FLUXO EM REDES
Parte 1_4

Rede

Grafo orientado conexo ao qual associam-se parâmetros às arestas.

$$R = (N, A, U)$$

N = conjunto de nós ou vértices
A = conjunto de arcos
U = conjunto de parâmetros associados às arestas

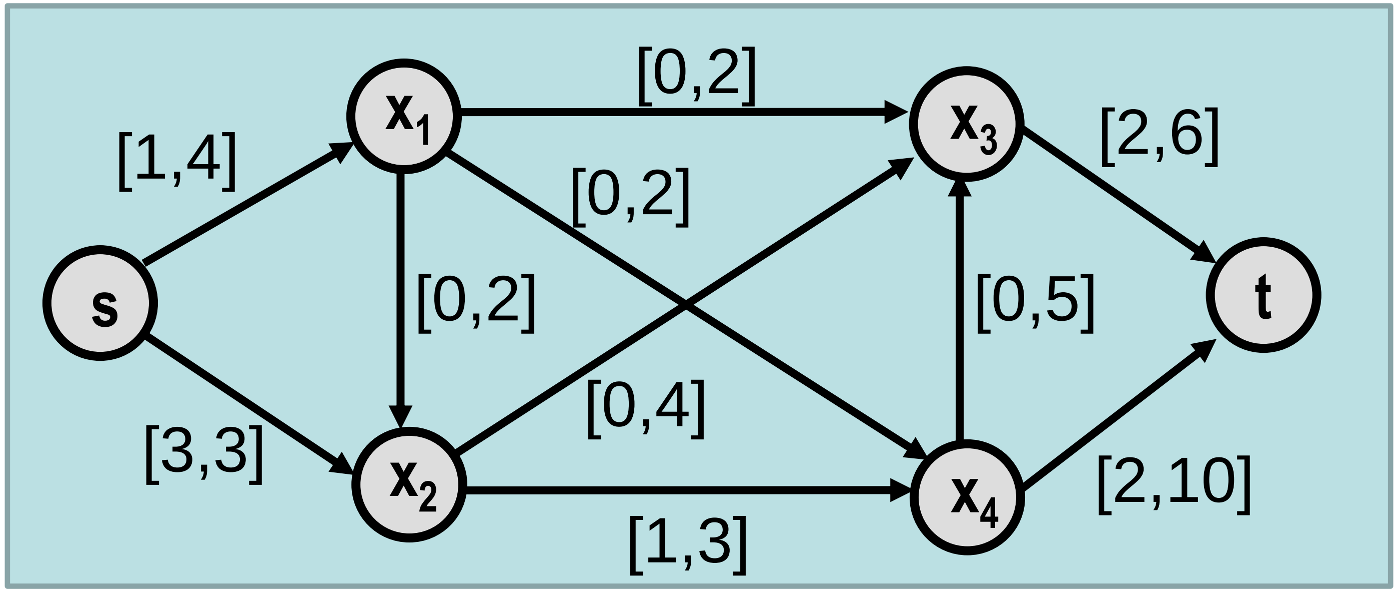
Rede

$N = \{s, x_1, x_2, x_3, x_4, t\}$

A = conjunto de arcos

$U = \{ [\, \underline{u}_e, \bar{u}_e] \}, e \in A$

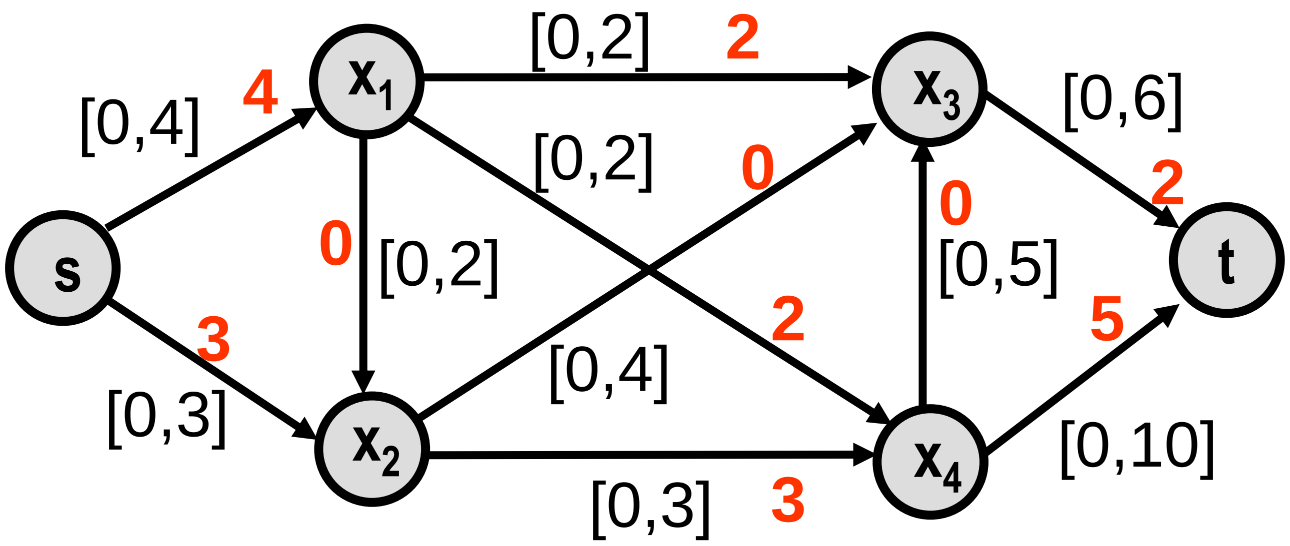
Limite inferior e superior para o valor do fluxo no arco *e*.



Fluxo em Redes

Fluxo na aresta *e* ou aresta *(i,j)* : f_e ou $f(i,j)$

Fluxo em uma rede: $f = (f_1, ..., f_m) \in \Re^m$, onde $m = |A|$



Fluxo em Redes

Considera que os nós satisfazem as seguintes condições

(i) Existe um nó especial chamado ***fonte***, denotado por **s**, com grau de entrada 0.

(ii) Existe um nó especial chamado ***sumidouro***, denotado por **t**, com grau de saída 0.

(iii) A cada aresta $e \in A$ são associados limites máximo e mínimo para o fluxo em e.

Fluxo em Redes

(iii) A cada aresta $e \in$ A são associados limites máximo e mínimo para o fluxo em e.

$$\overline{u}_e = \overline{u}(i, j)$$ Limite máximo: capacidade do arco

$$\underline{u}_e = \underline{u}(i, j)$$ Limite mínimo

$$0 \leq \underline{u}_e \leq \overline{u}_e$$

Fluxo em Redes

(iv) Para todo $x \in N$, $x \neq s, t$, tem-se

$$\sum_{i \in \Gamma^{-}(x)} f(i, x) = \sum_{j \in \Gamma^{+}(x)} f(x, j)$$

1ª Lei de Kirchoff ou Lei da Conservação nos vértices

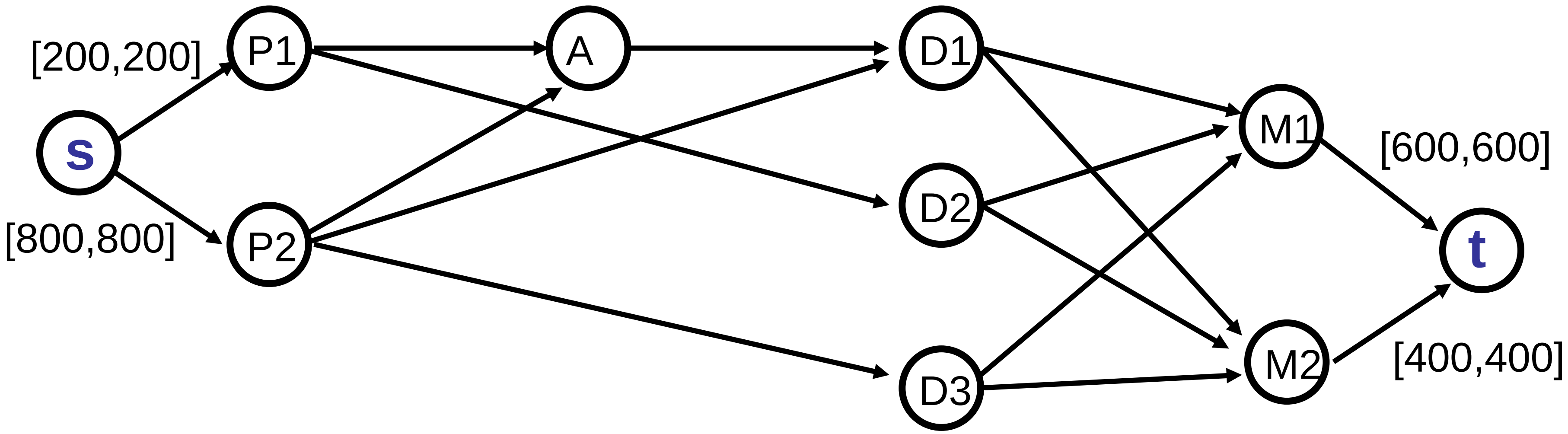
Obs. Os nós que satisfazem (iv) são ditos conservativos.
s, t não são conservativos

Fluxo em Redes

Exemplo: Considere dois centros produtores, P1 e P2, que produzem 200 e 800 unidades de um produto consumido pelos mercados M1 e M2. M1 consome 600 unidades e M2 400 unidades. P1 pode enviar produtos para o armazém, A, e para o centro de distribuição D2. P2 pode enviar produtos para A e para os centros de distribuição D1 e D3. D1, D2 e D3 distribuem para M1 e M2.

Fluxo em Redes

Exemplo: Considere dois centros produtores, P1 e P2, que produzem 200 e 800 unidades de um produto consumido pelos mercados M1 e M2. M1 consome 600 unidades e M2 400 unidades. P1 pode enviar produtos para o armazém, A, e para o centro de distribuição D2. P2 pode enviar produtos para A e para os centros de distribuição D1 e D3. D1, D2 e D3 distribuem para M1 e M2.



Obs. As demais arestas tem limites [0,∞]

Fluxo Viável

f = $(f_1, \ldots, f_m) \in \Re^m$ é dito ***viável***, se

(i) f é conservativo

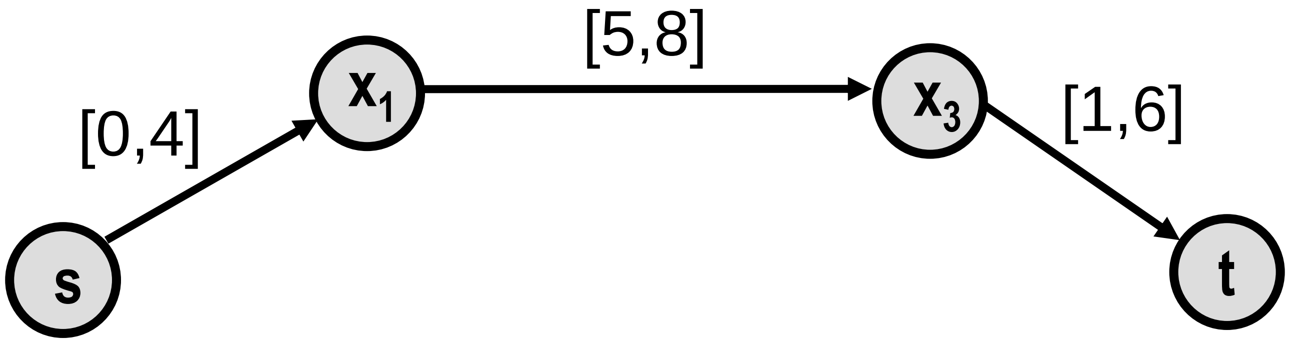
(ii) $\exists \underline{u}_e, \overline{u}_e \in \Re, e = 1, \ldots, m$ tais que

$$\underline{u}_e \leq f_e \leq \overline{u}_e$$

Restrição de capacidade de transporte

Fluxo Viável

Exemplo de rede com ***fluxo não viável***:



Fluxo Viável

No caso em que $\underline{u}_e = 0$, $e = 1, ..., m$, sempre existirá um ***fluxo viável***,

pois f = (0, 0, ...,0) é um fluxo viável.

Interpretação:

$f_e \rightarrow$ taxa que o material é transportado

Fluxo Total entre Conjuntos de Nós

Dados dois conjuntos X e Y, $X,Y \subset N$ e $(X \cap Y) = \varnothing$

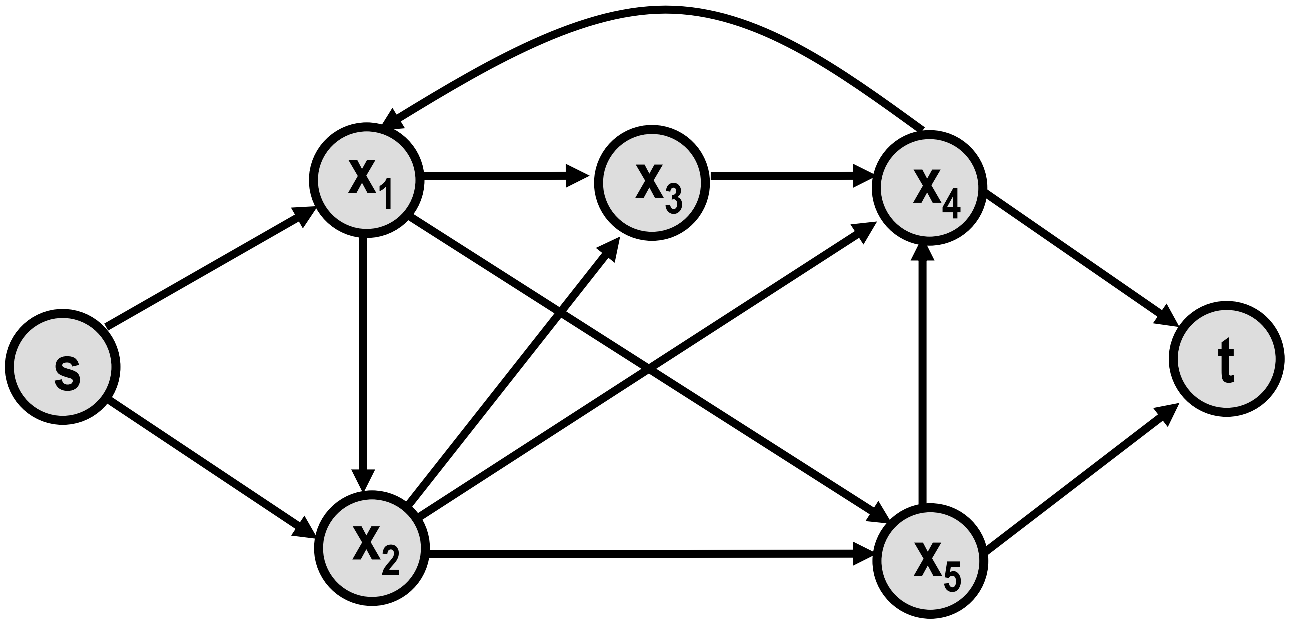
Fluxo de X para Y

$$f(X,Y) = \sum_{e \in S} f_e$$

$$S = \{e \;/\; (x_i,x_j),\; x_i \in X \text{ e } x_j \in Y\}$$

Fluxo Total entre Conjuntos de Nós

Exemplo:

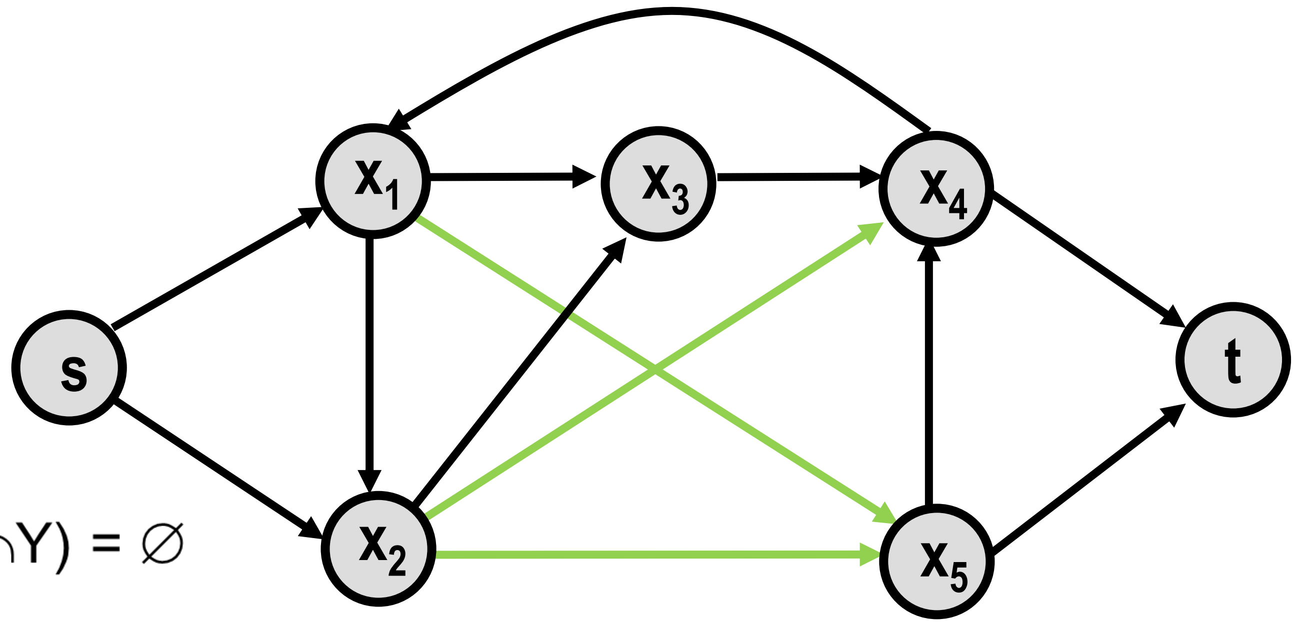


$X = \{x_1, x_2\}$

$Y = \{x_4, x_5\}$

Fluxo Total entre Conjuntos de Nós

Exemplo:



Dados dois conjuntos X e Y, $X,Y \subset N$ e $(X \cap Y) = \varnothing$

$f(X,Y) = \sum_{e \in S} f_e$ ···········→ **Fluxo de X para Y**

$S = \{e \,/\, (x_i,x_j),\ x_i \in X \text{ e } x_j \in Y\}$

$X = \{x_1,x_2\}$

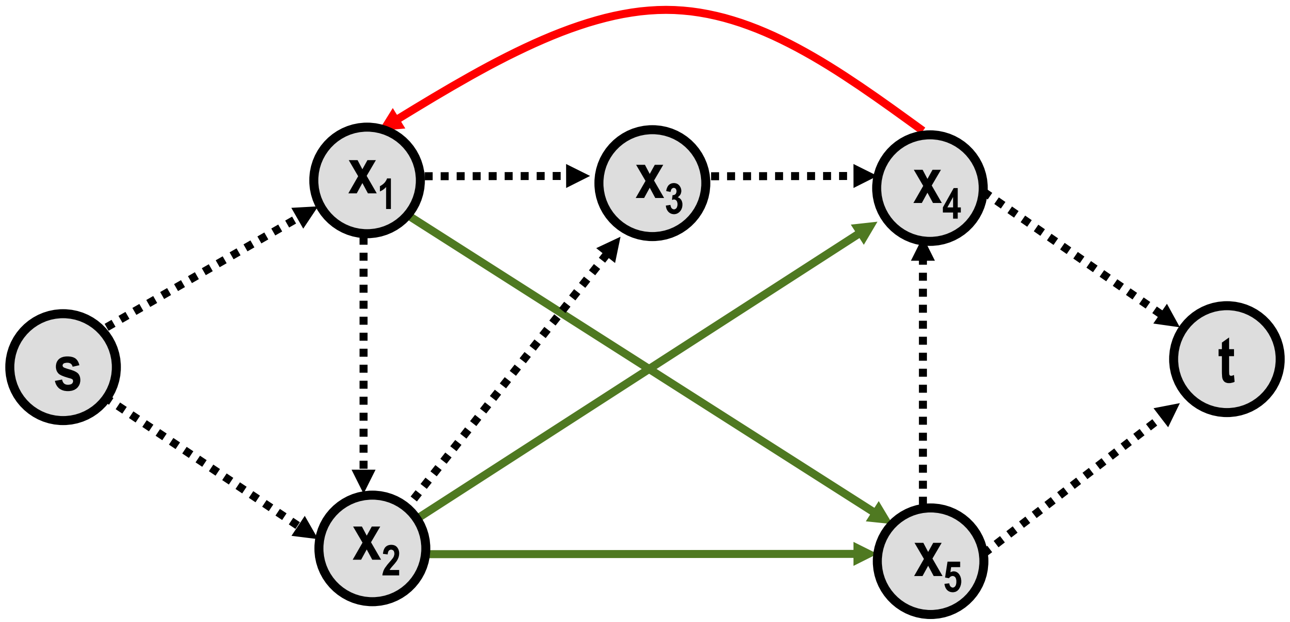
$Y = \{x_4,x_5\}$

Fluxo Total entre Conjuntos de Nós

Exemplo:

$X = \{x_1, x_2\}$

$Y = \{x_4, x_5\}$



$f(X,Y) = f(x_1,x_5) + f(x_2,x_4) + f(x_2,x_5)$

$f(Y,X) = f(x_4,x_1)$

Lei da Conservação dos Fluxos

$$f\,(x, N \setminus \{x\}) = f(N \setminus \{x\}, x),\ \forall x \in \mathit{N},\ x \neq s,t$$

Obs. Pode-se adicionar um arco de t para s dito **arco de retorno**, no qual passa um fluxo viável.

Lei da Conservação dos Fluxos

Então:

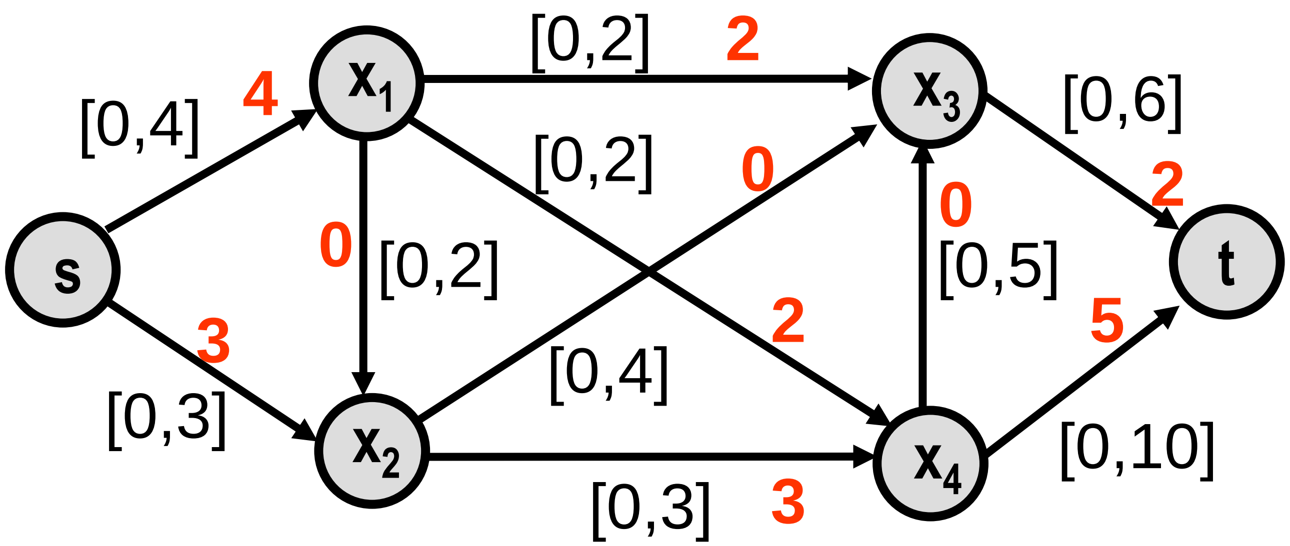
$$\sum_{i \in \Gamma^-(x)} f(i,x) = \sum_{j \in \Gamma^+(x)} f(x,j), \qquad x \neq s,t$$

$$f(x,X) = f(X,x), \qquad \forall x, x \in N \setminus \{s,t\}$$

Lei da Conservação dos Fluxos

Exemplo:

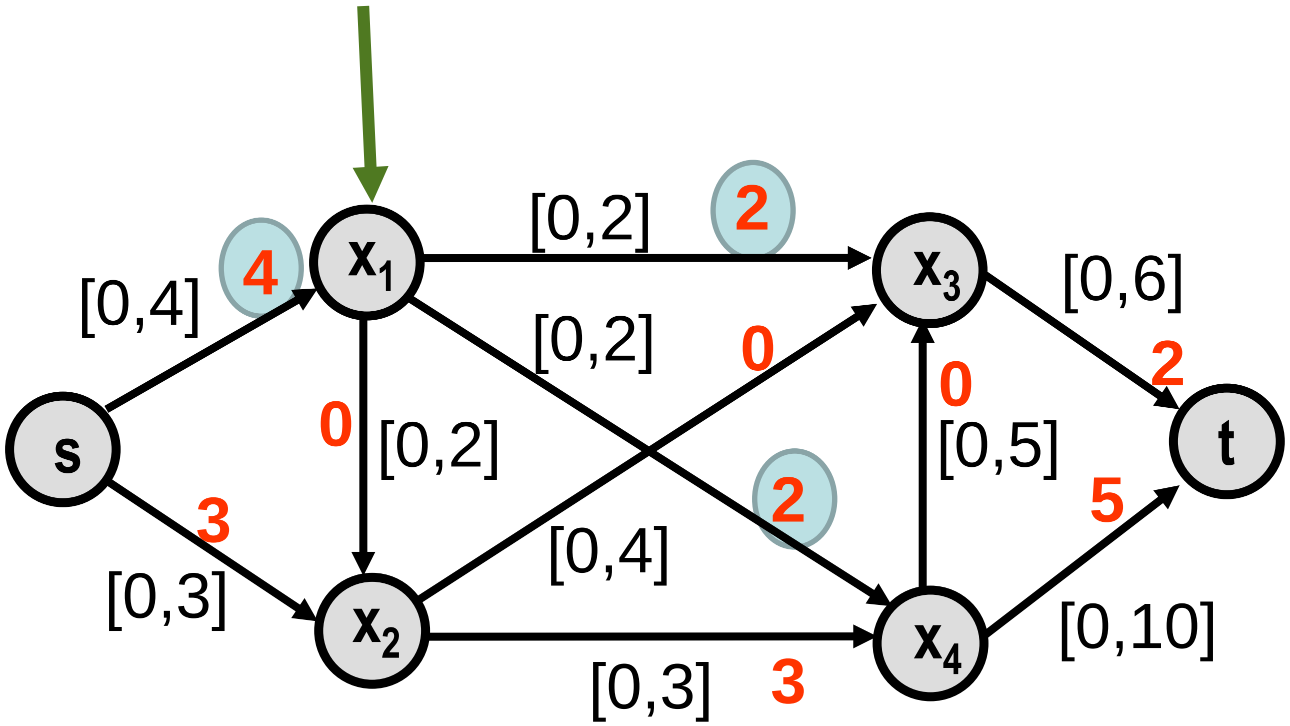
f = 7



Lei da Conservação dos Fluxos

Exemplo:

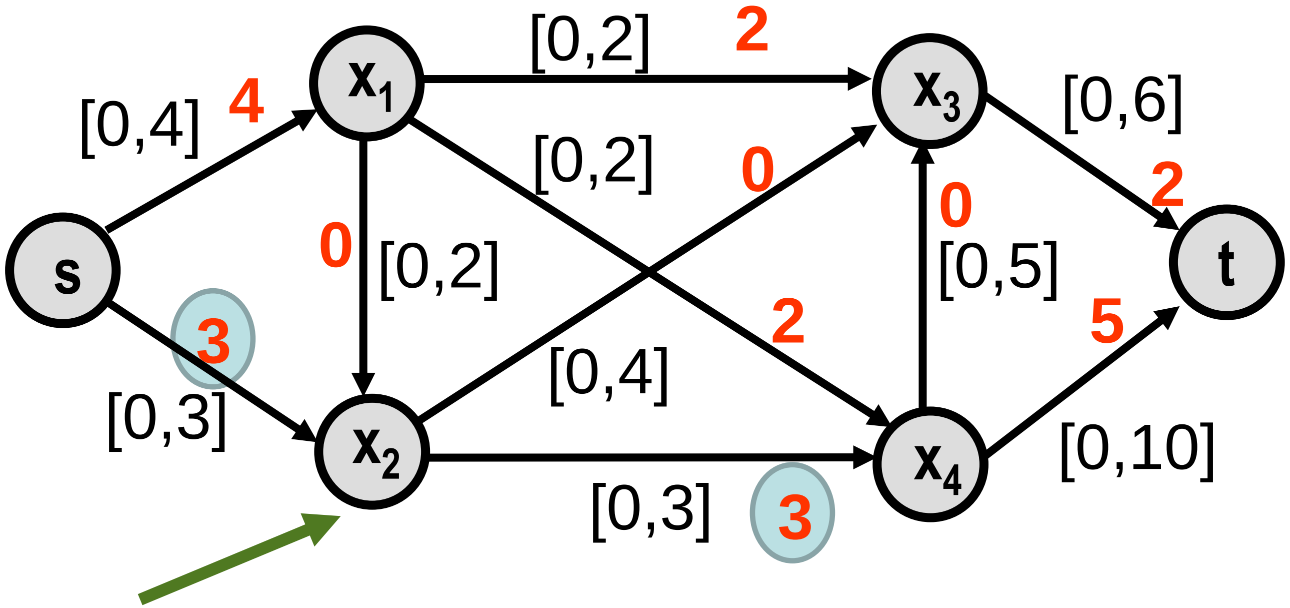
f = 7



Lei da Conservação dos Fluxos

Exemplo:

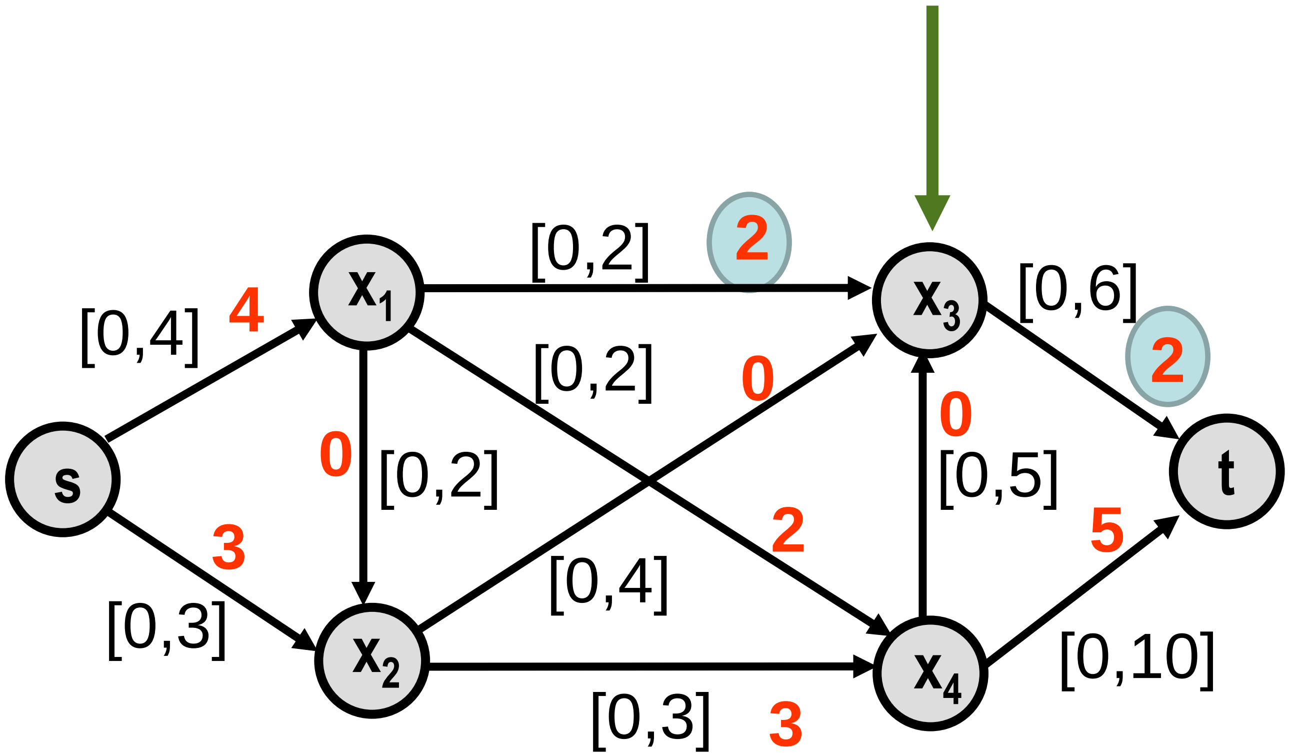
f = 7



Lei da Conservação dos Fluxos

Exemplo:

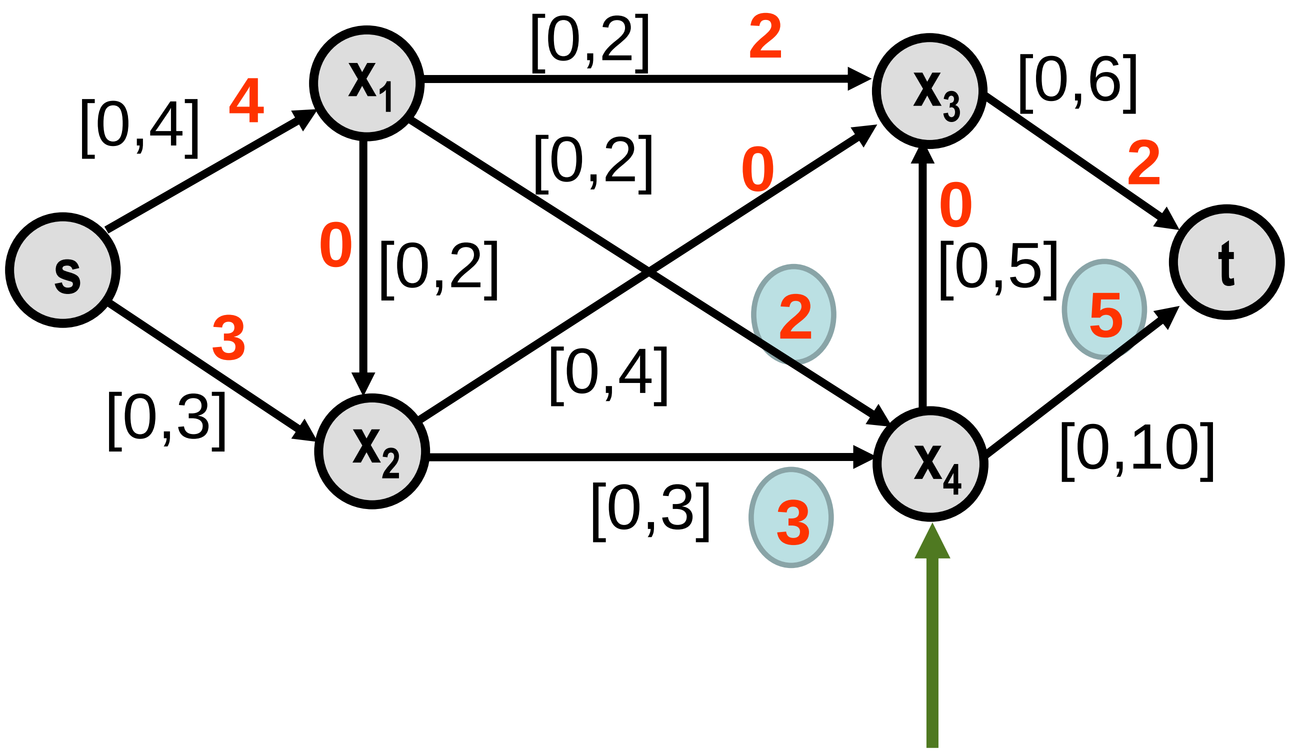
f = 7



Lei da Conservação dos Fluxos

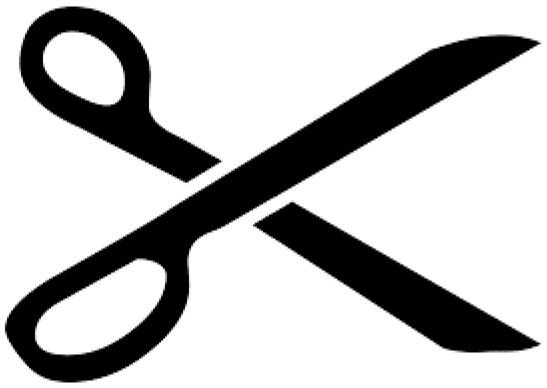
Exemplo:

f = 7



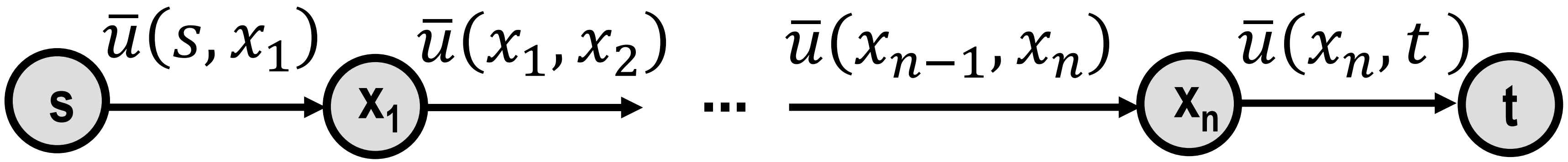
Lei da Conservação dos Fluxos

O que é um corte em um grafo?



Corte Mínimo

Considere uma rede s-t constituída por um único caminho de s para t

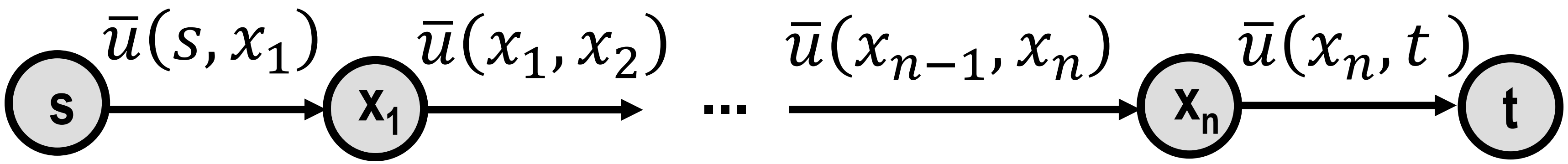


Então o valor do ***fluxo máximo*** que percorre esta rede é: .....

Corte Mínimo

Então o valor do ***fluxo máximo*** que percorre esta rede é:

$$f_0 = \min\left\{\bar{u}(s, x_1), \bar{u}(x_1, x_2), \ldots, \bar{u}(x_n, t)\right\}$$



O arco de menor capacidade é dito ***gargalo*** da rede.

Em uma rede *R* qualquer, o gargalo é denominado ***corte mínimo***.

Corte s-t

Considerando $\left(X, \overline{X}\right)$ uma partição de *N*, tal que

$$X \cap \overline{X} = \{\ \} \qquad\qquad X \cup \overline{X} = N$$

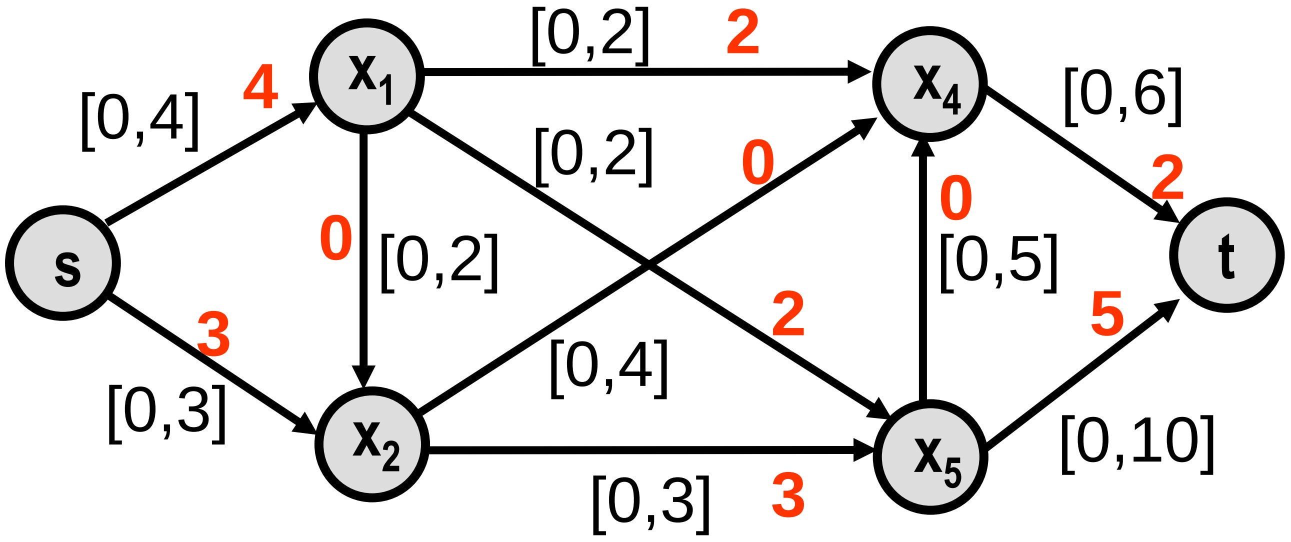
$$s \in X,\ \ t \in \overline{X}$$

Diz-se que $\left(X, \overline{X}\right)$ define um ***corte*** em *R* e refere-se a ele como ***corte s-t***.

Corte s-t

$$X = \{s, x_1, x_2\}$$

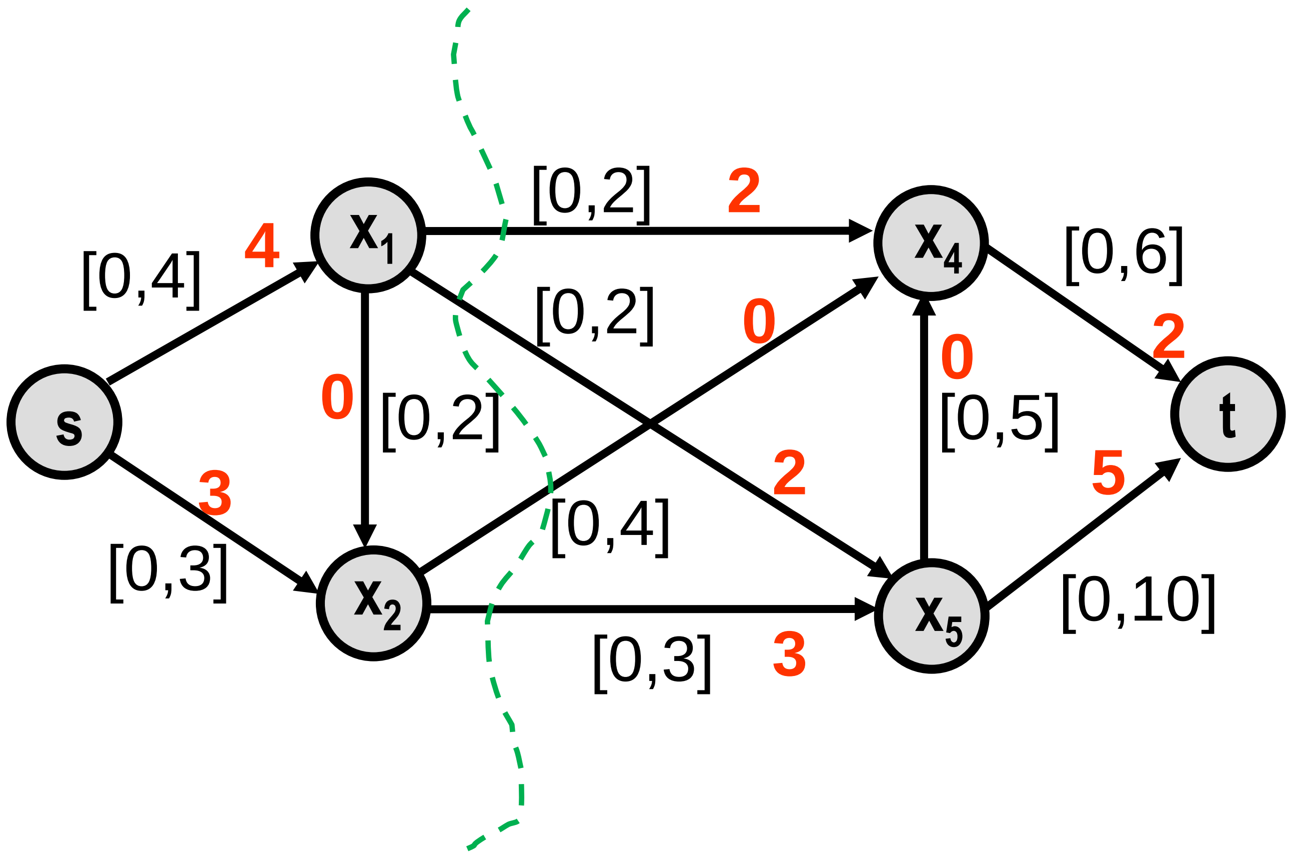
$$\overline{X} = \{x_5, x_4, t\}$$



Corte s-t

$$X = \{s, x_1, x_2\}$$

$$\overline{X} = \{x_5, x_4, t\}$$



Fluxo em Redes

Teorema.

Para um fluxo f e um corte s-t qualquer em uma rede R, tem-se

$$val(f) = f\left(X, \overline{X}\right) - f\left(\overline{X}, X\right)$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$val(f) = f(s, N) - f(N, s)$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$val(f) = f(s, N) - f(N, s)$$

$$= \sum_{x \in X} f(x, N) - \sum_{x \in X} f(N, x)$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$val(f) = f(s, N) - f(N, s)$$

$$= \sum_{x \in X} f(x, N) - \sum_{x \in X} f(N, x)$$

$$= f(X, N) - f(N, X)$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$
\begin{aligned}
val(f) &= f(s,N) - f(N,s)\\
&= \sum_{x \in X} f(x,N) - \sum_{x \in X} f(N,x)\\
&= f(X,N) - f(N,X)\\
&= f(X, X \cup \bar{X}) - f(X \cup \bar{X}, X)
\end{aligned}
$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$val(f) = f(s, N) - f(N, s)$$

$$= \sum_{x \in X} f(x, N) - \sum_{x \in X} f(N, x)$$

$$= f(X, N) - f(N, X)$$

$$= f(X, X \cup \bar{X}) - f(X \cup \bar{X}, X)$$

$$= f(X, X) + f(X, \bar{X}) - [f(X, X) + f(\bar{X}, X)]$$

Fluxo em Redes

Prova.

$$val(f) = f(s, N) - f(N, s)$$

$$= \sum_{x \in X} f(x, N) - \sum_{x \in X} f(N, x)$$

$$= f(X, N) - f(N, X)$$

$$= f(X, X \cup \bar{X}) - f(X \cup \bar{X}, X)$$

$$= \cancel{f(X, X)} + f(X, \bar{X}) - [\cancel{f(X, X)} + f(\bar{X}, X)]$$

$$= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$$

Capacidade do Corte

Considere o corte s-t $\left(X, \overline{X}\right)$.

Tem-se $\overline{\mathrm{u}}\left(X, \overline{X}\right) = \sum_{e \in S} \overline{u_e}$, onde

$$S = \left\{ e / (i, j), i \in X, j \in \overline{X} \right\}$$

$$\underline{\mathrm{u}}\left(X, \overline{X}\right) = \sum_{e \in S} \underline{u}_e$$

Capacidade do Corte

$$\left(X,\overline{X}\right)$$

$$\overline{u}\left(X,\overline{X}\right)=\sum_{e\in S}\overline{u_e}$$

$$S=\left\{e/(i,j), i\in X, j\in\overline{X}\right\}$$

$$\underline{u}\left(X,\overline{X}\right)=\sum_{e\in S}\underline{u}_e$$

$$\overline{u}\left(X,\overline{X}\right)$$

Analogamente aos arcos, onde

$$\underline{u}_e \leq f_e \leq \overline{u}_e$$

Tem-se

$$\boxed{\begin{array}{l} f\left(X,\overline{X}\right)\leq\overline{u}\left(X,\overline{X}\right)\\ f\left(\overline{X},X\right)\geq\underline{u}\left(\overline{X},X\right)\end{array}}$$

Capacidade do Corte

Lema.

Dado um fluxo *f* de valor val(*f*), qualquer que seja o corte $\left(X, \overline{X}\right)$, tem-se:

$$val(f) \leq \overline{\mathrm{u}}\left(X, \overline{X}\right) - \underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X}, X\right)$$

Capacidade do Corte

Lema.

Dado um fluxo *f* de valor val(*f*), qualquer que seja o corte $\left(X,\overline{X}\right)$, tem-se:

$$val\left(f\right)\leq \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right)-\underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X},X\right)$$

Prova.

$$val\left(f\right)=f\left(X,\overline{X}\right)-f\left(\overline{X},X\right)$$

Capacidade do Corte

Lema.

Dado um fluxo *f* de valor val(*f*), qualquer que seja o corte $\left(X,\overline{X}\right)$, tem-se:

$$val(f) \leq \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right) - \underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X},X\right)$$

Prova.

$$val(f) = f\left(X,\overline{X}\right) - f\left(\overline{X},X\right)$$

$$val(f) \leq \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right) - f\left(\overline{X},X\right)$$

Capacidade do Corte

Lema.

Dado um fluxo *f* de valor val(*f*), qualquer que seja o corte $\left(X,\overline{X}\right)$, tem-se:

$$val(f) \le \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right) - \underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X},X\right)$$

Prova.

$$val(f) = f\left(X,\overline{X}\right) - f\left(\overline{X},X\right)$$

$$val(f) \le \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right) - f\left(\overline{X},X\right)$$

$$val(f) \le \overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right) - \underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X},X\right)$$

Fluxo Líquido

Chama-se ***fluxo líquido*** através do corte s-t

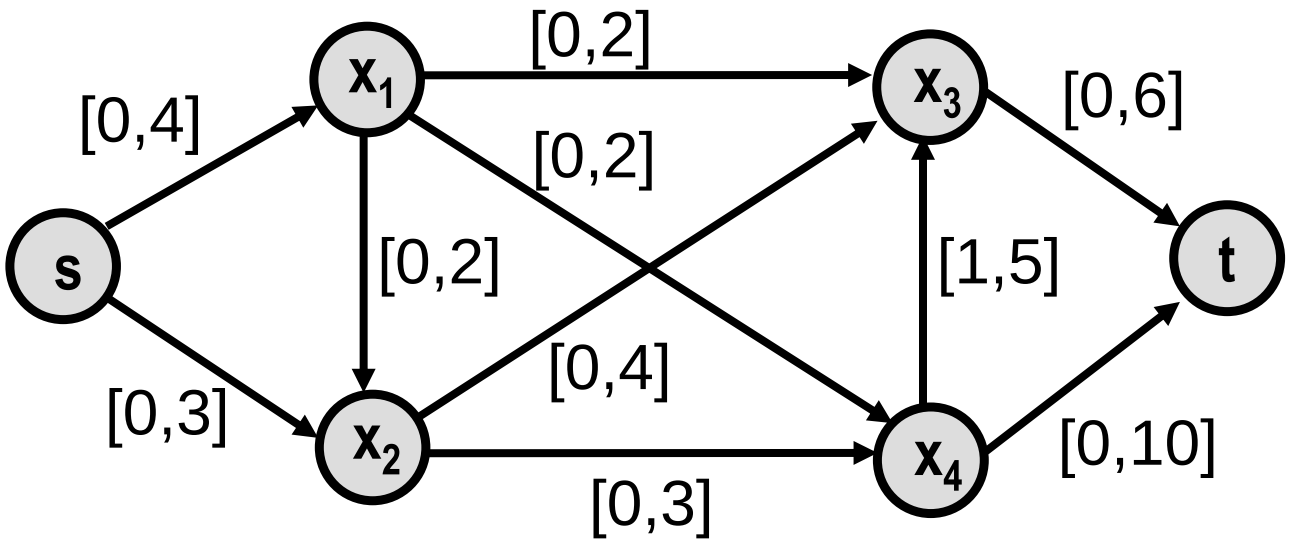
$$f\left(X,\overline{X}\right)-f\left(\overline{X},X\right)$$

e sua capacidade líquida

$$\overline{\mathrm{u}}\left(X,\overline{X}\right)-\underline{\mathrm{u}}\left(\overline{X},X\right)$$

Exemplo1: Corte s-t

$$X = \{s\}$$
$$\bar{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, t\}$$



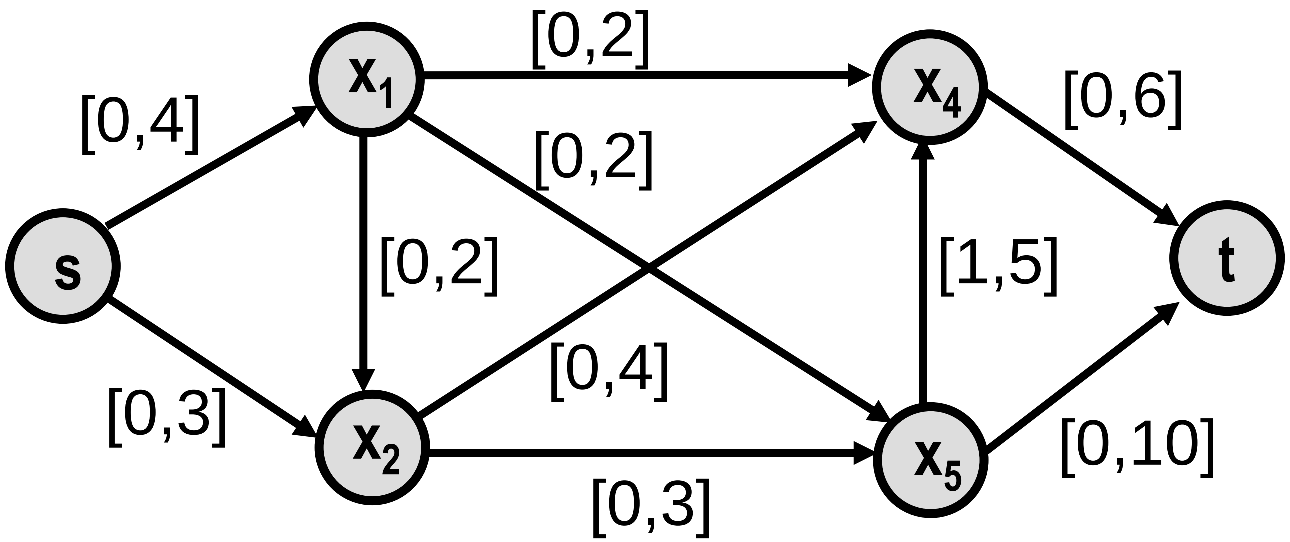
$$\bar{u}(\mathrm{X}, \bar{X}) = \bar{u}(s, x_1) + \bar{u}(s, x_2)$$
$$= 4 + 3$$
$$= 7$$

$$\underline{u}(\bar{X}, X) = 0$$

Exemplo2: Corte s-t

$$X = \{s, x_1, x_2, x_3\}$$

$$\bar{X} = \{x_4, t\}$$



$$\bar{u}(\mathrm{X}, \bar{X}) = \bar{u}(x_1, x_5) + \bar{u}(x_2, x_5) + \bar{u}(x_4, t)$$

$$= 2 + 3 + 6$$

$$= 11$$

$$\underline{u}(\bar{X}, X) = \underline{u}(x_5, x_4) = 1$$

Fluxo Líquido

Dado um vértice *i*, o fluxo líquido em *i* é igual ao fluxo que sai de *i* menos o fluxo que chega a *i*.

Na rede s-t, temos

$$\sum_{\forall j} f(i,j) - \sum_{\forall j} f(j,i) = \begin{cases} val(f), & se\ i = s \\ -val(f), & se\ i = t \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Problema do Fluxo Máximo

$$\max\ f_0$$

sujeito a

$$f(x,N) - f(N,x) = \begin{cases} f_0, & se\ x = s \\ -f_0, & se\ x = t \\ 0, & se\ x \neq s,t \end{cases}$$

$$\underline{u}(x,y) \leq f(x,y) \leq \bar{u}(x,y)$$

Algoritmo de Ford e Fulkerson(1956)

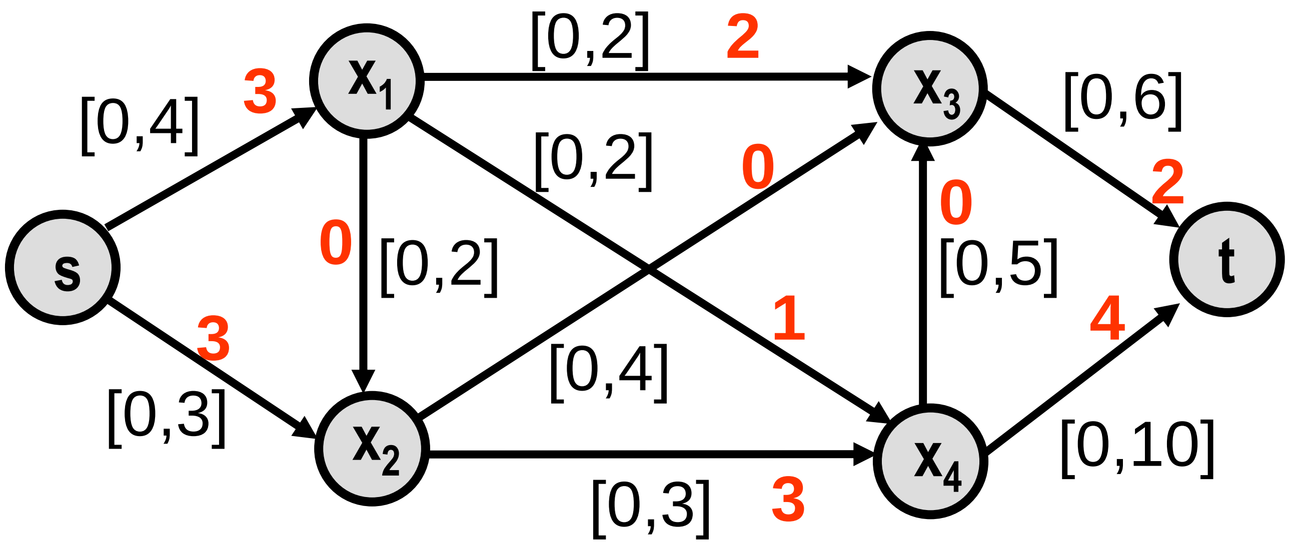
Algoritmo de Ford e Fulkerson(1956)

Trabalha com caminhos de aumento de fluxo.

A partir de um fluxo viável inicial ($f = 0$) procura por caminhos de aumento de fluxo e faz passar mais fluxo.

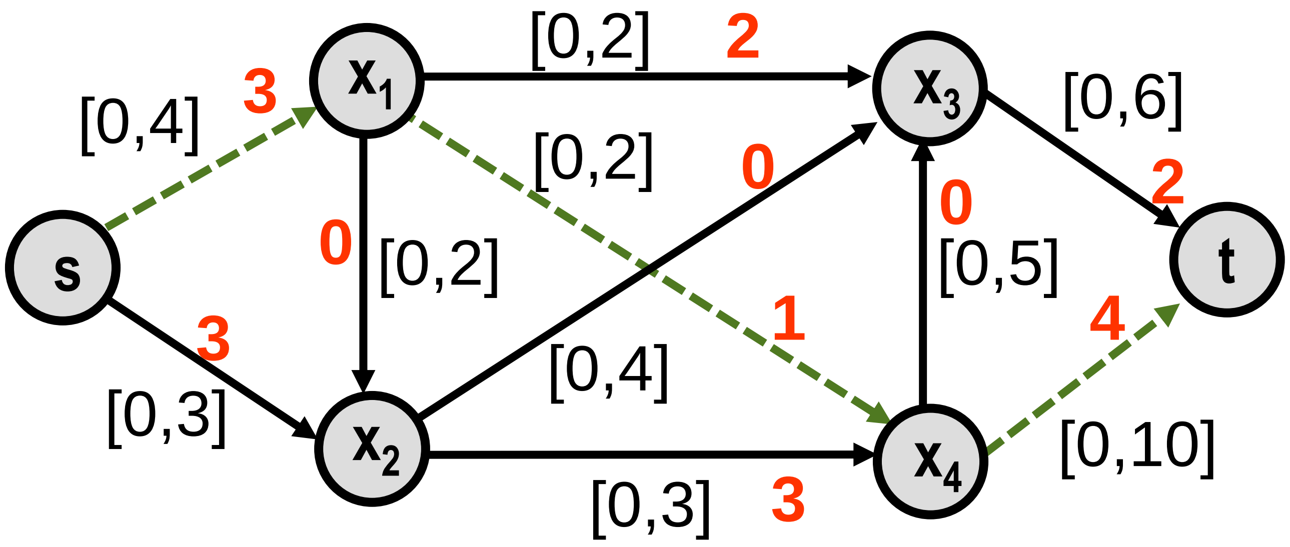
Caminho de aumento de fluxo é um caminho de s até t por onde seja possível passar mais fluxo.

Caminho de aumento de fluxo



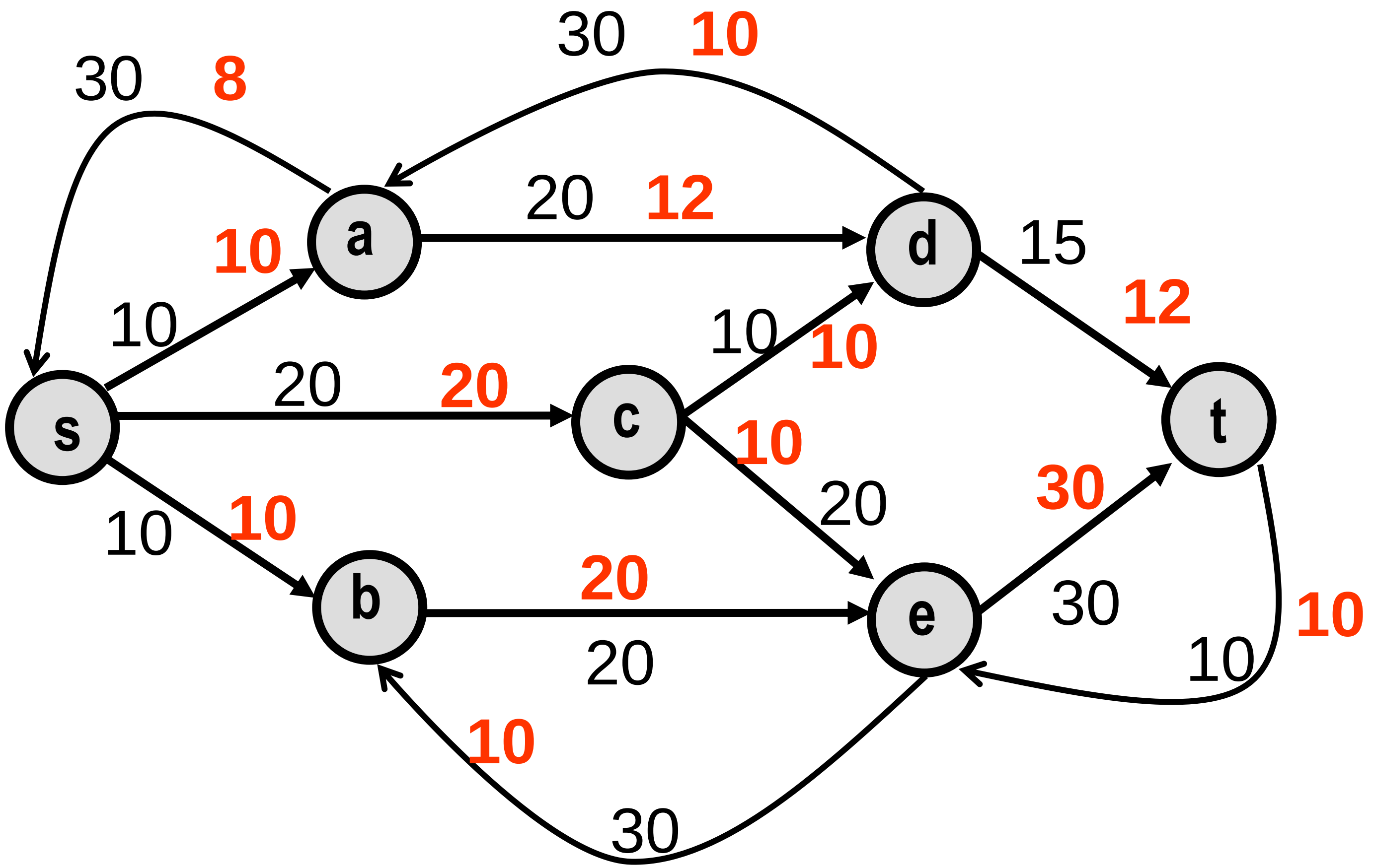
Existe caminho para aumentar o fluxo nesta rede?

Caminho de aumento de fluxo



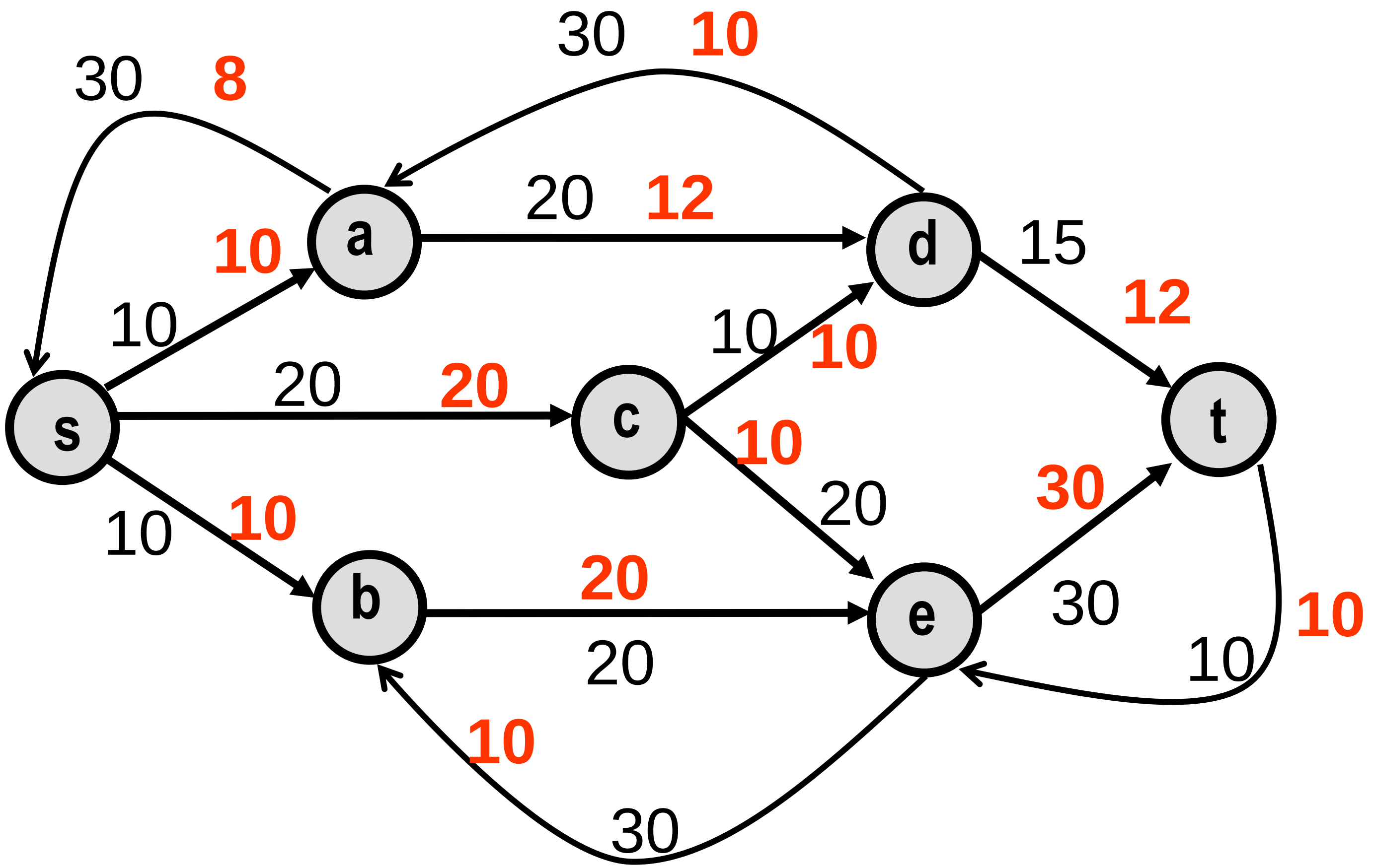
caminho para aumentar o fluxo

Caminho de aumento de fluxo



Existe caminho para aumentar o fluxo nesta rede?

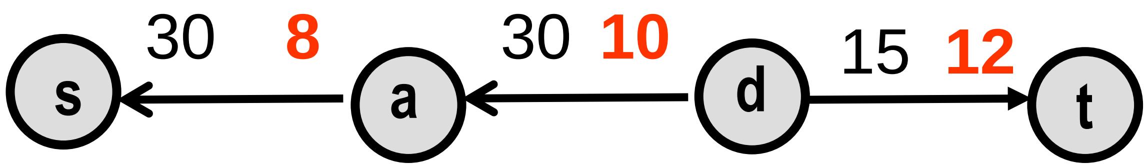
Caminho de aumento de fluxo

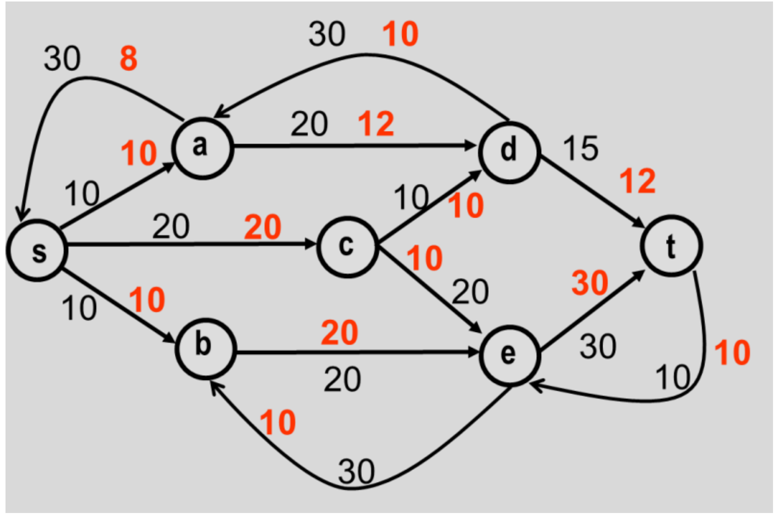


Existe caminho para aumentar o fluxo nesta rede?

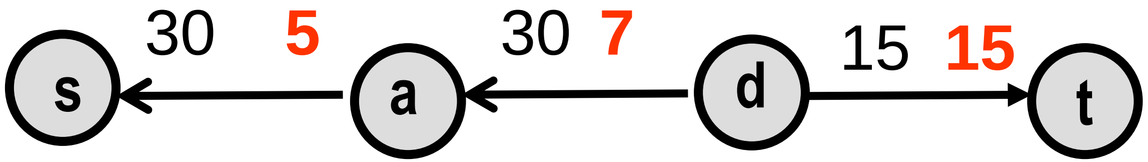
Caminho de aumento de fluxo

Caminho de aumento de fluxo (antes)





Caminho saturado (depois)

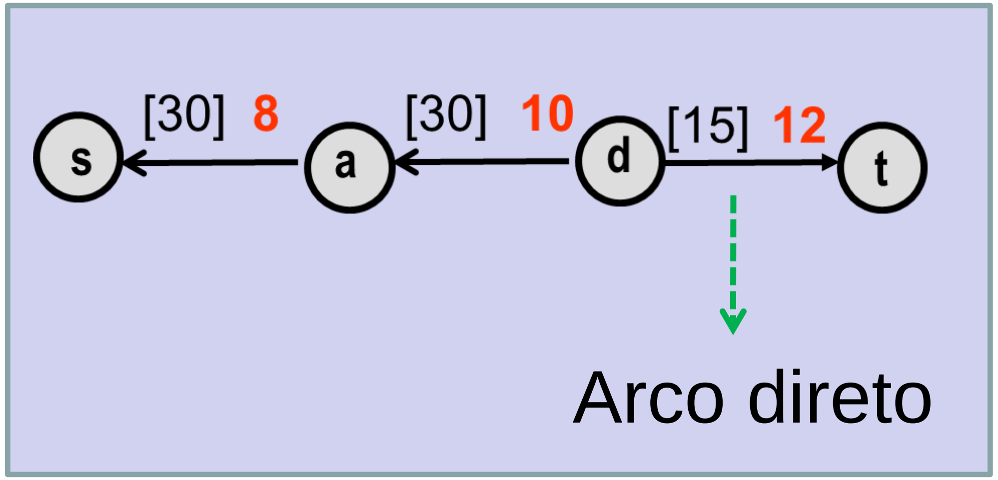


Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Um **arco** pode ser eleito para um **caminho de aumento de fluxo** por duas razões:

1. A ***direção do arco é coerente*** com a direção do caminho de *s* para *t*. Neste caso,

$$\boxed{f(x,y) < \bar{u}(x,y)}$$



os vértices *x* e *y* pertencem ao caminho

o arco é dito ***arco direto***

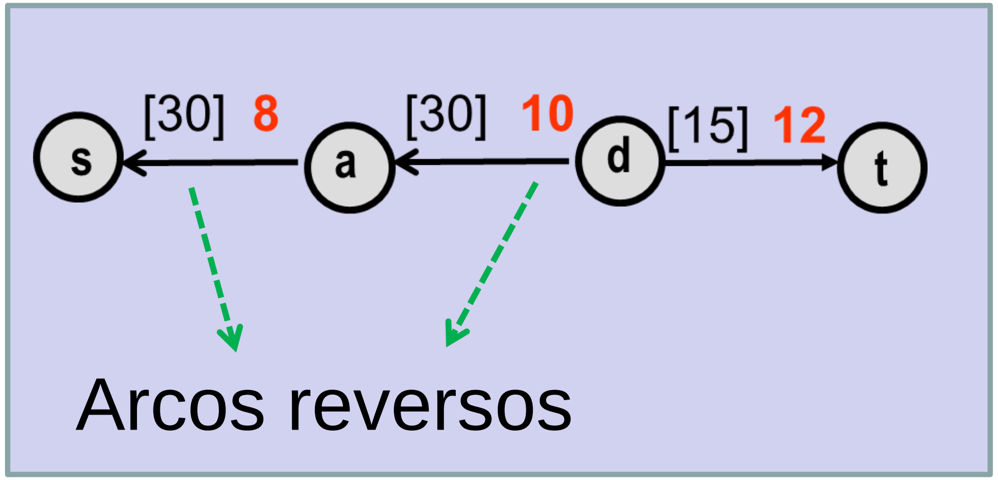
Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

2. A ***direção do arco é oposta*** à direção do caminho de s para t. Neste caso,

$$\boxed{\underline{u}(x,y) < f(x,y)}$$

os vértices *x* e *y* pertencem ao caminho

o arco é dito ***arco reverso***



Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Como o algoritmo parte de um fluxo viável, podemos considerar, sem perda de generalidade, que

$$\boxed{\underline{u}(x, y) = 0}$$

para todo arco (x,y) da rede.

O **Teorema da Circulação** garante que podemos assumir isso ou que a rede não possui fluxo viável.

(Teorema da Circulação – pesquisa)

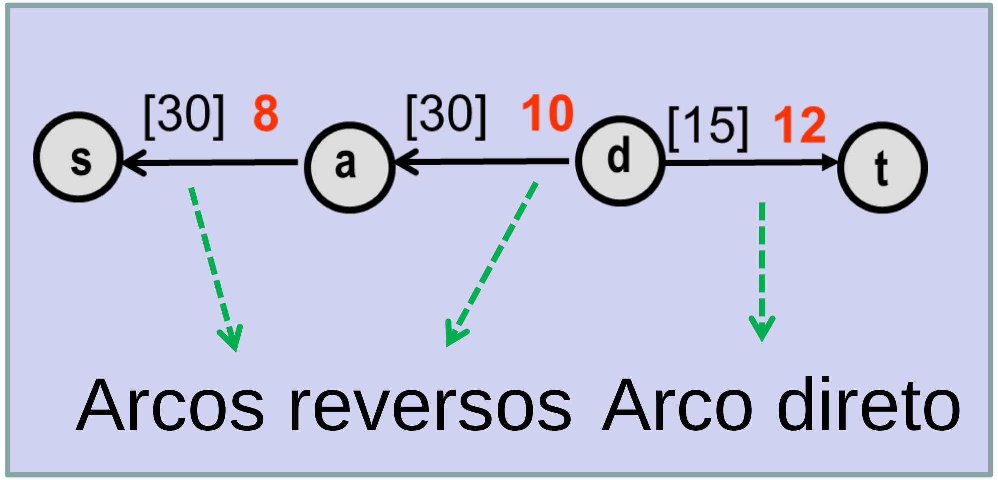
Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Consideramos que o fluxo nos arcos é positivo (não negativo)

$$\boxed{f(x,y) \geq 0}$$

Em todo ***arco direto*** é possível **aumentar** o fluxo de s para t.

Nos ***arcos reversos*** pode-se **diminuir** o fluxo.



Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Considere uma rede R = (N,A,U) e um fluxo f em R.

Um arco *e* é **utilizável** de *x* para *y* se

1. *e* é direcionado de *x* para *y* e $f(x,y) < \bar{u}(x,y)$

2. *e* é direcionado de *y* para *x* e $f(y,x) > 0$

ou seja, **existe folga no arco *e***.

Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Constrói-se uma rede residual R’ a partir de R e o fluxo considerado, somente com os arcos utilizáveis (e vértices correspondentes).

Se existir caminho de s para t em R’, então, existe caminho de aumento de fluxo.

Teorema.
Dado um fluxo f, se existir caminho de aumento de s para t em R’ então f não é fluxo máximo.

Fluxo Máximo – Algoritmo F&F

Teorema

Um fluxo *f* em uma rede *R* é máximo se e somente se não existir caminho de aumento de fluxo em *R* com respeito a *f*.

Prova.

Exercício.

Continua...