GRAFOS

Primeiros Conceitos e História
Aula 1.1

Exemplo de Aplicação – Cientista de Dados

Registro	Nome
0	Romero
1	João
2	Janice
3	Inês
4	Torquato
5	Arlindo
6	Juarez
7	Jeanete
8	Jerônimo
9	Markov

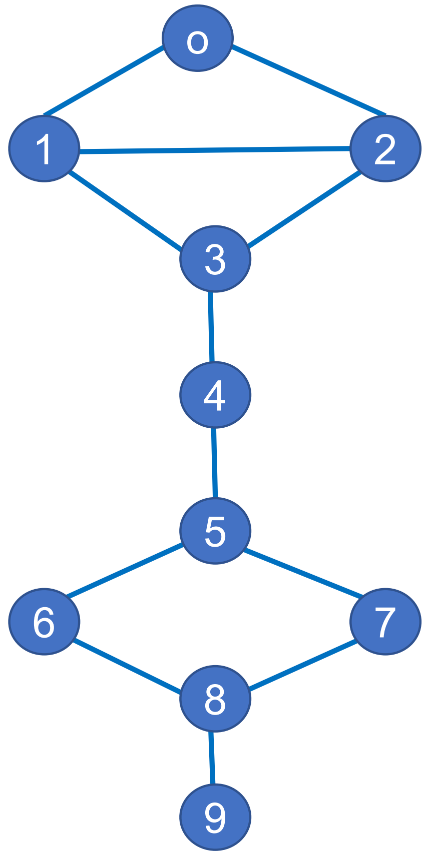
Lista de pares de amigos

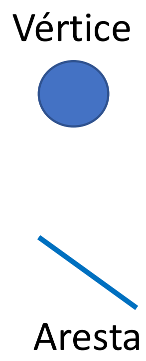
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

Exemplo de Aplicação – Cientista de Dados

Registro	Nome
0	Romero
1	João
2	Janice
3	Inês
4	Torquato
5	Arlindo
6	Juarez
7	Jeanete
8	Jerônimo
9	Markov

Lista de pares de amigos
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)





Exemplo de Aplicação

Registro	Nome
0	Romero
1	João
2	Janice
3	Inês
4	Torquato
5	Arlindo
6	Juarez
7	Jeanete
8	Jerônimo
9	Markov

Lista de pares de amigos:

(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

Tarefas

1. Criar lista de amigos para cada pessoa.
2. Encontrar o número total de conexões de amizade.
3. Quem são as pessoas mais conectadas?
4. Ordenar os usuários dos que tem mais amigos para os que tem menos amigos.
5. Listar amigos de amigos.
6. Listar amigos em comum para cada par de pessoas.

Exemplo de Aplicação

Registro	Nome
0	Romero
1	João
2	Janice
3	Inês
4	Torquato
5	Arlindo
6	Juarez
7	Jeanete
8	Jerônimo
9	Markov

Lista de pares de amigos:
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

Lista de interesses:
0 – Estrutura de dados, big data, complexidade de algoritmos, Java, biometria, bioinformática, web design
1 – banco de dados, jogos, web design, complexidade de algoritmos, educação
2 - Python, Interação homem-máquina, redes sociais, processamento gráfico, starcraft, métodos formais
3 – R, Python, estatística, regressão, probabilidade
4 – aprendizado de máquinas, regressão, árvores de decisão, compiladores
5 – Python, R, Java, C++, teste de software, linguagens de programação
6 – estatística, probabilidade, matemática, teoria
7 – aprendizado de máquinas, interação homem-máquina, sistemas multiagentes, redes neurais
8 – Big data, inteligência artificial, redes neurais, deep learning
9 – estruturas de dados, Java, compiladores, big data

Exemplo de Aplicação

Registro	Nome
0	Romero
1	João
2	Janice
3	Inês
4	Torquato
5	Arlindo
6	Juarez
7	Jeanete
8	Jerônimo
9	Markov

Lista de pares de amigos:
(0,1), (0,2), (1,2), (1,3)
(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)
(5,7), (6,8), (7,8), (8,9)

Lista de interesses:
0 – Estrutura de dados, big data, complexidade de algoritmos, Java, biometria, bioinformática, web design
1 – banco de dados, jogos, web design, complexidade de algoritmos, educação
2 - Python, Interação homem-máquina, redes sociais, processamento gráfico, starcraft, métodos formais
3 – R, Python, estatística, regressão, probabilidade
4 – aprendizado de máquinas, regressão, árvores de decisão, compiladores
5 – Python, R, Java, C++, teste de software, linguagens de programação
6 – estatística, probabilidade, matemática, teoria
7 – aprendizado de máquinas, interação homem-máquina, sistemas multiagentes, redes neurais
8 – Big data, inteligência artificial, redes neurais, deep learning
9 – estruturas de dados, Java, compiladores, big data

Tarefas
7. Encontrar pessoas com interesses comuns.

8. Fazer indicações de amizade por interesse comum.

9. Quais são os tópicos que os usuários estão mais interessados?

Objetivos

-Aprender a modelar problemas reais através de grafos

-Aprender a desenvolver algoritmos que solucionem problemas em grafos

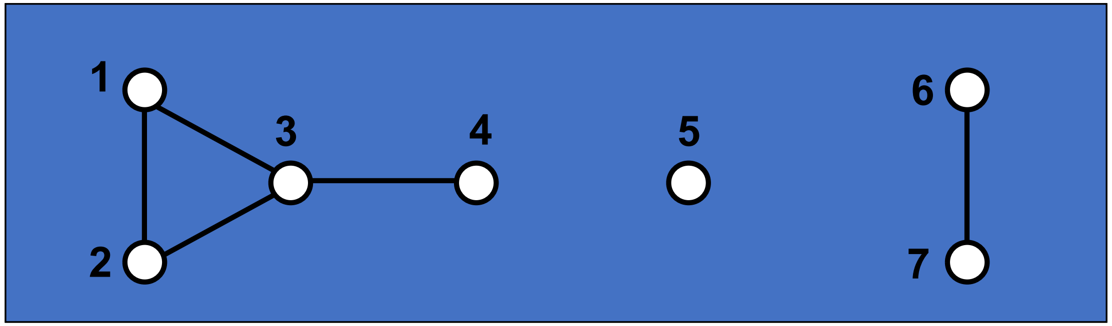
- Aprender a desenvolver algoritmos para problemas reais modelados como problemas em grafos

GRAFO

Um grafo $G = (N,M)$ é formado por um conjunto de vértices (N) e um conjunto de pares ordenados (M), arestas.

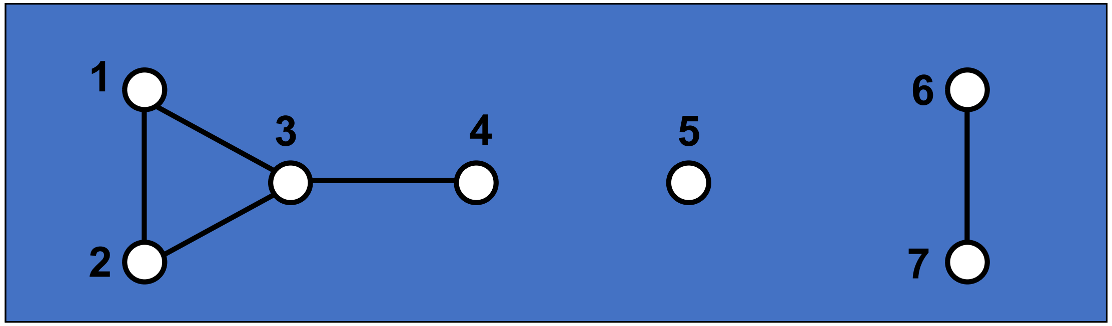
Exemplo:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$M = \{ (1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (6,7)\}$



Grafo Simples

Um grafo *G* = (*N*,*M*) é uma dupla de conjuntos finitos *N* e *M*, tal que cada elemento de *M* define uma relação entre exatamente dois elementos distintos de *N* e não existem dois elementos distintos de *M* tais que definam a mesma relação entre o mesmo par de elementos de *N*.



Grafo Simples

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

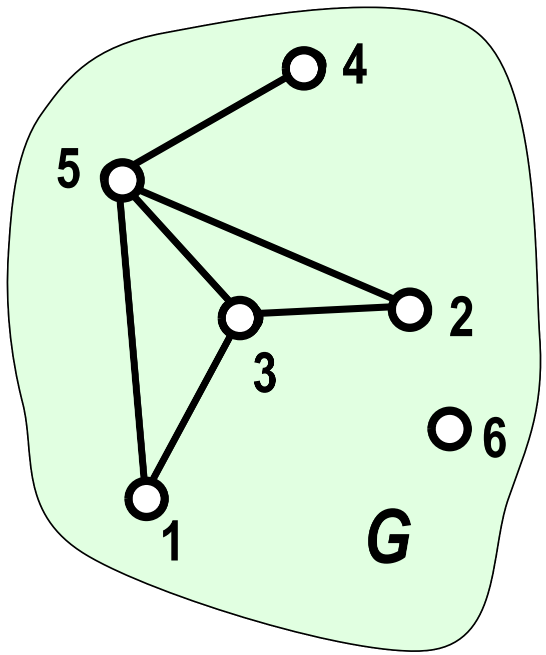
$|N| = n$ é a *ordem do grafo*

$n = 6$

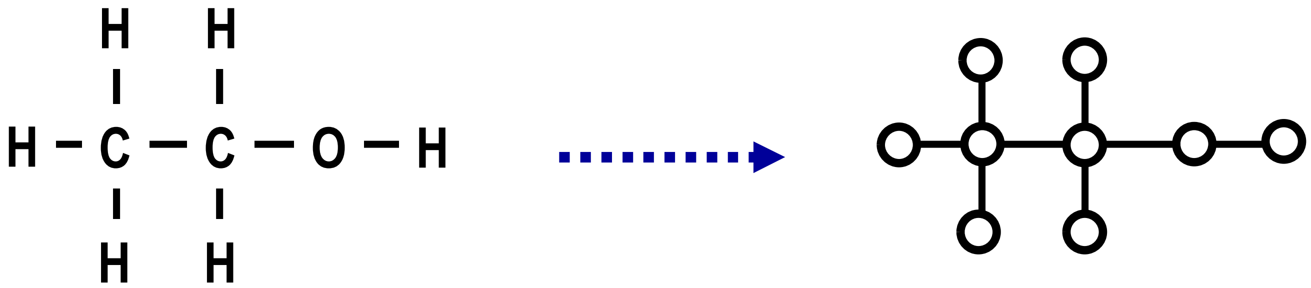
$M = \{(1,5), (1,3), (3,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$

$|M| = m$ é o *tamanho do grafo*

$m = 6$



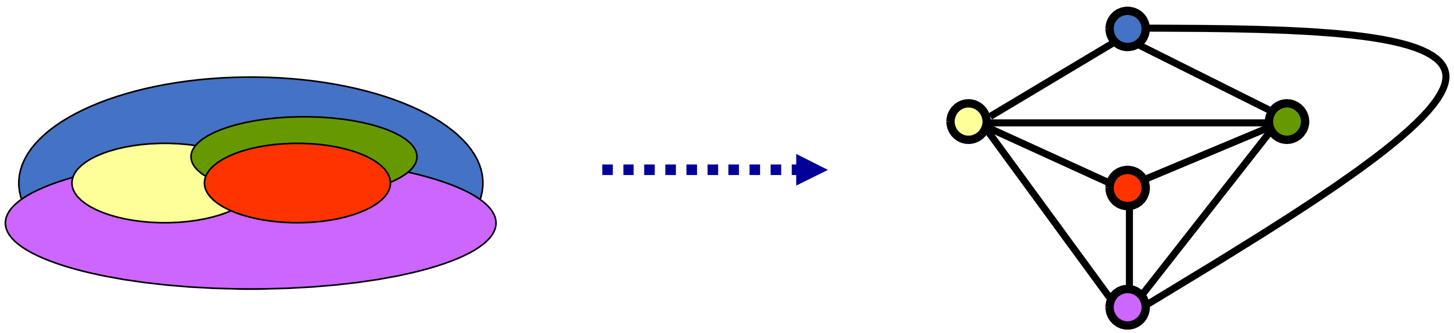
Grafo Simples



Qual é a ordem deste grafo?

Qual é o tamanho deste grafo?

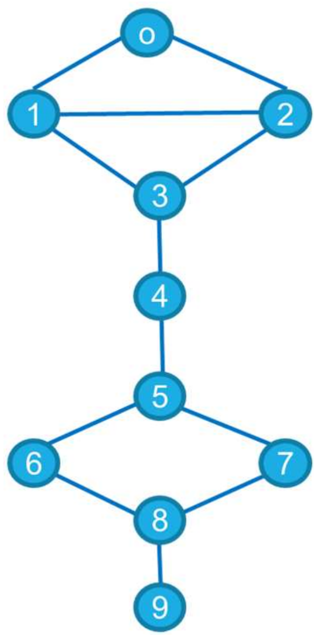
Grafo Simples

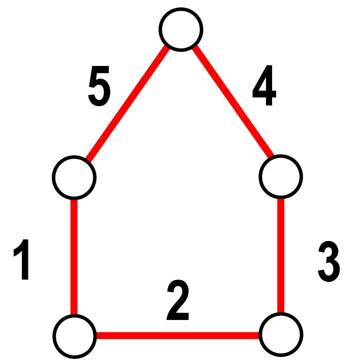


Qual é a ordem deste grafo?
Qual é o tamanho deste grafo?

Grafo rotulado em vértices

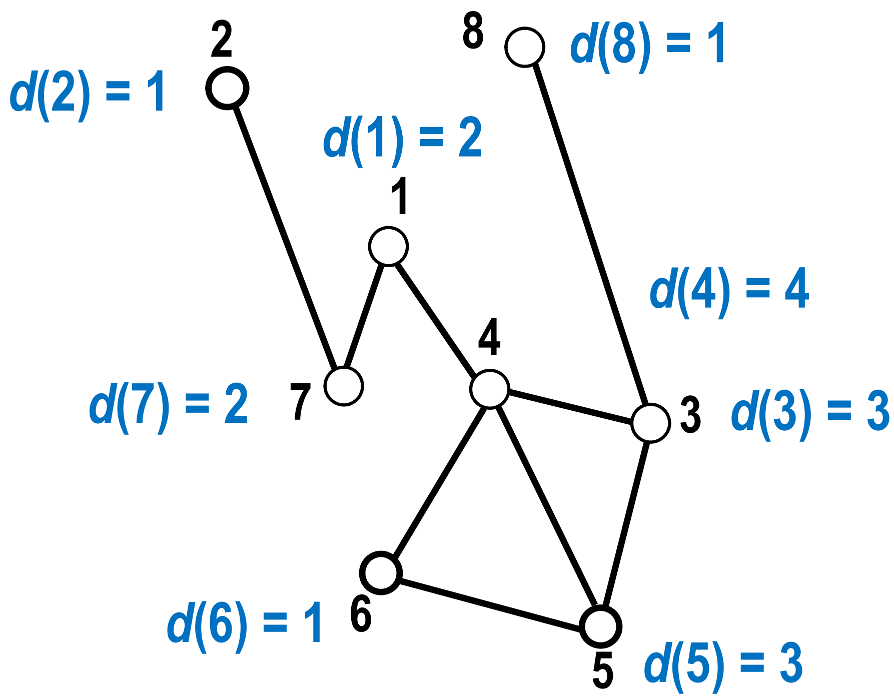
Um grafo é *Rotulado* se existem rótulos (identificação) associados às suas arestas ou vértices (rótulos numéricos ou alfabéticos).





Grau de um Vértice

Grau **(ou valência) de um vértice v_i , $d(v_i)$, em um grafo não direcionado é igual ao número de arestas incidentes no vértice (cardinalidade do conjunto de adjacentes)**

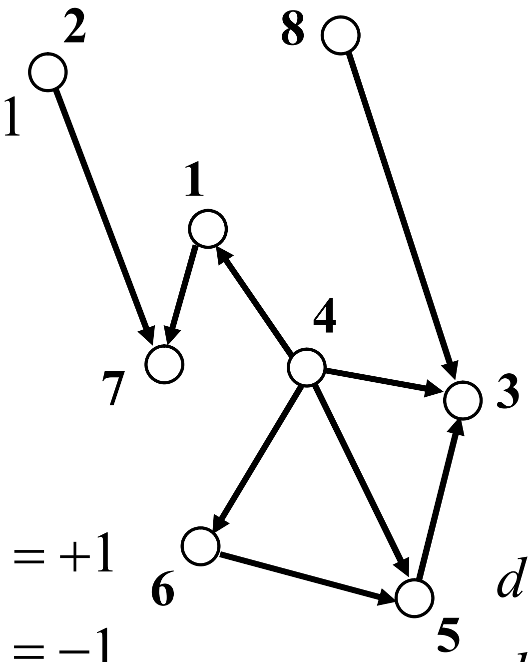


Grau interno e externo de um vértice

No caso do grafo ser direcionado o grau de um vértice x_i é composto por um ***valor interno*** e um ***externo***.

$$d^+(x_2) = 0$$

$$d^-(x_2) = -1$$



$$d^+(x_6) = +1$$

$$d^-(x_6) = -1$$

$$d^+(x_5) = +2$$

$$d^-(x_5) = -1$$

Grau de um Vértice

Teorema

A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual a 2m, onde m = |E|.

Prova:* *Exercício

Grau de um Vértice

Corolário

O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.

Exercício

Grau de um Vértice

Corolário

O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.

Prova:

Suponha um grafo com n vértices, dos quais r possuem grau par.

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{r} d(x_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$$

Grau de um Vértice

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{r} d(x_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$$

par = 2*m*   par

Logo, $\sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$ é par

Mas cada um dos *n-r* vértices tem grau ímpar.
Portanto, o número desses vértices é par.

História

História

Problemas em Grafos

Pontes de Königsberg

Teorema das 4 cores

Grafo Hamiltoniano

Árvores

Pontes de Königsberg

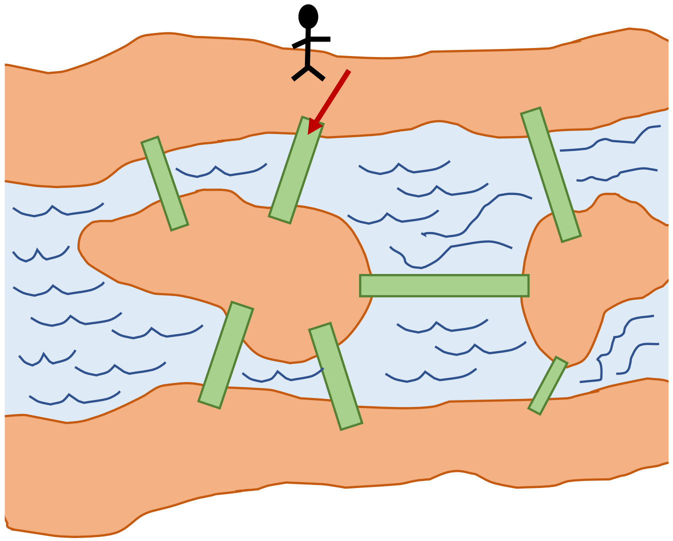
Euler (1735)

Königsberg, a montanha do rei

Atualmente, Kaliningrado

Pontes de Königsberg

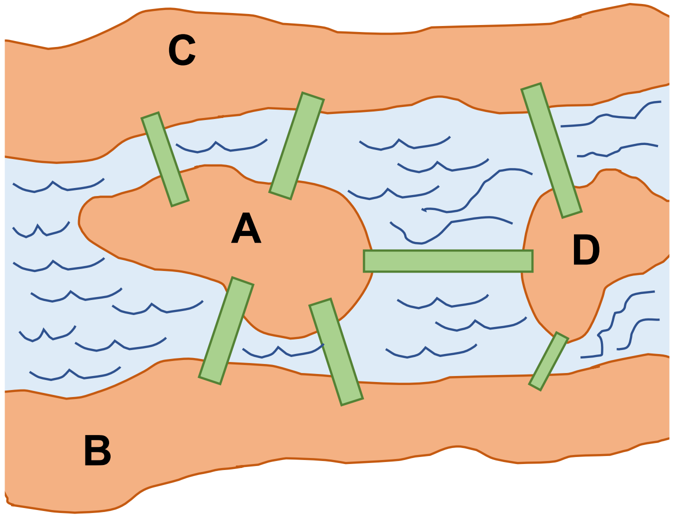
Euler (1735)



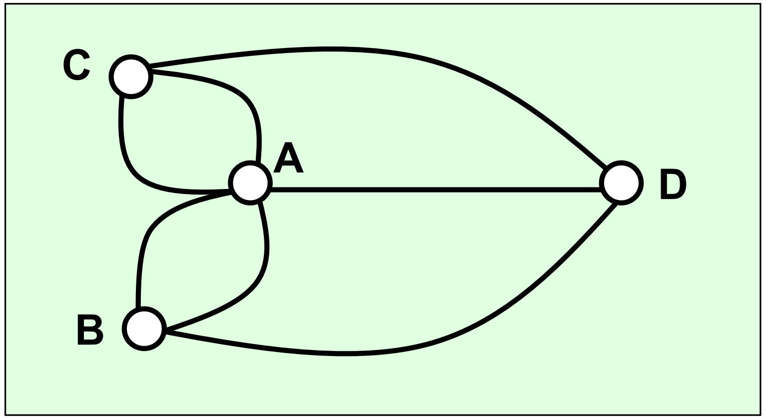
É possível atravessar cada ponte uma única vez e voltar ao local de origem?

Pontes de Königsberg

Euler (1735)



Grafo para o problema



É possível passar por cada aresta uma única vez e voltar ao vértice inicial?

Pontes de Königsberg

Euler (1735)

Problema da Cadeia Euleriana em um grafo G:

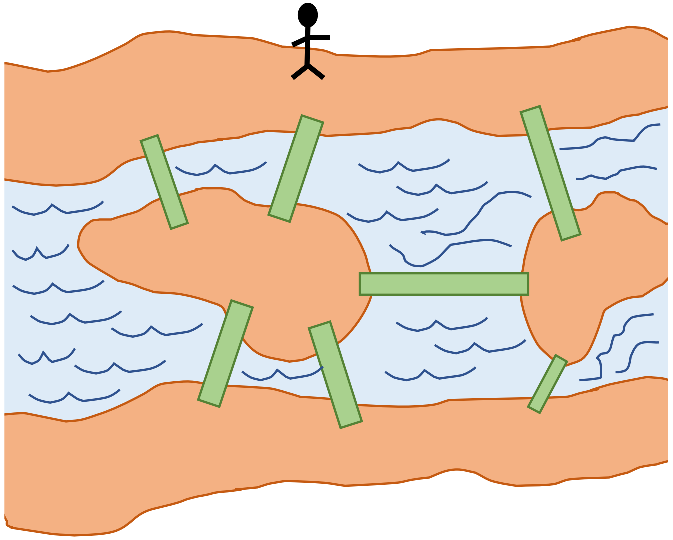
É possível passar por cada aresta uma única vez e voltar ao vértice inicial?

Teorema

É possível passar por cada aresta uma única vez e voltar ao vértice inicial se e somente se todos os vértices tiverem grau par.

Pontes de Königsberg

Euler (1735)



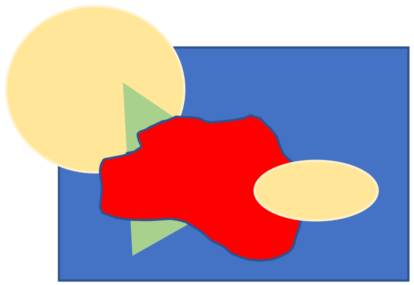
É possível atravessar cada ponte uma única vez e voltar ao local de origem?

Não

Teorema das Quatro Cores

Guthrie (1852)

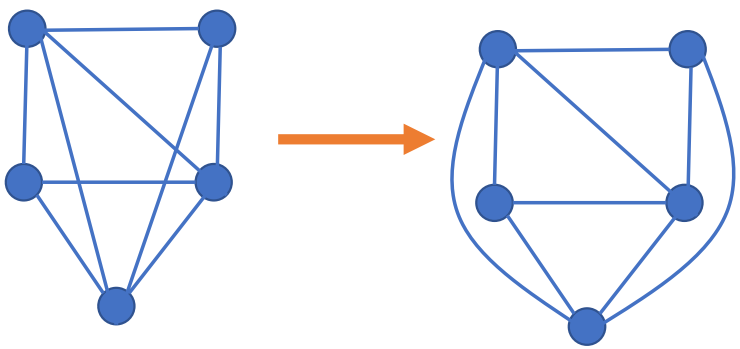
Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que quaisquer duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?



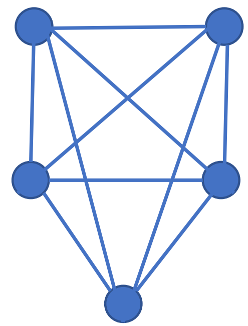
Planaridade

Grafo Planar

Pode ser desenhado no plano sem que as arestas se cruzem



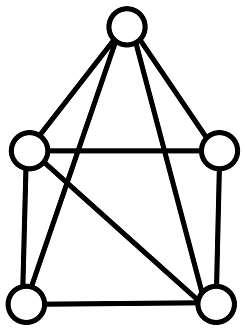
Planar

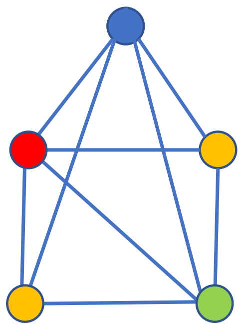


Não Planar

Teorema das Quatro Cores

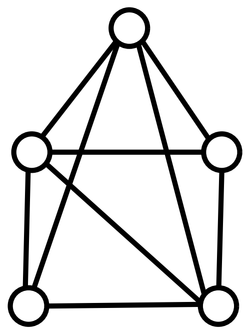
Problema da Coloração dos Vértices de um Grafo





Teorema das Quatro Cores

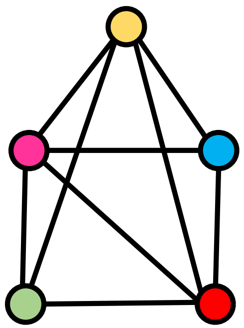
Problema da Coloração dos Vértices de um Grafo



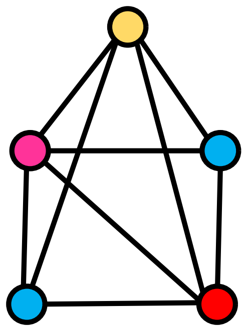
Atribuir cores aos vértices de modo que vértices adjacentes recebam cores diferentes

Teorema das Quatro Cores

Problema da Coloração dos Vértices de um Grafo



5 cores

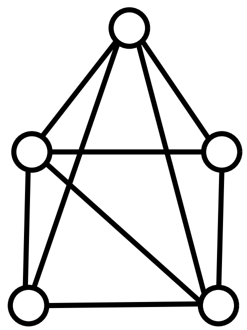


4 cores

Atribuir cores aos vértices de modo que vértices adjacentes recebam cores diferentes

Teorema das Quatro Cores

Problema da Coloração dos Vértices de um Grafo

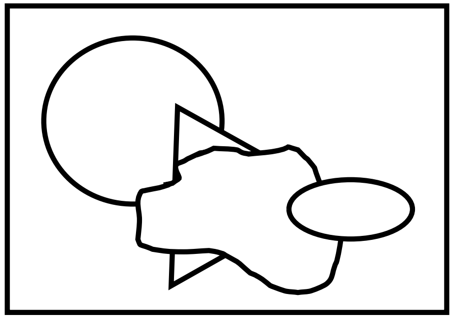


Qual o menor número de cores que satisfaz a restrição da coloração?
Número cromático

Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?

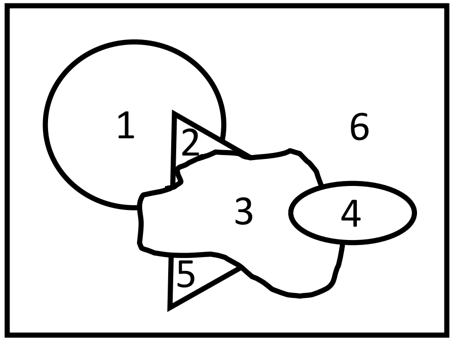
Quatro cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar?



Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?

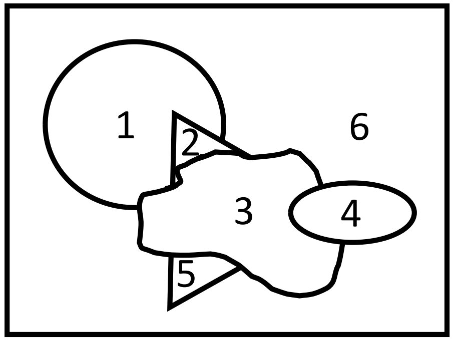
Quatro cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar?

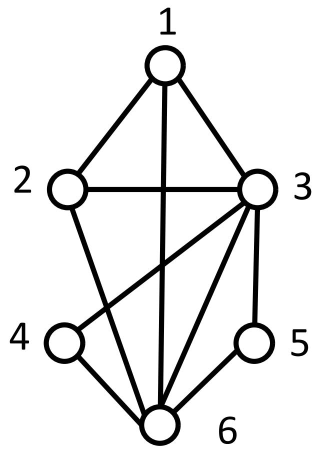


Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar?

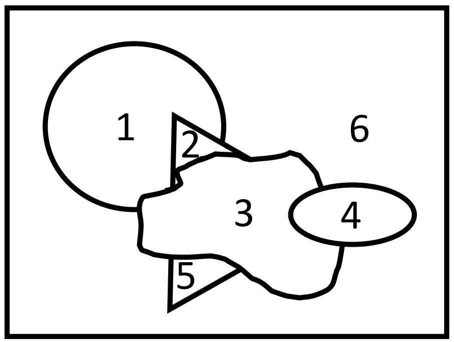


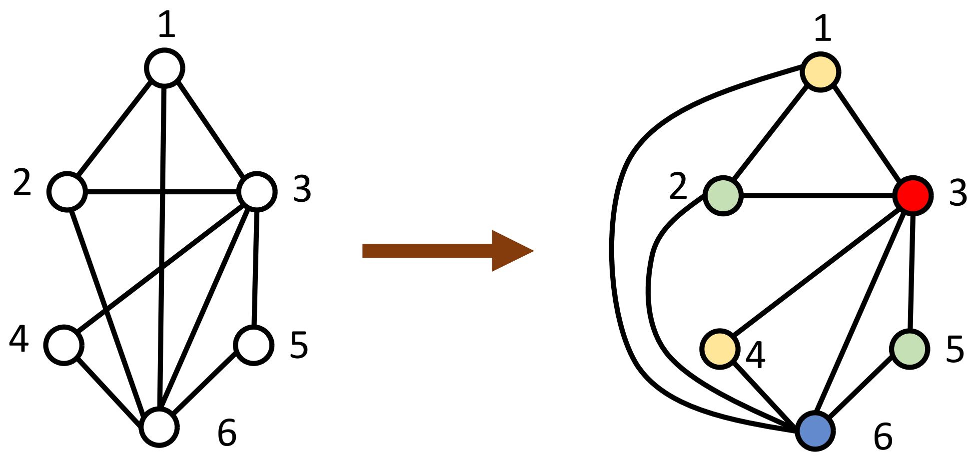


Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar?

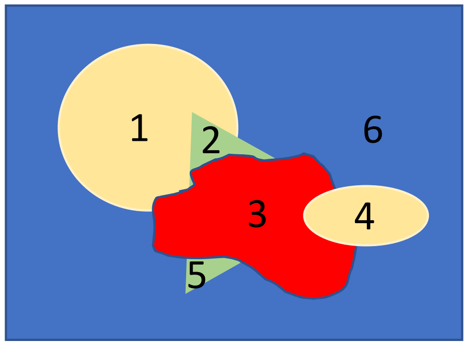


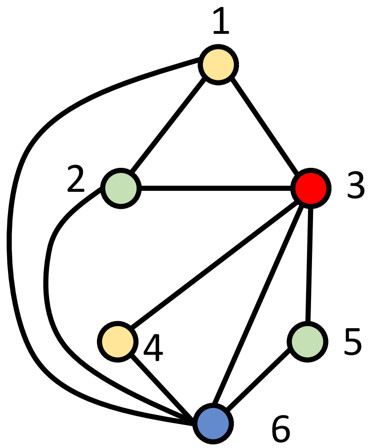


Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa de forma que duas regiões que possuam uma fronteira sejam coloridas com cores diferentes?

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar?





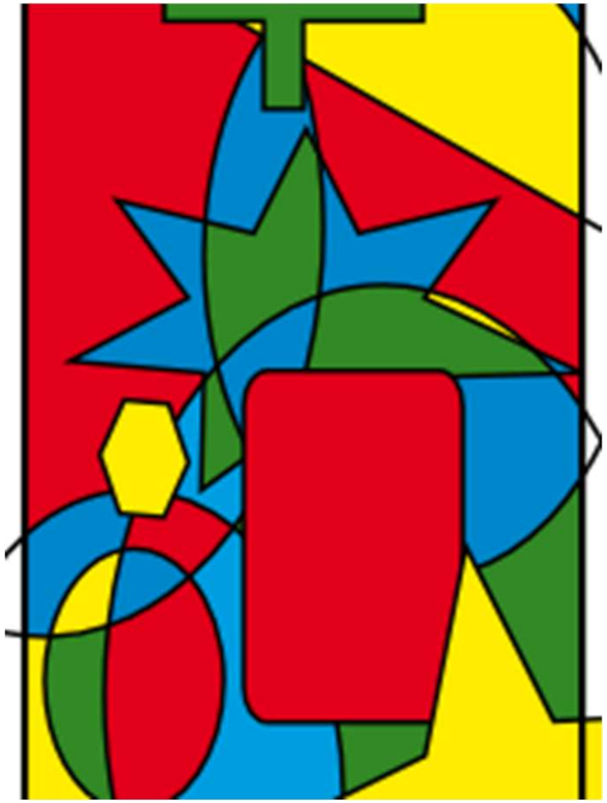
Teorema das Quatro Cores

Guthrie (1852)

Appel e Haken (1972)

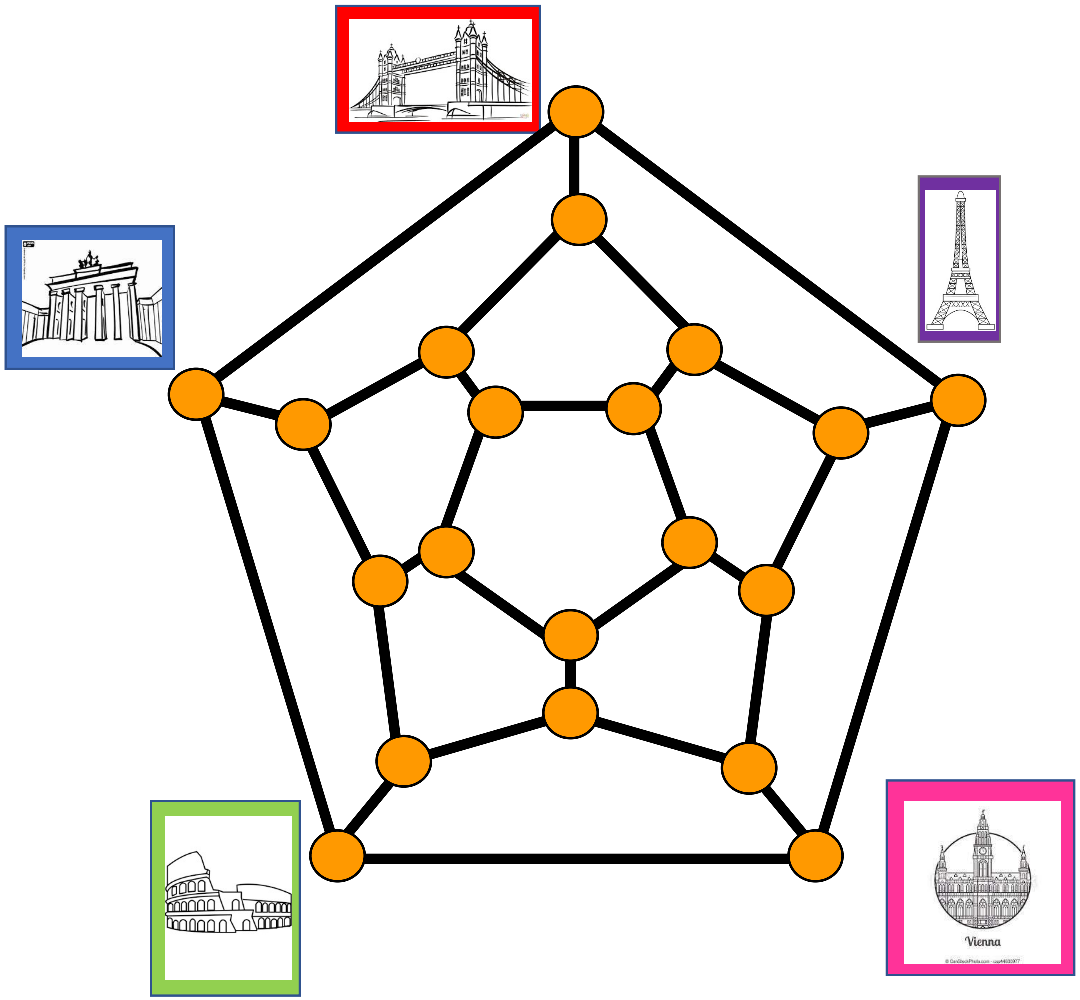
Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1996)

Thomas (1998)



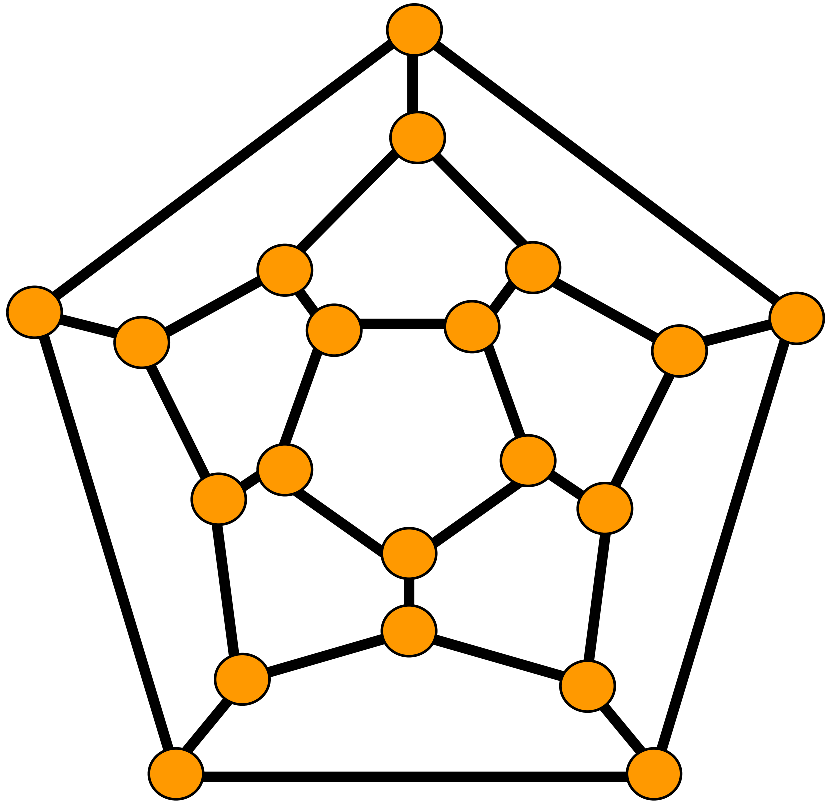
O Jogo de Hamilton

Willian Rowan Hamilton
(1857)
"Around the World"



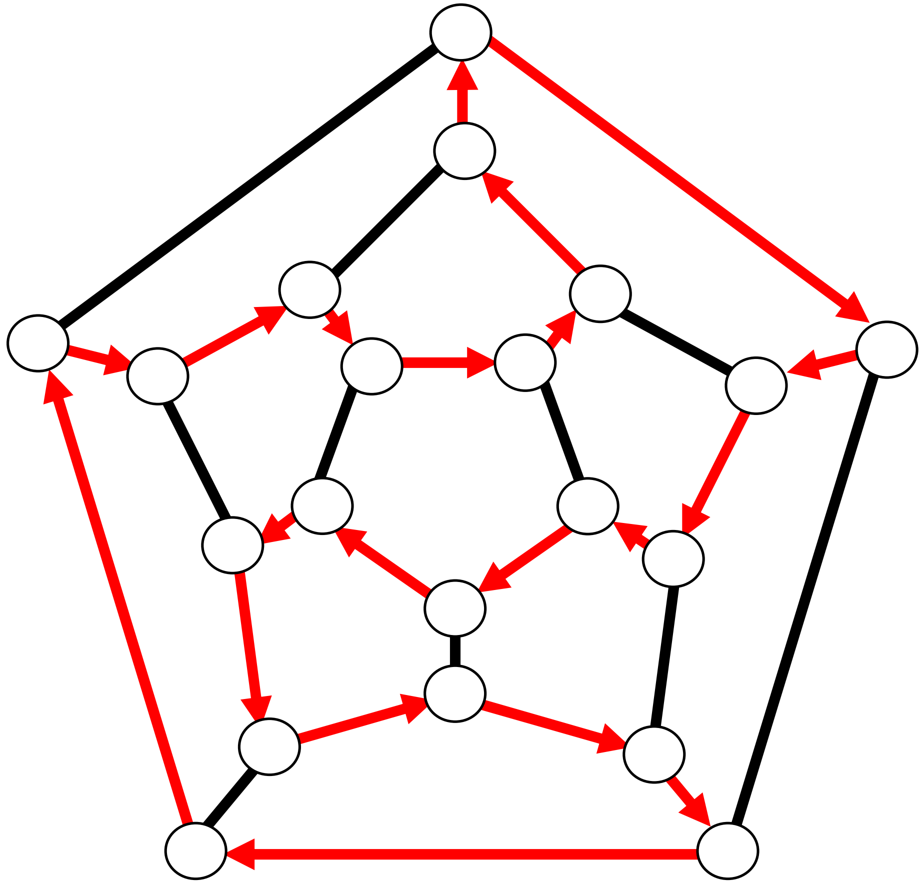
O Jogo de Hamilton

É possível passar uma única vez em cada vértice e voltar ao local de origem?



Ciclo Hamiltoniano

Uma solução para“Around the World”



Exercícios

1. Desenhe todos os grafos de ordem 5.

2. Desenhe o grafo que representa as possibilidades de movimento do cavalo no jogo de xadrez .
3. Desenhe o grafo que representa a incompatibilidade de 7 espécies de peixes, A,B,C,D,E e F, sendo as incompatibilidades entre espécies dadas pelos pares: A-B, A-D, A-E, B-E, B-F e C-F.

4. Prove que a soma dos graus dos vértices de um grafo $G = (V,E)$ é igual a $2m$, onde $m = |E|$.

Exercícios

5. Considere G um grafo com n vértices e m arestas tal que G possui vértices com grau k ou k+1. Prove que se G possui n_k vértices de grau k e n_{k+1} vértices de grau k + 1, então

$$n_k = (k+1)n - 2m.$$

fim