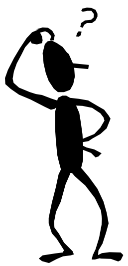
Capítulo 2 – Cinemática da partícula material

Introdução

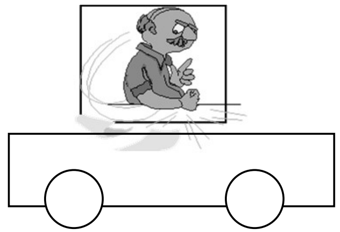
O repouso e o movimento de um corpo são conceitos relativos:

- corpo está em movimento se a sua posição relativa a outro objeto varia com o tempo
- corpo está em repouso se a sua posição relativa a outro objeto não varia com o tempo.

A



B

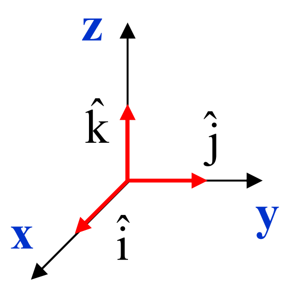


O observador A verifica que o carro se afasta dele.

O observador B verifica que o observador A se afasta dele.

Assim, o primeiro problema que se põe no estudo de um movimento é o da escolha de uma referência.

Tomamos habitualmente como referência a origem de um sistema de três eixos ortogonais - que constitui um referencial.



O lugar geométrico dos pontos do espaço que vão sendo sucessivamente ocupados pela partícula designa-se por trajetória.

Com base na trajetória podemos classificar os movimentos possíveis da partícula como:

Movimentos
- **retilíneos**
- **curvilíneos**
  - **no plano**
  - **no espaço**

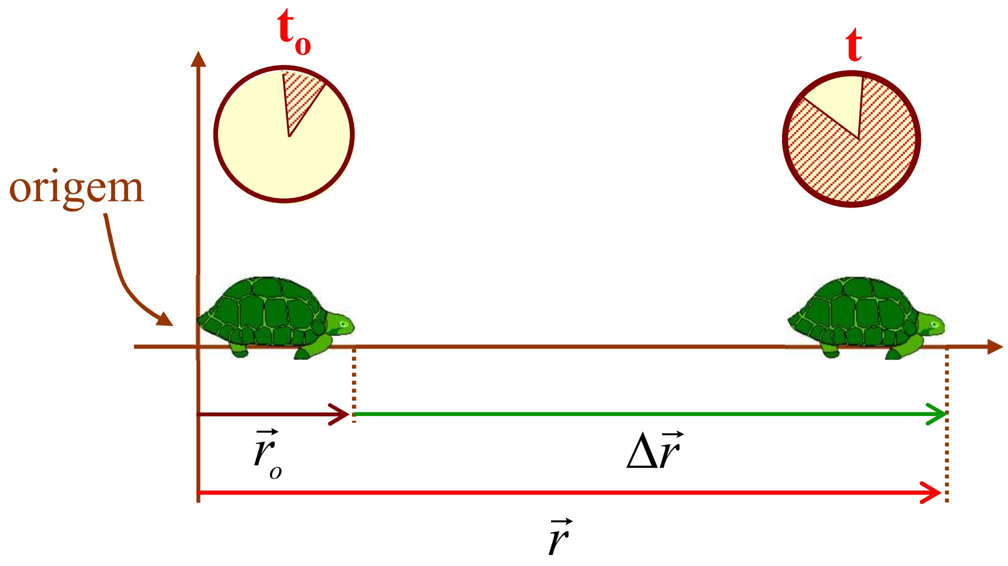
Movimentos retilíneos

Vetor posição; Deslocamento

O estudo do movimento retilíneo simplifica-se, se fizermos coincidir um dos eixos do referencial com a direção do movimento.

A posição da partícula é, em cada instante, caracterizada pelo vetor posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$$



O **vetor deslocamento** traduz a mudança de posição de um objeto.

É caracterizado por:

direção	- da reta suporte do vetor
sentido	- aponta da posição inicial para a posição final
módulo	- menor distância entre a posição inicial e final

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

unidade SI: metro (m)

Velocidade média

Velocidade média da partícula define-se, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, como o quociente do deslocamento pelo tempo que o levou a percorrer:

$$v_{média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}} \Leftrightarrow \vec{v}_{média} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{i}$$

unidade SI: (m/s)

Admitindo que $\boldsymbol{t_2 > t_1}$ teremos

se $\boldsymbol{v_{med}} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x(t_2)} > \boldsymbol{x(t_1)}$	o movimento tem o sentido positivo do eixo Ox.
se $\boldsymbol{v_{med}} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x(t_2)} < \boldsymbol{x(t_1)}$	o movimento tem o sentido negativo do eixo Ox.

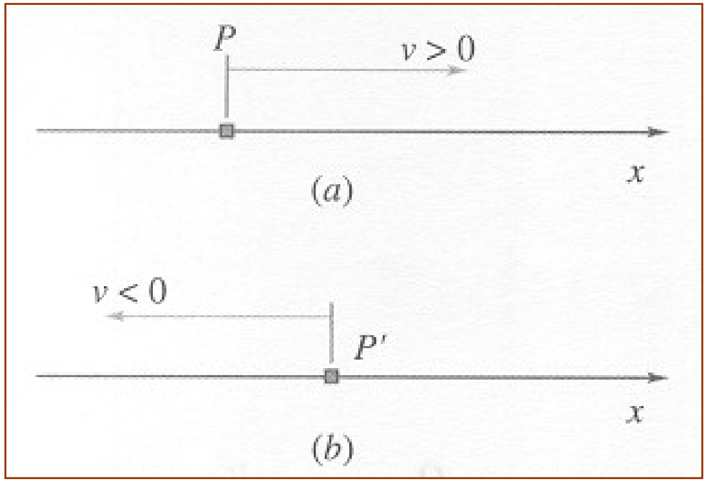
Velocidade instantânea

A velocidade média, devido a ser um valor médio, não contém informação detalhada sobre a mudança de posição.

Quanto menores forem os intervalos de tempo considerados, mais detalhada é a informação sobre a velocidade.

A velocidade instantânea, ***v***, indica a velocidade, a direção e o sentido do movimento de um objeto em cada instante. É igual ao valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo se torna muito pequeno. Isto é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)\hat{i} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i}$$



Aceleração média e instantânea

Aceleração: taxa de alteração da velocidade instantânea.

Aceleração média num dado intervalo de tempo, $[t_1, t_2]$:

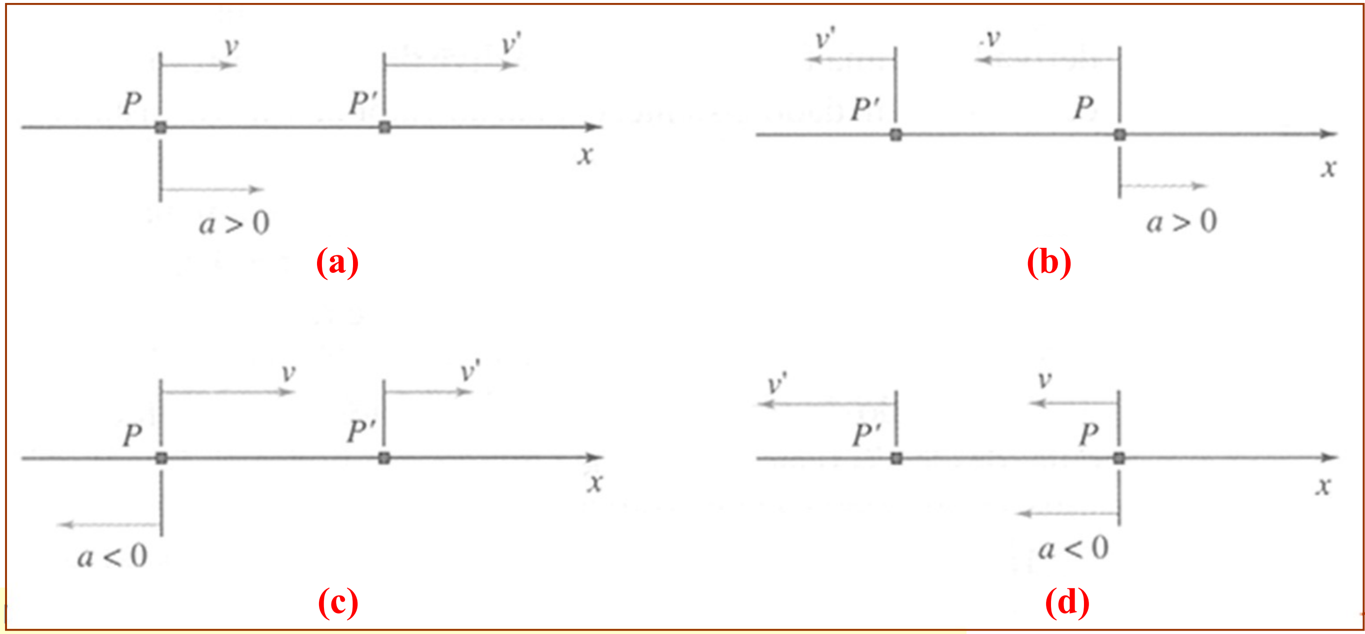
$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Aceleração instantânea é o valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo tende para zero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Supondo novamente que $t_2 > t_1$, teremos:

- Se $a > 0 \;\Rightarrow\; v(t_2) > v(t_1)$:
  - Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas, isto significa que a velocidade aumenta, isto é, o movimento é acelerado. (a)
  - Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas, $v(t_2) > v(t_1)$ significa que o valor absoluto (a grandeza ou módulo) da velocidade em t_2 é menor do que em t_1 e o movimento é retardado. (b)
- Se $a < 0 \;\Rightarrow\; v(t_2) < v(t_1)$:
  - Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas a velocidade está a decrescer e o movimento é portanto retardado. (c)
  - Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas e a velocidade (em grandeza ou módulo) está a aumentar e o movimento será acelerado. (d)



(a) (b) (c) (d)

- Um movimento em que existe aceleração diz-se **<u>variado</u>**.
- Se a aceleração é constante dir-se-á **<u>uniformemente variado (acelerado ou retardado)</u>**.
- No caso particular de ser a = 0 isto significa que a velocidade não varia e o movimento diz-se então **<u>uniforme</u>**.

Resumo: movimento retilíneo

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$	**Equação de movimento**
$\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i}$	**Velocidade**
$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{i}$	**Aceleração**

O deslocamento, entre dois instantes, t_1 e t_2, é dado pela diferença das posições nestes dois instantes:

$$\Delta\vec{r} = \left[x(t_2) - x(t_1)\right]\hat{i}$$

Deslocamento

E que pode ser bastante diferente do espaço percorrido, pois a partícula pode inverter o sentido do movimento. Assim, para determinar o espaço percorrido temos que determinar os instantes em que a velocidade se anula, $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$, e somar os espaços percorridos para todos os intervalos:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \left| x(t_i) - x(t_{i-1}) \right|$$

Espaço percorrido

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt$$

Caso se desconheça a velocidade, conhecendo a aceleração, a relação anterior pode ser integrada. Para isso é necessário o conhecimento de um valor da velocidade (v_0 por exemplo) para um dado instante, t_0. Temos então:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\,dt \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = \int_{0}^{t} a\,dt$$

Caso a aceleração seja constante o integral anterior reduz-se à seguinte equação:

$$v(t) = v_0 + at$$

A variação temporal da velocidade é uma reta, onde v_0 é a ordenada na origem (t=0) e a aceleração é o declive.

Do mesmo modo a equação do movimento pode ser obtida por integração, uma vez conhecida a lei das velocidades. Tem-se:

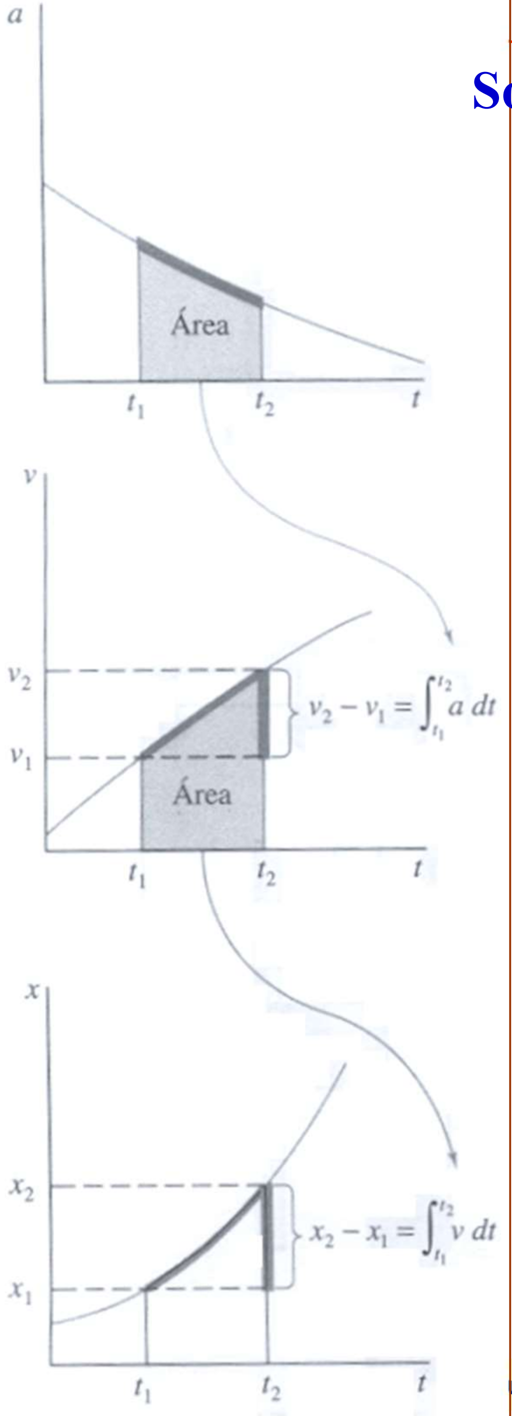
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow dx = vdt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt \quad \Longrightarrow \quad x - x_0 = \int_0^t vdt$$

Da página anterior temos que **$v(t)=v_0+at$**, caso a aceleração seja constante. Então ao substituirmos esta expressão no integral anterior temos:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2}$$ **Equação de movimento**

A variação temporal da posição é parabólica, onde x_0 é a ordenada na origem ($t=0$)
A velocidade é uma reta tangente em cada instante da curva de $x(t)$.



Solução gráfica de problemas de movimento retilíneo

Universidade do Minho

Se for dada a aceleração de um corpo em função do tempo, a=f(t), é possível determinar a sua velocidade em função do tempo.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad dv = a\, dt$$

integrando os dois membros, e considerando que entre t_1 e t_2 a velocidade varia de v_1 até v_2:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt \qquad \Leftrightarrow \qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt$$

Esta expressão indica que a área medida sob a curva **a-t** entre os instantes t_1 e t_2 é igual à variação da velocidade durante o mesmo intervalo de tempo.

Considerando a expressão:

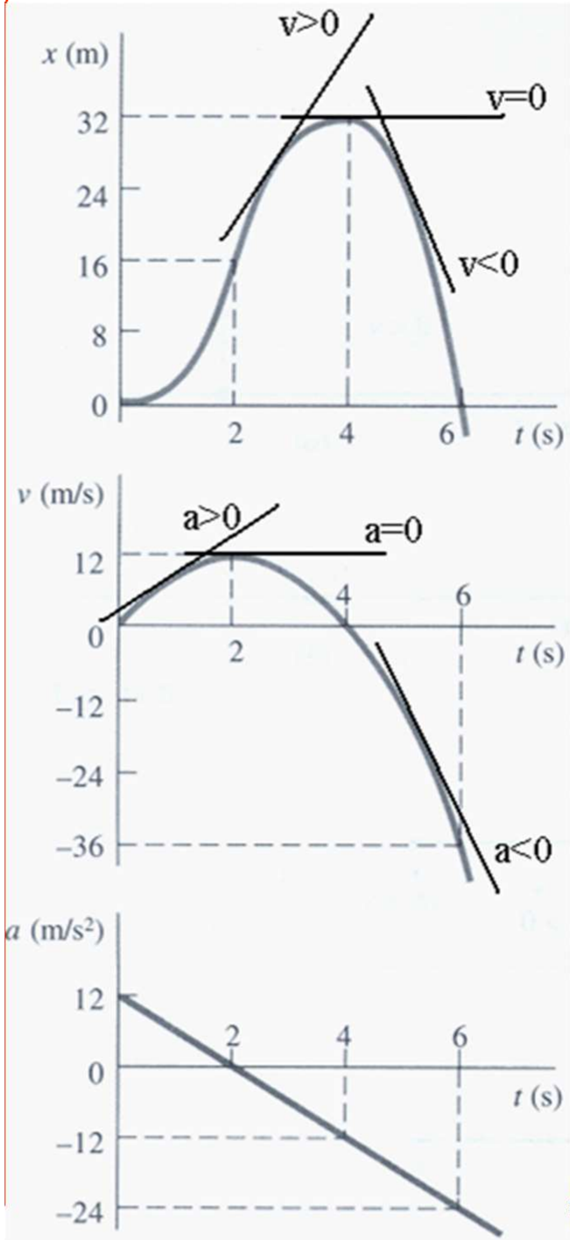
$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = v\, dt$$

integrando os dois membros, e considerando que no intervalo de tempo entre t_1 e t_2 a posição varia de x_1 até x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt \qquad \Leftrightarrow \qquad x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt$$

Esta expressão indica que a área medida sob a curva **v-t** entre os instantes t_1 e t_2 é igual à variação da posição durante o mesmo intervalo de tempo.

Exemplo 1: Considere uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta e cuja posição é definida pela equação: $\mathbf{x(t)=6t^2 - t^3}$



- A velocidade em função do tempo pode ser obtida por:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12\,t - 3\,t^2$$

- A velocidade também pode ser obtida pela tangente em cada ponto no gráfico da posição em função do tempo.
- A aceleração em função do tempo pode ser obtida por:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6\,t \quad \text{(não é constante!!)}$$

- A aceleração também pode ser obtida pela tangente em cada ponto no gráfico da velocidade em função do tempo.

Caracterização do movimento da partícula:

entre t=0 e t=2s

aceleração positiva, velocidade aumenta;

t=2s

aceleração nula;

entre t=2s e t=4s

velocidade diminui, aceleração negativa;

t=4s

velocidade nula, posição atinge valor máximo;

entre t=4s e t=6s

velocidade diminui, a partícula volta para trás;

Exemplo 2:

Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha reta com a velocidade indicada na figura. Sabendo que a partícula parte da posição x_0=40 m (em t=0s), calcule:

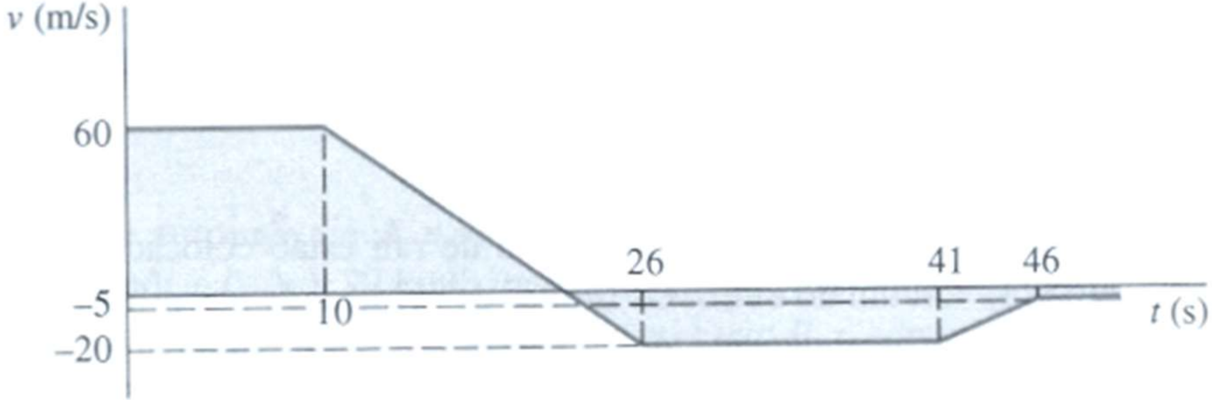
a) o instante t, quando a velocidade é zero.

b) a posição da partícula para t = 26 s,

c) a distância percorrida pela partícula no intervalo [0; 26] s.

d) a velocidade média da partícula no intervalo [10; 26] s.

e) a velocidade instantânea para t = 20 s.



a) $a = -5\ m/s^2$; $v = v_0 + a.(t-t_0)$; $t = 22$ s;

b) $\Delta x = 920$ m ; $x = x_0 + \Delta x = 960$ m;

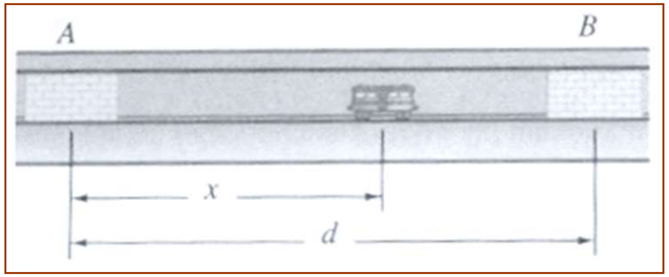
c) $S = \Delta x_{[0;\,10]} + \Delta x_{[10;\,22]} + |\Delta x_{[22;\,26]}| = 600 + 360 + 40 = 1000$ m;

d) $v_m = \Delta x/\Delta t$; $v_m = 320/16 = 20$ m/s;

e) $v = v_0 + a.(t-t_0)$; utilizando $v_0 = 60$ m/s e t_0=10 s; $v = 10$ m/s.

Exemplo 3:

Uma carruagem de metro parte da estação A, ganhando velocidade a uma razão de 4 m/s^2 durante 6 s, e depois a uma razão de 6 m/s^2 até que alcança a velocidade de 48 m/s. A carruagem mantêm a velocidade até se aproximar da estação B, sendo então aplicados os travões, o que provoca uma desaceleração constante que conduz à paragem em 6 s. O tempo total gasto no percurso entre A e B é de 40 s. Desenhe as curvas a-t, v-t, e x-t e determine a distância entre as estações A e B.

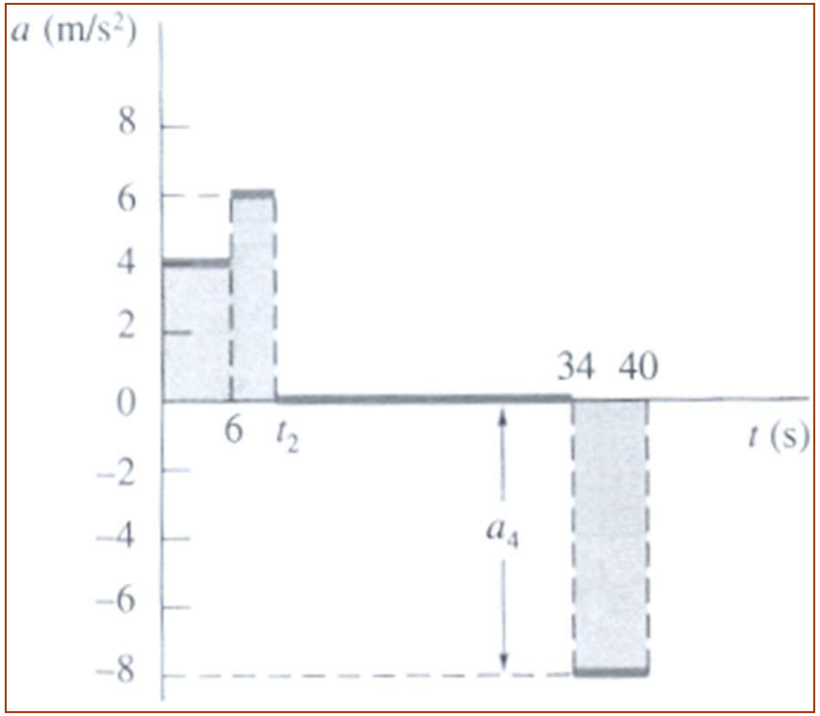


Curva aceleração - tempo

variação em v = área sob a curva **a-t**

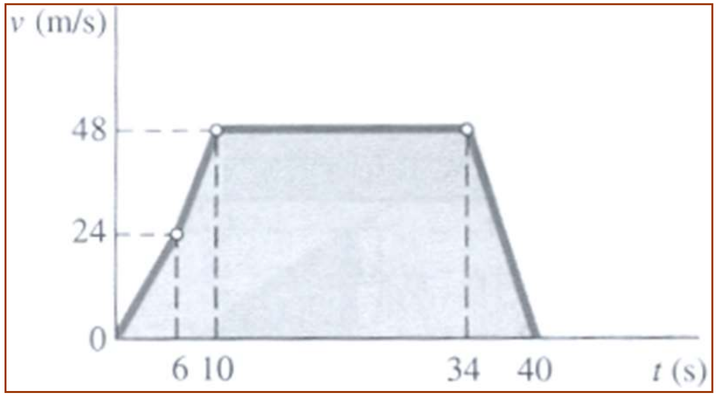
$0 < t < 6$	$v_6 - 0 = (6\text{ s})(4\text{ m/s}^2) = 24\text{ m/s}$
$6 < t < t_2$	$48\text{ m/s} - 24\text{ m/s} = (t_2 - 6)(6\text{ m/s}^2)$
	$\mathbf{t_2 = 10\text{ s}}$
$t_2 < t < 34$	aceleração nula
$34 < t < 40$	$0 - 48\text{ m/s} = (6\text{ s})\, a_4$
	$\mathbf{a_4 = -8\text{ m/s}^2}$

$$v = v_0 + at$$



Curva velocidade - tempo

A aceleração é constante, pelo que a curva v-t é construída com segmentos de recta que ligam os pontos onde a velocidade é conhecida.



variação em x = área sob a curva **v-t**

$0 < t < 6$	$x_6 - 0 = 0{,}5(6 \cdot 24) = 72$ m
$6 < t < 10$	$x_{10} - x_6 = 24 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 6 \cdot 4^2 = 144$ m
$10 < t < 34$	$x_{34} - x_{10} = 48 \cdot 24 = 1152$ m
$34 < t < 40$	$x_{40} - x_{34} = 48 \cdot 6 - 0{,}5 \cdot 8 \cdot 6^2 = 144$ m

d = x_{40} – 0 = 1512 m

$$Área_{triângulo} = \frac{1}{2} base \times altura; \; Área_{rectângulo} = base \times altura$$

ou $$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Curva posição - tempo

Entre 10 < t < 34 tem-se um segmento de reta dado que o movimento é uniforme (v = constante)

Nos outros intervalos os pontos determinados devem ser ligados por arcos de parábola dado o movimento ser uniformemente variado.