Análise Numérica

Exercícios de sala de aula, 23/10

1) Implemente o método explícito para encontrar a solução numérica da equaçãodo calor:

$$u_t = u_{xx}$$

Teste sua implementação com $x \in [0,1]$ e $t \in [0{,}0.5]$ com condições iniciais $u(x,0) = u_0(x)$ (pode ser qualquer função não nula) e condições de bordo $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Teste com alguns passos de discretização h(na variável espacial x) e k (na variável temporal t) para ver o que acontece quando a condição $\sigma = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$ é respeitada e quando é violada, como por exemplo

a) h=0.01 e k=0.01 b)h=0.1 e k=0.001

2) Refaça os exercício anterior usando agora a implementação do método implícito.

3) Implemente o método de Crank-Nicolson para encontrar a solução numérica da equação do calor:

$$u_t = u_{xx}$$

Obs: o livro chama o método implícito discutido na aula anterior de Crank-Nicolson e este método discutido na aula de hoje de “versão alternativa de Crank-Nicolson”. Veja os detalhes na página 590 do livro do Cheney (Alternativa Version of Crank-Nicolson Method) ou no Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method

Teste sua implementação com $x \in [0,1]$ e $t \in [0{,}0.5]$ com condições iniciais $u(x,0) = u_0(x)$ (pode ser qualquer função não nula) e condições de bordo $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Teste com alguns passos de discretização h(na variável espacial x) e k (na variável temporal t) para ver o que acontece quando a condição $\sigma = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$ é respeitada e quando é violada, como por exemplo

a) h=0.01 e k=0.01 b)h=0.1 e k=0.001

4) Explique por que o método de Crank-Nicolson tem erro local de truncamento de segunda ordem na variável temporal.

Equações hiperbólicas

Vamos analisar o modelo clássico da onda unidimensional em uma corda esticada, como a corda de um violão ou uma corda de pular. Como no caso da equação do calor, este modelo é um exercício para testar os métodos numéricos para EDPs hiperbólicas, já que há formas fechadas para sua solução.

O modelo é $u_{tt} = u_{xx}$, onde $t \in [0{,}5]$ e $x \in [0{,}1]$ (a variável x representa a localização da corda). A função $u(x,t)$ representa a altura da corda na localização x no instante t. Os valores iniciais são $u(x,0) = u_0(x)$ (pode ser qualquer função), , e a condição de bordo é $u(0,t) = u(1,t) = 0$ (a corda está presa nas extremidades)

5) Proponha uma discretização para resolver numericamente a equação da onda acima por um método explícito no tempo. Pode ser necessário um tratamento especial ao primeiro passo na implementação, quando então usamos a condição inicial $u_t(x,0) = 0$.

6) Implemente o método proposto e teste com diferentes passos espaciais (h) e temporais (k). Em particular teste quando $\frac{k}{h}$ for <1, =1 e >1.