

Análise Numérica

Lista de Projetos

GERAL

1. Investigue o conceito de aritmética intervalar, cujo conceito é obter resultados numéricos com precisão garantida.
2. Investigue métodos para estimar parâmetros de uma variável aleatória a partir de uma amostra.
3. Investigue o método da continuação homotópica para resolver equações não lineares.

SPLINE

4. Splines cúbicas são ferramentas essenciais na decomposição conhecida como EMD – Empirical Mode Decomposition. Informações podem ser obtidas em https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Huang_transform

Implemente a EMD e use para descobrir as notas de uma melodia que você assobiar.

EDO

5. Implemente o método de Euler de ordem 2 (ou superior, se desejar) usando derivação automática. Informações sobre derivação automática podem ser obtidas em https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_differentiation
6. Simule um sistema planetário, utilizando as forças dadas pela lei de gravitação universal.
7. Simule um sistema de partículas ligadas por molas, incluindo choques nas paredes do recipiente contendo as partículas.
8. Simule a descida de uma bolinha em pistas de diversas formas, comparando o tempo para chegar ao solo a partir de uma certa altura. Uma das pistas deve ser a braquistócrona.
9. Investigue o problema de sistemas de EDOs stiff e como resolvê-los usando métodos exponenciais.
10. Investigue a solução numérica das equações diferenciais estocásticas com ruído browniano.

EDP

11. Considere a equação do transporte $u_t = -u_x$ com dado inicial $u(0, x) = 1_{\{x \geq 0\}}$, isto é, a função degrau. Implemente as funções forward no tempo e centradas no espaço (discutido na página 601 do livro texto), Lax, Upwind e Lax-Wendroff_ e compare os resultados numéricos com a solução exata. Lembre-se que o método de Lax descrito no livro tem vários erros de digitação. O método é descrito por

$$u(x, t + k) = \frac{1}{2}(1 - \sigma)u(x + h, t) + \frac{1}{2}(1 + \sigma)u(x - h, t)$$

12. Comente sobre estabilidade e precisão de métodos implícitos e explícitos. Implemente um método explícito e um implícito para resolver a EDP $u_t = -u_x$, com dado inicial $u(0, x) = 1_{\{x \geq 0\}}$. Atenção especial deve ser dada ao fenômeno de difusão numérica e a condição CFL.
13. A equação de Black-Scholes é a seguinte EDP:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rV_S - rV = 0$$

com $V(T; S) = g(S)$. Essa é uma equação parabólica, com a diferença de que temos o dado final e não um dado inicial. A solução dessa equação, $V(t; S)$, que pode se mostrar que existe e é única (para g bem comportada) é o preço de um derivativo com maturidade T e payoff g . Os parâmetros σ e r são a volatilidade e a taxa de juros livre de risco, respectivamente. Modifique o método de Crank-Nicolson discutido em sala e no livro texto para resolver a equação de Black-Scholes. Aplique para $g(S) = \max\{S - K; 0\}$, para vários valores de K . Escolha valores razoáveis de r , σ e T .

14. Equação de Buckley-Leverett para escoamento unidimensional bifásico em meio poroso sem capilaridade. Imagine que injetaremos água em um reservatório de petróleo (ou seja, uma rocha com poros e petróleo dentro desses poros), e queremos saber o quão rápido a frente de saturação de água atravessa o reservatório. Mais especificamente, queremos calcular a frente de saturação, S , i.e. um número entre 0 e 1 que, para cada ponto no espaço e para cada instante do tempo, nos diz a fração do volume poroso que é ocupado por água. Pode-se mostrar que, sob certas hipóteses,

$$\begin{cases} S_t(t, x) + \partial_x(f(S_x(t, x))) = 0 & x > 0, t > 0 \\ S(0, x) = 1 & (\text{sem água no reservatório inicialmente}) \\ S(t, 0) = 1 & (\text{água está sendo injetada em } x = 0) \end{cases}$$

Onde f é o fluxo fracionário da água que assumiremos ser dado pela função

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2(1-z)^2} 1_{[0,1]}(z) + 1_{(1,+\infty)}(z)$$

Pode-se mostrar que a solução analítica da Equação de Buckley-Leverett é dada por

$$S(t, x) = \begin{cases} s & \text{se } x \leq tf'(\alpha) \text{ e } x = tf'(s) \\ 0 & \text{se } x > tf'(\alpha) \end{cases}$$

Use o método Upwind para calcular S e compare com a solução acima.