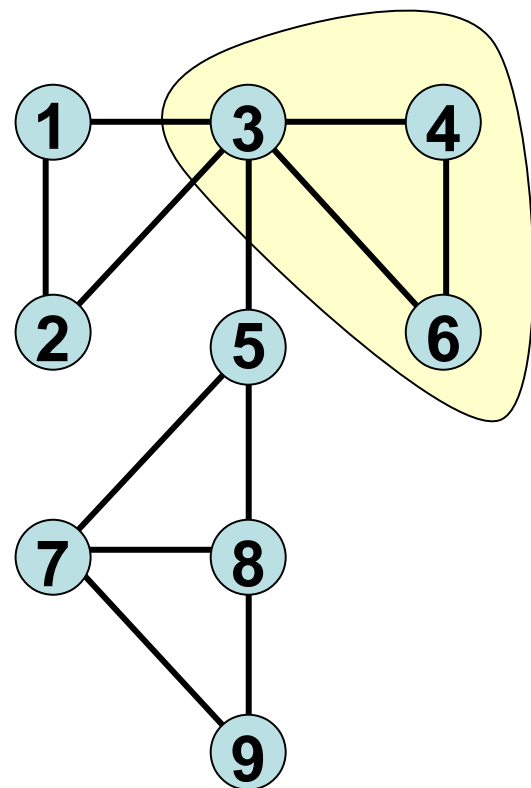
Passo Geral

Escolher demarcador w tal que a subárvore T_w não possui articulações de G .

$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5		
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



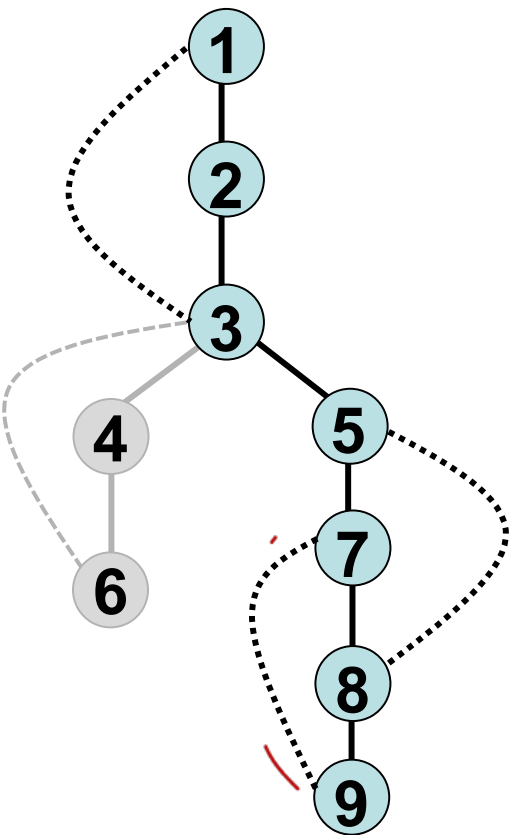
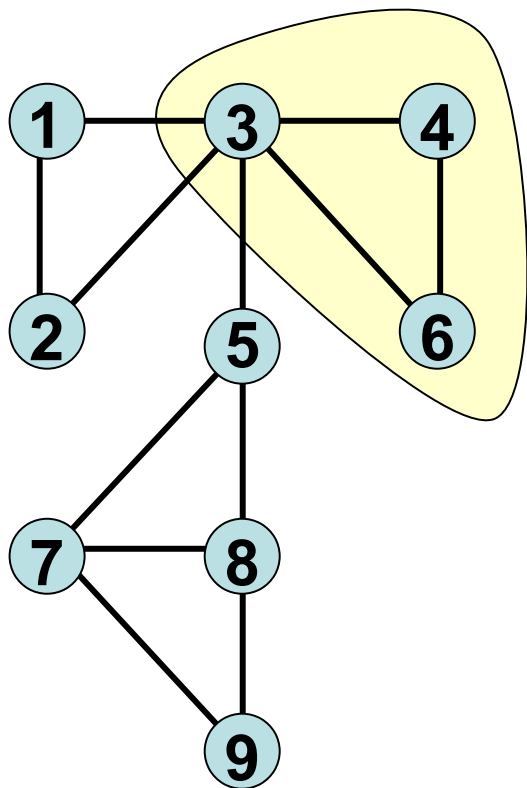
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
 $\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	
Lowpt(v)				3		3			

Biconectividade



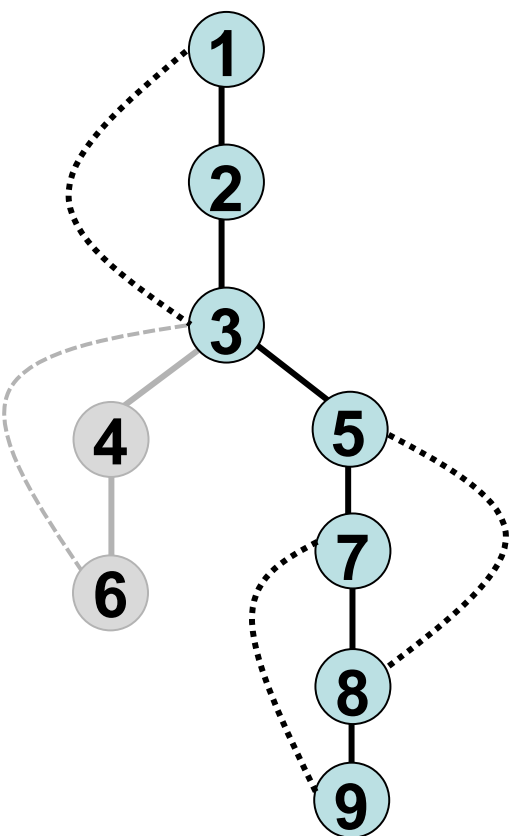
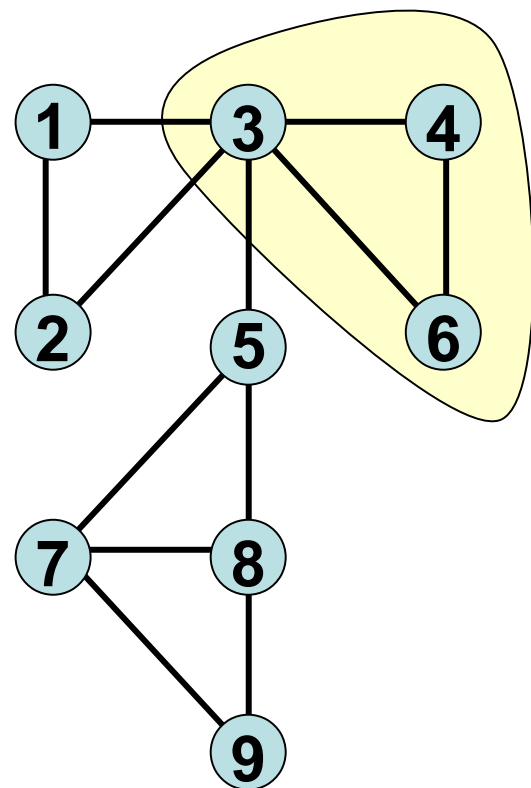
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3		3			7

Biconectividade



Demarcador

Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

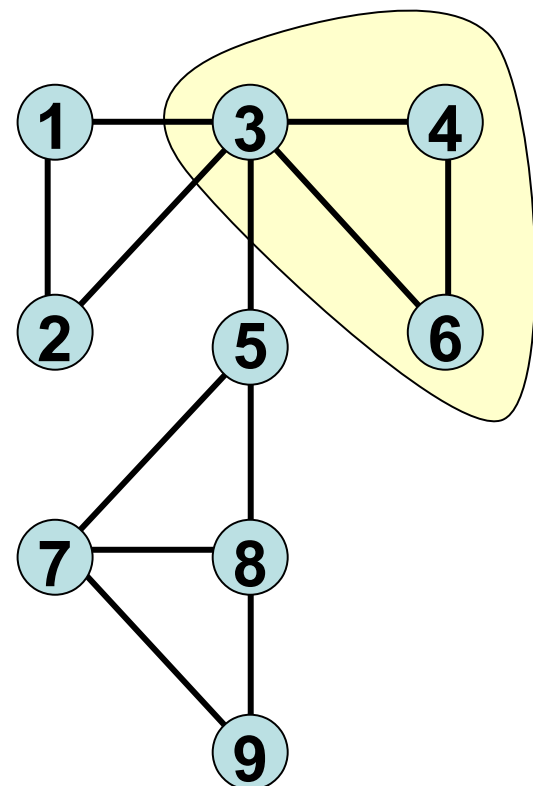
Passo Geral

Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .

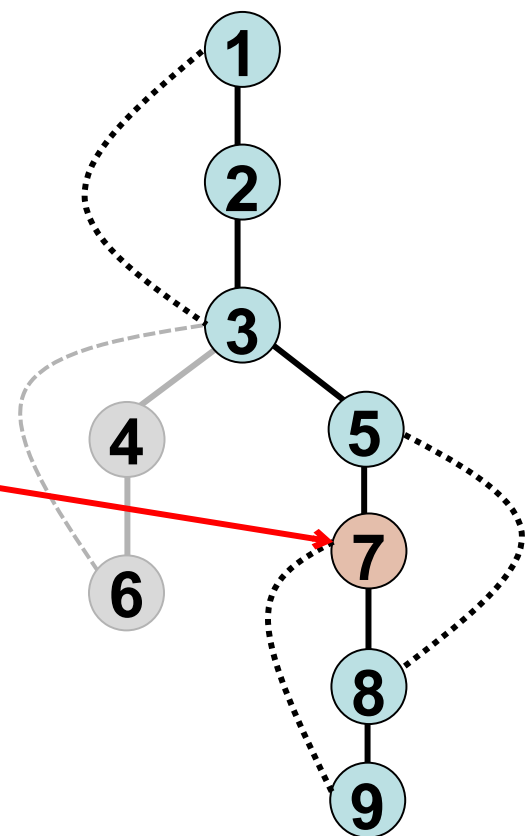
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3		3		5	7

Biconectividade



Lowpt(7) = 5
Demarcador



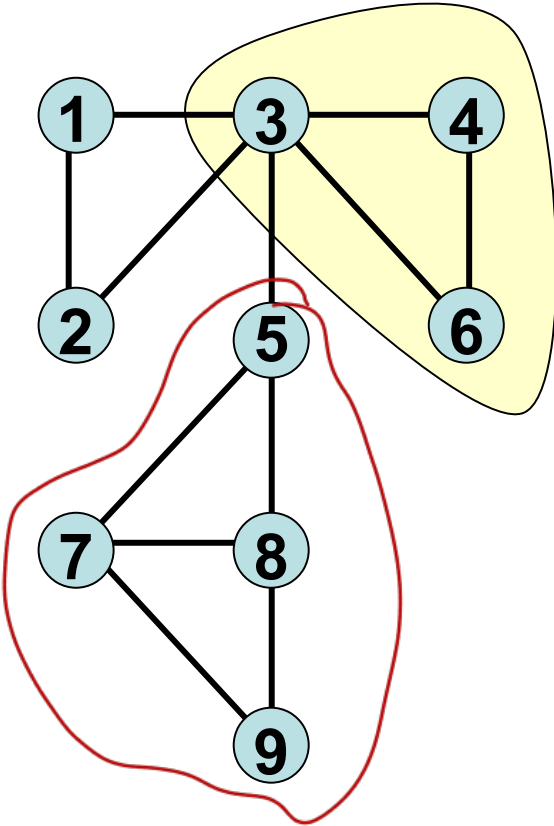
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

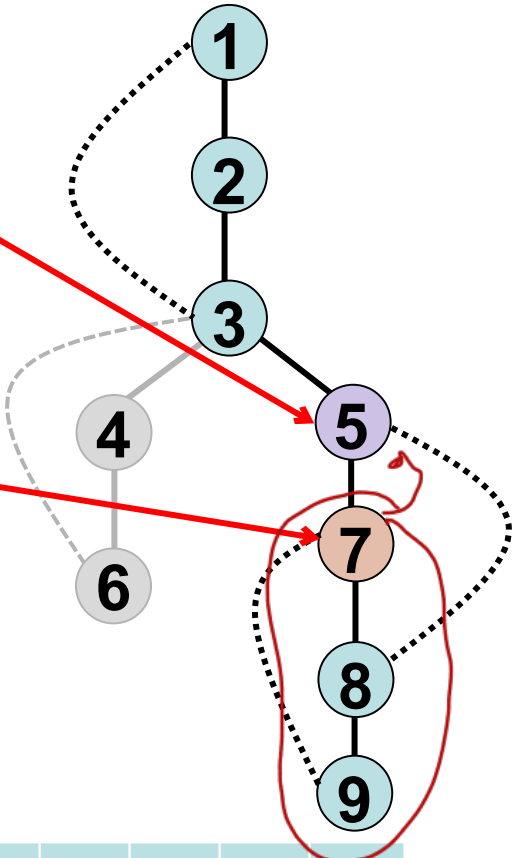
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3		3	5	5	7

Biconectividade



articulação

Lowpt(7) = 5
Demarcador



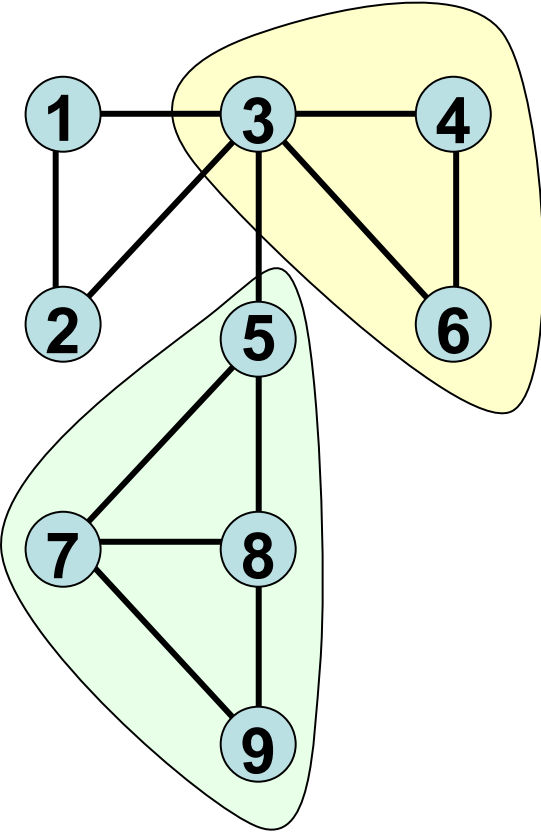
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

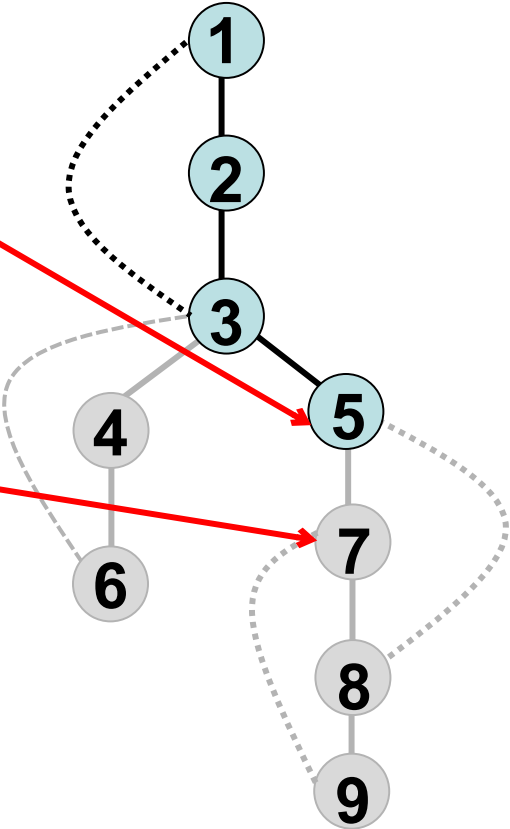
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3		3	5	5	7

Biconectividade



articulação

Lowpt(7) = 5
Demarcador



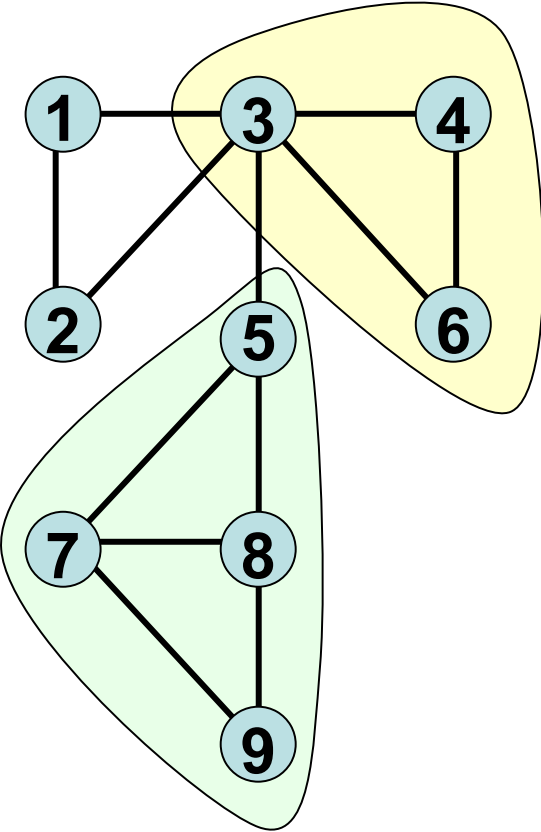
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

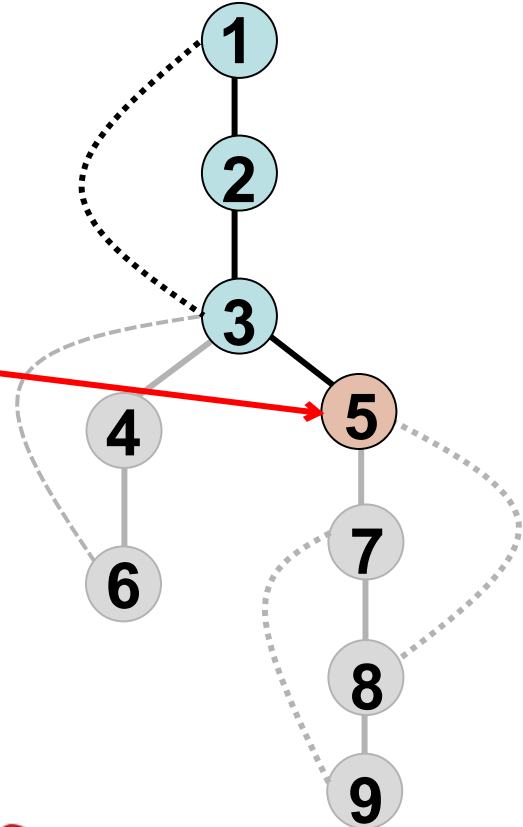
Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
 $\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3	5	3	5	5	7

Biconectividade



Lowpt(5) = 5
Demarcador



Demarcador

Vértice v com

$\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação

Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

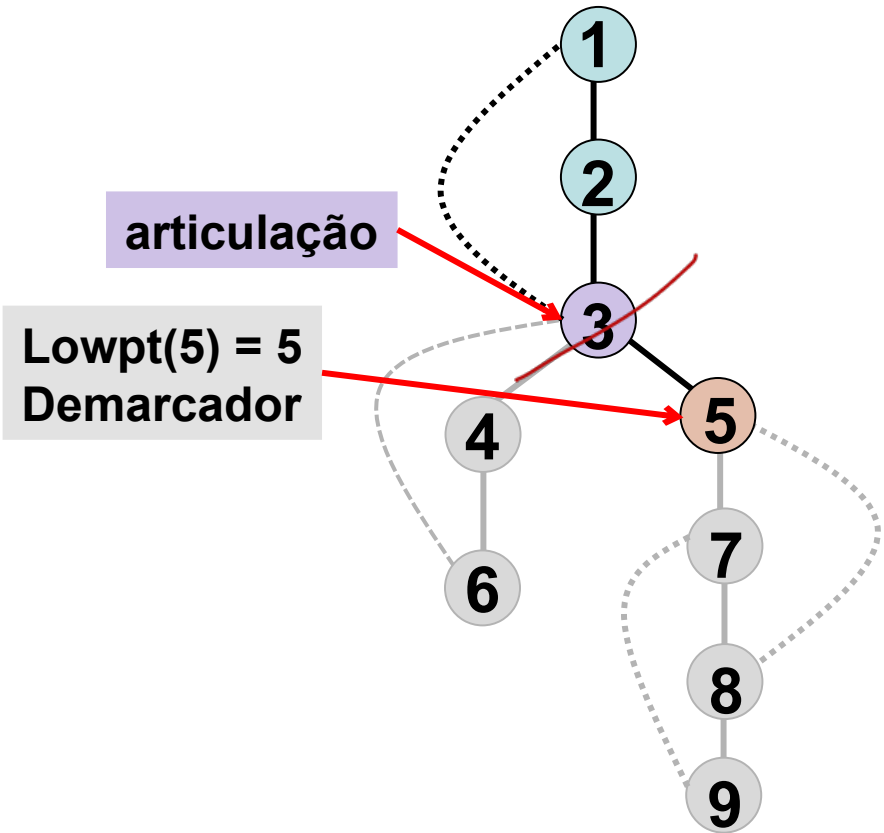
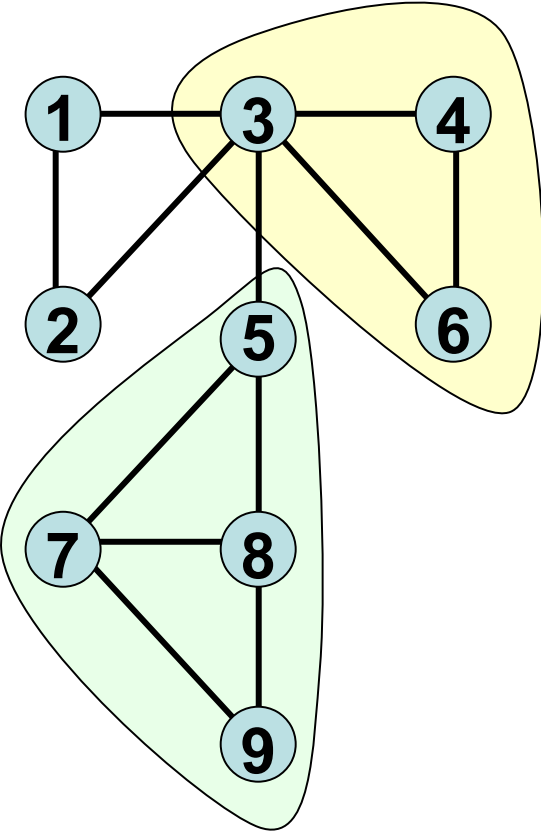
Passo Geral

Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .

$\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3	5	3	5	5	7

Biconectividade



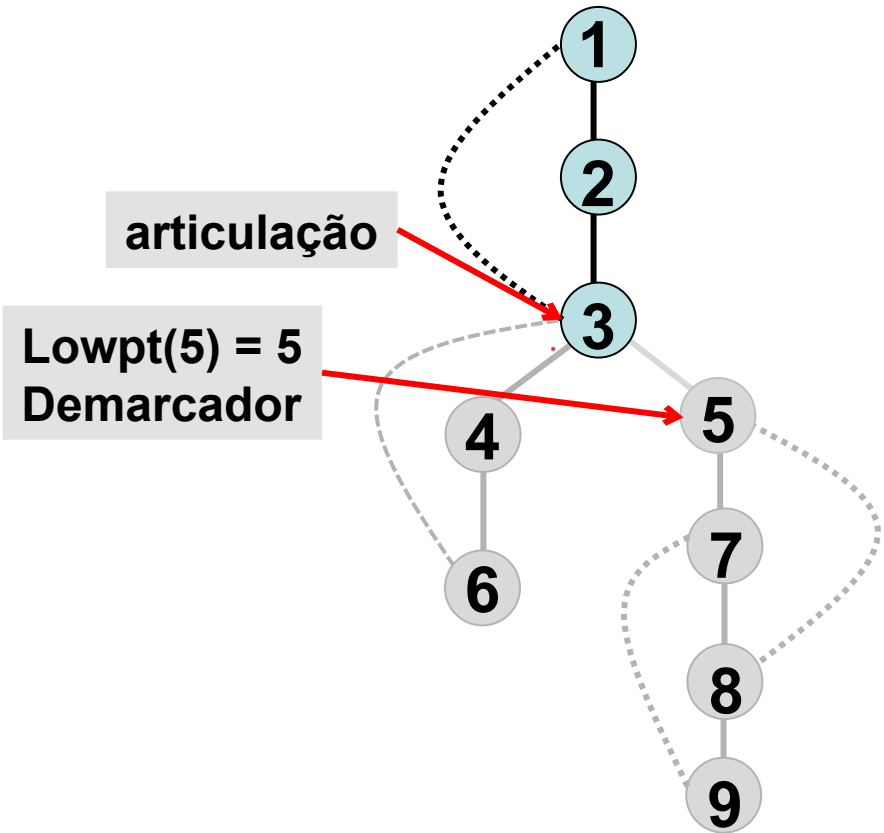
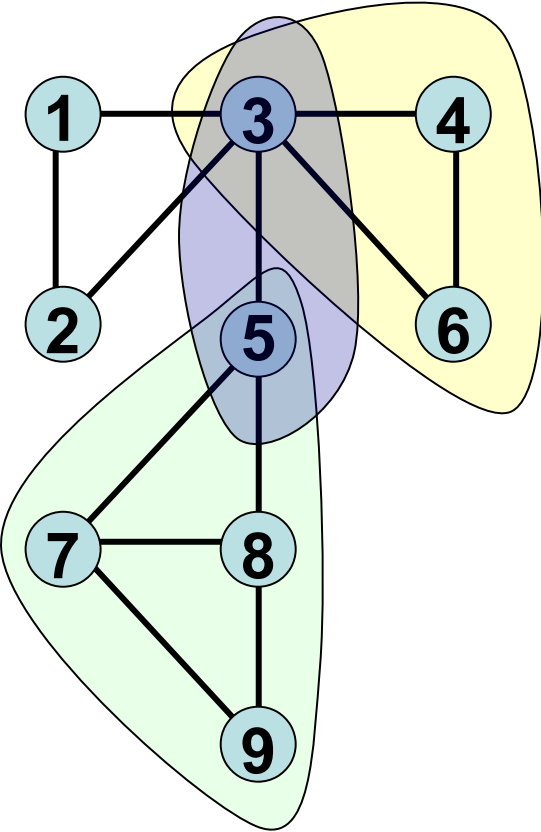
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)				3	5	3	5	5	7

Biconectividade



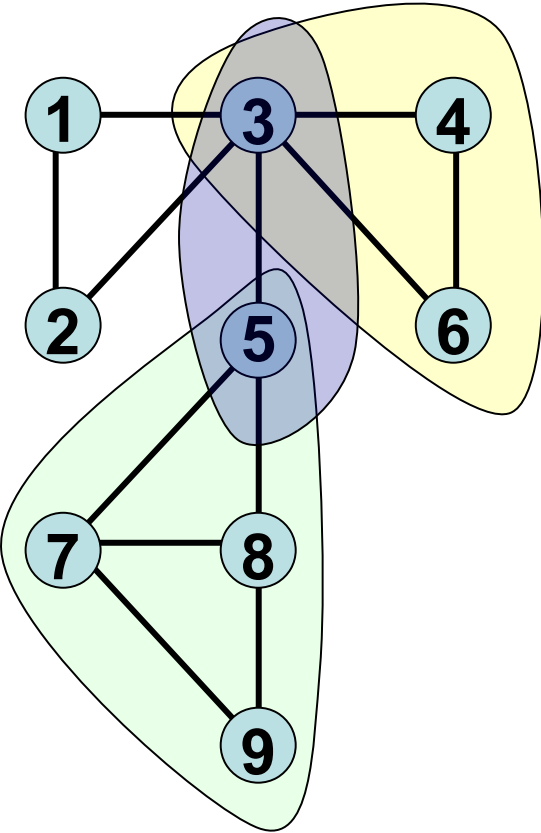
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

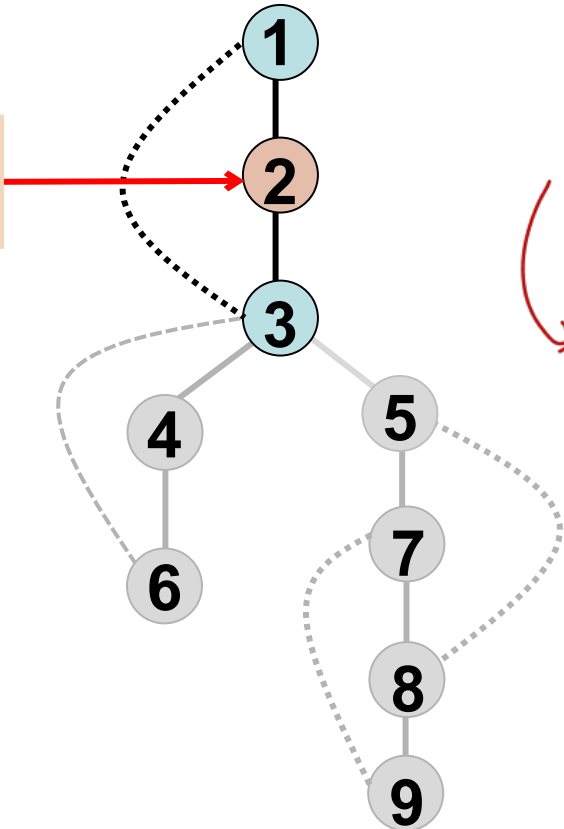
Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)			1	3	5	3	5	5	7

Biconectividade



Lowpt(2) = 1
Demarcador



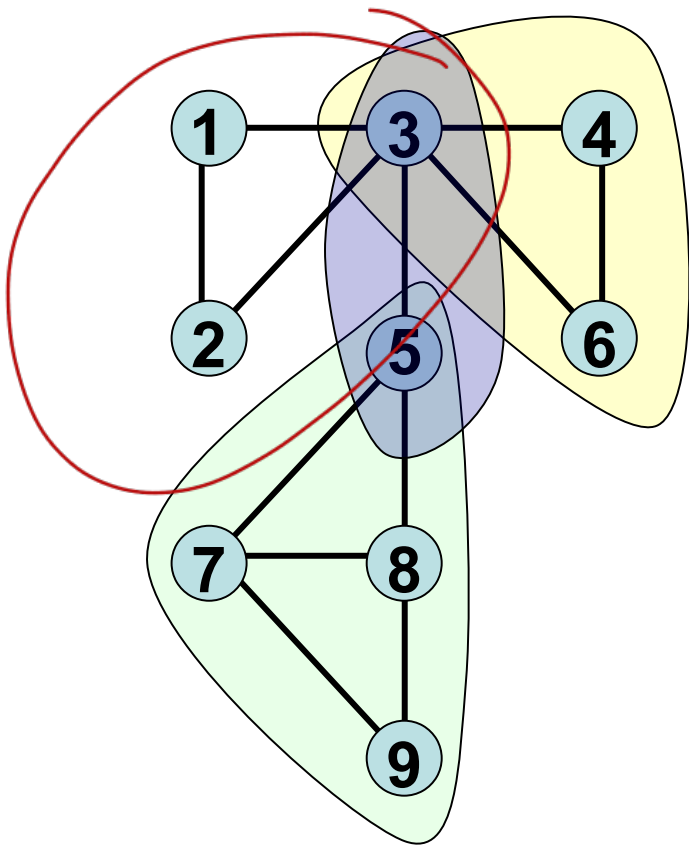
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)		1	1	3	5	3	5	5	7

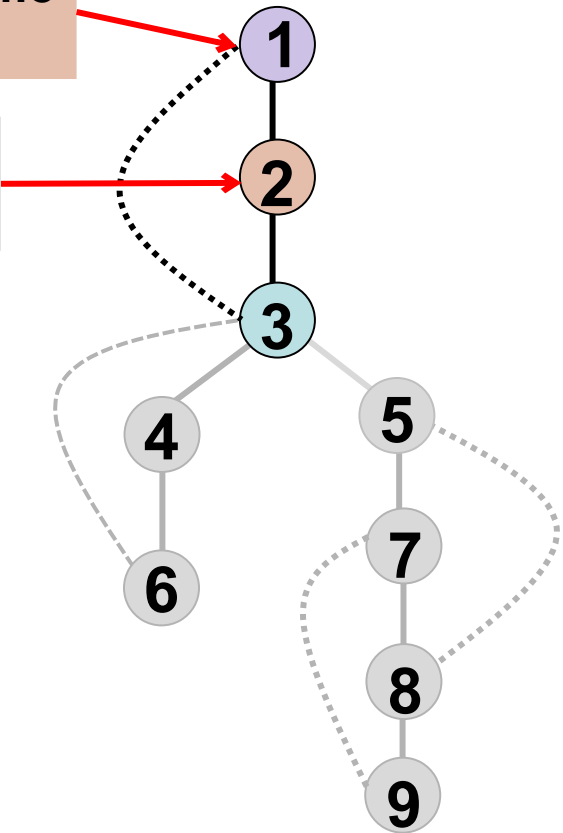
Biconectividade



Identificado como
Articulação

Lowpt(2) = 1
Demarcador

Raiz com filho
único não é
articulação



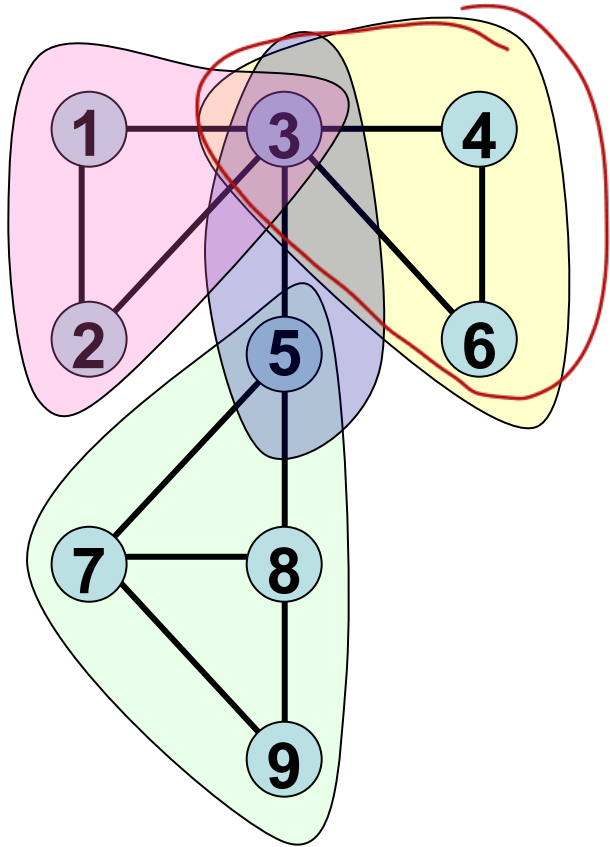
Demarcador
Vértice v com
 $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

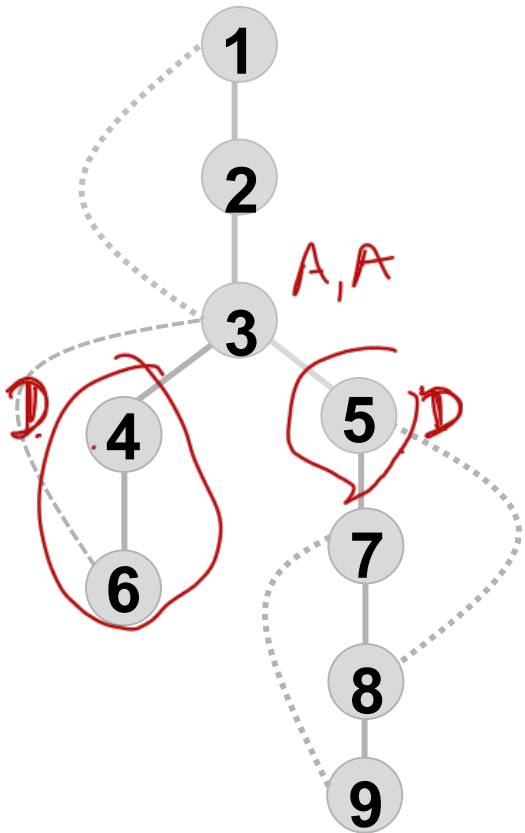
Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
{v com T_w induz um bloco de G }

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)	1	1	1	3	5	3	5	5	7

Biconectividade



$A + T_D$
 $\{3\} \cup \{4, 6\}$



Demarcador
Vértice v com $\text{Lowpt}(v) = v$ ou w ,
sendo w pai de v em T .

Articulação
Vértice pai de um ou
mais demarcadores.

Passo Geral
Escolher demarcador w
tal que a subárvore T_w
não possui articulações
de G .
 $\{v \text{ com } T_w \text{ induz um bloco de } G\}$

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Predecessor	-	1	2	3	3	4	5	7	8
Lowpt(v)	1	1	1	3	5	3	5	5	7