# GRAFOS

# Aula 1 - Introdução

# Exemplo de Aplicação – Cientista de Dados

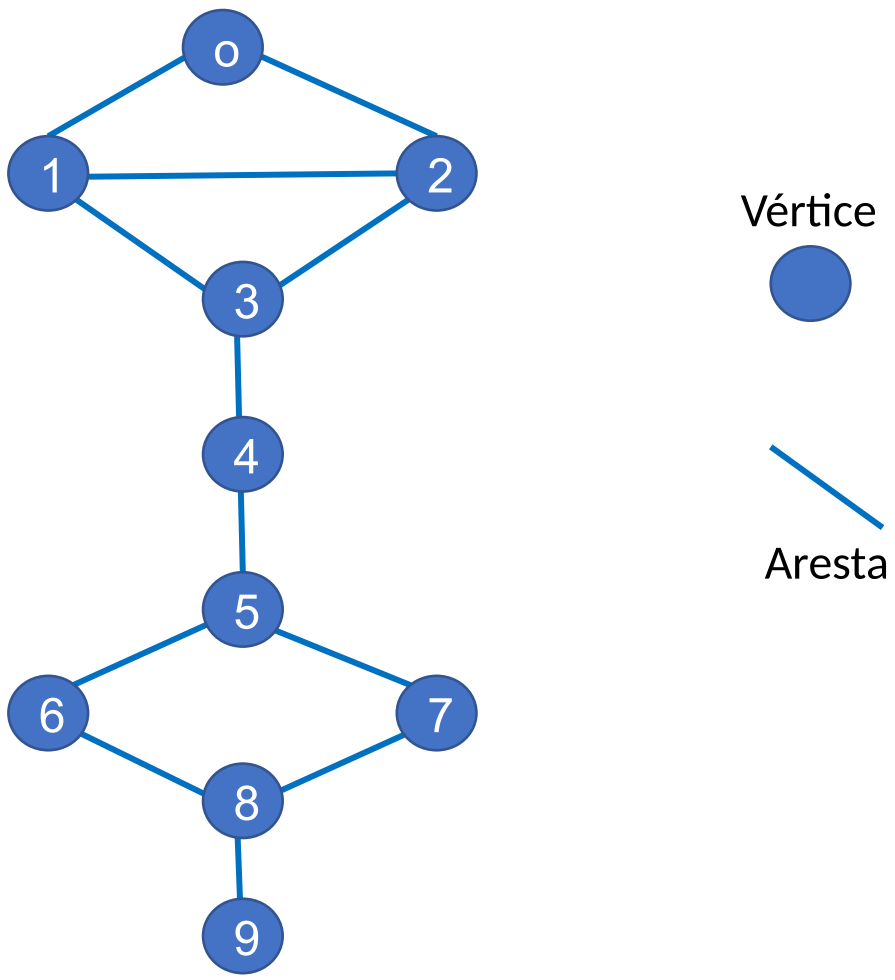
| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |
| 5 | Arlindo |
| 6 | Juarez |
| 7 | Jeanete |
| 8 | Jerônimo |
| 9 | Markov |

Lista de pares de amigos
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

# Exemplo de Aplicação – Cientista de Dados

| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |
| 5 | Arlindo |
| 6 | Juarez |
| 7 | Jeanete |
| 8 | Jerônimo |
| 9 | Markov |

Lista de pares de amigos
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)



# Exemplo de Aplicação

| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |
| 5 | Arlindo |
| 6 | Juarez |
| 7 | Jeanete |
| 8 | Jerônimo |
| 9 | Markov |

Lista de pares de amigos:
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

Tarefas

1. Criar lista de amigos para cada pessoa.
2. Encontrar o número total de conexões de amizade.
3. Quem são as pessoas mais conectadas?
4. Ordenar os usuários dos que tem mais amigos para os que tem menos amigos.
5. Listar amigos de amigos.
6. Listar amigos em comum para cada par de pessoas.

# Exemplo de Aplicação

| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |
| 5 | Arlindo |
| 6 | Juarez |
| 7 | Jeanete |
| 8 | Jerônimo |
| 9 | Markov |

Lista de pares de amigos:
(0,1)
(0,2)
(1,2)
(1,3)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,6)
(5,7)
(6,8)
(7,8)
(8,9)

Lista de interesses:
0 – Estrutura de dados, big data, complexidade de algoritmos, Java, biometria, bioinformática, web design
1 – banco de dados, jogos, web design, complexidade de algoritmos, educação
2 - Python, Interação homem-máquina, redes sociais, processamento gráfico, starcraft, métodos formais
3 – R, Python, estatística, regressão, probabilidade
4 – aprendizado de máquinas, regressão, árvores de decisão, compiladores
5 – Python, R, Java, C++, teste de software, linguagens de programação
6 – estatística, probabilidade, matemática, teoria
7 – aprendizado de máquinas, interação homem-máquina, sistemas multiagentes, redes neurais
8 – Big data, inteligência artificial, redes neurais, deep learning
9 – estruturas de dados, Java, compiladores, big data

# Exemplo de Aplicação

| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |
| 5 | Arlindo |
| 6 | Juarez |
| 7 | Jeanete |
| 8 | Jerônimo |
| 9 | Markov |

Lista de pares de amigos:
(0,1), (0,2), (1,2), (1,3)
(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)
(5,7), (6,8), (7,8), (8,9)

Lista de interesses:
0 – Estrutura de dados, big data, complexidade de algoritmos, Java, biometria, bioinformática, web design
1 – banco de dados, jogos, web design, complexidade de algoritmos, educação
2 - Python, Interação homem-máquina, redes sociais, processamento gráfico, starcraft, métodos formais
3 – R, Python, estatística, regressão, probabilidade
4 – aprendizado de máquinas, regressão, árvores de decisão, compiladores
5 – Python, R, Java, C++, teste de software, linguagens de programação
6 – estatística, probabilidade, matemática, teoria
7 – aprendizado de máquinas, interação homem-máquina, sistemas multiagentes, redes neurais
8 – Big data, inteligência artificial, redes neurais, deep learning
9 – estruturas de dados, Java, compiladores, big data

Tarefas
7. Encontrar pessoas com interesses comuns.

8. Fazer indicações de amizade por interesse comum.

9. Quais são os tópicos que os usuários estão mais interessados?

# Objetivos

-Aprender a modelar problemas reais através de grafos

-Aprender a desenvolver algoritmos que solucionem problemas em grafos

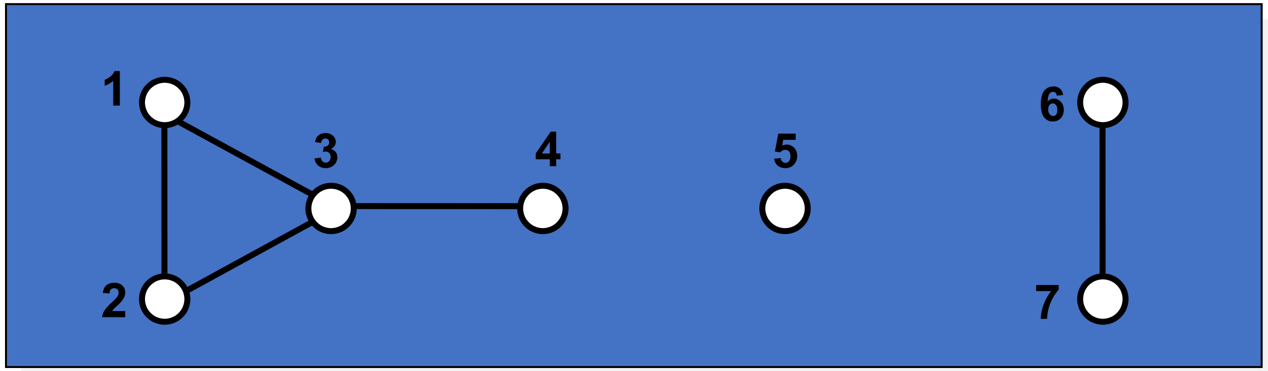
- Aprender a desenvolver algoritmos para problemas reais modelados como problemas em grafos

# GRAFO

**Um grafo $G = (N,M)$ é formado por um conjunto de vértices ($N$) e um conjunto de pares ordenados ($M$), arestas.**

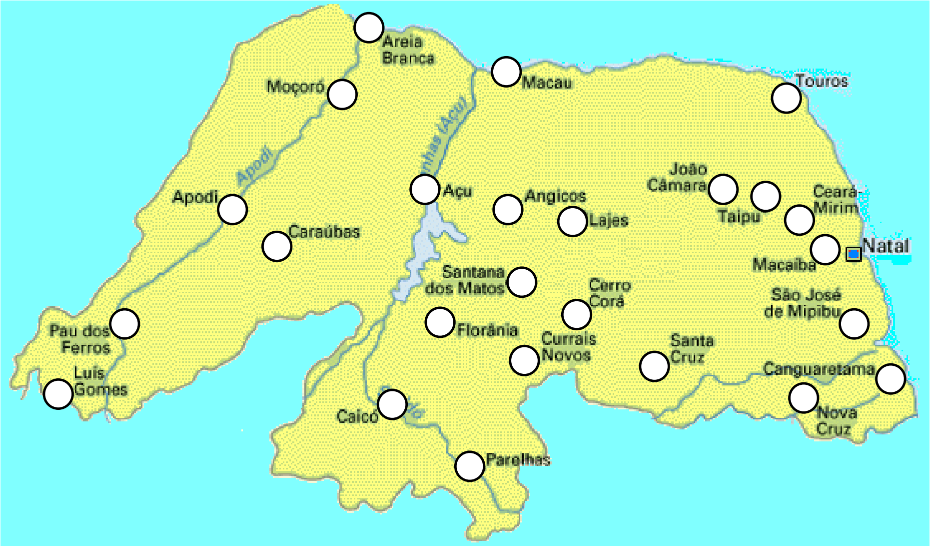
**Exemplo:**

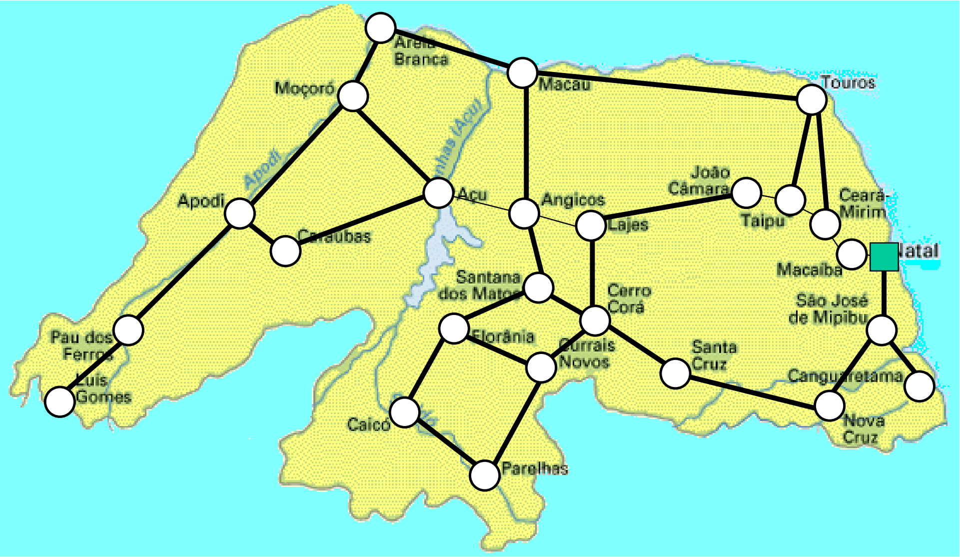
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$M = \{ (1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (6,7)\}$

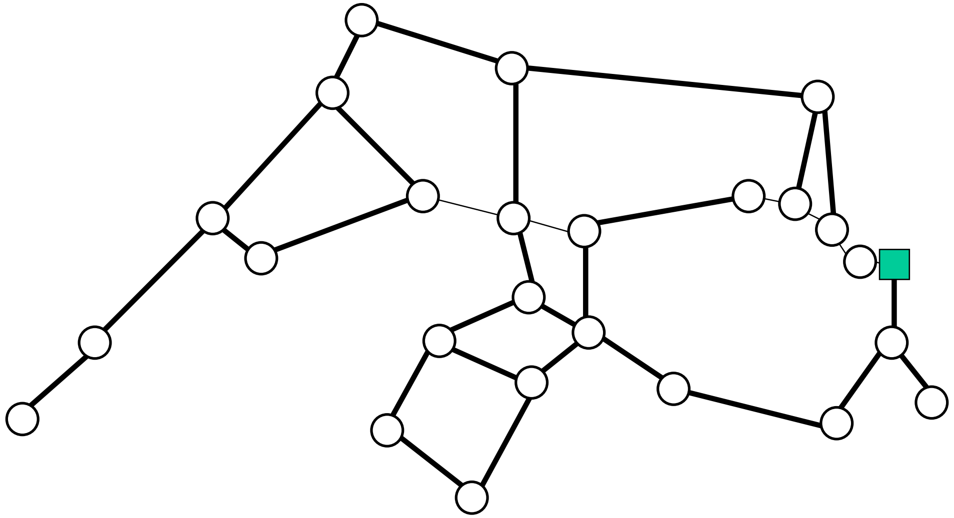


# Exemplo


Areia Branca
Moçoró
Macau
Touros
Apodi
Piranhas (Açu)
Apodi
Caraúbas
Açu
Angicos
Lajes
João Câmara
Taipu
Ceará-Mirim
Natal
Macaíba
Santana dos Matos
Cerro Corá
São José de Mipibu
Pau dos Ferros
Florânia
Currais Novos
Santa Cruz
Canguaretama
Luís Gomes
Caicó
Seridó
Nova Cruz
Parelhas

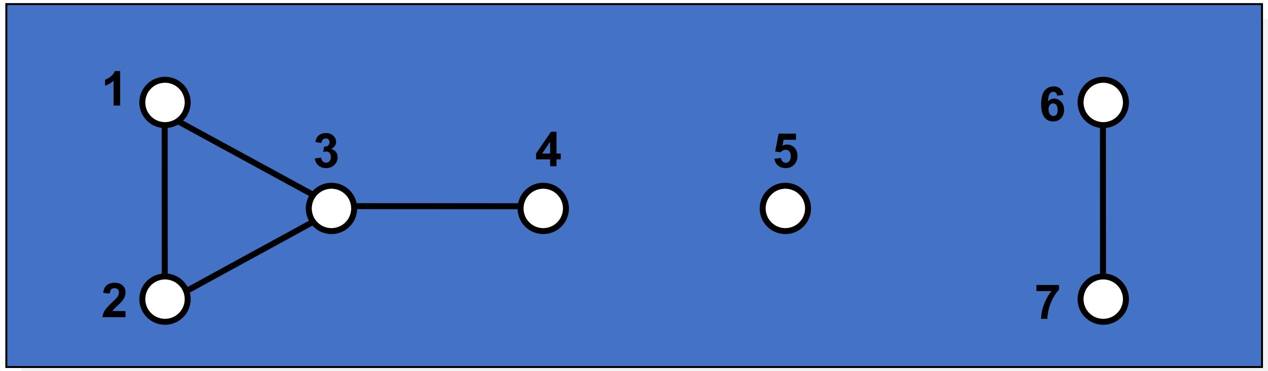

Areia Branca
Moçoró
Macau
Touros
Apodi
Açu
Angicos
Lajes
João Câmara
Taipu
Ceará-Mirim
Natal
Caraúbas
Macaíba
Santana dos Matos
Cerro Corá
São José de Mipibu
Pau dos Ferros
Florânia
Currais Novos
Santa Cruz
Canguaretama
Luís Gomes
Caicó
Nova Cruz
Parelhas


Areia Branca
Moçoró
Macau
Touros
Apodi
Açu
Angicos
João Câmara
Lajes
Taipu
Ceará-Mirim
Natal
Macaíba
Santana dos Matos
Cerro Corá
São José de Mipibu
Pau dos Ferros
Florânia
Currais Novos
Santa Cruz
Canguaretama
Luís Gomes
Caicó
Nova Cruz
Parelhas



# Grafo Simples

**Um grafo $G = (N,M)$ é uma dupla de conjuntos finitos $N$ e $M$, tal que cada elemento de $M$ define uma relação entre exatamente dois elementos distintos de $N$ e não existem dois elementos distintos de $M$ tais que definam a mesma relação entre o mesmo par de elementos de $N$.**



# Grafo Simples

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

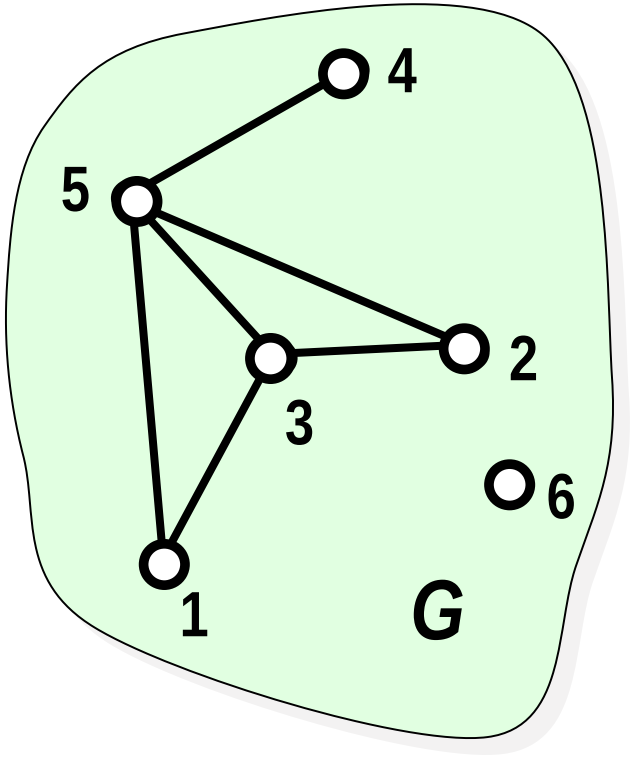
$|N| = n$ é a *ordem do grafo*

$n = 6$

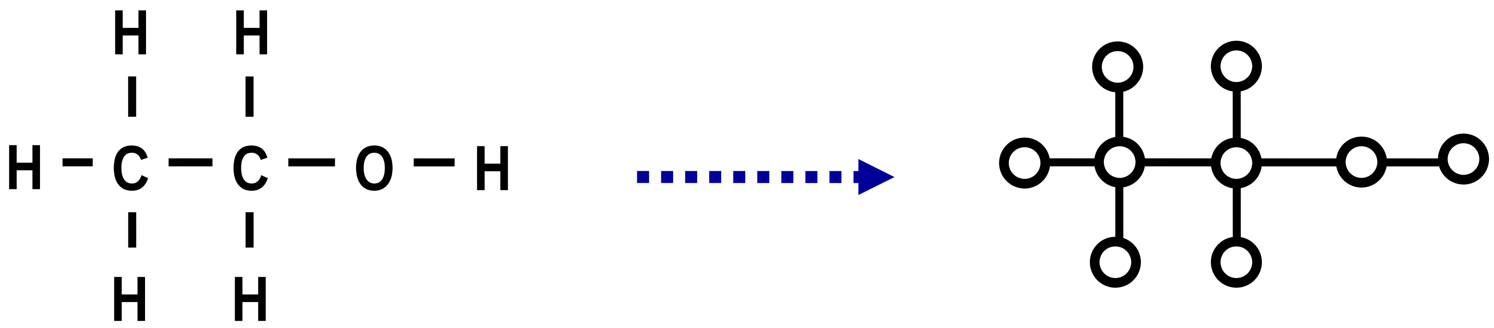
$M = \{(1,5), (1,3), (3,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$

$|M| = m$ é o *tamanho do grafo*

$m = 6$

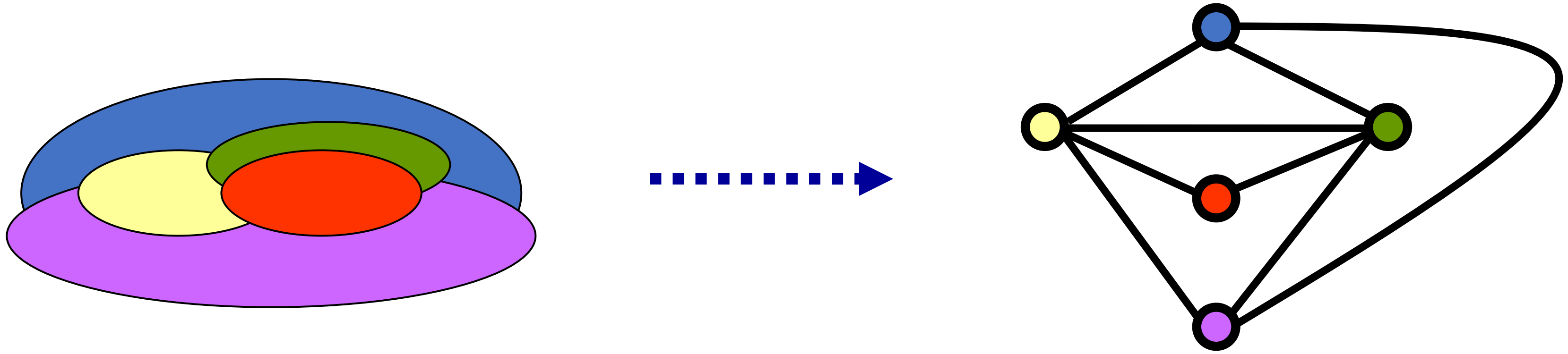


# Grafo Simples




**Qual é a ordem deste grafo?**
**Qual é o tamanho deste grafo?**

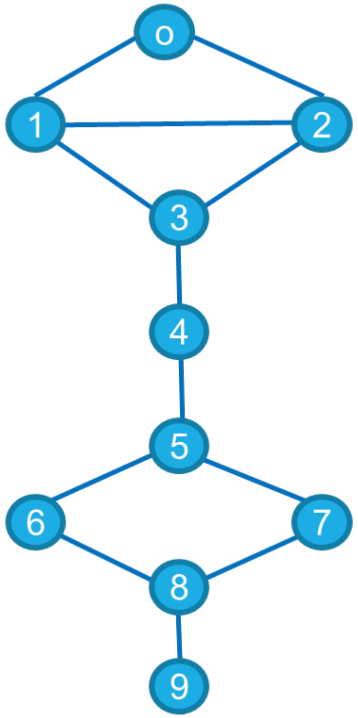
# Grafo Simples

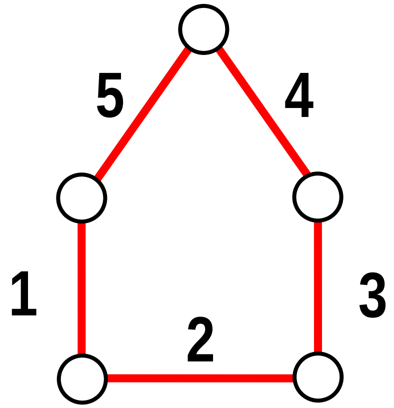


Qual é a ordem deste grafo?
Qual é o tamanho deste grafo?

# Grafo rotulado em vértices

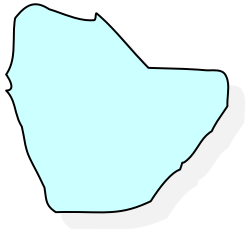
**Um grafo é *Rotulado* se existem rótulos (identificação) associados às suas arestas ou vértices (rótulos numéricos ou alfabéticos).**



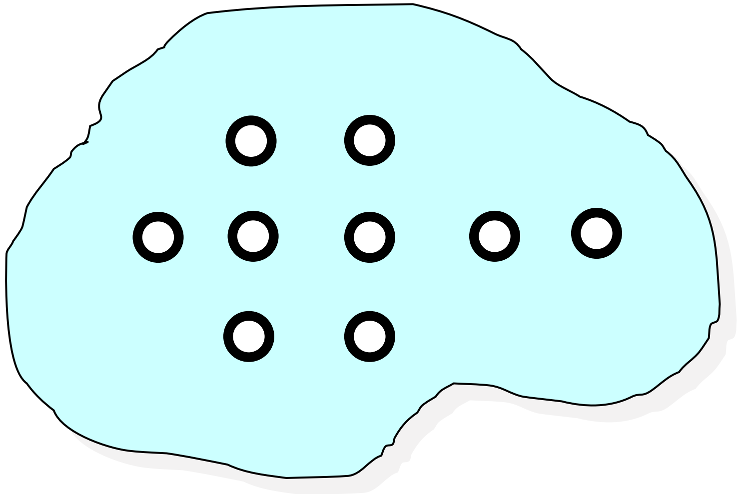



# Grafo Simples

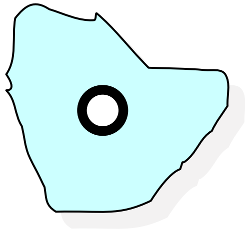
- Grafo Nulo



- Grafo Vazio

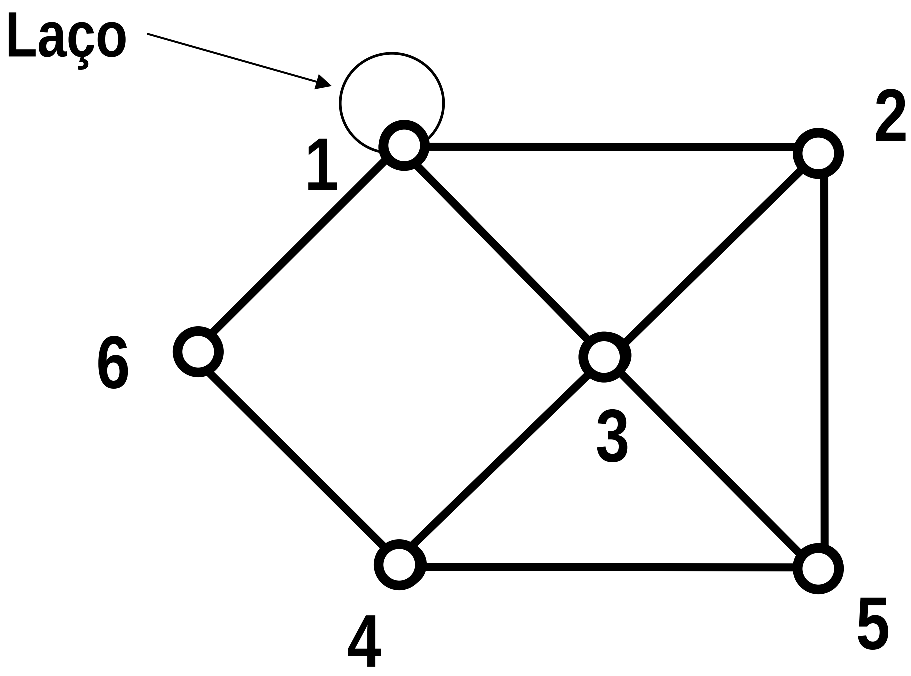


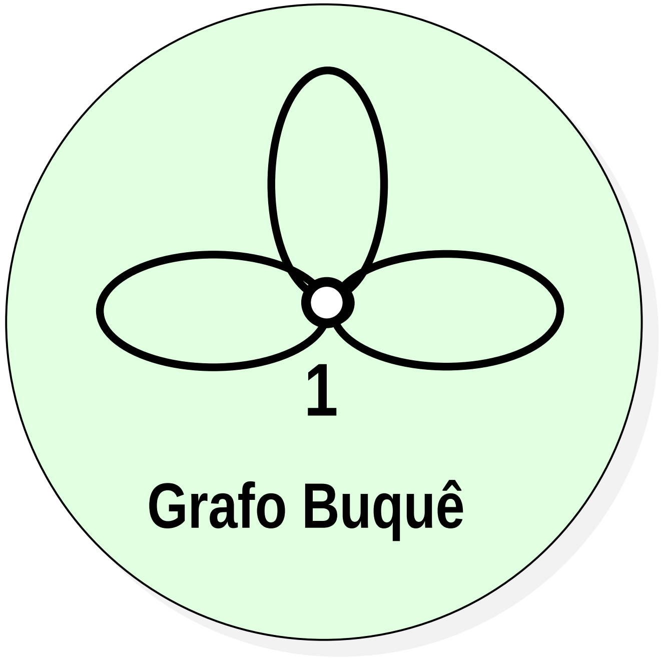
- Grafo Trivial



# Pseudografo

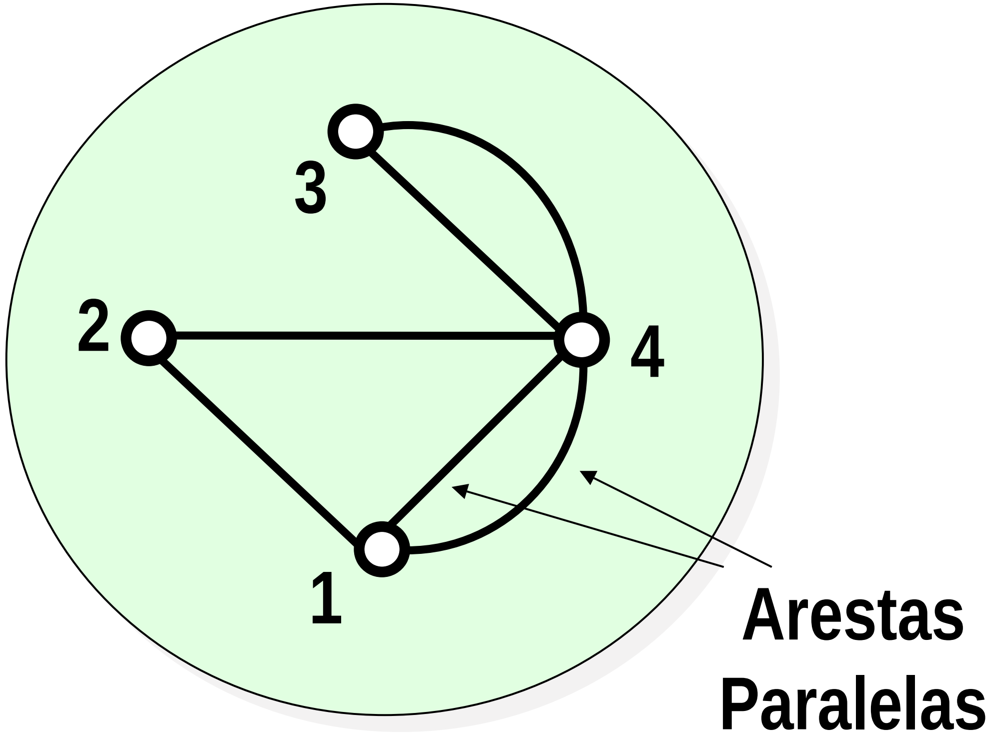
**Laço é uma aresta cujas extremidades incidem sobre o mesmo vértice. Um grafo que contém *no mínimo um laço* é um *Pseudografo.***



# Multigrafo

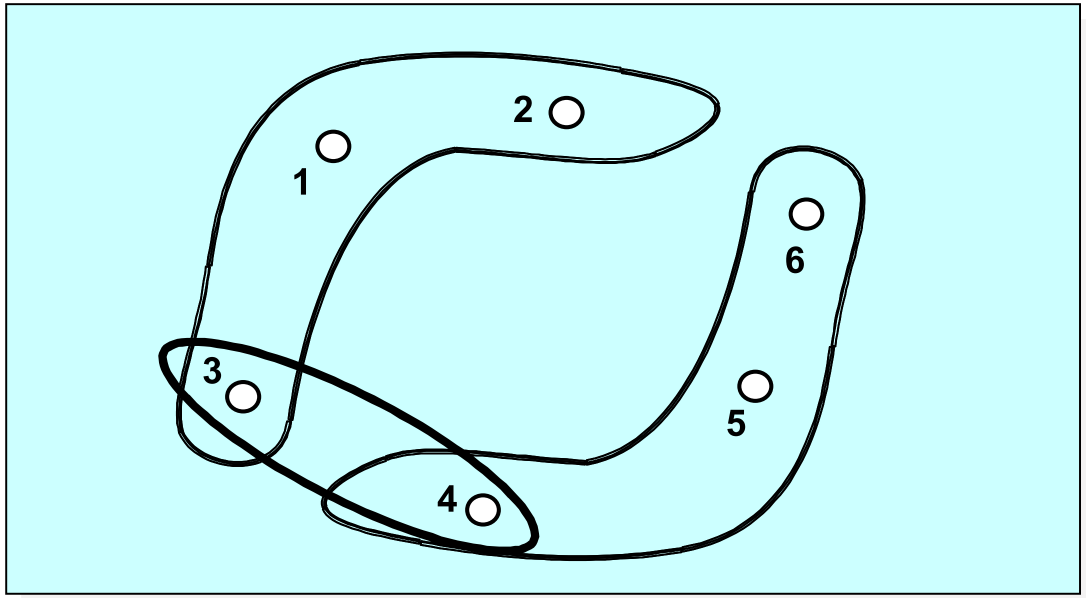
**Um grafo é dito um *Multigrafo* quando possui *arestas paralelas* (ou múltiplas) entre seus pares de vértices**



# Hipergrafo

Uma hiperaresta é uma conexão entre dois ou mais vértices.

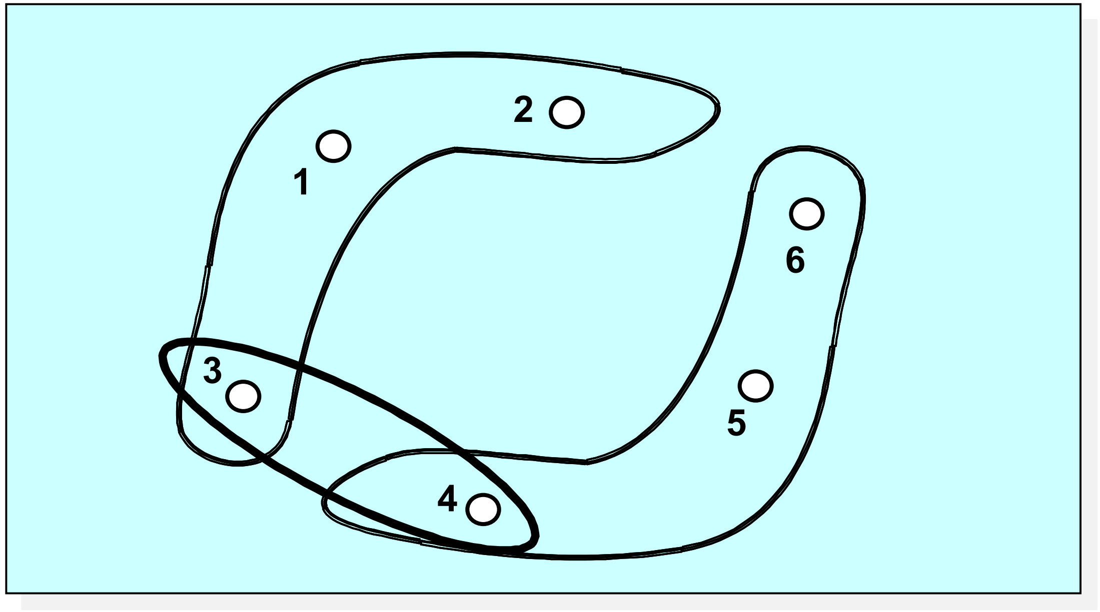
Um grafo $G = (N,M)$, onde $M$ é um conjunto de hiperarestas é dito Hipergrafo.



# Hipergrafo

***Outra definição*:**

**Uma coleção de subconjuntos de um conjunto finito de vértices**



# Hipergrafo

## *Algumas Aplicações*

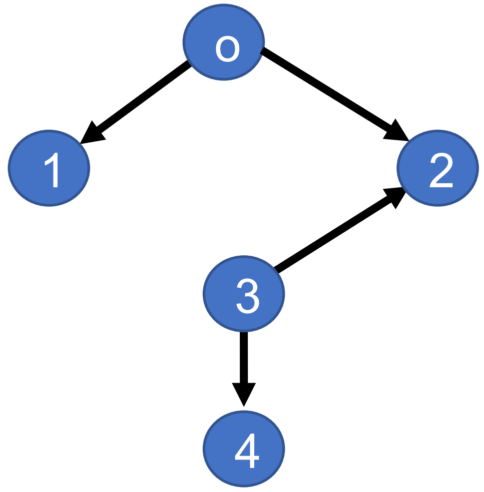
- Redes Sociais
- Arquitetura orientada a serviço (por exemplo, Cloud Computing)
- Sistemas de informação na Web
- Aprendizado de máquina
- Segmentação de imagens

**Referência:**

MOLNÁR, Bálint. Applications of hypergraphs in informatics: a survey and opportunities for research. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput, v. 42, p. 261-282, 2014. https://www.researchgate.net/publication/274733081

# Grafo Direcionado

| Registro | Nome |
|---|---|
| 0 | Romero |
| 1 | João |
| 2 | Janice |
| 3 | Inês |
| 4 | Torquato |




**Arco**

Arcos

(0,1)
(0,2)
(3,2)
(3,4)

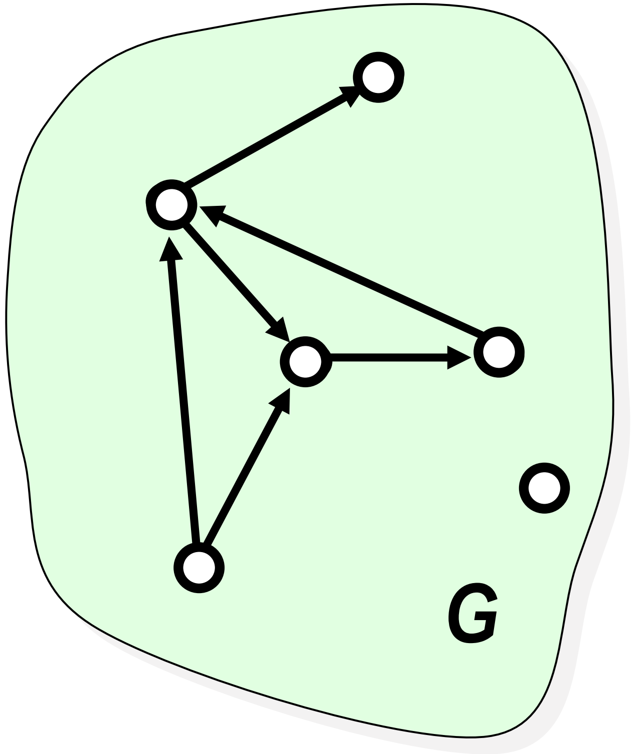
Parentesco

Romero é pai de João e Janice
Inês é mãe de Janice e Torquato

# Grafo Direcionado

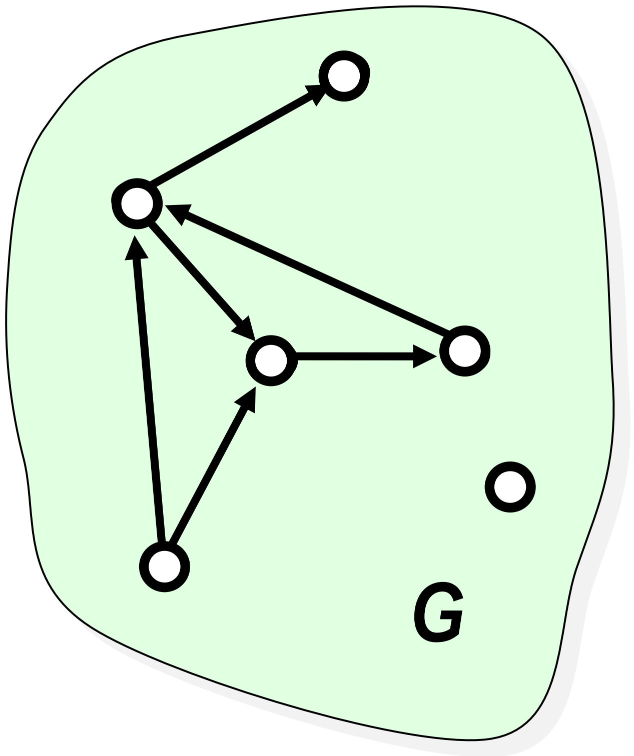
Um grafo é dito *Direcionado* ou *Orientado* quando o sentido das ligações entre os vértices é importante.

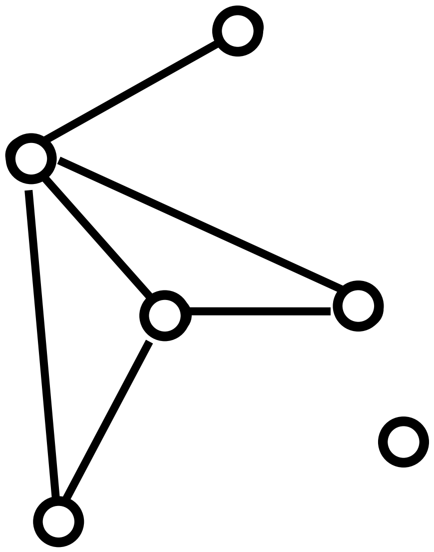
Nesse caso as arestas possuem um sentido marcado por uma seta e recebem o nome de *Arcos*.



# Grafo Direcionado

O ***Grafo Subjacente*** é o grafo resultante de ***G*** quando a orientação dos arcos de ***G*** é ignorada.



***Grafo Subjacente***

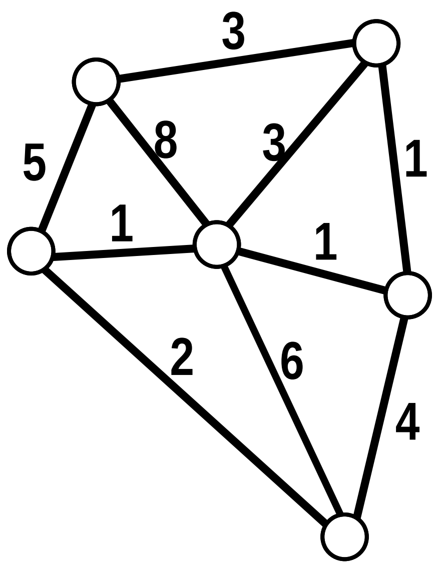
# Grafo Ponderado

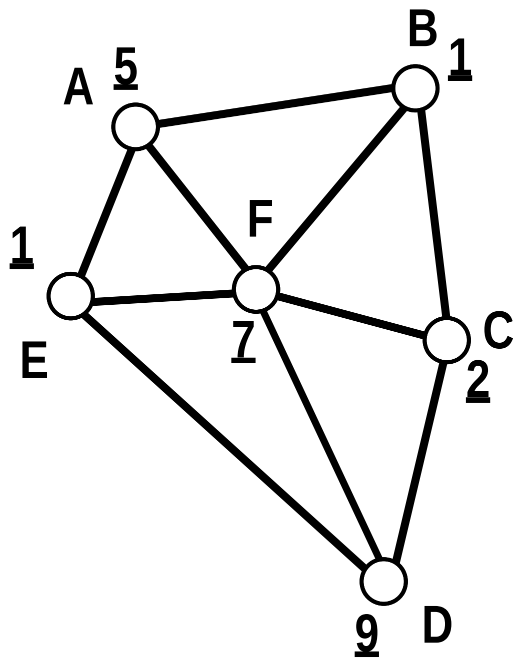
## Representando as distâncias entre cidades


| ID | Cidade |
|---|---|
| 0 | São Luís |
| 1 | Teresina |
| 2 | Fortleza |
| 3 | Natal |
| 4 | João Pessoa |
| 5 | Recife |
| 6 | Maceió |
| 7 | Aracaju |
| 8 | Salvador |

# Grafo Ponderado

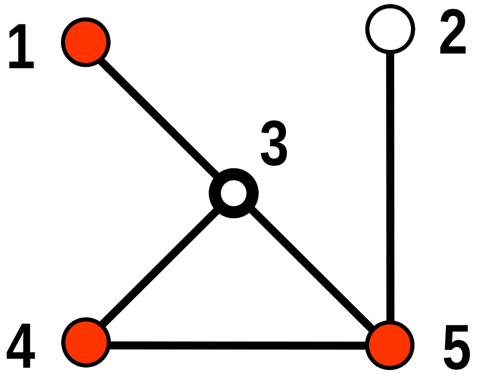
**Um grafo G = *(N,M)* é *Ponderado* se existem pesos associados a suas arestas ou vértices.**



# Adjacência em Vértices

**Dois vértices distintos são adjacentes se são vértices terminais de uma mesma aresta.**



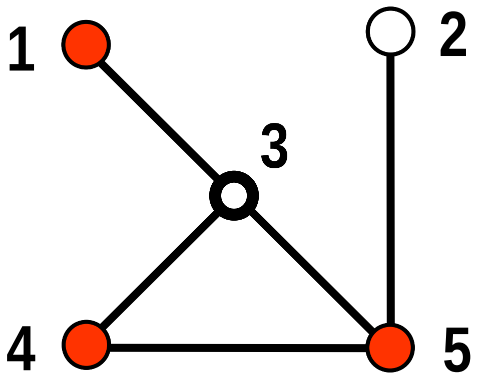

| Vértice | Vértices Adjacentes |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 1, 4 e 5 |
| 4 | 3 e 5 |
| 5 | 2, 3 e 4 |

# Adjacência

**Lista de vértices adjacentes ao vértice *x*:** $\Gamma(x)$

$$\Gamma(1) = \{3\}$$

$$\Gamma(2) = \{5\}$$



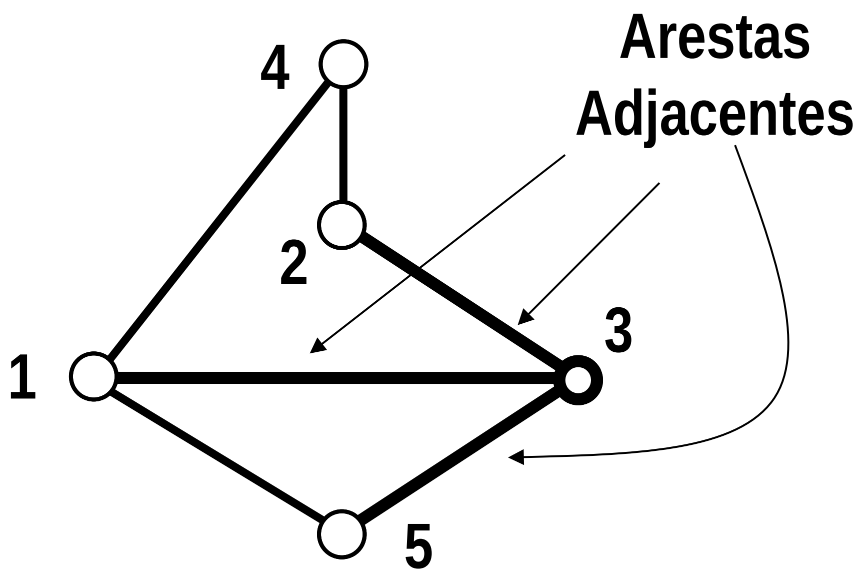

$$\Gamma(3) = \{1,4,5\}$$

$$\Gamma(4) = \{3,5\}$$

$$\Gamma(5) = \{2,3,4\}$$

# Adjacência em Arestas

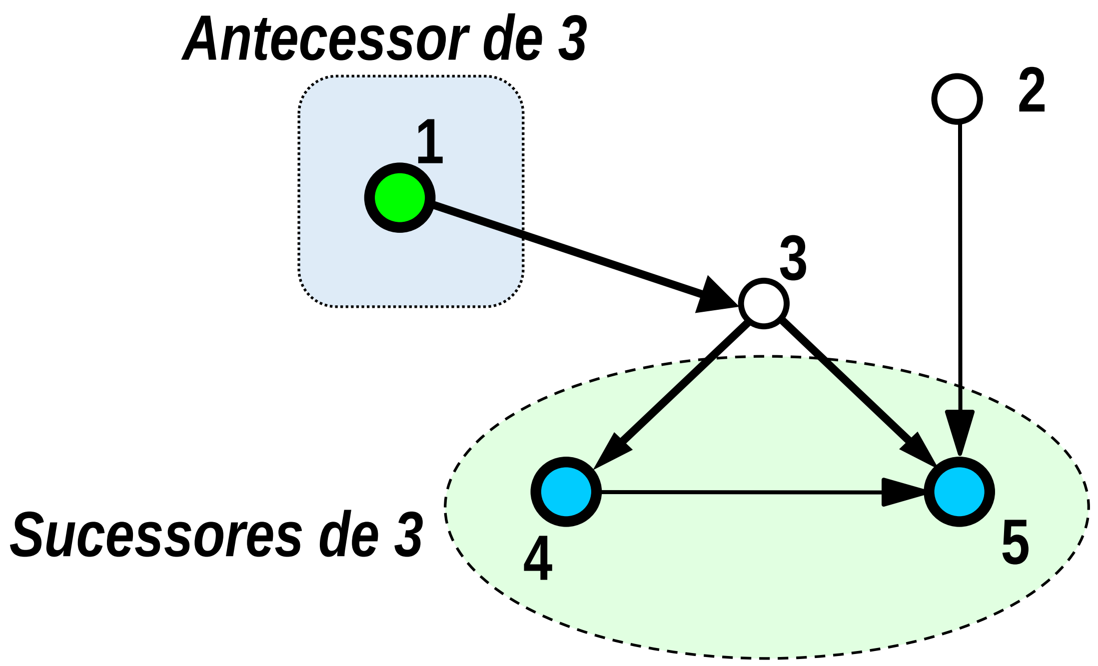
**Duas arestas são adjacentes se possuem um vértice terminal em comum.**



# Sucessor e Antecessor

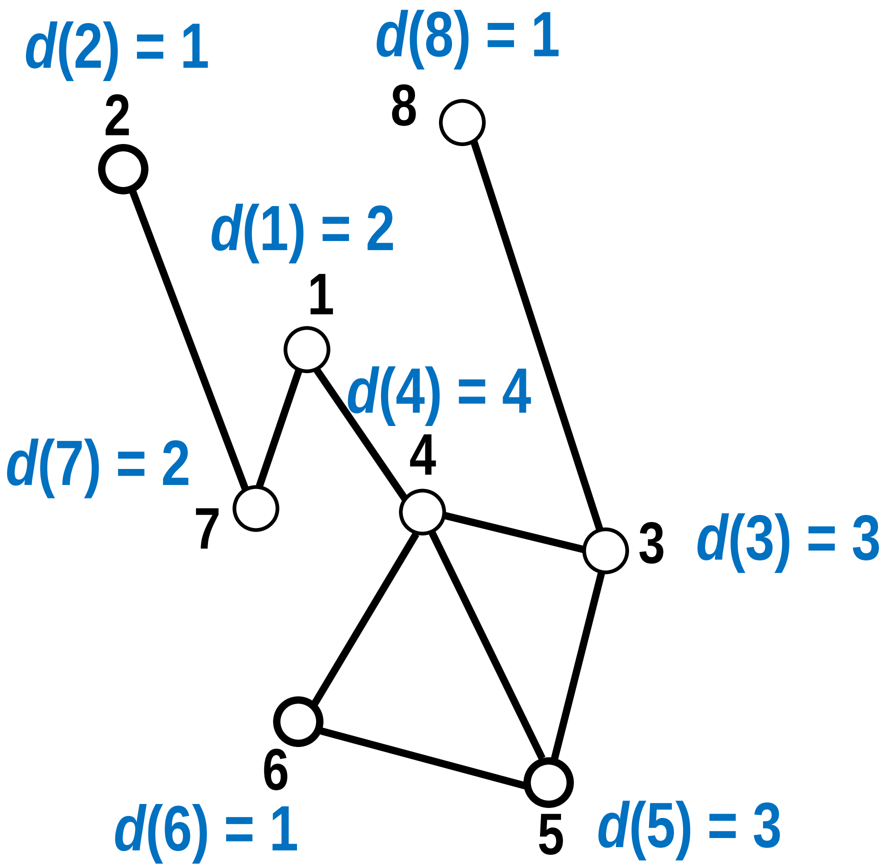
***Em um grafo direcionado***, um vértice *x* é ***Sucessor*** de *y* se existe pelo menos um arco (x,y)

Um vértice *y* é ***Antecessor*** de *x* se existe pelo menos um arco (*y*,*x*)



# Grau de um Vértice

***Grau*** **(ou valência) de um vértice $v_i$ , $d(v_i)$, em um grafo não direcionado é igual ao número de arestas incidentes no vértice (cardinalidade do conjunto de adjacentes)**

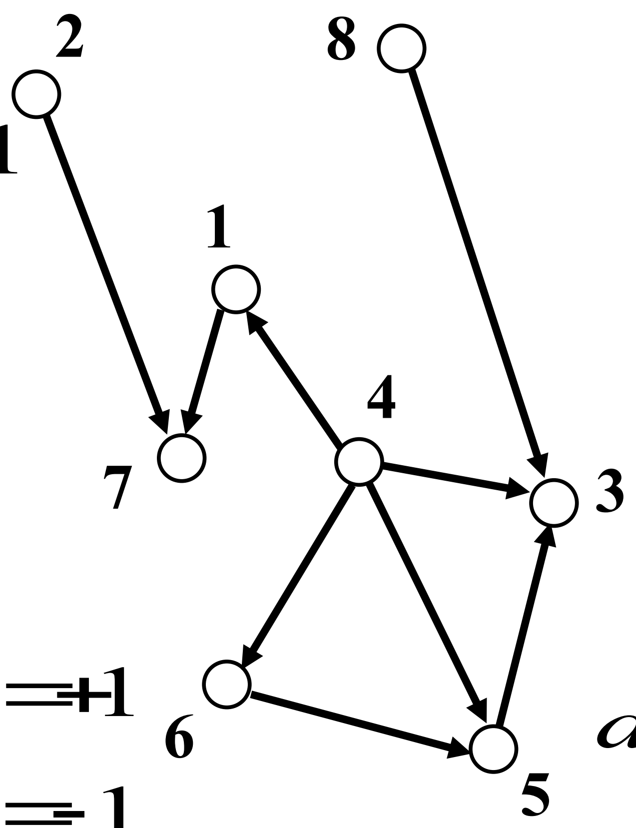


# Grau interno e externo de um Vértice

No caso do grafo ser direcionado o grau de um vértice $x_i$ é composto por um ***valor interno*** e um ***externo***.

$d^+(x_2) = 0$

$d^-(x_2) = 1$




$d^+(x_6) = 1$

$d^-(x_6) = 1$

$d^+(x_5) = 2$

$d^-(x_5) = 1$

# Grau de um Vértice

**Teorema**

***A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual a 2m, onde m = |E|.***

**Prova: *Exercício***

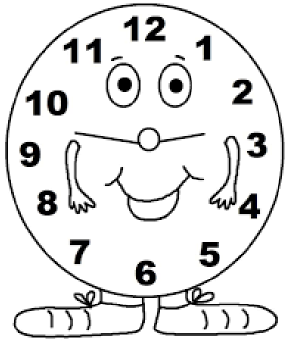
# Grau de um Vértice

**Corolário**

***O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.***

***Prova:***

*Exercício em aula – 5 minutos*



# Grau de um Vértice

**Corolário**

***O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.***

***Prova:***

***Suponha um grafo com n vértices, dos quais r possuem grau par.***

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{r} d(x_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$$

# Grau de um Vértice

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{r} d(x_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$$

par = 2*m*     par

Logo, $\sum_{i=r+1}^{n} d(x_i)$ é par

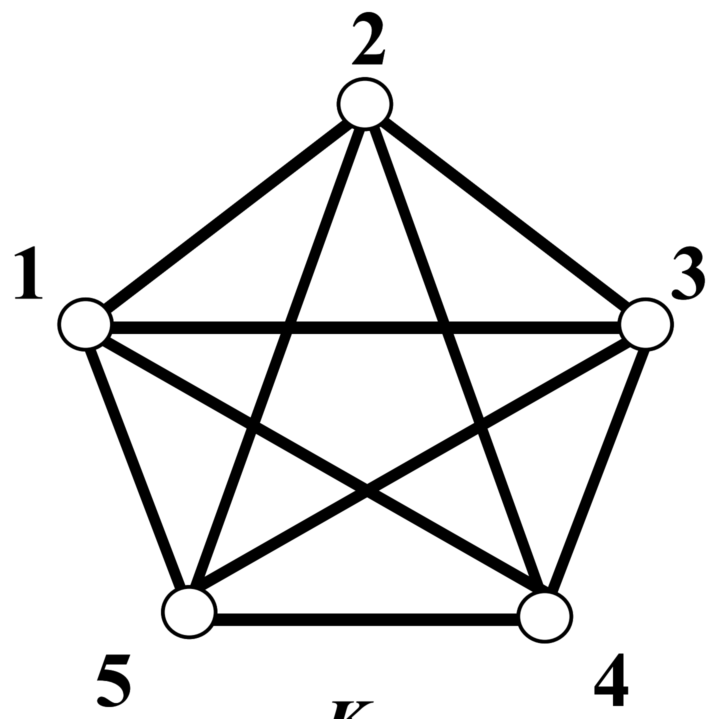
Mas cada um dos *n-r* vértices tem grau ímpar.

Portanto, o número desses vértices é par.

# Grafo Completo

Um grafo **G = (*N*,*M*)** é dito ***Completo*** se existir ao menos uma ligação associada a cada par de vértices. No caso não orientado isso significa exatamente uma ligação.

Notação: $K_n$




$K_5$

Quantas arestas tem o $K_n$?

# Grafo Completo

***O número de arestas em um grafo completo é n(n-1)/2, onde n =|N|.***

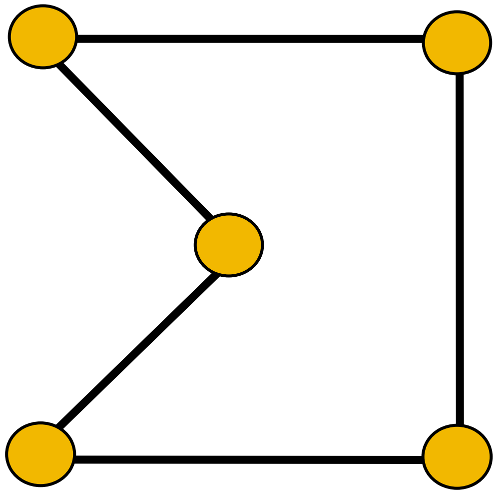
***Prova:***

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

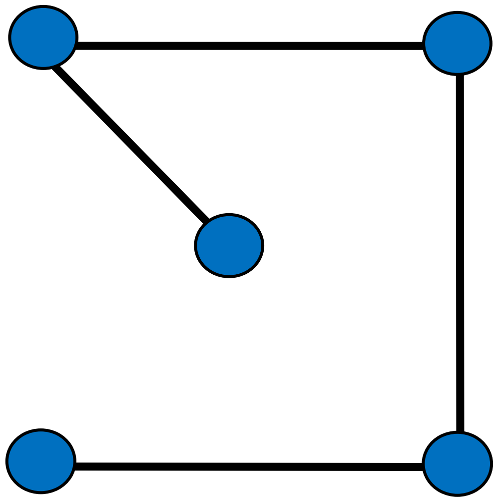
***Obs. Grafo denso tem tamanho em O($n^2$)***
***Grafo esparso tem tamanho em O(n)***

# Grafo Conexo

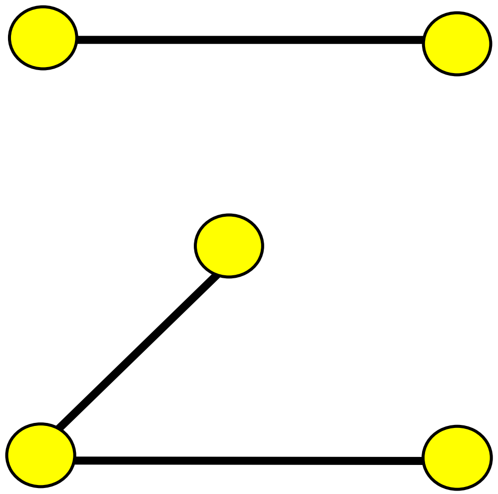
Um grafo ***G*** é dito ***Conexo*** se ***existe, pelo menos, um caminho entre cada par de vértices*** de *G*.



**Grafo Conexo**



**Grafo Conexo**

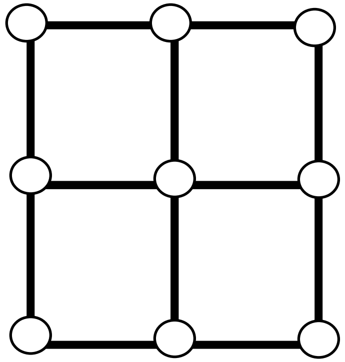


**Grafo Não Conexo**

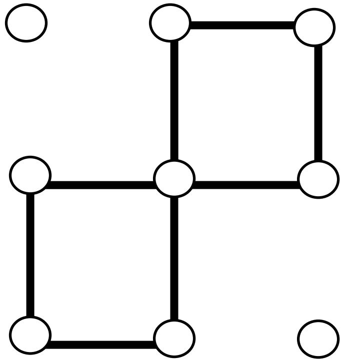
# Conexidade

***G é Conexo*** se para todo par de vértices de *G* existe pelo menos um caminho entre eles.

Se ***G*** é um ***grafo direcionado***, então é considerado ***conexo quando o seu grafo subjacente*** (não direcionado) ***é conexo***.



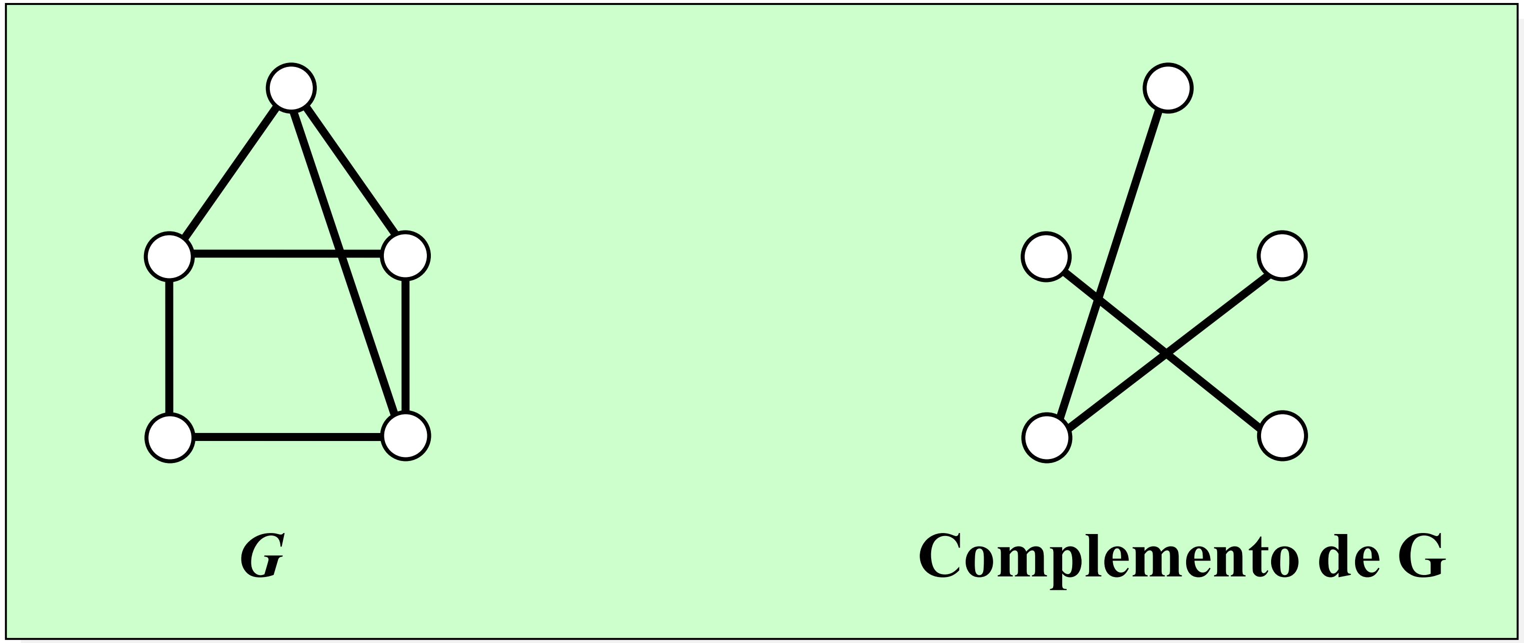
**Grafo Conexo**



**Grafo Não Conexo**

# Complemento

$G_s = (N, M_c)$ é o *complemento* de $G = (N,M)$ se a aresta $(x_i, x_j) \in M_c$ se e somente se $(x_i,x_j) \notin M$

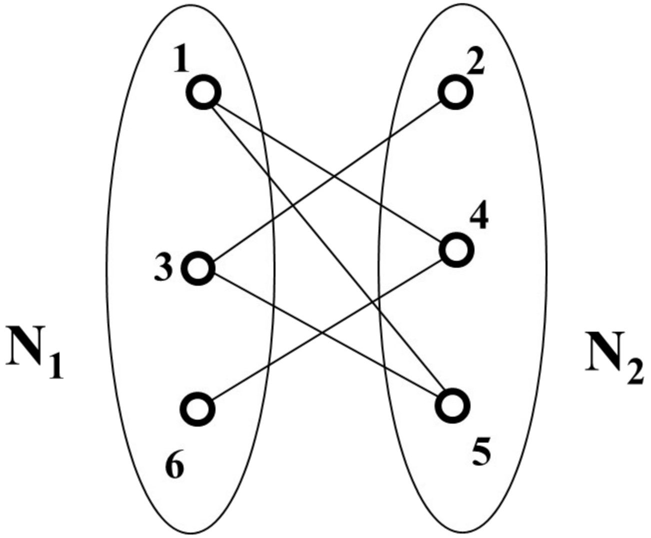


# Grafo Bipartido

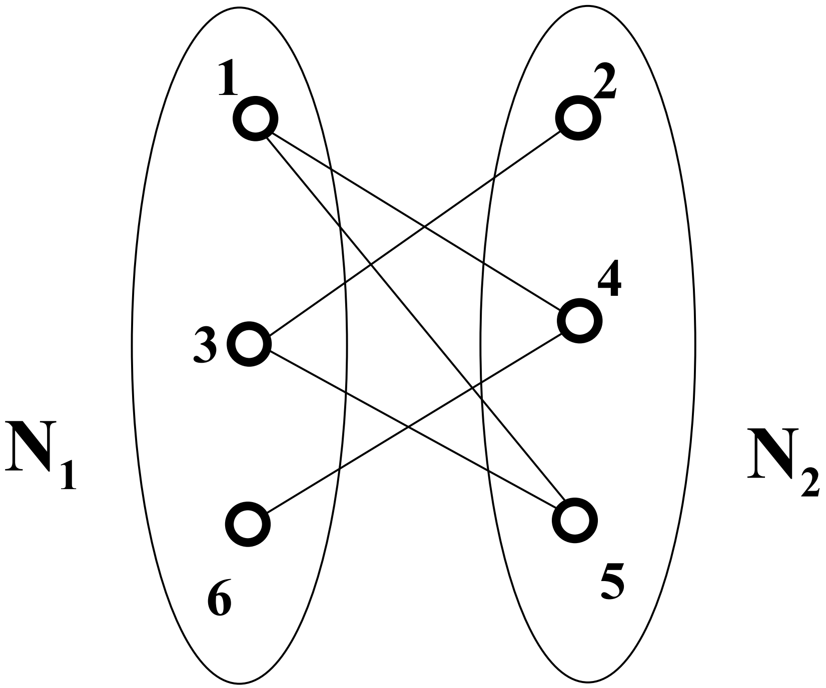
Um grafo $G$ = ($N$,$M$) é dito *Bipartido* quando seu conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos $N_1$ e $N_2$ tais que

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad N_1 \cup N_2 = N$$

e somente existem arestas em $G$ ligando vértices de $N_1$ a vértices de $N_2$ e vice-versa.

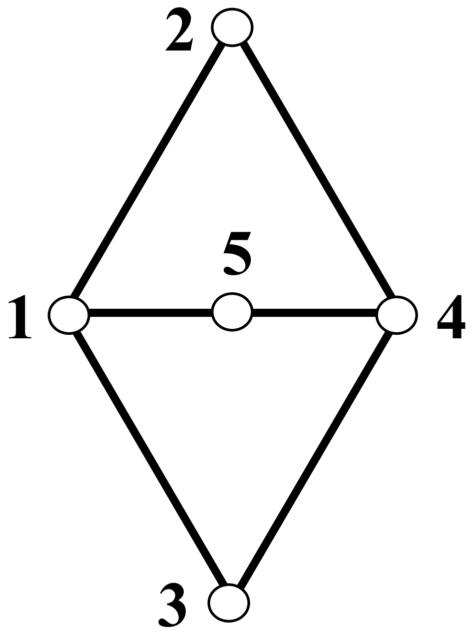


# Grafo Bipartido



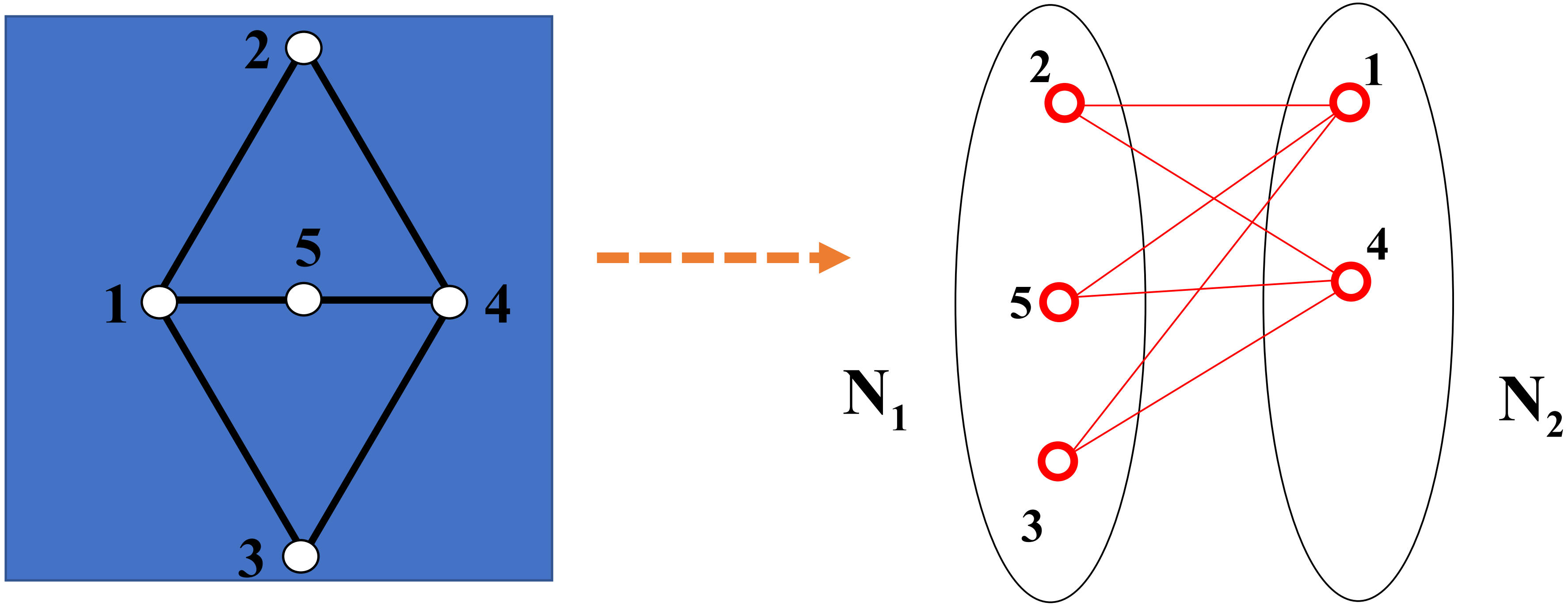
# Grafo Bipartido Completo

## O grafo abaixo é bipartido?



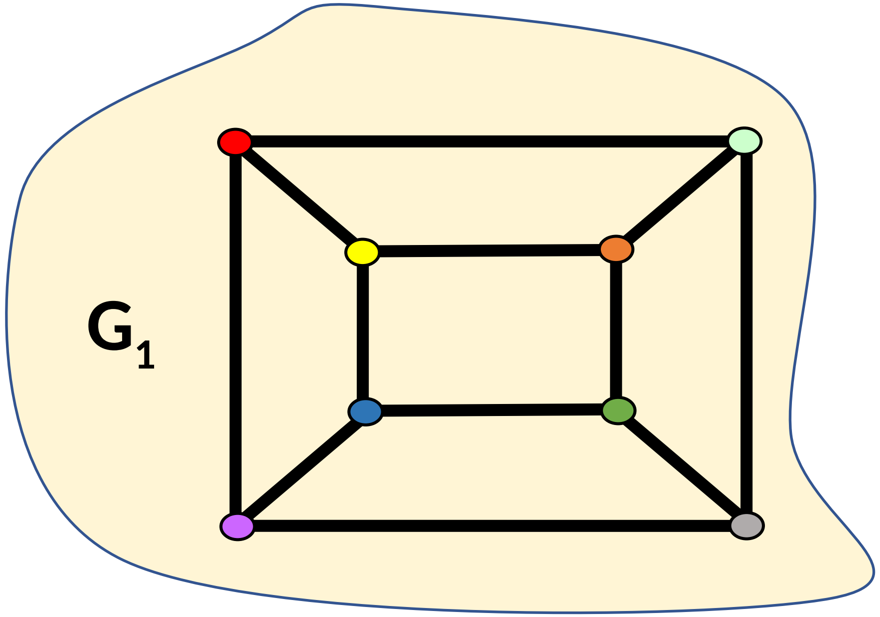
# Grafo Bipartido Completo

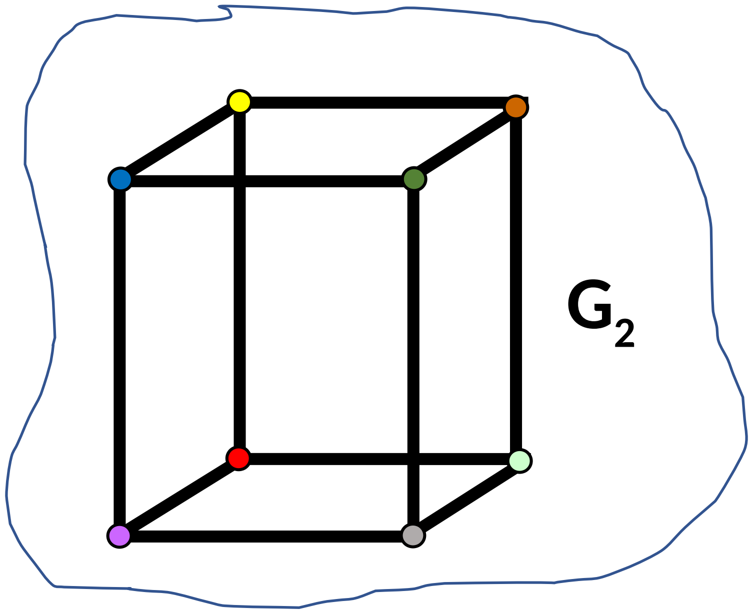
Um grafo ***G Bipartido*** é dito ***Completo*** se todos os vértices do conjunto $N_1$ são adjacentes aos vértices do conjunto $N_2$ e vice versa.



# Isomorfismo

Dois grafos $G_1=(N_1,M_1)$ e $G_2=(N_2,M_2)$ são *isomorfos* se existe correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que existe uma função unívoca $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que $(i,j)$ é elemento de $M_1$ se e somente se $(f(i),f(j))$ é elemento de $M_2$.



# Exercício

1. Desenhe todos os grafos (não rotulados) com 4 vértices e seus complementos.

2. Considere grafos rotulados em vértices. A lista de todos os grafos com 4 vértices seria a mesma do item “a”? Se a sua resposta for não, mostre uma diferença.

3. Desenhe um grafo completo com 5 vértices e seu complemento. Qual o número de arestas do $K_5$? Qual o número de arestas do $K_n$?

4. Seja $X$ o conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Considere $V$ o conjunto de todos os subconjuntos de $X$ com 2 elementos. Dois elementos, $v$ e $w$, de $V$ se relacionam se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre $V$ define um grafo especial chamado *grafo de Petersen*. Desenhe o grafo de Petersen. Quantos vértices e arestas possui o grafo de Petersen?

5. Seja $V$ o conjunto de todos os pares ordenados $(i,j)$ tais que $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ e $j \in \{1,2,\ldots,q\}$ ($p$ e $q$ são inteiros). Dois elementos $(i,j)$ e $(i',j')$ são adjacentes se $i = i'$ e $|j-j'| = 1$, ou, $j = j'$ e $|i-i'| = 1$. Essa relação de adjacência sobre $V$ define um grafo conhecido como *grade pxq*. Quantas arestas possui a grade $p$x$q$? Desenhe uma grade 4x5.

# Exercícios

6. Para qualquer inteiro positivo *k*, um cubo de dimensão *k* (ou *k*-cubo) é um grafo definido como a seguir. Os vértices do *k*-cubo são todas as sequências de *k* bits. Dois vértices são adjacentes se e somente se diferem exatamente em uma posição. Por exemplo, um 3-cubo possui vértices relativos às sequências binárias de 3 posições. O vértice 000 é adjacente somente aos vértices 001, 010, e 100. Desenhe o 1-cubo, 2-cubo e o 3-cubo. Quantos vértices possui um *k*-cubo? Quantas arestas possui um *k*-cubo?

7. Provar que: A soma dos graus dos vértices de um grafo simples com *n* vértices e *m* arestas é igual a 2*m*.

8. Provar que: O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.