Estatística Aplicada

Parte I

Lino Costa e Pedro Oliveira

2018 (versão 3.1)

29 de Abril de 2020

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 O que é a Estatística?

Os números são a matéria-prima da **Estatística**, números que podem ser o resultado de medidas tais como alturas, pesos, idades, nascimentos, óbitos ou rendimentos. Estas observações produzem, em geral, uma grande quantidade de números, quantidade que se revela de difícil apreensão pela mente humana. Assim, poder-se-á afirmar que a Estatística tem por objetivos:

1. a recolha de dados;
2. a apresentação, descrição e classificação dos dados;
3. a manipulação dos dados e extração de conclusões acerca dos mesmos.

A **Estatística** trata da recolha, apresentação, análise de dados para tomar decisões. Podemos dizer que a Estatística é a ciência dos dados. Uma vez que as diversas atividades na área de engenharia envolvem dados, o conhecimento de métodos de **Estatística Aplicada** é essencial para os engenheiros resolverem os mais diversos problemas de engenharia. Os métodos estatísticos são utilizados para descrever e compreender a variabilidade dos dados, i.e., situações em que a observação sucessiva de um sistema não produz exatamente o mesmo resultado. A obtenção de informação a partir dos dados é feita recorrendo à utilização de métodos para os organizar, resumir e descrever com o objetivo de facilitar a sua interpretação e análise. Esta área da estatística é chamada de **Estatística Descritiva** que tem por objetivo reduzir dados a um pequeno número de medidas que de alguma forma sumariam a informação relevante dos dados originais.

Muitas vezes, o objetivo duma investigação é poder realizar generalizações acerca de uma população. A população pode ser o conjunto dos indivíduos que podem votar numa determinada eleição, ou o conjunto de peças produzidas por uma fábrica num determinado período. Contudo, razões de custo e de tempo tornam impraticável o estudo de toda a população. Assim sendo, uma parte desta população é estudada, parte essa designada por amostra. A partir dos dados desta amostra são realizadas generalizações para o todo, ou seja, são feitas inferências da amostra para a população. Mais precisamente, os dados constituem uma **amostra** de **unidades**, que constituem observações de uma **variável**, selecionadas de uma **população** mais ampla.

Definição 1.1.1: População (ou Universo)

Conjunto completo de objetos (unidades) que apresentam uma ou mais características que se pretende analisar.

Definição 1.1.2: Amostra

Subconjunto da população que se observa com o objetivo de se obter informação sobre características da população de onde foi retirada.

Definição 1.1.3: Unidade

Elemento da população.

Definição 1.1.4: Variável

Qualquer característica (populacional) da unidade que constitui a população.

Exemplo 1.1.1: População e amostra

Considere que foi feito um inquérito a um grupo de 40 compradores de carros novos de uma certa marca para determinar quantas reparações ou substituições de peças foram feitas durante o primeiro ano de utilização dos carros.
Neste exemplo, a população é constituída por todos os compradores de carros novos da marca; a amostra são os 40 compradores de carros novos da marca; a unidade é um comprador de carros novos da marca; e a variável em estudo é o número de reparações ou substituições de peças feitas durante o primeiro ano de utilização dos carros.

A **Estatística Inferencial** tem como objetivo tomar decisões acerca da população com base em amostras. Quando se recolhe uma amostra de uma população para tirar conclusões sobre as características populacionais, em geral, consideram-se características numéricas. Essas características numéricas populacionais são **parâmetros** da população. Um **parâmetro** é uma característica numérica cujo valor, em geral, é desconhecido e que descreve a população.

Definição 1.1.5: Parâmetro

Característica numérica que descreve a população.

Exemplo 1.1.2: Parâmetros

São exemplos de parâmetros: a idade média dos eleitores, a percentagem de votantes num determinado candidato, a percentagem de peças com defeito.

Como não é possível conhecer com exatidão o valor dos parâmetros, pelas razões já aduzidas acima, o seu valor é estimado a partir de amostras. Quando se recolhe uma amostra de uma população, podemos calcular as característica numéricas dessa amostra, as chamadas **estatísticas**.

Definição 1.1.6: Estatística

Característica numérica que descreve a amostra, calculada a partir das observações da amostra.

Exemplo 1.1.3: Estatísticas

São exemplos de estatísticas: a idade média e preferência relativa a um determinado candidato duma amostra de 1000 eleitores; número de peças produzidas com defeito numa amostra de 500 peças, recolhidas num determinado dia.

Os valores duma estatística variam de amostra para amostra. Esta variação amostral define um padrão de distribuição chamado de **distribuição amostral** da estatística. A distribuição amostral duma estatística permite a **estimação** de parâmetros da população. A distribuição amostral de uma estatística descreve a sua tendência (ou enviesamento) e precisão da estimação. As **probabilidades** permitem quer predizer as características de amostras antes de serem recolhidas, dadas as características da população quer definir as distribuições amostrais das estatísticas. Por exemplo, dada uma urna contendo um número conhecido de fichas vermelhas e negras, determinar qual a probabilidade de obter uma amostra de cinco fichas, das quais duas são vermelhas e as restantes negras.

Definição 1.1.7: Estimação

A distribuição amostral duma estatística permite estimar parâmetros desconhecidos da população.

Exemplo 1.1.4: Estimação

São exemplos de estimação: estimar o peso médio de sacos de cimento a partir de uma amostra recolhida do conjunto da produção de um determinado dia; a opinião da população sobre uma questão de um referendo ou sobre um candidato, a partir das respostas a um inquérito de uma amostra da população em estudo.

A Figura 1.1 ilustra o papel da estatística descritiva e estatística inferencial. A amostra é selecionada a partir da população por um processo de amostragem. As técnicas de estatística descritiva permitem resumir a informação contida na amostra em tabelas, gráficos e estatísticas. A partir das estatísticas recorre-se a métodos de estatística inferencial para estimar os parâmetros da população.

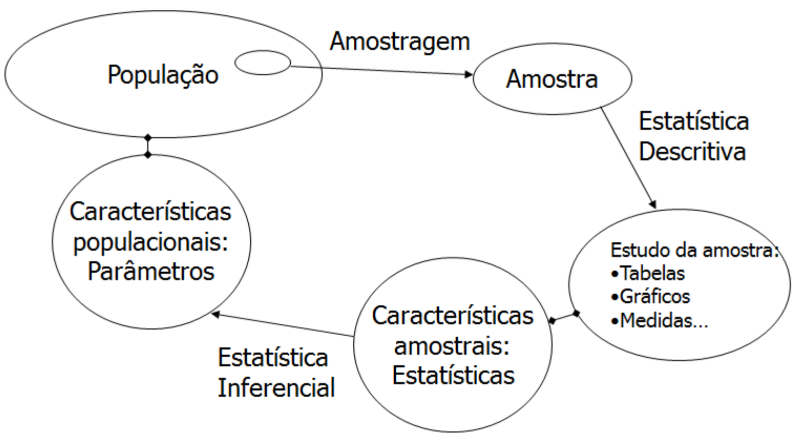


Figura 1.1: Estatística descritiva e inferencial.

No entanto, note-se que, por vezes, são recolhidos dados de toda a população. Neste caso, trata-se de um **censo** que é um estudo de um universo de pessoas, instituições ou objetos físicos com o propósito de adquirir conhecimentos, observando todos os seus elementos e, assim, fazer juízos quantitativos acerca das características importantes desse universo.

Exemplo 1.1.5: Censo

XV Recenseamento Geral da População Portuguesa (2011) - estudo científico, realizado pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), com o objetivo de obter informação sobre toda a população residente, as famílias e o parque habitacional em Portugal (http://www.ine.pt).

Como se viu, nem sempre é possível recolher dados de toda a população devido, por exemplo, a restrições de tempo ou custo. Este é o caso da **sondagem** que é o estudo de uma parte de uma população (amostra) com o objetivo de estudar atitudes, hábitos e preferências da população relativamente a acontecimentos, circunstâncias e assuntos de interesse comum.

Exemplo 1.1.6: Sondagem

Sondagens eleitorais para obter informação acerca da opinião ou atitude dos eleitores.

Também se recorre a amostragem no **controlo de qualidade** que tem por objetivo reconhecer, com base num amostra, se a população se desvia muito de uma condição desejada.

Exemplo 1.1.7: Controlo de qualidade

Um cliente solicita um tecido com uma determinada gramagem média que se deve situar entre dois limites especificados. Para determinar se a produção está conforme o pedido, amostras regulares são recolhidas para verificar se a gramagem média se situa entre os limites especificados, ou seja, se o processo está controlado.

1.2 Amostragem

As estatísticas são conhecidas a partir das amostras, mas os parâmetros são o que se pretende conhecer numa investigação. Como já foi referido, o valor das estatísticas varia de amostra para amostra. Diferentes amostras podem produzir estatísticas bastante distintas dos parâmetros da população, ou valores muito próximos. No primeiro caso, estar-se-ia em presença de amostras não representativas da população. Assim, a questão que se levanta é como recolher uma amostra que seja representativa da população. Este desiderato é, em si, circular, já que a recolha de uma amostra representativa requer o conhecimento dos parâmetros da população que se desconhecem. Contudo, a recolha de uma amostra representativa vai depender do método usado, e muito fortemente da introdução da aleatoriedade na seleção da amostra.

Exemplo 1.2.1: Representatividade da amostra

A eleição presidencial de 1936 nos Estados Unidos colocou em disputa *Roosevelt* pelos Democratas e *Landon* pelos Republicanos. Nessa altura, uma das mais prestigiadas revistas dos Estados Unidos, a *Literary Digest*, com base na maior amostragem até aí realizada (2.4 milhões de inquiridos), previu a vitória do candidato republicano por 57% contra 43% do candidato democrata. No entanto, o resultado foi uma esmagadora vitória de *Roosevelt* por 62% contra 38% de *Landon*. Nessa altura, *George Gallup* tinha iniciado a sua empresa de sondagens e previu o resultado da sondagem da *Literary Digest* antes de este ter sido publicado, bem como, com base numa outra amostra, a vitória de *Roosevelt* com 56% dos votos, portanto com um erro de seis pontos percentuais. A seguinte tabela apresenta os resultados das diversas sondagens, em termos das votações em *Roosevelt*. A última coluna apresenta a dimensão da amostra.

Previsões	Votação em *Roosevelt*	Dimensão (em milhares)
Literary Digest	43%	2400
Gallup da *Literary Digest*	44%	3
Gallup	56%	50

A explicação para o resultado da *Literary Digest* reside no método de amostragem. Uma amostragem para ser representativa e não enviesada não deve sobrerrepresentar ou sub-representar camadas da população. A revista enviou 10 milhões de questionários dos quais recebeu de volta cerca de 2.4 milhões. As moradas para o envio dos questionários foram retiradas de listas de telefones e clubes. Estas listagens excluíam largos sectores da população mais pobre, tanto mais que na altura só uma em cada quatro casas possuía telefone; o facto de que os sectores economicamente mais desfavorecidos apoiavam maioritariamente *Roosevelt* contribui para explicar o resultado obtido pela *Literary Digest*. Contudo, existe ainda um outro fator que pode ajudar a explicar o resultado, em concreto, o número de pessoas que não responderam ao questionário. Sabe-se que, em geral, as pessoas de menores e maiores rendimentos têm tendência a não responderem, o que conduz a uma sobrerrepresentação da classe média. Por outro lado, a taxa de respostas a inquéritos enviados por correio situa-se à volta dos 25% e das entrevistas pessoais à volta dos 65%. De notar, contudo, que as entrevistas não eliminam este problema, nomeadamente todos os que não são inquiridos por não estarem em casa no momento em que o entrevistador bate à porta. Em resumo, este exemplo permite concluir que se o método de seleção está enviesado, o aumento da dimensão da amostra não resolve o problema, só o amplia; por outro lado, as pessoas que não respondem aos inquéritos podem ter opiniões bastante diferentes daquelas que acedem a responder.

Os diversos métodos de amostragem podem ser classificados de acordo como a aleatoriedade é introduzida no processo:

- amostragem probabilística;
- amostragem não probabilística.

Na amostragem probabilística pretende-se que a amostra seja representativa da população de onde é retirada, minimizando tendência ou enviesamento. A probabilidade de se selecionar um dado elemento da população é conhecida.

Na amostragem não probabilística, essa probabilidade é desconhecida, não sendo possível realizar inferências estatísticas relativamente à população. Existem métodos, que apesar de serem usados com alguma frequência, não garantem uma amostra representativa da população. Um desses métodos é o chamado método das quotas. Neste método, cada entrevistador é responsável por uma quota fixa que respeite as categorias da população em termos de características essenciais como, por exemplo, sexo, raça, idade ou classe económica. Contudo, dada a quota, o entrevistador é livre de escolher os sujeitos e tal liberdade provou ser indutora de enviesamento. Há outros exemplos de outros métodos em que poderá existir enviesamento tais como a amostragem por conveniência, por seleção própria e em bola de neve.

Em seguida, serão apresentados os métodos de amostragem probabilística em que a aleatoriedade é usada para reduzir a eventual introdução de enviesamento por parte dos entrevistadores. São exemplos de amostragem probabilística:

- amostragem aleatória simples;
- amostragem sistemática;
- amostragem aleatória estratificada;
- amostragem aleatória por "clusters".

Na **amostragem aleatória simples**, os elementos da população têm igual probabilidade de serem selecionados para a amostra. Este processo é análogo à extração sem reposição de elementos de uma urna contendo todos os elementos da população, isto é, a partir da população de interesse, conhecidos todos os seus elementos, as n unidades que vão constituir a amostra são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, por forma a que qualquer combinação dos n elementos tenha igual probabilidade de ser selecionada. Este processo de seleção de uma **amostra aleatória simples** pode ser realizado recorrendo a tabelas ou geradores de número aleatórios.

Definição 1.2.1: Amostra aleatória simples

Dada uma população, uma amostra aleatória simples de dimensão n é um conjunto de n unidades da população, tal que qualquer outro conjunto de n unidades teria igual probabilidade de ser selecionado.

Exemplo 1.2.2: Amostra aleatória simples

Pretende-se selecionar uma amostra de 100 alunos dos 1253 inscritos no segundo ano dos cursos de Engenharia da Universidade do Minho. A lista dos alunos inscritos no segundo ano dos cursos de Engenharia constitui a chamada base de sondagem; a cada aluno é atribuído um número e, através de uma tabela ou de um gerador de números aleatórios, são selecionados os 100 alunos pretendidos. Este processo é semelhante a inscrever cada nome num cartão, colocar os 1253 cartões numa urna, selecionando, sem reposição, 100 cartões de forma aleatória. Assim, a escolha é feita sem qualquer intervenção humana, garantindo que qualquer aluno tem igual probabilidade de ser selecionado.

Exemplo 1.2.3: Amostragem aleatória simples

Selecionar, a partir de uma tabela de números aleatórios, 4 itens dum conjunto de peças numeradas de 1 a 500, utilizando a seguinte sequência de números aleatórios retirada de uma tabela de números aleatórios:

84	42	56	53	87	75	18	91
76	66	64	83	97	11	69	41
80	92	38	75	28	87	77	03
57	09	85	86	46	86	40	15
31	81	78	91	30	22	88	58

Solução: Tendo por base a tabela de números aleatórios é possível gerar uma sequência de números com três dígitos. Esses números vão definir as unidades a serem selecionadas. O procedimento consiste em:

1. Numerar cada um dos elementos da amostra de 001 a 500;
2. Selecionar um ponto inicial na tabela e um sentido;
3. Ler o número (conjunto de três dígitos);
4. Se o número selecionado estiver entre 001 e 500 então selecionar o elemento da amostra com esse número;

5. Enquanto não tiver selecionado o número de elementos desejado, avançar no sentido definido e voltar ao passo 3.

Selecionando como ponto inicial o início da tabela e o sentido da esquerda para a direita, o procedimento é o seguinte:

1. 844 (ignorado porque não está entre 001 e 500);
2. **256** (primeiro elemento da amostra);
3. 538 (ignorado porque não está entre 001 e 500);
4. 775 (ignorado porque não está entre 001 e 500);
5. **189** (segundo elemento da amostra);
6. **176** (terceiro elemento da amostra);
7. 666 (ignorado porque não está entre 001 e 500);
8. 648 (ignorado porque não está entre 001 e 500);
9. **397** (quarto elemento da amostra).

Logo, a amostra seria constituída pelos itens 256, 189, 176 e 397.

Na **amostragem sistemática**, os elementos da amostra são selecionados a intervalos regulares do conjunto de elementos da população de interesse a partir de um ponto de partida aleatório.

Na **amostragem aleatória estratificada**, a população de interesse é dividida em grupos de unidades, designados por estratos, que são considerados semelhantes numa característica importante para a resposta, e depois é realizada uma amostragem aleatória simples (ou sistemática) de cada um dos estratos.

Exemplo 1.2.4: Amostragem aleatória estratificada

Considere uma sondagem de opinião sobre a igualdade dos sexos relativa ao acesso a lugares de chefia na Universidade do Minho. Uma amostragem estratificada de 200 pessoas, selecionaria 100 homens e 100 mulheres aleatoriamente e de uma forma independente, de entre os docentes da Universidade.

Apesar das vantagens da amostragem aleatória simples, em geral, não se dispõe de uma base de sondagem, isto é, duma listagem com todos os membros da população, pelo que não é possível aplicar este método. As sondagens de opinião ultrapassam este problema selecionando sucessivamente regiões mais pequenas com base em amostragem aleatória simples ou estratificada. Assim, na amostragem aleatória por "clusters", a população é dividida em diversos "clusters" e depois é realizada uma amostragem aleatória simples (ou estratificada) de "clusters", isto é, o contexto da seleção são os "clusters" e não os elementos da população.

Exemplo 1.2.5: Amostragem aleatória por "clusters"

Considere uma amostragem em que o país seria dividido em três regiões, Norte, Centro e Sul, e dentro de cada região as cidades de dimensão populacional superior a 10 000 habitantes e inferiores a 60 000 habitantes seriam agrupadas. Uma amostra aleatória das cidades dentro de cada grupo define o primeiro estágio da amostragem. Em seguida, dentro de cada cidade, são definidas regiões e bairros. As regiões são selecionadas de forma aleatória bem como os bairros dentro de cada região. Finalmente, dentro de cada bairro são selecionados os lares de onde alguns membros, obedecendo a critérios pré-definidos, serão entrevistados.

1.3 Tipos de dados e escalas de medição

O objeto de estudo da Estatística são os valores, dados, de diversas propriedades designadas por **variáveis**. A cor do cabelo, a idade, o sexo, a opinião sobre um determinado projeto, são variáveis que se expressam em determinados valores. Estes podem ser de dois tipos: quantitativos ou qualitativos. Dados quantitativos representam uma quantidade, em geral, através de uma escala numérica; estes dados quantitativos podem ainda ser classificados como discretos, isto é, assumindo um número limitado de valores, como sejam a idade em anos, ou o ano de estudo, ou contínuos, podendo tomar qualquer valor entre dois limites, como sejam o peso ou a altura. Dados qualitativos representam categorias sem qualquer interpretação quantitativa, como sejam as classificações das espécies, ou de acordo com o sexo. Em geral, estes dados são estudados com base no número de indivíduos em cada categoria.

Definição 1.3.1: Tipos de dados

Os dados de uma amostra podem, de acordo com a sua natureza, ser dos seguintes tipos:

- **qualitativos** - informação que identifica alguma qualidade, categoria ou característica, não suscetível de medida, mas de classificação, assumindo várias modalidades;

- **quantitativos** - informação resultante de características suscetíveis de serem medidas, apresentando-se com diferentes intensidades:

- **natureza discreta** - pode tomar um número finito (ou infinito numerável) de valores distintos;
- **natureza contínua** - pode tomar um número infinito de valores numéricos, compreendidos entre dois quaisquer limites.

Como se viu, os valores possíveis para dados qualitativos são categorias. Apenas tem sentido comparar os valores de dados qualitativos em termos de igualdade e de desigualdade. Os dados qualitativas podem ser: dicotómicos (se existirem apenas duas categorias) ou politómicos (se existirem três ou mais categorias). Os valores de dados quantitativos são representados, no caso discreto, por números inteiros, e, no caso contínuo, por números reais pertencentes a intervalos.

Exemplo 1.3.1: Tipos de dados

- **qualitativos** - cor dos olhos, desporto preferido, sexo.
- **quantitativos**
  - **natureza discreta** - número de acidentes, resultado do lançamento de um dado, número de irmãos...
  - **natureza contínua** - peso, altura, nível de colesterol no sangue, idade...

Uma medida é um processo pelo qual números ou símbolos são atribuídos a características ou propriedades de acordo com regras pré-determinadas. Assim, é possível descrever uma população de acordo com várias características tais como idade, sexo, educação, rendimento, preferências de consumo e, para tal, é necessário desenvolver escalas apropriadas para medir tais características. A medição de uma característica ou propriedade significa atribuir um valor de uma escala para a representar. As escalas de medição permitem expressar a qualidade ou a quantidade dos dados. As escalas de medida são, usualmente, classificadas em quatro tipos: nominal, ordinal, intervalar e proporcional. As escalas nominal e ordinal dizem respeito à medição de dados de natureza qualitativa enquanto que as escalas intervalar e e proporcional servem para medir dados quantitativos.

Definição 1.3.2: Escalas de medida

As escalas de medida utilizadas na medição de uma característica ou propriedade são, usualmente, classificadas em quatro tipos:

- **nominal** - apenas define a que classe a unidade pertence, em relação àquela propriedade;
- **ordinal** - também esclarece quanto uma unidade tem mais da propriedade do que outra unidade;
- **intervalar** - indica quanto uma unidade é diferente de outra por uma certa quantidade da propriedade;
- **proporcional** - define quantas vezes mais da propriedade tem uma unidade relativamente a outra.

Na escala nominal, os dados são classificados em categorias não ordenadas. As variáveis representam um atributo ou categoria. Apesar de se poderem usar números para categorizarem os sujeitos em diferentes grupos (por exemplo, sexo masculino ou sexo feminino) os números em si não têm significado e, como tal, não faz sentido o cálculo de estatísticas como médias e desvios padrão. As estatísticas apropriadas para este tipo de dados são as resultantes de contagens, como a moda ou as tabelas de frequências.

Na escala ordinal, a ordem das categorias é importante, sendo que as diferenças entre as diversas categorias são relativas e não quantitativas. A classificação segundo categorias de preferência como, por exemplo, a que resulta da ordenação, segundo o gosto, de diferentes marcas de uma bebida, permite definir essa ordem. As categorias podem ser representadas por números sem significado a não ser pela ordem. No entanto, embora as diferenças entre dois valores numéricos sucessivos sejam as mesmas, não é possível determinar por quanto um sujeito prefere uma marca a outra. Isto significa que categorias sucessivas não representam iguais diferenças na medida do atributo. Neste caso, estatísticas válidas são aquelas baseadas em contagens como a moda (o valor observado mais frequente), as tabelas de frequências e estatísticas não paramétricas baseadas nas graduações.

Uma escala intervalar é aquela em que as categorias sucessivas representam iguais níveis da característica medida. A diferença entre duas classificações, por exemplo 1 e 2, é a mesma que a diferenças entre as classificações 4 e 5. Contudo, quando se adiciona uma quantidade à escala original, por exemplo 10, a diferença entre as escalas mantém-se mas a razão entre as diversas classificações é diferente. Estas escalas que não têm um zero absoluto ou uma base natural, ou seja, cujo valor base é arbitrário, são chamadas escalas intervalares.

As escalas proporcionais têm todas as características das escalas intervalares, mas possuem uma base natural ou um zero absoluto. Estas escalas podem ser transformadas por multiplicação de uma constante, mas não é possível adicionar uma constante, já que tal alteraria a base.

Os dados medidos por escalas do tipo nominal ou ordinal são também referidos como dados qualitativos ou não métricos, enquanto que dados quantitativos ou métricos são medidos por recurso a escalas do tipo intervalar ou proporcional. Existe a possibilidade de se transformarem dados que foram registados num determinado tipo de escala em dados de outro tipo de escala, desde que se respeite a hierarquia das escalas. No entanto, estas transformações conduzem a perda de informação. Por exemplo, os dados de uma escala proporcional podem ser transformados em dados intervalares, os intervalares podem ser transformados em ordinais e os ordinais podem ser transformados em nominais.

Exemplo 1.3.2: Tipos de escala

- **nominal** - raça, situação profissional, fenótipo genético, cor dos olhos, categoria taxonómica, sexo. Pode-se atribuir um código numérico a cada categoria (por exemplo, para o sexo: feminino-0, masculino-1 ou feminino-1, masculino-0), mas o valor em si não é importante.

- **ordinal** - classificação de ferimentos (1-fatal, 2-grave, 3-moderado, 4-ligeiro), queimaduras (grau 1, grau 2 e grau 3), as idades ordenadas em classes (menores de 17 anos, maiores de 18 anos), a escala de Beaufort para o vento, a escala de Richter para tremores de terra, a opinião (má, aceitável, boa), pontuação de um júri (1 - mais fraca a 10 - mais forte). A ordem dos números atribuídos às categorias tem significado, mas o valor dos números não tem significado (por exemplo, a pontuação 8 não é duas vezes melhor do que a 4).

- **intervalar** - temperaturas medidas em graus Celsius (°C) ou Farenheit (°F). As temperaturas de 20 °C e 40 °C correspondem, respetivamente, a 68 °F e 104 °F, e as temperaturas de 5 °C e 10 °C a 41 °F e 50 °F; uma diferença de 5 °C corresponde uma diferença de 9 °F e a uma diferença de 20 °C corresponde uma diferença de 36 °F; no entanto, apesar de 40 ser o dobro de 20, na escala Farenheit não se verifica a mesma razão, isto é, 104 não é o dobro de 68. Assim, um corpo a uma temperatura de 40 °C não é duas vezes mais quente do que um a 20 °C. Outros exemplos incluem dados circulares, onde ângulos são definidos, dados de tempos ou orientação.

- **proporcional** - o tempo de reação (s), o comprimento (cm), a idade, a temperatura em graus Kelvin, a pressão atmosférica, comprimentos, velocidades, capacidades. Um comprimento de 4 cm é duas vezes maior do que um de 2 cm e o 0 tem significado.

1.4 Exercícios

1. Para cada medida indique o tipo de escala que está a ser usada.

   a) Um aluno da Universidade do Minho deve avaliar anualmente o ensino ministrado. Nesse inquérito, as diversas questões devem ser respondidas de acordo com as seguintes classificações: Totalmente de Acordo; de Acordo; em Desacordo; Totalmente em Desacordo.

   b) O salário anual em escudos

   c) Estado civil

   d) Opinião sobre a regionalização (Sim ou Não)

   e) Ordenação dos critérios de escolha de um curso: localização da Universidade, custo de vida na cidade, prestígio do curso, valor das propinas.

2. Pretende-se estudar a incidência de uma doença genética na população portuguesa. Para tal foi recolhida uma amostra de sangue de 2500 recém-nascidos de um determinado ano.

   a) Qual é a população de interesse?

   b) Qual é a amostra?

   c) Os dados são qualitativos ou quantitativos?

   d) Apresente um exemplo de um resultado hipotético, especificando quais a variáveis e as respetivas escalas.

3. A fiabilidade de uma determinada lâmpada é medida em termos do número de horas de vida. Para estimar a fiabilidade, uma amostra de 100 lâmpadas foi testada até falhar.

   a) Qual é a população de interesse?

   b) Qual é a amostra?

   c) Os dados são qualitativos ou quantitativos?

   d) Apresente um exemplo de um resultado hipotético, especificando quais a variáveis e as respetivas escalas.

4. Um estudo pretende determinar os gastos de alojamento dos alunos no primeiro ano do ensino universitário. Pretende-se recolher uma amostra de 1000 alunos.

   a) Qual é a população de interesse?

   b) Qual é a amostra?

   c) Os dados são qualitativos ou quantitativos?

   d) Apresente um exemplo de um resultado hipotético, especificando quais a variáveis e as respetivas escalas.

Capítulo 2

Software estatístico

Hoje em dia, a utilização de *software* estatístico adquiriu uma grande importância pela eficácia na análise e tratamento de grandes volumes de dados. Em particular, existe *software* estatístico livre de fácil utilização que disponibiliza um vasto conjunto de métodos estatísticos como é o caso do R e do Octave[1]. São exemplos de *software* estatístico comercial o SPSS, o MiniTab e o Statistica.

2.1 Ambiente R

O ambiente R é um sistema que inclui computação estatística com suporte para a manipulação de dados, criação de programas de cálculo e elaboração de gráficos. O sistema inclui uma consola com a capacidade de executar e depurar programas em linguagem de programação R e de exibir gráficos. A linguagem de programação R é orientada a objetos e foi criada em 1996 por Ross Ihaka e Robert Gentleman do Departmento de Estatística da Universidade de Auckland na Nova Zelância, tendo posteriormente recebido contribuições de diversos programadores. O arquivo de códigos fonte é mantido e gerido pelo grupo "R Core Team" [2].

O ambiente R pode ser descarregado a partir do sítio `http://www.r-project.org`. Adicionalmente, podem-se instalar pacotes que estendem as capacidades do ambiente R. O interface do utilizador com o ambiente R baseia-se numa consola onde são digitados comandos. Recomenda-se a utilização do *RStudio Desktop* que é um ambiente de desenvolvimento integrado para R e que inclui um conjunto de funcionalidades que facilitam a interação com do utilizador com o ambiente R, através de um interface específico.

[1] O ambiente e linguagem Octave são idênticas ao do *software* comercial MatLab. A maior parte do código Octave que será apresentado poderá também ser executado no MatLab com a *Statistics toolbox*.

2.1.1 Instalação

O ambiente R é distribuído como software livre sob os termos da "Licença Pública Geral do GNU" (*Free Software Foundation's GNU General Public License*) e está disponível no sítio do CRAN (*Comprehensive R Archive Network*) `http://cran.r-project.org`. É possível instalar a distribuição R em diversas plataformas, tais como *UNIX*, *Windows* e *MacOS*. No sítio oficial (`http://www.r-project.org`) pode ser encontrado o manual [5], bem como outra documentação e informações acerca do projeto.

2.1.2 Pacotes

O ambiente R pode ser estendido através da instalação de pacotes para o R. Cada pacote é uma biblioteca de funções específicas. Por exemplo, os comandos básicos de R pertencem ao pacote chamado de "Base". A distribuição R inclui diversos pacotes, mas muitos outros estão disponíveis em `http://cran.r-project.org`. Muitos desses pacotes são criados por utilizadores de R com o objetivo de estender as capacidades do R. A gestão dos pacotes é feita pelo grupo "R Core Team".

2.1.3 Consola

Ao iniciar o R é aberta automaticamente a consola que é a janela onde os comandos são digitados (Figura 2.1). O sinal > indica que o programa está pronto para receber um comando.

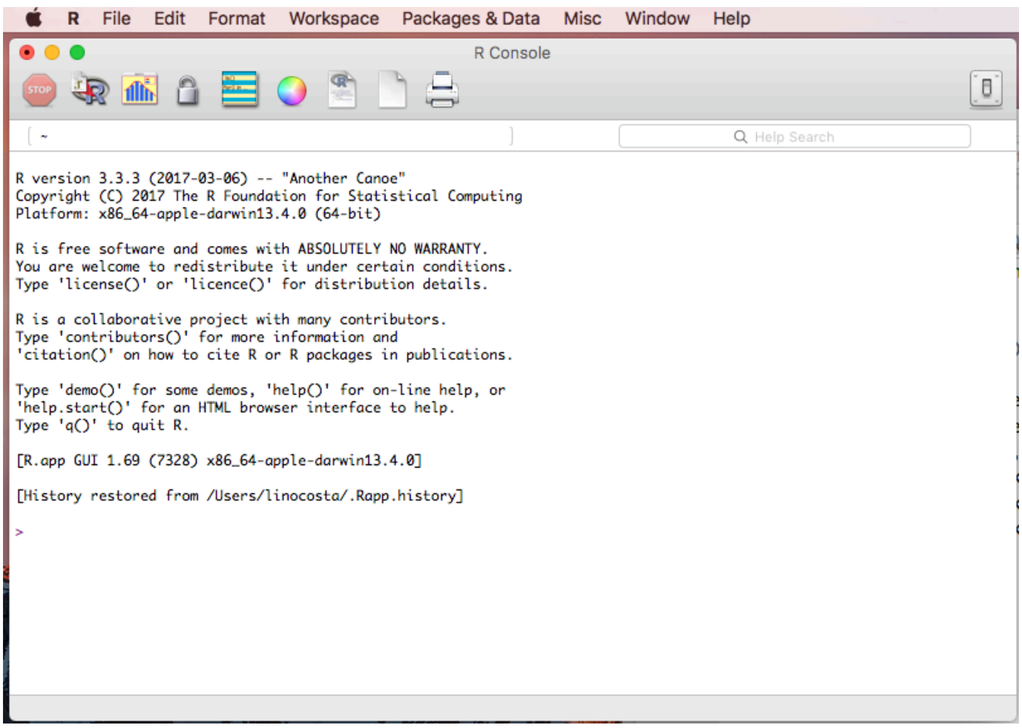


Figura 2.1: Consola do R.

Os comandos ou ordens elementares podem ser expressões ou atribuições (e.g., usando o operador `<-`). Se o comando for uma expressão (e.g., `> 5+2`), o seu valor é calculado e mostrado na janela, mas não é guardado. Uma atribuição, pelo contrário, calcula a expressão e atribui o resultado à variável que é guardada no ambiente R (também chamado de *workspace*), mas não é mostrado na janela (e.g., `> x <- 5+2`). Para mostrar o valor guardado numa variável, basta digitar o nome variável na linha de comandos seguido de *enter* (e.g. `> x` seguido de *enter*).

Os comandos são separados por ponto e vírgula ("`;`") ou inseridos numa nova linha. Podem ser agrupados dentro de chavetas `{...}` vários comandos elementares numa expressão mais complexa. Se ao terminar uma linha, o comando não está sintaticamente completo é mostrado o símbolo "`+`" que é o comando de continuação do comando inicial. Qualquer texto que seja colocado após o carácter "`#`" é considerado comentário e, portanto, não será executado.

2.1.4 RStudio Desktop

O *RStudio Desktop* é um ambiente de desenvolvimento integrado para R [6]. O *RStudio Desktop* inclui a consola de R, um editor com reconhecimento de sintaxe R que suporta a execução direta de código e ainda ferramentas para gráficos, histórico de comandos, depuração de erros e gestão do ambiente R (Figura 2.2).

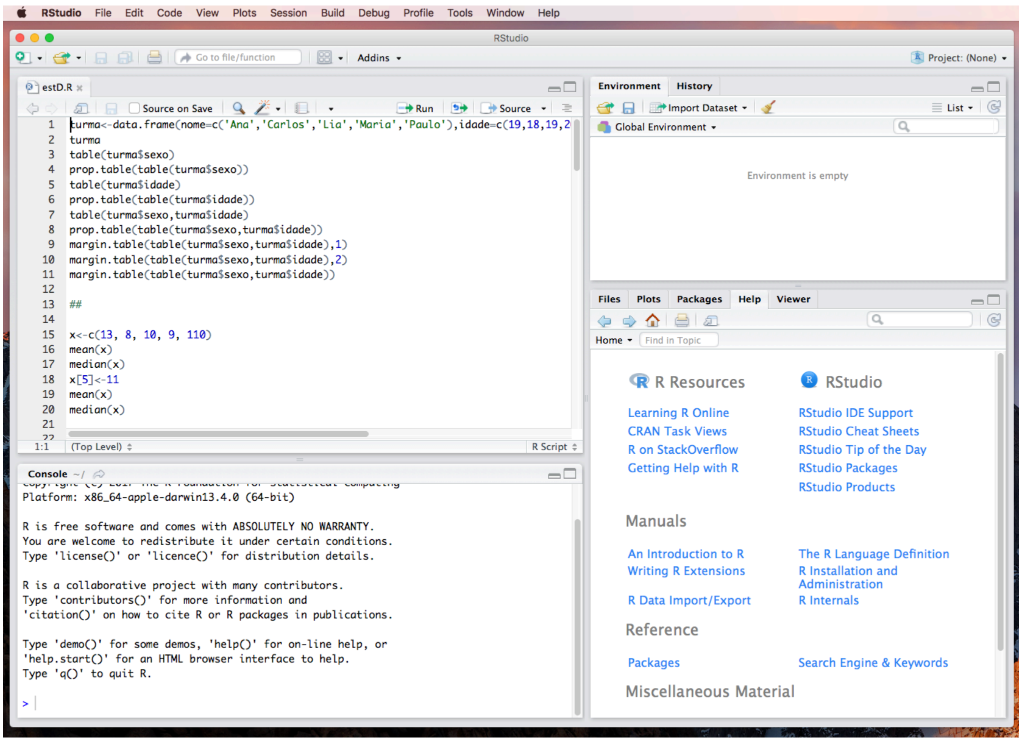


Figura 2.2: Ambiente do *RStudio Desktop*.

O *RStudio Desktop* está disponível nas versões de software livre e comercial. A versão livre está disponível para *Linux*, *Windows* e *MacOS* em `http://www.rstudio.com`. No sítio de suporte (`https://support.rstudio.com`) pode ser encontrada diversa informação acerca doa utilização do *RStudio Desktop*.

2.2 Linguagem R

A linguagem de programação R é orientada a objetos, possui uma sintaxe simples, diversos tipos de dados e operações elementares. A linguagem R possui estruturas de controlo baseadas em comandos para execução condicional, ciclos e codificação de funções que permitem implementar novas funcionalidades. O R permite utilizar diversos tipos de objetos para a introdução e manipulação de dados. Os principais tipos de objetos são os vetores, as listas, as matrizes e os *data frames*. Adicionalmente, é possível manipular objetos R a partir de outras linguagens[2]. A linguagem R é portanto uma linguagem flexível e poderosa.

2.2.1 Sintaxe básica

O R é uma linguagem de expressões com regras e sintaxe simples. Todos os caracteres alfanuméricos conjuntamente com os símbolos "`.`" e "`_`" podem ser usados nos nomes de objetos em R (e.g., variáveis e funções). Contudo, existe a restrição de que os nomes dos objetos só podem começar por uma letra ou o símbolo "`.`" e, se começarem pelo símbolo "`.`", o segundo carácter não pode ser um dígito. Os nomes dos objetos podem ter qualquer comprimento. Há distinção entre maiúsculas e minúsculas, de modo que os caracteres "`x`" e "`X`" são entendidos como sendo símbolos diferentes, referindo-se, portanto, a objetos diferentes.

Devem-se ainda evitar nomes que sejam objetos do sistema como os nomes de funções e constantes (e.g, `c q s t C D F I T diff exp log mean pi range rank var`). Há também outros nomes reservados que têm significado especial na linguagem e que não devem ser usados (e.g., `FALSE TRUE NA NaN NULL Inf break else for function if in next repeat while`).

Os comentários devem ser inseridos após o símbolo `#`. Qualquer texto após o símbolo `#` não será executado nem interpretado como comando R.

2.2.2 Ajuda

No R é possível consultar a sintaxe de algum comando ou informações adicionais sobre determinada função recorrendo às funções `help()` ou `?`.

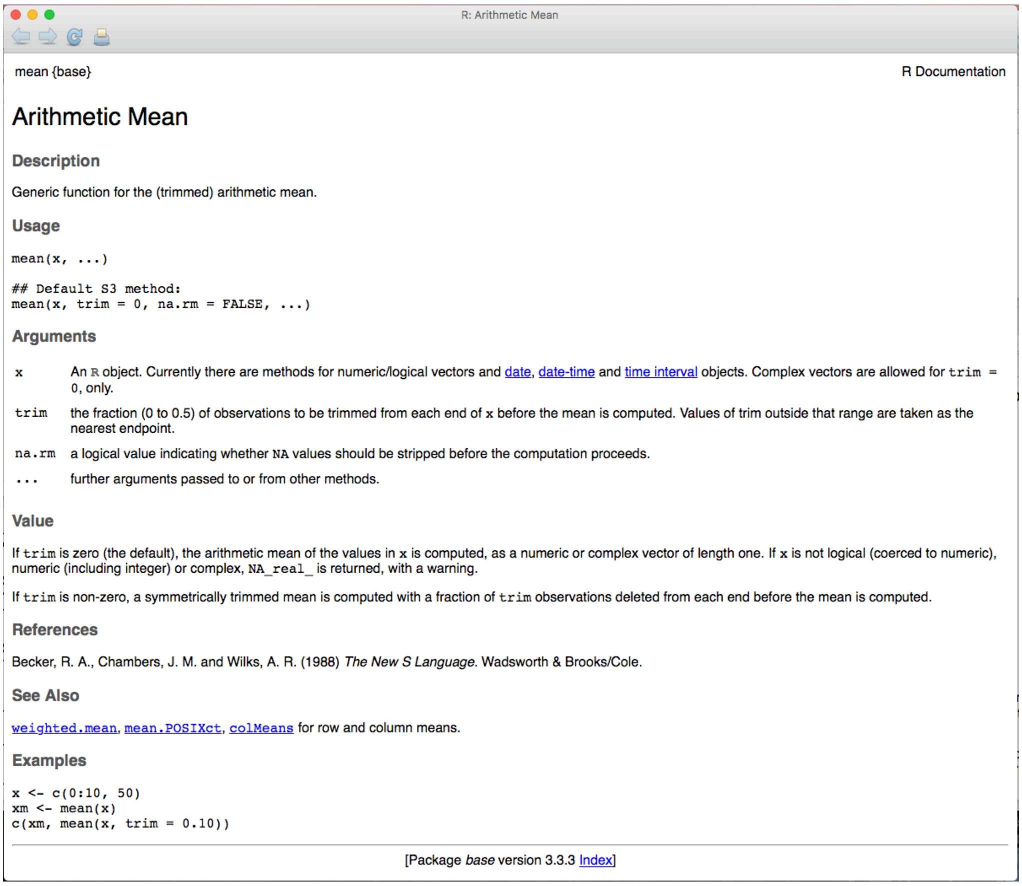
[2] Como, por exemplo, a linguagem de programação C

R

`help(comando)` ou `?comando`: ajuda sobre comandos ou funções. `comando` é o nome de uma função ou uma sequência de caracteres.

Exemplos de utilização da ajuda para consultar informação sobre as funções `mean()` e `sd()`:

```
> help(mean)
> ?sd
```


R: Arithmetic Mean

mean {base} R Documentation

Arithmetic Mean

Description

Generic function for the (trimmed) arithmetic mean.

Usage

```
mean(x, ...)

## Default S3 method:
mean(x, trim = 0, na.rm = FALSE, ...)
```

Arguments

`x`	An R object. Currently there are methods for numeric/logical vectors and date, date-time and time interval objects. Complex vectors are allowed for `trim = 0`, only.
`trim`	the fraction (0 to 0.5) of observations to be trimmed from each end of `x` before the mean is computed. Values of trim outside that range are taken as the nearest endpoint.
`na.rm`	a logical value indicating whether `NA` values should be stripped before the computation proceeds.
`...`	further arguments passed to or from other methods.

Value

If `trim` is zero (the default), the arithmetic mean of the values in `x` is computed, as a numeric or complex vector of length one. If `x` is not logical (coerced to numeric), numeric (including integer) or complex, `NA_real_` is returned, with a warning.

If `trim` is non-zero, a symmetrically trimmed mean is computed with a fraction of `trim` observations deleted from each end before the mean is computed.

References

Becker, R. A., Chambers, J. M. and Wilks, A. R. (1988) *The New S Language*. Wadsworth & Brooks/Cole.

See Also

`weighted.mean`, `mean.POSIXct`, `colMeans` for row and column means.

Examples

```
x <- c(0:10, 50)
xm <- mean(x)
c(xm, mean(x, trim = 0.10))
```

[Package *base* version 3.3.3 Index]

Figura 2.3: Excerto da ajuda obtida para a função `mean()`.

A ajuda sobre uma função inclui, em geral, descrição, sintaxe, argumentos, valores, referências bibliográficas e exemplos. Por exemplo, a Figura 2.3 mostra um excerto da ajuda obtida para a função `mean()`. A ajuda inclui a sintaxe `mean(x, trim = 0, na.rm = FALSE, ...)`, indicando que tem três argumentos de entrada. Note-se que as funções podem ter argumentos de entrada obrigatórios. Neste caso, `x` é obrigatório e os argumentos com os nomes `trim` e `na.rm` são facultativos. Os valores dos argumentos por omissão são indicados (`trim=0` e `na.rm = FALSE`).

Para realizar uma procura nos ficheiros de documentação sobre um determinado tópico ou expressão, podem-se utilizar as funções `help.search()` ou `??`.

R

`help.search(expressao)` ou `??expressao`: procura uma expressão nos ficheiros de documentação. `expressao` é uma sequência de caracteres.

Exemplos de utilização da procura sobre as expressões "binomial" e "normal":

```
> help.search("binomial")    # ajuda sobre o tópico binomial
> ??normal                   # ajuda sobre o tópico normal
```

2.2.3 Tipos de dados elementares

Os tipos de dados elementares do R são: dados numéricos, sequência de caracteres (*string*), dados lógicos e números complexos. Cada objeto destes tipos de dados possui dois atributos: o tipo e o tamanho. O tipo e o tamanho de um objeto pode ser obtido função `mode()` e `length()`, respetivamente. Estas informações são importantes para a manipulação de dados pois, por exemplo, certas estruturas de dados devem possuir obrigatoriamente todos os elementos do mesmo tipo (exceto numéricos e complexos, que podem ser agrupados). É possível atribuir o valor de um qualquer tipo de dados elementar a uma variável usando o operador de atribuição `<-` (ou `=`). As sequências de caracteres são delimitadas pelas aspas duplas `"` ou simples `'`. A parte imaginária de números complexos é indicada por `i`.

R

`x <- valor`: atribui um valor a uma variável. `x` é o nome de um objeto e `valor` é o valor a ser atribuído..

`mode(x)`: devolve o tipo de um objeto. `x` é um objeto.

`length(x)`: devolve o comprimento de um objeto. `x` é um objeto.

`nchar(x)`: devolve o número de caracteres de uma sequência de caracteres. `x` é uma sequência de caracteres.

Exemplos de tipos de dados elementares:

```
> num <- 456    # atribui a variável num o valor 456
> num           # permite visualizar o conteúdo da variável num
[1] 456
> mode(num)
[1] "numeric"
> length(num)
[1] 1
> string <- "Estatística Aplicada"
> string
[1] "Estatística Aplicada"
```

R

```
> mode(string)
[1] "character"
> nchar(string)
[1] 20
> a <- 3 < 6
> a
[1] TRUE
> mode(a)
[1] "logical"
> nc <- 2 + 3i
> nc
[1] 2+3i
> mode(nc)
[1] "complex"
```

2.2.4 Operadores relacionais e lógicos

O R possui operadores relacionais e operadores lógicos. Os operadores relacionais permitem comparar valores entre objetos. Os operadores lógicos permitem definir expressões booleanas. Há dois valores possíveis para as expressões booleanas: `TRUE` se for verdadeira e `FALSE` se for falsa.

R

`x<y`, `x<=y`, `x>y`, `x>=y`, `x==y` e `x!=y`: operações relacionais menor, menor ou igual, maior, maior ou igual, igual e diferente entre objetos. `x` e `y` são objetos.

`x&y`, `x|y`, `!x` e `xor(x,y)`: operações lógicas e, ou, negação e ou exclusivo entre objetos. `x` e `y` são objetos.

Exemplos de operações relacionais e lógicas:

```
> 3>9
[1] FALSE
> 4!=3
[1] TRUE
> 3>9 & 4!=3
[1] FALSE
> 3>9 | 4!=3
[1] TRUE
> !(3>9)
[1] TRUE
> xor(!(3>9),4!=3)
[1] FALSE
```

2.2.5 Operadores aritméticos

No R é possível definir expressões aritméticas simples, usando os operadores aritméticos usuais de `+`, `-`, `*` e `/`. A operação potência é indicada por `^` (ou `**`). O resto e o quociente da divisão inteira são indicados por `%%` e `%/%`, respetivamente.

R

`x + y`, `x - y`, `x * y`, `x / y`, `x ^ y`, `x %% y` e `x %/% y` : operações aritméticas entre valores numéricos. `x` e `y` são objetos.

Exemplos de operações aritméticas:

```
> 2000+16
[1] 2016
> 2*1000+(20-4)
[1] 2016
> 2*10^2+(20-2^2)
[1] 2016
> 2016/10
[1] 201.6
> 16%%3
[1] 1
> 16%/%3
[1] 5
```

Para além disso, o R possui várias funções matemáticas implementadas tais como funções trigonométricas, logaritmos e cálculo combinatório.

R

`abs(x)` e `sqrt(x)` : calculam o valor absoluto e raiz quadrada. `x` é um objeto.

`exp(x)` e `log(x)` : calculam a exponencial e o logaritmo. `x` é um valor numérico.

`sin(x)`, `cos(x)` e `tan(x)`: calculam o seno, coseno e tangente. `x` é um valor numérico.

`asin(x)`, `acos(x)` e `atan(x)`: calculam o arco-seno, arco-coseno e arco-tangente. `x` é um valor numérico.

`factorial(x)` e `chose(n,x)` : calculam o fatorial e o número de combinações de `x` elementos de entre `n` elementos. `x` e `x` são valores numéricos.

Exemplos de operações com funções matemáticas:

```
> sqrt(9)
[1] 3
> exp(1)
[1] 2.718282
```

R

```
> log(exp(1))
[1] 1
> sin(3.14159)
[1] 2.65359e-06
> factorial(4)
[1] 24
> choose(4,2)
[1] 6
```

As operações e funções numéricas podem, em certos casos, ser utilizadas com outros tipos de dados.

2.2.6 Constantes

No R, estão definidas diversas constantes matemáticas como, por exemplo, o valor de π. Há, também, constantes especiais para representar situações de valores omissos (*missings*), valores não representáveis por um número ou o infinito (∞).

R

`pi` : constante π.

`NA` : valores omissos ou *missings* (*Not Available*) .

`NaN` : valores não representáveis por um número (*Not a Number*).

`Inf` : mais infinito ($+\infty$).

Exemplos de utilização de constantes e valores especiais:

```
> pi
[1] 3.141593
> sin(pi)
[1] 1.224606e-16
> 1/0
[1] Inf
> -1/0
[1] -Inf
> 0/0
[1] NaN
```

2.2.7 Vetores

Os vetores são criados usando a função `c()` que combina os seus argumentos num vetor. É possível gerar vetores com sequências de números inteiros com o operador “`:`”. A função `seq()` permite gerar vetores com sequências de números com um certo espaçamento. Para obter um ou mais elementos usa-se o operador `[ ]`. A função `rep()` replica o primeiro argumento o número de vezes indicado pelo seu segundo argumento. A função `lenght()` devolve o comprimento do vetor.

R

`c(...)`: combina os argumentos num vetor.

`inicio:fim`: cria um vetor de números inteiros de `inicio` a `fim`. `inicio` e `fim` são valores numéricos.

`seq(inicio,fim,passo)`: cria um vetor de números de `inicio` a `fim` com espaçamento `passo`. `inicio`, `fim` e `passo` são valores numéricos.

`x[i]`: obtém o elemento `i` do vetor `x`. `i` é um número inteiro. Se `i` for negativo, obtém-se o vetor `x` excluindo os elementos indicados por `i`. O primeiro elemento do vetor tem como índice 1.

`rep(x,n)`: cria um vetor com `x` replicado de acordo com o vetor `n`. Se `n` for um valor inteiro positivo, o vetor `x` é replicado `n` vezes. Se `n` for um vetor de inteiros positivos com comprimento igual ao vetor `x`, cada elemento de `x` é replicado de acordo com os valores indicados em `n`.

`length(x)`:devolve o comprimento do vetor `x`.

Exemplos de manuseamento de vetores:

```
> x<-c(3,4,1,6,9)
> x
[1] 3 4 1 6 9
> y<-1:10
> y
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
 > z<-10:5
> z
[1] 10  9  8  7  6  5
> a<-seq(0,2.5,0.5)
> a
[1] 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5
> x[1]
[1] 3
> x[1:3]
[1] 3 4 1
> x[-1]
```

R

```
[1] 4 1 6 9
> x[c(-1,-3)]
[1] 4 6 9
> b<-c(1,4,9)
> b
[1] 1 4 9
> r<-rep(b,3)
> r
[1] 1 4 9 1 4 9 1 4 9
> p<-rep(b,c(1,2,3))
> p
[1] 1 4 4 9 9 9
> length(p)
[1] 6
```

Há vários operadores que podem ser usados com vetores. A soma e o produto dos elementos de um vetor podem ser calculados com as funções `sum()` e `prod()`, respetivamente. A função `range()` permite obter um vetor com o mínimo e o máximo do vetor. O máximo e mínimo de um vetor podem também ser determinados pelas funções `max()` e `min()`. Os índices do máximo e do mínimo do vetor são dados pelas funções `which.max()` e `which.min()`.

Mais genericamente, podem ser obtidos os índices dos elementos de um vetor que satisfaçam um determinada condição recorrendo à função `which()`.

A função `rev()` devolve um vetor com os elementos por ordem inversa. A função `sort()` permite obter um vetor com os elementos ordenados por ordem crescente. A função `rank()` devolve as graduações correspondentes aos elementos de um vetor. Finalmente, a função `order()` devolve as posições dos elementos do vetor ordenados por ordem crescente.

R

`sum(x)`: calcula a soma dos elementos do vetor `x`.

`prod(x)`: calcula o produto dos elementos do vetor `x`.

`range(x)`: devolve um vetor com o mínimo e o máximo de entre todos os elementos do vetor `x`.

`max(x)`: devolve o máximo de entre todos os elementos do vetor `x`.

`min(x)`: devolve o mínimo de entre todos os elementos do vetor `x`.

`which.max(x)`: devolve o índice do primeiro máximo do vetor `x`.

`which.min(x)`: devolve o índice do primeiro mínimo do vetor `x`.

`which(condicao)`: devolve os índices do vetor que satisfaçam a condição lógica`condicao`.

R

`rev(x)`: devolve um vetor com os elementos do vetor `x` ordenados por ordem inversa.

`sort(x)`: devolve um vetor com os elementos do vetor `x` ordenados por ordem crescente.

`rank(x)`: devolve um vetor com as graduações correspondentes aos elementos do vetor `x`.

`order(x)`: devolve um vetor as posições dos elementos do vetor `x` ordenados por ordem crescente.

Exemplos de operações com vetores:

```
> x<-c(3,4,1,6,9)
> sum(x)
[1] 23
> prod(x)
[1] 648
> min(x)
[1] 1
> max(x)
[1] 9
> range(x)
[1] 1 9
> which.min(x)
[1] 3
> which.max(x)
[1] 5
> which(x>3)
[1] 2 4 5
> rev(x)
[1] 9 6 1 4 3
> order(x)
[1] 3 1 2 4 5
> rank(x)
[1] 2 3 1 4 5
> sort(x)
[1] 1 3 4 6 9
```

Os vetores também podem representar conjuntos. Há vários operadores de conjuntos que podem ser utilizados. A reunião e a intersecção de conjuntos podem ser calculados com as funções `union()` e `intersect()`, respetivamente. Os elementos duplicados nos vetores são ignorados. A diferença de conjuntos é dada pela função `setdiff()`. A função `setequal()` testa se dois conjuntos são iguais. Para testar se um elemento pertence a um conjunto pode-se recorrer ao operador `%in%`

ou à função `is.element()`.

R

`union(x,y)`: calcula a união dos elementos dos vetores x e y.

`intersect(x,y)`: calcula a intersecção dos elementos dos vetores x e y.

`setdiff(x,y)`: calcula a diferença entre os vetores x e y.

`setequal(x,y)`: testa se os vetores x e y são iguais.

`setequal(x,y)`: testa se o elemento x pertence ao vetor y.

`x%in%y`: testa se o elemento x pertence ao vetor y.

Exemplos de operações com conjuntos:

```
> a<-c(1,2,4)
> b<-c(4,5,7)
> union(a,b)
[1] 1 2 4 5 7
> intersect(a,b)
[1] 4
> setdiff(a,b)
[1] 1 2
> setequal(a,b)
[1] FALSE
> setequal(intersect(a,b),4)
[1] TRUE
> 5 %in% a
[1] FALSE
> is.element(5,b)
[1] TRUE
```

2.2.8 Listas

As listas permitem combinar vários tipos de objetos num único objeto. As listas são criadas usando a função `list()` que combina os seus argumentos numa lista. Aos componentes da lista (os argumentos da função `list()`) podem-se atribuir nomes fazendo `nome=objeto`. Para aceder a um componente da lista usa-se "`$`" com o nome do componente, `[[ ]]` com o índice do componente ou `[" "]` com o nome do componente. A função `names()` permite obter ou alterar os nomes de um objeto. Caso não tenham sido definidos os nomes dos componentes da lista, a função `names()` devolve o objeto nulo (`NULL`). Pode-se usar a função `attach()` para se associar uma lista e aceder aos componentes de uma lista sem os mencionar explicitamente. A função `detach()` anula a associação feita pela função `attach()`.

R

`list(...)`: combina os argumentos numa lista

`x$nome`: obtém o componente `nome` da lista `x`.

`x[[i]]`: obtém o componente `i` da lista `x`.

`x["nome"]`: obtém o componente com o nome `nome` da lista `x`.

`names(x)`: obtém os nomes dos componentes da lista `x`.

`attach(x)`: associa a lista `x`.

`detach(x)`: elimina a associação à lista `x`.

Exemplos de manuseamento de listas:

```
> aluno<-list(nome='Ana',idade=19,notas=c(12,15,10))
> aluno
$nome
[1] "Ana"

$idade
[1] 19

$notas
[1] 12 15 10

> aluno$nome
[1] "Ana"
> aluno$notas
[1] 12 15 10
> aluno$notas[2]
[1] 15
> aluno[2]
$idade
[1] 19

> aluno["idade"]
[1] 19
> aluno[[2]]
[1] 19
> aluno[[3]]
```

R

```
[1] 12 15 10
> aluno[[3]][2]
[1] 15
> names(aluno)
[1] "nome"  "idade" "notas"
> sala<-list('B2.37',20)
> sala
[[1]]
[1] "B2.37"

[[2]]
[1] 20
> sala[2]
[[1]]
[1] 20

> sala[[2]]
[1] 20
> names(sala)
NULL
> names(sala)[1]<-'nome'
> names(sala)[2]<-'capacidade'
> sala
$nome
[1] "B2.37"

$capacidade
[1] 20

> sala$capacidade
[1] 20
> names(sala)
[1] "nome"       "capacidade"
> attach(sala)
> capacidade
[1] 20
> detach(sala)
```

2.2.9 Matrizes

As matrizes podem ser criadas usando a função `matrix()`. Os elementos da matriz podem ser obtidos indicando a coluna e a linha com o operador `[ ]`. Com este operador é também possível selecionar linhas, colunas ou sub-matrizes a partir de uma matriz. Podem-se também selecionar elementos de matrizes que satisfaçam determinadas condições. As dimensões de uma matriz podem ser obtidas pela função `dim()`. Podem-se usar também as funções `nrow()` e `ncol()` para obter, respetivamente, o número de linhas e colunas da matriz. É possível os obter ou atribuir nomes às linhas e colunas da matriz, usando as funções `rownames()` e `colnames()`, respetivamente. As funções `cbind()` e `rbind()` permitem aumentar ou criar matrizes concatenando objetos por colunas ou linhas, respetivamente.

R

`matrix(x,nlin,ncol)`: cria uma matriz com `nlin` linhas e `ncol` colunas com os elementos de `x`. O número de elementos de `x` deve ser múltiplo ou submúltiplo de `ncol`.

`x[i,j]`: obtém o elemento da linha `i` e coluna `j` da matriz `x`. `i` e `j` são números inteiros. Se forem negativos, obtém-se a sub-matriz `x` excluindo os elementos indicados por valores negativos.

`dim(x)`: obtém a dimensão da matriz `x`.

`nrow(x)`: obtém o número de linhas da matriz `x`.

`ncol(x)`: obtém o número de colunas da matriz `x`.

`rownames(x)`: obtém ou atribui os nomes das linhas da matriz `x`.

`colnames(x)`: obtém ou atribui os nomes das colunas da matriz `x`.

`cbind(...)`: combina os argumentos numa matriz por coluna.

`rbind(...)`: combina os argumentos numa matriz por linha.

Exemplos de manuseamento de matrizes:

```
> M<-matrix(1:6,ncol=2)
> M
     [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    2    5
[3,]    3    6
> dim(M)
[1] 3 2
> nrow(M)
[1] 3
> ncol(M)
```

R

```
[1] 2
> M[1,2]
[1] 4
> M[,1]
[1] 1 2 3
> M[2:3,]
     [,1] [,2]
[1,]    2    5
[2,]    3    6
> M[-2,]
     [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    3    6
> M[M[,2]>4,]
     [,1] [,2]
[1,]    2    5
[2,]    3    6
> rownames(M)<-c('a','c','c')
> colnames(M)<-c('A','B')
> M
  A B
a 1 4
c 2 5
c 3 6
> M<-cbind(M,7:9)
> M
  A B
a 1 4 7
c 2 5 8
c 3 6 9
> M<-rbind(M,c(10,15,20))
> M
   A  B
a  1  4  7
c  2  5  8
c  3  6  9
  10 15 20
> M<-cbind(M,rep(0,4),-M)
```

R

```
> M
    A   B          A    B
a   1   4   7 0   -1   -4   -7
c   2   5   8 0   -2   -5   -8
c   3   6   9 0   -3   -6   -9
   10  15  20 0  -10  -15  -20
> rownames(M)
[1] "a" "c" "c" ""
```

Há vários operadores que podem ser usados com matrizes. Deve-se ter em atenção que para aplicar os operadores matriciais, as dimensões das matrizes devem ser compatíveis. O produto de matrizes é calculado pelo operador `%*%`. De notar que é possível calcular o produto e quociente elemento a elemento de duas matrizes com os operadores "`*`" e "`/`". Tal como com vetores, a soma e o produto de todos os elementos de uma matriz podem ser calculados com as funções `sum()` e `prod()`. A soma das colunas e linhas de uma matriz podem ser calculadas com as funções `colSums()` e `rowSums()`, respetivamente. A transposta de uma matriz é dada pela função `t()`. O determinante de uma matriz é calculado pela função `det()`. A função `solve()` permite resolver sistemas lineares. Esta função, se invocada com apenas um argumento, devolve a inversa de uma matriz.

R

`A%*%V`: produto da matriz `A` pela `B`.

`A*B`: produto elemento a elemento da matriz `A` pela `B`.

`A/B`: quociente elemento a elemento da matriz `A` pela `B`.

`sum(x)`: obtém a soma de todos os elementos da matriz `x`.

`prod(x)`: obtém o produto de todos os elementos da matriz `x`.

`colSums(x)`: obtém a soma das colunas da matriz `x`.

`rowSums(x)`: obtém a soma das linhas da matriz `x`.

`t(x)`: obtém a transposta da matriz `x`.

`det(x)`: obtém o determinante da matriz `x`.

`solve(A)`: obtém a inversa da matriz `A`.

`solve(A,b)`: obtém a solução dos sistema linear `Ax=b`.

Exemplos de manuseamento de matrizes:

```
> A<-matrix(c(2,3,4,9),nrow=2)
> A
```

R

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    4
[2,]    3    9
> b<-c(6,15)
> b
[1]  6 15
> x<-solve(A,b)
> A%*%x
     [,1]
[1,]    6
[2,]   15
> I<-solve(A)
> A%*%I
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
> det(A)
[1] 6
> sum(A)
[1] 18
> rowSums(A)
[1]  6 12
> colSums(A)
[1]  5 13
> prod(A)
[1] 216
> t(A)
     [,1] [,2]
[1,]    2    3
[2,]    4    9
> A*A
     [,1] [,2]
[1,]    4   16
[2,]    9   81
> A/A
     [,1] [,2]
[1,]    1    1
[2,]    1    1
```

2.2.10 Data frames

A função `data.frame()` permite criar um *data frame* que é uma estrutura de dados que partilha algumas propriedades das matrizes e das listas e agrega variáveis que podem ser de tipos distintos. É a estrutura de dados mais adequada para guardar dados pois cada linha corresponde a um caso e cada coluna a uma variável. Tal como com as listas, às variáveis do *data frame* podem-se atribuir nomes fazendo `nome=objeto`. Para aceder a uma variável do *data frame* usa-se "`$`" com o nome da variável, `[[ ]]` com o índice da variável ou `[" "]` com o nome da variável. Tal como com matrizes, a dimensão de um *data frame* pode ser obtida pela função `dim()`. Podem-se usar também as funções `nrow()` e `ncol()` para obter, respetivamente, o número de casos e de variáveis da matriz. A função `names()` permite obter ou alterar os nomes das variáveis. Pode-se usar a função `attach()` para se associarem os nomes das variáveis de um *data frame* e aceder às suas variáveis sem as mencionar explicitamente. A função `detach()` anula a associação feita pela função `attach()`. As variáveis não numéricas são consideradas, por omissão, como fatores com vários níveis. Pode-se definir uma variável como fator recorrendo à função `factor()`.

R

`data.frame(...)`: combina os argumentos num *data frame*.

`dim(x)`: obtém a dimensão do *data frame* `x`.

`nrow(x)`: obtém o número de casos do *data frame* `x`.

`ncol(x)`: obtém o número de variáveis do do *data frame* `x`.

`x$nome`: obtém a variável `nome` do *data frame* `x`.

`x[[i]]`: obtém a variável `i` do *data frame* `x`.

`x["nome"]`: obtém a variável com o nome `nome` do *data frame* `x`.

`names(x)`: obtém os nomes das variáveis do *data frame* `x`.

`attach(x)`: associa o *data frame* `x`.

`detach(x)`: elimina a associação ao *data frame* `x`.

Exemplos de manuseamento de *data frames*:

```
> turma<-data.frame(nome=c('Ana','Carlos','Lia','Maria','Paulo'),
    idade=c(19,18,19,20,17),sexo=c('F','M','F','F','M'),ano=c
    (7,9,11,10,11))
> turma
    nome idade sexo ano
1    Ana    19    F   7
2 Carlos    18    M   9
```

R

```
3    Lia    19    F  11
4  Maria    20    F  10
5  Paulo    17    M  11
> dim(turma)
[1] 5 4
> nrow(turma)
[1] 5
> ncol(turma)
[1] 4
> turma[[3]]
[1] F M F F M
Levels: F M
> turma$ano
[1]  7  9 11 10 11
> turma$ano<-factor(turma$ano)
> turma[,4]
[1] 7  9  11 10 11
Levels: 7 9 10 11
> turma[c("nome","idade","ano")]
    nome idade ano
1    Ana    19   7
2 Carlos    18   9
3    Lia    19  11
4  Maria    20  10
5  Paulo    17  11
> turma[turma$idade>18,]
   nome idade sexo ano
1   Ana    19    F   7
3   Lia    19    F  11
4 Maria    20    F  10
> turma[1]
    nome
1    Ana
2 Carlos
3    Lia
4  Maria
5  Paulo
> turma[1,]
```

R

```
  nome idade sexo ano
1  Ana    19    F   7
> turma[,1]
[1] Ana    Carlos Lia    Maria  Paulo
Levels: Ana Carlos Lia Maria Paulo
```

2.2.11 Edição de objetos e ficheiros

O ambiente *RStudio Desktop* permite editar ficheiros e objetos de forma simples no seu editor de texto integrado. Contudo, a partir da consola do R também é possível abrir um editor de texto para a introdução dados ou escrita listas de comandos longas[3].

O comando `edit()` permite editar objetos ou ficheiros. O resultado da edição de um objeto pode ser atribuído a outros objetos. O resultado da edição de um ficheiro pode também ser ser gravado em ficheiro. É possível também usar a função `scan()` para introduzir vetores.

Para ler *data frames* a partir de ficheiros de texto em diversos formatos pode-se recorrer à função `read.table()`. Esta função admite vários argumentos de entrada que permitem realizar a leitura de ficheiros com diferentes formatos (e.g., cabeçalhos, ponto decimal e separadores). De grande utilidade é também a função `read.csv()` que permite ler ficheiros de texto com formato CSV ("Comma Separated Value"), isto é, com os valores separados por vírgulas, sendo o ponto o separador decimal. A variante desta função `read.csv2()` lê dados em ficheiros de texto com formato CSV em que o separador é o ponto e vírgula e o ponto decimal é a vírgula (formato utilizado em alguns países, incluindo Portugal).

R

`edit(x)`: abre o editor de texto para editar objetos. `x` é um objeto. `edit(file=ficheiro)`: abre o editor de texto para editar ficheiros. `ficheiro` é uma sequência de caracteres indicando o nome do ficheiro.

`scan()`: devolve um vetor com os valores inseridos na consola.

`read.table(ficheiro)`: lê dados de um ficheiro de texto com o nome `ficheiro` e devolve um *data frame* com esses dados.

`read.csv(ficheiro)`: lê dados de um ficheiro CSV (valores separados por vírgula) com o nome `ficheiro` e devolve um *data frame* com esses dados.

`read.csv2(ficheiro)`: lê dados de um ficheiro CSV (valores separados por ponto e vírgula, sendo a vírgula o ponto decimal) com o nome `ficheiro` e devolve um *data frame* com esses dados.

Exemplos de utilização de entrada de dados:

```
> a<-5
```

[3] O editor de texto depende do sistema utilizado depende do sistema operativo onde o R se encontra instalado.

R

```
> a
[1] 5
> a<-edit(a)       # editar a, alterando o valor para 4
> a
[1] 4
> edit(file="teste.R")  # editar o ficheiro teste.R
> x<-scan()
1: 3
2: 2
3: 5
4: 1
5:
Read 4 items
> x
[1] 3 2 5 1
```

Capítulo 3

Estatística descritiva

A Estatística Descritiva tem por objetivo condensar e resumir conjuntos de dados. A natureza dos dados determina o tipo de organização e descrição, conforme os dados sejam qualitativos ou quantitativos. A utilização de métodos para os organizar, resumir e descrever os dados facilita a sua interpretação e análise.

3.1 Tabelas de frequências

Os dados podem ser organizados em tabelas de frequências. As tabelas de frequências podem ser feitas quer para dados qualitativos quer para dados quantitativos discretos e contínuos. Para elaborar a tabela de frequências, definem-se k categorias ou classes. No caso de dados qualitativos, as classes são diretamente as diferentes classes dos dados. Para dados quantitativos discretos, as classes correspondem aos diferentes valores das observações. No caso contínuo, definem-se classes que correspondem a intervalos de valores contíguos. O ponto médio de cada classe é denominado de marca de classe. Há diferentes regras para determinar o número de classes adequado a amostra de n observações. Uma das regras possível é a Regra de *Sturges* em que se determina o número de classes k da seguinte forma:

$$k = 1 + 3.3 \log_{10}(n)$$

em que $\log_{10}(n)$ é o logaritmo de base decimal de n.

Considerando definidas as k classes, conta-se o número de observações pertencentes a cada uma das classes j com $j = 1, \ldots, k$, isto é, **frequência absoluta** f_j. Note-se que, para um amostra com n observações, se verifica $n = \sum_{j=1}^{k} f_j$.

A soma das frequências absolutas f_j das classes é a **frequência absoluta acumulada** F_j:

$$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i \quad \text{com } j = 1, \ldots, k.$$

Para cada classe j, pode-se calcular também a **frequência relativa** fr_j que é a razão entre a frequência absoluta e o número total de observações:

$$fr_j = \frac{f_j}{n}.$$

A soma das frequências relativas fr_j das classes é a **frequência relativa acumulada** Fr_j:

$$Fr_j = \sum_{i=1}^{j} fr_i \quad \text{com } j = 1, \ldots, k.$$

É possível também construir **tabelas de contingência**, cruzando uma ou mais variáveis. A soma das frequências de cada uma das variáveis corresponde às suas **frequências marginais**.

Em linguagem R, é possível usar a função `table()` para construir tabelas de frequências ou tabelas de contingência (tabelas cruzadas). Nestas tabelas são representadas as frequências absolutas. Para serem construídas tabelas com as frequências relativas, aplica-se a função `prop.table()`. Para se determinar as frequências marginais de uma tabela de contingência, utiliza-se a função `marginal.table()`.

R

`table(...)`: constrói uma tabela de frequências de objetos que possam ser interpretados como fatores.

`prop.table(t)`: constrói uma tabela de frequências relativas da tabela `t`.

`margin.table(t,m)`: constrói uma tabela de frequências marginais da tabela `t` para a variável marginal `m`. Se o argumento `m` for omitido, então devolve a soma das frequências da tabela `t` .

Para os seguinte dados, pretende-se determinar as frequências absolutas e relativas para as variáveis idade e sexo. Determine também uma tabela de contingência cruzando as variáveis sexo e ano. Determina as respetivas frequências marginais.

```
> turma<-data.frame(nome=c('Ana','Carlos','Lia','Maria','Paulo'),
    idade=c(19,18,19,20,17),sexo=c('F','M','F','F','M'),ano=c
    (7,9,11,10,11))
> turma
    nome idade sexo ano
1    Ana    19    F   7
2 Carlos    18    M   9
3    Lia    19    F  11
4  Maria    20    F  10
5  Paulo    17    M  11
> table(turma$sexo)

F M
3 2
```

R

```
> prop.table(table(turma$sexo))

  F   M
0.6 0.4
> table(turma$idade)

17 18 19 20
 1  1  2  1
> prop.table(table(turma$idade))

 17  18  19  20
0.2 0.2 0.4 0.2
> table(turma$sexo,turma$idade)

    17 18 19 20
  F  0  0  2  1
  M  1  1  0  0
> prop.table(table(turma$sexo,turma$idade))

     17  18  19  20
  F 0.0 0.0 0.4 0.2
  M 0.2 0.2 0.0 0.0
> margin.table(table(turma$sexo,turma$idade),1)

F M
3 2
> margin.table(table(turma$sexo,turma$idade),2)

17 18 19 20
 1  1  2  1
> margin.table(table(turma$sexo,turma$idade))
[1] 5
```

3.2 Medidas numéricos

As medidas descritivas numéricas são calculadas a partir dos dados. As medidas calculadas com base na amostra são designadas por estatísticas, enquanto que as medidas para a população se designam por parâmetros, representadas por símbolos gregos. Para caracterizar numericamente os dados de uma amostra com n observações recorre-se ao cálculo de dois tipos de medidas numéricas:

- medidas de localização ou tendência central;
- medidas de dispersão ou variação.

As medidas de localização central mais comuns são: a média aritmética, a mediana, a moda, os percentis, os decis e os quartis. A variância, desvio padrão, amplitude interquartílica e amplitude são as medidas de dispersão mais comuns.

3.2.1 Medidas de localização

A média aritmética é uma medida de tendência central dos dados. A média aritmética pode ser calculada para uma amostra sendo designada por média amostral $\bar{x}$. No caso de se calcular a média aritmética para todos os elementos de uma população é designada por média populacional e denotada por μ.

Definição 3.2.1: Média amostral

A média amostral $\bar{x}$ de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definição 3.2.2: Média populacional

A média populacional μ para uma população finita de N elementos é dada por:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Caso os dados amostrais estejam organizados numa tabela de frequência com k valores distintos das observações x_j (dados quantitativo discretos), a média amostral $\bar{x}$ pode ser calculada com base nas frequência absolutas f_j ou frequências relativas fr_j com $j = 1, \ldots, k$.

Definição 3.2.3: Média amostral (dados discretos)

A média amostral $\bar{x}$ de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, com k valores discretos distintos das observações x_j é dada por:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} fr_j x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_j x_j$$

em que f_j e fr_j são, respetivamente, as frequências absolutas e as frequências relativas para $j = 1, \ldots, k$, sendo $n = \sum_{j=1}^{k} f_j$.

Caso os dados sejam quantitativos contínuos e estejam agrupados numa tabela de frequências com k classes de valor médio M_j, uma aproximação à média amostral $\bar{x}$ pode ser calculada com base nas frequência absolutas f_j ou frequências relativas fr_j com $j = 1, \ldots, k$.

Definição 3.2.4: Média amostral (dados contínuos)

A média amostral $\bar{x}$ de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, classificadas em k classes (intervalos de valores) com valor médio M_j é aproximada por:

$$\bar{x} \approx \sum_{j=1}^{k} fr_j M_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} f_j M_j$$

em que f_j e fr_j são, respetivamente, as frequências absolutas e as frequências relativas para $j = 1, \ldots, k$, sendo $n = \sum_{j=1}^{k} f_j$.

A moda de uma amostra de n observações é o valor que é observado mais frequentemente. Os dados amostrais podem ter uma moda (unimodal) ou múltiplas modas (bimodal, trimodal, ...), como está ilustrado na Figura 3.1.

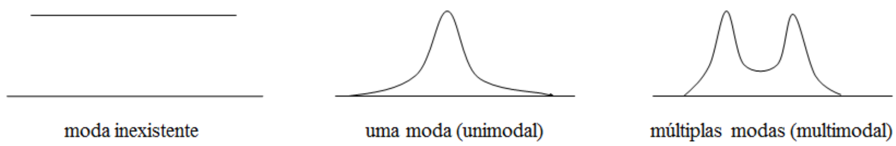


Figura 3.1: Moda.

Em linguagem R, não existe nenhuma função para determinar a moda. No entanto, pode-se identificar a moda ou modas com base na função `table()`. Uma forma de determinar o vetor dos valores mais frequentes de um vetor `x` é `as.numeric(names(which(table(x)==max(table(x)))))`. É possível definir funções em R. Por exemplo, o seguinte código define a função `moda()` que devolve o vetor dos valores mais frequentes de um vetor `x`:

```
function moda<-function(x)
{
  return(as.numeric(names(which(table(x)==max(table(x))))))
}
```

A mediana de uma amostra de n observações é o valor que divide os dados ordenados em duas partes iguais, isto é, 50% das observações são menores ou iguais à mediana (e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana). Dito de outra maneira, dado um conjunto de observações ordenadas por ordem crescente, a mediana corresponde à observação central se o número de observações é ímpar, ou à média das duas observações centrais se é par. Ao contrário da média, o valor da mediana não é afetada pelas observações extremas.

Definição 3.2.5: Mediana

A mediana de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, é dada por:

$$Med = \begin{cases} \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{se } n \text{ par} \\ x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

em que $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ são as observações ordenadas por ordem crescente.

Exemplo 3.2.1: Média e mediana

Considere o seguinte conjunto de observações que representam o salário (em euros por hora) de cinco trabalhadores de uma empresa: 13, 8, 10, 9, 110. Calcule o salário médio e o salário mediano. O que aconteceria se 110 fosse um erro de registo, sendo o verdadeiro valor 11?

- o número de observações é 5, i.e., $n = 5$
- a média das observações é $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{150}{5} = 30$
- para calcular a mediana é preciso ordenar as observações por ordem crescente: $x_{(1)} = 8$, $x_{(2)} = 9$, $x_{(3)} = 10$, $x_{(4)} = 13$ e $x_{(5)} = 110$
- dado que o número de observações é ímpar, a mediana corresponde à terceira observação quando ordenadas por ordem crescente, i.e, $Med = x_{\left(\frac{6}{2}\right)} = x_{(3)} = 10$.
- de notar que se a observação 110 correspondesse a um erro de registo, sendo o verdadeiro valor 11, o valor da mediana não se alteraria enquanto que a média tomaria o valor de 10.2. Neste sentido, a mediana é considerada uma medida robusta porque resistente à presença de observações extremas.

Em linguagem R, a média e a mediana de uma amostra podem ser calculadas através das funções `mean()` e `median()`, respetivamente.

R

`mean(x)`: calcula a média aritmética do objeto `x`.

`median(x)`: calcula a mediana do objeto `x`.

Considere o seguinte conjunto de observações que representam o salário (em euros por hora) de cinco trabalhadores de uma empresa: 13, 8, 10, 9, 110. Calcule o salário médio e o salário mediano.

```
> x<-c(13, 8, 10, 9, 110)
> mean(x)
[1] 30
> median(x)
[1] 10
> x[5]<-11
> mean(x)
[1] 10.2
> median(x)
[1] 10
```

Dada um conjunto de dados

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

é possível ordená-lo por ordem crescente, originando uma amostra ordenada

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$$

onde $x_{(i)}$ é i-ésima mais pequena observação. As estatísticas

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$$

são referidas como estatísticas ordinais. A ordem de uma observação pode ser definida de forma ascendente ou descendente. Assim, na ordem ascendente a observação $x_{(i)}$ tem ordem i, enquanto que na ordem descendente tem ordem $n - i + 1$. A soma das duas ordenações, para qualquer observação $x_{(i)}$, é igual a $n+1$. Assim, como já foi referido, a profundidade de uma observação é a menor das suas ordens, ascendente e descendente. A noção de profundidade permite definir algumas estatísticas, tais como a mediana, os extremos e os quartis. A mediana, cuja a profundidade é $(n + 1)/2$, pode exigir uma interpolação quando n é par. Neste caso, assumindo que $n = 2k$,

$$\text{Mediana} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right)$$

Os extremos correspondem às observações com profundidade igual a 1, isto é, o maior e o menor dos valores observados.

Os quartis são definidos pela seguinte profundidade, Profundidade do quartil =

$$\frac{[\text{profundidade da mediana}]+1}{2}$$

onde $[x]$ designa o maior inteiro contido em x. De notar que os dois quartis englobam a metade central da amostra. As estatísticas resumo, para além da mediana, têm associada uma dada profundidade que identifica simultaneamente duas observações na amostra, acima e abaixo da mediana.

Exemplo 3.2.2: Mediana e Quartis

Os dados representam o ganho de peso de 15 parturientes durante a gravidez. 7 8 10 10 11 11 12 12 13 14 14 14 15 17 18 Calcule a mediana, os quartos e os extremos.

Solução:

- o número de observações é 15, i.e., $n = 15$
- observações: 7 8 10 10 11 11 12 12 13 14 14 14 15 17 18
- ordem ascendente: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
- ordem descendente: 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
- profundidade da mediana $(15 + 1)/2 = 8$, logo $Med = 12$
- profundidade dos quartis $(8 + 1)/2 = 4.5$, logo $Q_1 = 10.5$ e $Q_3 = 14$
- extremos 7 e 18
- pode-se concluir que a mediana dos pesos é 12 kg, e 50% dos casos observados situam-se entre 10.5 kg e 14 kg. O ganho de peso variou entre 7 kg e 18 kg.

Os quartis Q_1, Q_2 e Q_3 dividem os dados ordenados por ordem crescente em quatro partes iguais.

O primeiro quartil de um conjunto de observações corresponde à observação abaixo da qual se situam 25% das observações e acima da qual se situam 75% das observações. De forma semelhante, o terceiro quartil corresponde à observação abaixo da qual se situam 75% das observações e acima da qual se situam 25% das observações. Note-se também que o segundo quartil Q_2 corresponde à mediana Med.

O percentil P_i indica o valor abaixo do qual estão i% dos dados. Dado um conjunto de observações, considerando graduações destas ordenadas por ordem crescente, o percentil de ordem p corresponde à observação com a graduação ; se este valor não é um inteiro é arredondado para a graduação média mais próxima. O percentis 25, 50 e 75 correspondem, respetivamente, ao primeiro, segundo e terceiro quartil. Os decis correspondem aos percentis de ordem associada às dezenas.

Definição 3.2.6: Percentil

O percentil P_i com $0 < i < 100$ de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dado por

$$P_i = x_{\left((n+1)\times \frac{i}{100}\right)}$$

em que $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ são as observações ordenadas por ordem crescente[a].

[a] No cálculo dos percentis, caso o subscrito i de $x_{(i)}$ não seja inteiro, é arredondado para a graduação média mais próxima de $\left((n+1)\times \frac{i}{100}\right)$ ou utiliza-se interpolação linear para aproximar $x_{(i)}$.

De notar que os percentis P_{25}, P_{50} e P_{75} correspondem, respetivamente, aos quartis Q_1, Q_2 e Q_3. A Figura 3.2 ilustra a relação entre os percentis e os quartis.

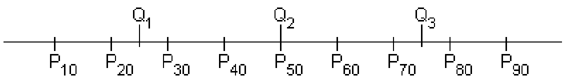


Figura 3.2: Percentis e quartis.

Em linguagem R, os quartis, percentis e decis podem ser obtidos pela função `quantile()`. A função `summary()` também devolve as estatísticas resumo que caracterizam a amostra. A função `fivenum()` permite obter também as cinco medidas resumo de Tukey de uma amostra[1].

Exemplo 3.2.3: Média, mediana, moda e quartis

Considere o seguinte conjunto de medidas: 6, 8, 3, 5, 6, 2, 6, 4, 11, 3. Calcule a média, a mediana, a moda, o primeiro quartil, o terceiro quartil e os percentis 10% e 90%.

- o número de observações é 10, i.e., $n = 10$
- a média das observações é $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{54}{10} = 5.4$
- para calcular a mediana é preciso ordenar as observações por ordem crescente: $x_{(1)} = 2$, $x_{(2)} = 3$, $x_{(3)} = 3$, $x_{(4)} = 4$, $x_{(5)} = 5$, $x_{(6)} = 6$, $x_{(7)} = 6$, $x_{(8)} = 6$, $x_{(9)} = 8$, $x_{(10)} = 11$
- dado que o número de observações é par, a mediana corresponde à média da quinta e

[1] Note-se que os valores indicados para o primeiro e terceiro quartil nas medidas resumo Tukey podem ser diferentes pois são calculadas por outro processo.

sexta observação quando ordenadas por ordem crescente, i.e, $Med = \frac{x_{(\frac{10}{2})}+x_{(\frac{10}{2}+1)}}{2} = \frac{x_{(5)}+x_{(6)}}{2} = 5.5$

- a moda é 6
- o primeiro quartil corresponde a $Q_1 = x_{\left((11)\times\frac{1}{4}\right)} = x_{(2.75)} = x_{(2.5)} = 3$
- o terceiro quartil corresponde a $Q_3 = x_{\left((11)\times\frac{3}{4}\right)} = x_{(8.25)} = x_{(8.5)} = 6$
- o percentil 10 é dado por $P_{10} = x_{\left((11)\times\frac{10}{100}\right)} = x_{(1.1)} = x_{(1.5)} = 2.5$
- o percentil 90 é dado por $P_{90} = x_{\left((11)\times\frac{90}{100}\right)} = x_{(9.9)} = x_{(9.5)} = 9.5$

R

`quantile(x)`: calcula quantis do vetor `x`.

`summary(x)`: calcula as estatísticas resumo do vetor `x`.

`fivenum(x)`: calcula as cinco medidas resumo do vetor `x`.

Considere o seguinte conjunto de medidas: 6, 8, 3, 5, 6, 2, 6, 4, 11, 3. Calcule a média, a mediana, a moda, o primeiro quartil, o terceiro quartil e os percentis 10% e 90%.

```
> x<-c(6, 8, 3, 5, 6, 2, 6, 4, 11, 3)
> mean(x)
[1] 5.4
> median(x)
[1] 5.5
> as.numeric(names(which(table(x)==max(table(x)))))
[1] 6
> moda(x)
[1] 6
> quantile(x)
   0%   25%   50%   75%  100%
 2.00  3.25  5.50  6.00 11.00
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   2.00    3.25    5.50    5.40    6.00   11.00
> fivenum(x)
[1]  2.0  3.0  5.5  6.0 11.0
> quantile(x,c(0.1,0.9))
10% 90%
```

```
2.9 8.3
```

3.2.2 Medidas de dispersão

A amplitude é diferença entre a maior observação (o máximo) e a menor observação (o mínimo). A amplitude é uma medida da variabilidade dos dados.

Definição 3.2.7: Amplitude

A amplitude de um conjunto de observações é definida como a diferença entre a maior e a menor das observações. A amplitude R de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dada por

$$R = \max_{i=1,\ldots,n} x_i - \min_{i=1,\ldots,n} x_i$$

Em linguagem R, a amplitude de uma amostra pode ser calculada a partir da função `range()` que devolve um vetor com a menor e a maior observação da amostra. Podem, também, ser usadas as funções `min()` e `max()` para o mesmo efeito.

A variância indica a dispersão dos dados em relação à média. Quanto maior a variância, maior será a dispersão dados em torno da média. A variância pode ser calculada para uma amostra sendo designada por variância amostral s^2. No caso de se calcular a variância para todos os elementos de uma população é designada por variância populacional e denotada por σ^2.

Definição 3.2.8: Variância amostral

A variância amostral s^2 de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, é dada por:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Definição 3.2.9: Variância populacional

A variância populacional σ^2 para uma população finita de N elementos é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2$$

De notar que o denominador da variância amostral é $n-1$, enquanto que para a variância populacional é N.

Caso os dados amostrais estejam organizados numa tabela de frequência com k valores distintos das observações x_j (dados quantitativo discretos), a variância amostral s^2 pode ser calculada com base nas frequência absolutas f_j ou frequências relativas fr_j com $j=1,\ldots,k$.

Definição 3.2.10: Variância amostral (dados discretos)

A variância amostral s^2 de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, com k valores discretos distintos das observações x_j é dada por:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{k} fr_j\,(x_j-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} f_j\,(x_j-\bar{x})^2$$

em que f_j e fr_j são, respetivamente, as frequências absolutas e as frequências relativas para $j=1,\ldots,k$, sendo $n=\sum_{j=1}^{k} f_j$.

Caso os dados sejam quantitativos contínuos e estejam agrupados numa tabela de frequências com k classes de valor médio M_j, uma aproximação à variância amostral s^2 pode ser calculada com base nas frequência absolutas f_j ou frequências relativas fr_j com $j=1,\ldots,k$.

Definição 3.2.11: Variância amostral (dados contínuos)

A variância amostral s^2 de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população, classificadas em k classes (intervalos de valores) com valor médio M_j é aproximada por:

$$s^2 \approx \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{k} fr_j\,(M_j-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} f_j\,(M_j-\bar{x})^2$$

em que f_j e fr_j são, respetivamente, as frequências absolutas e as frequências relativas para $j=1,\ldots,k$, sendo $n=\sum_{j=1}^{k} f_j$.

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância e tem a mesma unidade que os dados originais. O desvio padrão amostral é designado por s e o desvio padrão populacional por σ.

Definição 3.2.12: Desvio padrão amostral

O desvio padrão amostral s de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, retirada de uma população é dado por:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Definição 3.2.13: Desvio padrão populacional

O desvio padrão populacional σ para uma população finita de N elementos é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Em linguagem R, a variância amostral e o desvio padrão amostral podem ser obtidos, respetivamente, pelas funções `var()` e `sd()`.

Exemplo 3.2.4: Variância e desvio padrão amostral

Considere o seguinte conjunto de observações: 2, 3, 4, 4, 7. Calcule a média, a amplitude, a variância e o desvio padrão. Verifique o que acontece se adicionar uma constante às observações, por exemplo, 10.

- o número de observações é 5, i.e., $n = 5$
- a média das observações é $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{20}{5} = 4$
- a amplitude é $R = 7 - 2 = 5$
- a variância amostral é $s^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(7-4)^2}{4} = 3.5$
- o desvio padrão amostral é $s = \sqrt{3.5} = 1.8708$
- Adicionando 10 a cada observação, os valores da média, a amplitude, variância e desvio padrão são: $\bar{x} = 40$, $R = 5$, $s^2 = 3.5$ e $s = 1.8708$.

R

`var(x)`: calcula a variância amostral do vetor `x`.

`sd(x)`: calcula o desvio padrão amostral do vetor `x`.

Considere o seguinte conjunto de observações: 2, 3, 4, 4, 7. Calcule a média, a amplitude, a variância e o desvio padrão. Verifique o que acontece se adicionar uma constante às observações, por exemplo, 10.

```
> x<-c(2, 3, 4, 4, 7)
```

R

```
> mean(x)
[1] 4
> range(x)
[1] 2 7
> max(x)-min(x)
[1] 5
> var(x)
[1] 3.5
> sd(x)
[1] 1.870829
> x<-x+10
> x
[1] 12 13 14 14 17
> mean(x)
[1] 14
> range(x)
[1] 12 17
> max(x)-min(x)
[1] 5
> var(x)
[1] 3.5
> sd(x)
[1] 1.870829
```

A amplitude inter-quartil AIQ de uma amostra é a diferença entre o terceiro quartil Q_3 e o primeiro quartil Q_1. Quando comparada com o desvio padrão, a amplitude inter-quartil é menos sensível à existência de observações extremas.

Definição 3.2.14: Amplitude inter-quartil

A amplitude inter-quartil AIQ de uma amostra de n observações, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dada por

$$AIQ = Q_3 - Q_1$$

Em linguagem R, a amplitude inter-quartil de uma amostra é obtida pela função `IQR()`.

Exemplo 3.2.5: Variância e desvio padrão amostral

Considere o seguinte conjunto de observações que representam o ganho de peso, em kg, de 15 parturientes: 7, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 17, 18. Calcule a média, a mediana, a moda, a amplitude, o desvio padrão, os quartis a e amplitude inter-quartil.

- o número de observações é 15, i.e., $n = 15$
- $\sum_{i=1}^{15} x_i = 186$ e $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 2438$
- a média das observações é $\bar{x} = \frac{1}{15}\sum\limits_{i=1}^{15} x_i = \frac{186}{15} = 12.4$
- dado que o número de observações é ímpar, a mediana corresponde à sétima observação quando ordenadas por ordem crescente, i.e, $Med = x_{(7)} = 12$
- a moda é 14
- a amplitude é $R = 18 - 7 = 11$
- a variância amostral é $s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{15} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{15} x_i\right)^2}{15}}{15-1} = \frac{2438 - \frac{(186)^2}{15}}{14} = 9.4$
- o desvio padrão amostral é $s = \sqrt{9.4} = 3.066$
- o primeiro quartil corresponde a $Q_1 = 10.5$
- o segundo quartil corresponde a $Q_2 = Med = 12$
- o terceiro quartil corresponde a $Q_3 = 14$
- a amplitude inter-quartil é: $AIQ = Q_3 - Q_1 = 14 - 10 = 3.5$

R

`IQR(x)`: calcula a amplitude inter-quartil do vetor `x`.

Considere o seguinte conjunto de observações que representam o ganho de peso, em kg, de 15 parturientes: 7, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 17, 18. Calcule a média, a mediana, a moda, a amplitude, o desvio padrão, os quartis a e amplitude inter-quartil.

```
> x<-c(7, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 17, 18)
> mean(x)
[1] 12.4
> median(x)
[1] 12
```

R

```
> as.numeric(names(which(table(x)==max(table(x)))))
[1] 14
> moda(x)
[1] 14
> range(x)
[1]  7 18
> max(x)-min(x)
[1] 11
> var(x)
[1] 9.4
> sd(x)
[1] 3.065942
> quantile(x)
  0%  25%  50%  75% 100%
 7.0 10.5 12.0 14.0 18.0
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
    7.0    10.5    12.0    12.4    14.0    18.0
> fivenum(x)
[1]  7.0 10.5 12.0 14.0 18.0
> quantile(x,c(0.1,0.9))
 10%  90%
 8.8 16.2
> IQR(x)
[1] 3.5
```

3.3 Representações gráficas

As representações gráficas dos dados podem ajudar a salientar valores específicos, valores extremos, proporções, distribuições e tendências ao longo do tempo. Os gráficos podem representar uma única variável ou o relacionamento entre duas ou mais variáveis. Existem diversos métodos gráficos para a representação dos dados. No entanto, a natureza dos dados, qualitativos ou quantitativos, condiciona os métodos gráficos a usar. Dados qualitativos, agrupados em categorias possibilitam a representação em gráficos de barra e circulares (de torta); estas representações também podem ser usadas para dados quantitativos de natureza discreta. Dados quantitativos, associados a variáveis contínuas, são usualmente representados por histogramas ou gráficos de caixa e bigodes.

3.3.1 Gráfico de barras

No gráfico de barras, a altura de cada barra é proporcional à frequência absoluta ou frequência relativa da correspondente variável. Este tipo de gráfico é adequado para representar dados qualitativos ou quantitativos discretos. Quando se representa dados qualitativos de escala nominal, em geral, é aconselhável ordenar as categorias por ordem crescente ou decrescente.

3.3.2 Gráfico circular

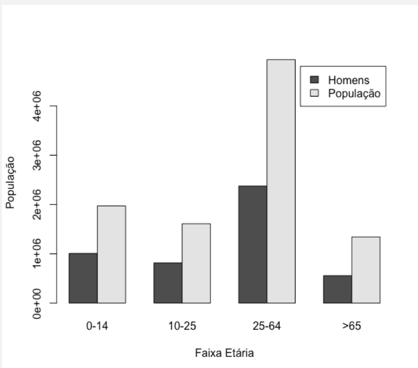
No gráfico circular, os setores circulares dum círculo são proporcionais às frequências absolutas ou frequências relativas da correspondente variável. Este tipo de gráfico é mais adequado para representar dados qualitativos[2]. Num gráfico de torta, o círculo é dividido em fatias a que correspondem áreas (ou ângulo central) proporcionais às frequências relativas (100% corresponde a 360^o).

Exemplo 3.3.1: Representações gráficas

A seguinte tabela apresenta alguns dados do Instituto Nacional de Estatística para a população portuguesa, ano de 1992.

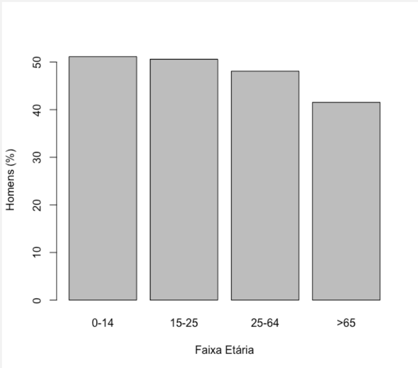
Faixa etária	População	População masculina	Óbitos	Óbitos masculinos
0-14	1971658	1008249	1874	1098
15-24	1610146	814553	1791	1427
25-64	4938558	2374514	21901	14863
>65	1342308	557409	75595	35914
Total	9862670	4754725	101161	53302

Pode-se representar os dados em forma de gráfico de barras e de torta. Os dados encontram-se agrupados em quatro categorias, correspondentes a cada faixa etária. O gráfico de barras para a faixa etária é apresentado na seguinte figura.

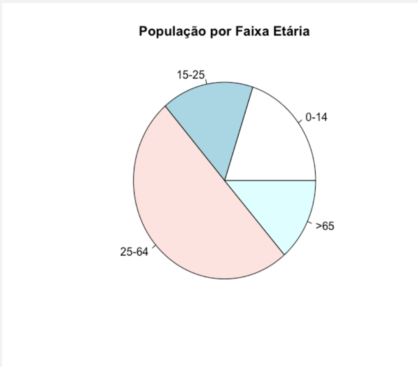


[2] também é possível com dados quantitativos discretos.

No entanto, este gráfico baseado nas frequências observadas não é tão explícito quanto o gráfico de barras das frequências relativas da população masculina, por faixa etária, já que neste caso é possível verificar em que faixas etárias existe uma predominância de um determinado sexo. O gráfico de barras das frequências relativas da população masculina, por faixa etária, é o seguinte.

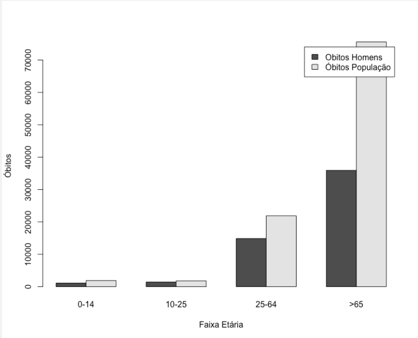


O gráfico de torta para a população geral em função da faixa etária permite visualizar as relações de dependência, nomeadamente qual a proporção das populações dependentes, isto é, as que não contribuem para a produção de riqueza (crianças e idosos).

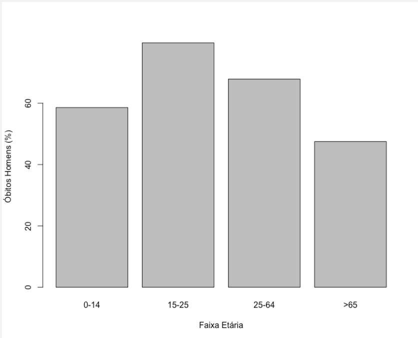


Os gráficos anteriores permitem verificar que, ao contrário do que é voz corrente, nascem mais bebés do sexo masculino. A predominância, em termos de números, do sexo masculino manifesta-se nas duas primeiras faixas etárias. A análise dos óbitos permite completar esta análise, ao evidenciar as diferenças marcantes entre os sexos ao longo da vida. Apesar de se verificar um maior número de indivíduos do sexo masculino a nascença, esta relação inverte-se nas faixas etárias seguintes devido ao grande número de óbitos masculinos que se verificam nas três primeiras faixas etárias.

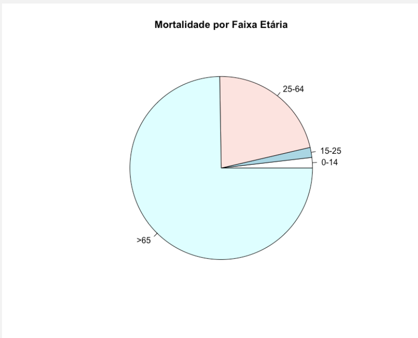
O seguinte gráfico de barras apresenta o número de óbitos masculinos e total.



Mais uma vez se verifica que este gráfico é menos informativo que o seguinte gráfico de barras das frequências relativas.

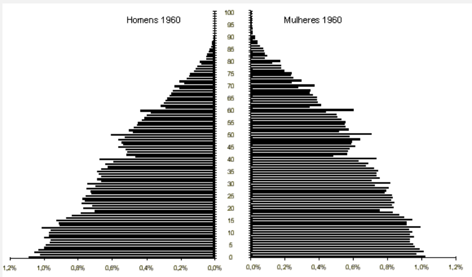


Neste último gráfico a alta taxa de mortalidade masculina é evidente, sendo só suplantada pela mortalidade feminina na última faixa etária.
O gráfico de torta para os óbitos permite claramente verificar, como seria de esperar, que a grande mortalidade ocorre na faixa etária correspondente aos maiores de 65 anos.

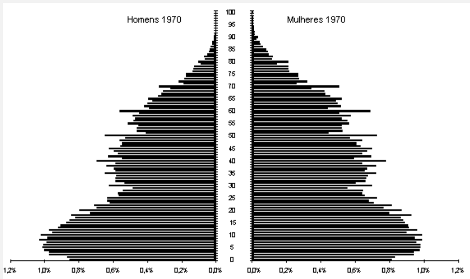


Convém referir que a representação em gráfico de barras para ser correta exige que as bases das diversas barras sejam iguais. De outra forma, a leitura do gráfico será enganadora. Existem representações de gráficos de barras diferentes das convencionais, nomeadamente em demografia, cujo o objetivo é realçar aspetos importantes nos dados.

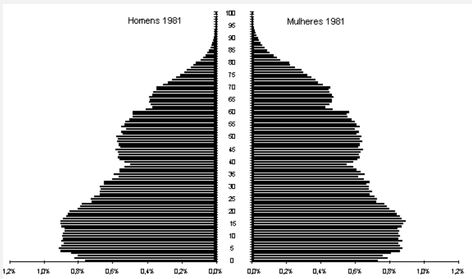
As seguintes figuras apresentam os gráficos de barras para a estrutura etária da população portuguesa (Instituto Nacional de Estatística, Projecto ALEA, http://alea-estp.ine.pt, *Dossiers & Recursos*, no 1 População e Demografia) considerando em simultâneo a representação por sexos. Estes gráficos permitem visualizar a percentagem da população total, por sexo, em cada idade. Nestes gráficos a idade 100 representa o conjunto dos indivíduos com 100 ou mais anos de idade. No caso em apreciação, verifica-se que a estrutura em forma de pirâmide presente nos anos 60 se foi alterando, sendo nos anos 90 bastante diferente. Esta alteração de estrutura reflete vários acontecimentos, nomeadamente epidemias, fenómenos migratórios e decrescimento da natalidade. A estrutura atual assemelha-se a dos chamados países desenvolvidos.



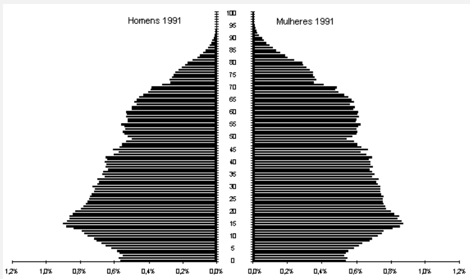
Pirâmide etária de 1960.



Pirâmide etária de 1970.



Pirâmide etária de 1981.



Pirâmide etária de 1991.

3.3.3 Histograma

Histograma é uma representação gráfica dos dados formado por uma sucessão de retângulos adjacentes, tendo cada um por base um intervalo de classe e por área a frequência absoluta (ou a frequência relativa). A área total será igual à dimensão da amostra n (ou 1, caso se utilizem frequências relativas). O histograma é um dos métodos mais usados para representar dados quantitativos contínuos.

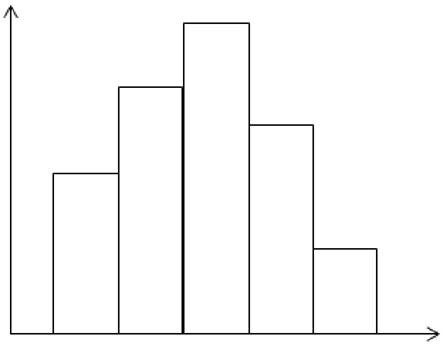


Figura 3.3: Histograma.

Constrói-se um histograma seguindo os seguintes passos:

- calcular o número de classes (k): $k = 1 + 3.3 \log(n)$ (Regra de *Sturges*);
- calcular a amplitude (R): $R = \max x_i - \min x_i$ para $i = 1, \ldots, n$;
- calcular o intervalo de classe (w): $w > \frac{R}{k}$;
- calcular o limite inferior da primeira classe (l) e o limite superior da última classe (u): $l = \min x_i - \frac{kw-R}{2}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $u = l + kw$;
- construir tabela de frequências absolutas e relativas;
- construir representação em histograma de frequências em que a altura da barra correspondente a uma dada classe é a frequência absoluta, ou as frequências relativas quando se pretende um histograma de frequências relativas.

Uma das dificuldades que se coloca na construção de um histograma é a definição do número de classes. Não existe uma regra absoluta, mas sim regras empíricas. Assim, uma das regras mais usadas é a proposta por *Sturges* em que se determina o número de classes k da seguinte forma:

$$k = 1 + 3.3 \log_{10}(n)$$

em que $\log_{10}(n)$ é o logaritmo de base decimal de n.

O número de classes também pode ser determinado através da seguinte tabela :

Número de observações	**Número de classes**
Menor que 25	5 a 6
Entre 25 e 50	7 a 14
Maior que 50	15 a 20

3.3.4 Boxplot

"Boxplot" é uma representação gráfica dos dados que representa, simultaneamente, localização central, dispersão, simetria e valores discordantes ("outliers"). O "Boxplot" é uma representação gráfica para dados quantitativos discretos ou contínuos. O gráfico é constituído por diversos componentes:

- Caixa: primeiro quartil (Q_1), segundo quartil ($Q_2 = Med$) e terceiro quartil (Q_3)
- Fios: menor observação dentro de $1.5 \times AIQ$ a partir de Q_1 e maior observação dentro de $1.5 \times AIQ$ a partir de Q_3
- "Outliers": observações menores do que $Q_1 - 1.5 \times AIQ$ e observações maiores do que $Q_3 + 1.5 \times AIQ$

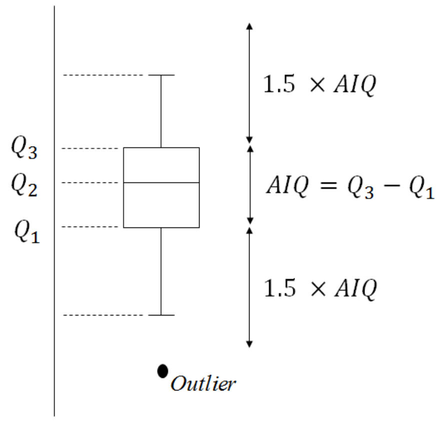


Figura 3.4: "Boxplot".

3.4 Exercícios

1. A tabela apresenta o número de alunos que escolheram um determinado curso em primeira opção ao longo dos últimos anos. Construa o respetivo gráfico de barras.

Ano	92/93	93/94	94/95	95/96	96/97	97/98	98/99	99/00	00/01
Candidatos	37	20	123	64	10	12	8	8	15

2. Os dados apresentam o número de alunos matriculados no ensino superior, por distribuição geográfica, segundo a modalidade de ensino e sexo (INE, Estatísticas da Educação, 1991).

	Total		Oficial		Particular corporativo	
	HM	M	HM	M	HM	M
Continente	154 503	85 500	118 715	63 995	35 788	21 505
Norte	41 257	22 912	31 180	16 746	10 077	6 166
Centro	32 356	17 895	30 917	16 753	1 439	1 142
Lisboa e V. Tejo	73 147	39 892	48 875	25 785	24 272	14 197
Alentejo	6 040	3 831	6 040	3 831		

a) Construa um gráfico de barras e de torta para os alunos matriculados no ensino superior público, por distribuição geográfica.

b) Construa um gráfico de barras de frequências relativas, para os alunos matriculados no ensino público e no ensino privado e cooperativo, para o continente, segundo o sexo.

3. Os dados apresentam as conclusões de cursos por ramo de ensino e sexo (INE, Estatísticas da Educação, 1991).

Ramo de Ensino	HM	M
Letras	1 172	965
Ciências da Educ. Formação Prof.	3 037	2 451
Belas Artes e Artes Aplicadas	359	215
Arquitectura e Urbanismo	249	88
Direito	259	148
Ciências Sociais	1 024	658
Comércio e Admin. Empresas	916	487
Informação e Documentação	111	76
Ciências Exactas e Naturais	273	184
Matemática e Informática	125	85
Engª Produção Industrial	28	19
Ciências da Engenharia	1 153	335
Ciências Médicas Saúde Higiene	1 322	943
Nutricionismo	65	49
Agricultura, Silvicultura e Pesca	367	167
Outros	487	146
Total	10 947	7 016

Considere o número de mulheres que concluíram os cursos. Construa o respetivo gráfico de barras de frequências relativas.

4. Os dados representam o peso, em gramas, de pintos do dia entregues num aviário.

171	174	180	162	160	146	184	159	147	183
182	154	173	178	159	174	175	166	188	135
165	190	163	168	182	183	156	173	179	170
191	162	171	177	185	163	160	155	176	165

a) Construa o histograma de frequências.

b) Calcule a média, a mediana e a moda.

c) Calcule a amplitude, a variância e o desvio padrão.

d) Calcule os quartis.

e) Construa o gráfico de caixa e bigodes.

5. Os dados representam o peso, em kg, de bebés ao nascer.

3.72	3.11	3.35	2.84	2.96	3.47	3.42	3.24	2.71	2.76
3.45	2.35	3.18	3.61	3.71	3.49	3.93	3.26	2.72	3.66
3.82	2.55	3.2	3.13	3.83	3.02	2.97	3.48	3.54	4.47
2.92	2.99	3.15	3.73	3.83	3.75	3.59	3.5	3.13	3.67
3.03	3.81	2.98	2.98	2.85	3.33	2.98	2.76	3.3	3.44
3.41	3.1	2.75	2.84	2.84	2.88	3.28	1.65	3.24	3.65
3.32	2.92	4.13	3.51	3.17	3.22	2.87	2.81	3.74	3.53
3.83	3	2.93	3.48	2.91	2.61	3.49	4.42	1.24	3.15

a) Construa o histograma de frequências.

b) Calcule a média, a mediana e a moda.

c) Calcule a amplitude, a variância e o desvio padrão.

d) Calcule os quartis.

e) Construa o gráfico de caixa e bigodes.

Capítulo 4

Probabilidades

4.1 Introdução

O termo **Probabilidade** é usado na linguagem corrente, com diversos significados e, nesse sentido, é semanticamente polivalente. Em geral, o termo designa um juízo sobre um acontecimento futuro, sobre o grau de certeza associado a esse acontecimento. A definição de Probabilidade pode ser objetiva ou subjetiva, como quando se afirma que a probabilidade de uma cara num lançamento de uma moeda é $\frac{1}{2}$, ou que a probabilidade de o Sporting ganhar o campeonato é de 20%. A noção de Probabilidade não é de fácil definição como se pode ver pela seguinte citação do Dicionário da Língua Portuguesa, 7ª edição, Porto Editora, 1994:

> **Probabilidade**, s. f. qualidade do que é provável; verosimilhança; frequência com que ocorre determinado acontecimento; ˜ de um acontecimento: (mat) num conjunto de acontecimentos igualmente prováveis, quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis; cálculo das s: (mat) cálculo relativo à probabilidade dos acontecimentos e suas relações, de acordo com determinado sistema de axiomas. (Do lat. probabilitāte, «id»).

De facto, muitas das definições para o termo mostram esta dificuldade. Por exemplo, Thomasius, 1688, afirmava que "o provável é algo que está entre a verdade e o erro"; para Kant, por outro lado, "aquilo que, se fosse tomado como verdade, seria mais do que metade certo, é referido como provável". Apesar das dificuldades na definição de probabilidade, importa separar o seu uso na linguagem comum, e tentar definir o conceito por referência ao conjunto de problemas ou questões que se pretendem tratar.

Por exemplo, no século XVII os jogadores franceses costumavam apostar no acontecimento de que em 4 lançamentos de um dado, pelo menos um ás (face com uma única pinta) apareceria; noutro jogo apostavam que em 24 lançamentos de um par de dados, pelo menos um par de ases apareceria. Um nobre francês, o Chevalier de Meré acreditava que como a chance de ter um ás num lançamento era de $1/6$, em 4, as chances seriam de $2/3$ $(4 \times 1/6)$; num lançamento duplo, as chances de obter um ás duplo são de $1/36$ e, pela mesma razão, em 24 lançamentos $2/3$ $(24 \times 1/36)$. No entanto, a experiência mostrava que era mais fácil obter um ás no primeiro caso do que um duplo ás no segundo. Esta contradição ficou conhecida como o Paradoxo do Chevalier de Meré, tendo sido resolvida por Pascal e Fermat.

O estudo das probabilidades, historicamente, esteve associado aos jogos de azar e de sorte. Como este jogos foram de alguma forma moralmente condenados, o estudo das probabilidades era, assim, uma atividade que induziria o vício do jogo. Por isso, de Moivre, na introdução de um dos textos clássicos de Probabilidade, dirigindo-se ao Rei de Inglaterra, como que pede desculpa por se dedicar ao seu estudo.

> "Há muitas pessoas no mundo que suportam a opinião de que a Doutrina das Chances tem uma tendência para promover o jogo; ficarão rapidamente desiludidas, se forem capazes de olhar para o projecto geral deste livro; [...] Vossa Senhoria compreenderá facilmente que esta doutrina está tão longe de encorajar o jogo, que é mais uma defesa contra ele, ao colocar claramente as vantagens e desvantagens destes jogos onde a sorte entra ..." Abrahan de Moivre, "The Doctrine of Chances", 1756. (tradução livre)

Contudo, para além dos jogos, o estudo das probabilidades debruçou-se sobre muitos outros problemas de interesse para a vida do dia a dia, nomeadamente os problemas relativos a seguros, às probabilidades de doença e morte e ao cálculo dos prémios a serem pagos para a cobertura de riscos. Problemas relativos a veredictos dos tribunais, da fiabilidade das provas são também abordados no cálculo das probabilidades e deve-se a Poisson um dos primeiros livros sobre o assunto "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile" (1883). Para além disso, o conceito de probabilidade tem sido de grande utilidade no estudo de certos problemas mecânicos e físicos, como sejam, por exemplo, o movimento das moléculas e das partículas em suspensão. A genética, em particular, o estudo das doenças de transmissão genética, constitui também um campo de grande aplicação do cálculo de probabilidades.

4.2 Conceito Clássico

A primeira definição de Probabilidade, historicamente atribuída a Laplace, hoje referida como o conceito clássico, é também o resultado do contributo de vários autores como sejam Bernoulli e de Moivre.

Definição 4.2.1: Lei de Laplace

Se existem N possibilidades iguais, das quais uma deve ocorrer e n são considerados como favoráveis, ou como "sucesso", então a probabilidade de um "sucesso" é dada pela razão $\frac{n}{N}$.

De Moivre apresenta a definição de probabilidade da seguinte forma:

> "A probabilidade de um evento é maior ou menor, de acordo com as chances pelas quais pode acontecer, comparadas com todo o número de chances pelas quais pode ocorrer ou falhar. Pelo que se constituírdes uma fração onde o numerador seja o número de diferentes maneiras que um acontecimento pode ocorrer e o denominador o número de diferentes maneiras pelas quais pode ocorrer ou falhar, essa fração será uma designação própria de probabilidade do acontecimento ocorrer. Assim, se um evento tem 3 chances de ocorrer, e duas para falhar, a fração $3/5$ representará com propriedade a probabilidade da sua ocorrência, e pode ser tomada como a sua medida.
>
> O mesmo pode ser dito da probabilidade de falhar, que será da mesma forma medida por uma fração, cujo numerador é o número de chances pelas quais pode falhar, e o denominador é o número de chances pelas quais pode ocorrer e falhar; assim, a probabilidade de falhar desse evento, que tem 2 chances para falhar e 3 para ocorrer, será medida pela fração $2/5$.
>
> As frações que representam as probabilidades de ocorrer ou de falhar, sendo adicionadas, a sua soma será sempre igual à unidade, uma vez que a soma dos seus numeradores será igual ao seu denominador comum; sendo certo que um evento ocorrerá ou falhará, segue-se que a certeza, que pode ser concebida sob a noção de um grau infinito de probabilidade, é representada cabalmente pela unidade" Abrahan de Moivre, "The Doctrine of Chances", 1756. (tradução livre)

Exemplo 4.2.1

Qual a probabilidade de tirar um ás de um baralho de cartas?

- a probabilidade de tirar cada uma das 52 cartas é igual a $\frac{1}{52}$
- número de casos possíveis, $N = 52$, dos quais 48 correspondem a "insucesso" e 4 a "sucesso"
- número de casos favoráveis, $n = 4$
- a probabilidade de tirar um ás é $\frac{4}{52}$

A definição clássica de probabilidade implica que quando todas as possibilidades são favoráveis (tirar uma qualquer carta do baralho), a probabilidade do acontecimento é igual a $\frac{N}{N} = 1$. Por outro lado, quando nenhuma das possibilidades é favorável (retirar um Joker do baralho de 52 cartas) a probabilidade é $\frac{0}{N} = 0$. Daqui resulta que, tal como de Moivre explicou, a probabilidade é sempre uma fração entre 0 e 1 e que a soma das probabilidades de sucesso e insucesso é sempre igual a 1 (a probabilidade de não retirar um ás é igual a $48/52$). A definição clássica de probabilidade apresenta algumas dificuldades, nomeadamente pela circularidade, ao invocar na própria definição aquilo que é definido, isto é, acontecimentos igualmente possíveis ou prováveis. Por outro lado, existem muitas situações onde as diferentes possibilidades não são igualmente prováveis, como por exemplo, o número de defeitos produzidos por uma máquina ou o resultado de uma eleição, ou os casos de moedas e dados viciados.

Uma outra definição de Probabilidade que ultrapassa os problemas referidos, é a chamada interpretação frequencista, que associa o conceito de probabilidade à frequência com que um determinado acontecimento é observado ao longo de muitas tentativas.

Definição 4.2.2: Probabilidade

A probabilidade de um evento, acontecimento ou resultado, é a proporção de vezes que eventos da mesma espécie ocorrerão no longo prazo.

Assim, a afirmação de que a probabilidade de uma máquina produzir uma peça com defeito é de 0.17, baseia-se na observação de 17% de peças defeituosas, ou de que, ao longo de um grande período de observação, a proporção de peças defeituosas é de 17%. Nesse sentido, um acontecimento que nunca se observa, a que corresponde uma frequência nula, tem associada uma probabilidade nula, e a certeza, isto é, um acontecimento que é sempre observado 100% das vezes, é representada por 1. De igual modo, a soma das probabilidades de sucesso e insucesso é igual a 1 (a probabilidade da máquina não produzir um peça com defeito é igual a 0.63).

O conceito de probabilidade, segundo von Mises em "Probability, Statistics and Truth", requer a definição de um coletivo, isto é, uma sequência de acontecimentos uniformes que diferem por certos atributos observáveis. Assim, por exemplo, todos os lançamentos de um dado formam um coletivo cujo atributo é o número de pontos observado. A repetição de um determinado acontecimento permite definir um valor limite para a frequência relativa, valor limite que define a probabilidade do acontecimento. No entanto, para que o limite desta frequência relativa seja considerado uma probabilidade é necessário que a sequência das observações seja aleatória. Esta aleatoriedade é que impossibilita que a frequência seja afetada pelo sistema de seleção.

Exemplo 4.2.2

A título de exemplo, a tabela apresenta o resultado de 360 lançamentos de um par de dados. A soma dos pontos gerados pelo lançamento dos dois dados produz 12 resultados possíveis (2,3,...,12), dos quais a soma 7 é o mais provável (6/36), dado que existem 6 maneiras de obter soma 7 nas 36 possibilidades geradas pelo lançamentos dos dois dados. Podem observar-se 61 resultados cuja soma é igual a 7, o que conduz a uma frequência relativa de $61/360$, sendo o valor esperado de $60/360$. Se a contagem se fizer a partir das colunas ímpares, observam-se 29 resultados com soma 7, o que conduz a uma frequência relativa de $58/360$. Se a frequência fosse calculada a partir das linhas ímpares, aos 28 resultados cuja soma é 7, corresponde uma frequência relativa de $56/360$. Se, por outro lado, se registarem o número de resultados iguais a 7, após a soma 7 ter ocorrido, isto é, contando na tabela quantas vezes surgem dois 7 seguidos, observa-se uma frequência relativa de $6/61$ (contando por linhas) ou $7/61$ (contando por colunas) , ou seja, bastante próxima da frequência esperada $10/60$. Este resultado mostra que "os dados não têm memória", isto é, o facto de se ter observado uma soma 7, não condiciona o resultado do lançamento seguinte.

5	5	8	2	4	3	6	**7**	9	5	**7**	**7**	6	10	8	6	**7**	6
7	9	9	11	6	**7**	6	3	9	6	6	5	9	6	9	**7**	5	**7**
4	3	8	4	6	6	10	**7**	8	8	5	12	8	6	**7**	10	9	8
7	8	3	8	9	9	5	12	6	**7**	10	**7**	8	8	12	5	9	10
12	**7**	6	11	10	6	**7**	4	12	3	12	4	5	6	8	8	2	3
4	**7**	11	**7**	2	10	**7**	9	3	10	8	8	4	5	8	**7**	8	**7**
7	9	4	8	6	5	8	3	6	8	9	**7**	5	12	10	5	11	9
7	5	3	8	6	**7**	10	11	**7**	11	4	9	9	8	8	8	4	**7**
10	9	6	**7**	4	5	2	**7**	6	10	8	9	5	5	10	3	8	10
4	4	4	8	**7**	6	10	4	3	10	8	9	11	5	8	9	**7**	6
3	6	6	12	9	8	5	**7**	6	6	6	5	5	6	9	2	6	6
6	**7**	6	10	5	6	10	9	6	8	**7**	10	4	5	8	6	**7**	8
7	5	**7**	9	**7**	**7**	9	9	8	8	11	6	10	**7**	3	10	4	11
5	6	4	8	3	5	4	9	6	10	9	**7**	8	9	2	2	**7**	**7**
7	12	10	**7**	8	9	**7**	5	3	10	**7**	9	5	8	5	4	12	9
7	2	**7**	6	8	5	5	4	4	9	12	5	4	5	**7**	10	9	8
11	**7**	5	6	5	8	4	2	3	5	10	9	10	10	8	**7**	10	**7**
10	4	**7**	**7**	12	11	8	8	3	8	6	6	**7**	6	4	6	9	4
9	9	9	**7**	6	**7**	11	9	8	5	11	6	5	5	9	11	**7**	10
7	5	4	**7**	5	5	3	6	11	8	9	5	6	11	9	3	**7**	5

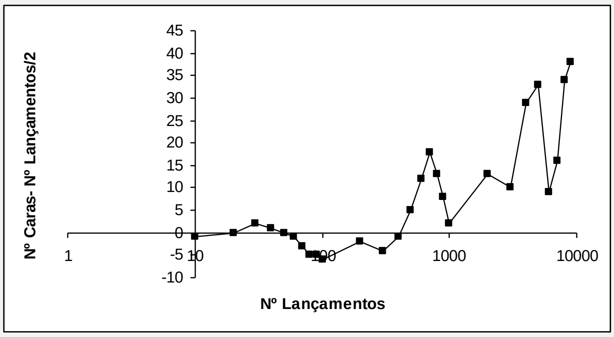
De igual modo, estes resultados mostram, que qualquer que seja a forma de seleção, a soma 7 aparece sempre com uma frequência relativa próxima de $1/6$. Assim, a aleatoriedade mostra que a frequência relativa converge para o valor limite de $1/6$, qualquer que seja a forma de seleção, à medida que a sequência vai aumentando, o que mostra a impossibilidade de um sistema de jogo, quando a aleatoriedade está presente.

Exemplo 4.2.3

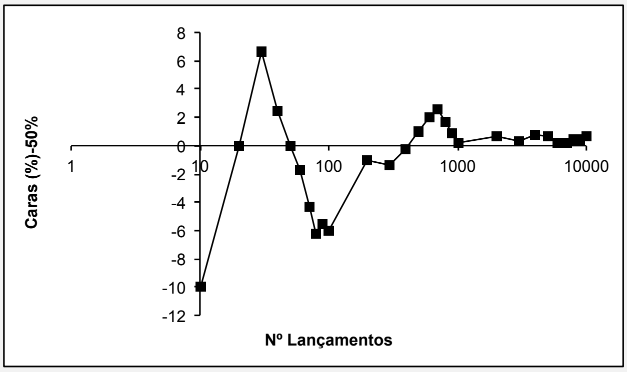
Um outro exemplo que importa referir, até pelo seu carácter quase histórico, é a chamada experiência de *Kerrich*. *John Kerrich*, um matemático sul-africano, foi feito prisioneiro durante a Segunda Guerra Mundial. Durante o seu período de detenção, conduziu várias experiências em Teoria das Probabilidades, e uma delas consistiu em lançar 10000 vezes uma moeda, registando o número caras observadas. A tabela lista o número de lançamentos, o número de caras observadas e a diferença para o número equilibrado de caras e coroas.

Lançamentos	Caras	Diferença	Lançamentos	Caras	Diferença
10	4	-1	600	312	12
20	10	0	700	368	18
30	17	2	800	413	13
40	21	1	900	458	8
50	25	0	1000	502	2
60	29	-1	2000	1013	13
70	32	-3	3000	1510	10
80	35	-5	4000	2029	29
90	40	-5	5000	2533	33
100	44	-6	6000	3009	9
200	98	-2	7000	3516	16
300	146	-4	8000	4034	34
400	199	-1	9000	4538	38
500	255	5	10000	5067	67

Verifica-se que à medida que o número de lançamentos cresce, também cresce o erro em termos absolutos. A figura apresenta este resultado, sendo que o eixo das abcissas apresenta o logaritmo do número de lançamentos.



Diferença entre o número de caras e o número de lançamentos dividido por dois.



Diferença entre percentagem observada de caras e 50%.

Contudo, a representação gráfica dos resultados mostra que, apesar de a diferença entre o número de caras observado e o número esperado, em termos relativos, apresentar algumas oscilações iniciais, a frequência relativa aproxima-se de uma linha horizontal. A ordenada desta linha define o valor limite da frequência relativa, isto é, da probabilidade de obter uma cara.

Existe ainda uma outra interpretação de Probabilidade, dita subjetiva, que resulta de uma avaliação pessoal ou subjetiva, exprimindo assim o grau de certeza de uma determinada pessoa sobre um acontecimento particular. Evidentemente, tais interpretações subjetivas são usadas quando não existem evidências que permitam objetivar as incertezas acerca do acontecimento, como sejam a avaliação de acontecimentos futuros.

Finalmente, a Probabilidade pode ser interpretada com base numa axiomática que estipula as regras de operação dos objetos matemáticos que definem as probabilidades, não definindo o conceito em si mesmo. Como exemplo tome-se o jogo de xadrez, cuja definição depende das regras de movimentos das peças, que sendo outras, conduziriam a um jogo diferente. A axiomática da Teoria das Probabilidades teve um dos seus contributos principais no trabalho do matemático russo Kolmogorov e cujos axiomas, de uma forma simplificada, serão apresentados mais adiante.

4.3 Espaços amostrais e acontecimentos

Uma experiência aleatória é um qualquer processo de observação ou medida. O conjunto de todos os resultados possíveis duma experiência constitui o espaço amostral S que pode ser:

- **discreto** se contém um número de resultados finito (ou infinito contável);
- **contínuo** se é constituído por um número infinito e inumerável de resultados definindo um conjunto contínuo (tal como os pontos numa linha ou num plano, ou como o resultado de

experiências que usam escalas contínuas como sejam a temperatura, o comprimento ou a velocidade).

Cada resultado do espaço amostral é um elemento ou ponto amostral. Um acontecimento A ou evento é um qualquer subconjunto do espaço amostral de uma experiência aleatória.

Exemplo 4.3.1: Espaço amostral discreto

Lançamento de uma moeda de duas faces:

- **Experiência** - lançamento de uma moeda
- **Resultado** - cara ou coroa
- **Espaço amostral discreto (S)** - $S = \{H, T\}$
- **Elemento ou ponto amostral** - H (cara); T (coroa)
- **Acontecimento (A)** - $A = \{H\}$ (sair cara)

Exemplo 4.3.2: Espaço amostral contínuo

Duração de uma lâmpada:

- **Experiência** - tempo de vida de uma lâmpada (em horas)
- **Resultado** - tempo de vida (X)
- **Espaço amostral contínuo (S)** - $S = \{x : x \geq 0\}$
- **Elemento ou ponto amostral** - $x \in \{x : x \geq 0\}$
- **Acontecimento (A)** - $A = \{x : x > 5000\}$ (tempo de vida superior a 5000 horas)

Para uma mesma experiência, pode-se definir diferentes espaços amostrais de acordo com os resultados.

Exemplo 4.3.3: Espaços amostrais

Lançamento de um dado onde o resultado de interesse é a pontuação obtida:

- **Experiência** - lançamento de um dado
- **Resultado** - pontuação
- **Espaço amostral discreto (S)** - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Lançamento de um dado onde o resultado de interesse é se a pontuação é par ou ímpar:

- **Experiência** - lançamento de um dado
- **Resultado** - par ou ímpar
- **Espaço amostral discreto** (S) - $S = \{\text{par}, \text{mpar}\}$

Exemplo 4.3.4: Espaços amostrais

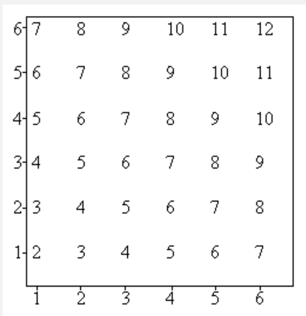
Lançamento de dois dados onde o resultado de interesse são as pontuações obtidas:

- **Experiência** - lançamento de dois dados
- **Resultado** - pontuação
- **Espaço amostral discreto** (S) - $S = \{x, y \,|x = 1, 2, \ldots, 6; y = 1, 2, \ldots, 6\}$

Lançamento de dois dados onde o resultado de interesse são a soma das pontuações obtidas:

- **Experiência** - lançamento de dois dados
- **Resultado** - soma das pontuações
- **Espaço amostral discreto** (S) - $S = \{2, 3, \ldots, 12\}$

O espaço amostral para a soma dos resultados do lançamento de dois dados é apresentado na seguinte figura



4.4 Operações com acontecimentos

As operações com acontecimentos requerem as definições de união, interseção e complemento. Podem ser utilizados Diagramas de Venn para representar quer acontecimentos individuais (e.g.,

A e B) quer as operações com acontecimentos.

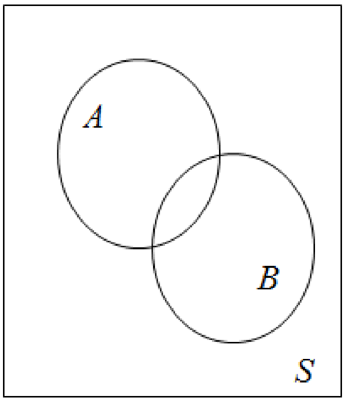


Figura 4.1: Diagrama de Venn representando o espaço amostral S e os acontecimentos A e B.

A Figura 4.1 representa o diagrama de Venn do espaço amostral S e os acontecimentos A e B. As figuras 4.2a, 4.2b e 4.2c representam, respetivamente, as operações com acontecimentos de união, interseção e complemento.

Definição 4.4.1: União ($A \cup B$)

A união combina todos os elementos de A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos.

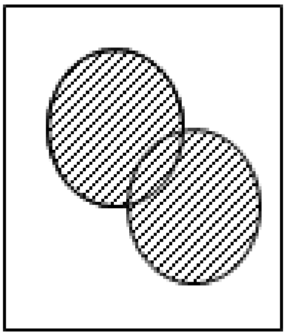
Definição 4.4.2: Interseção ($A \cap B$)

A interseção inclui os elementos comuns a A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A e B.

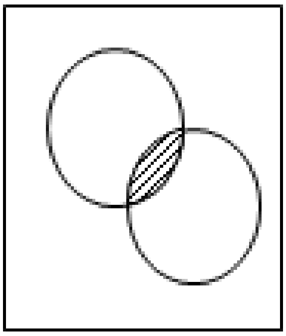
Definição 4.4.3: Complemento ($\bar{A}$)

O complemento contém todos os elementos que não estão em A, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A.

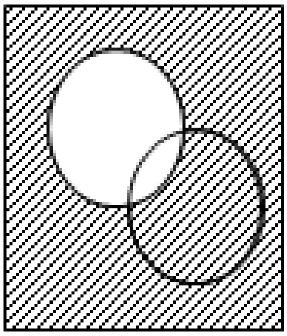
As operações com acontecimentos, nomeadamente as uniões, interseções e complementos são governadas pelos postulados da Álgebra de Boole.



(a) Diagrama de Venn representando $A \cup B$.



(b) Diagrama de Venn representando $A \cap B$.



(c) Diagrama de Venn representando $\bar{A}$.

Figura 4.2: Diagramas de Venn das operações com acontecimentos.

Definição 4.4.4: Postulados de Boole

1. Para cada par de acontecimentos A e B no espaço amostral S, há um único evento $A \cup B$ e um único evento $A \cap B$ em S.

2. Lei comutativa: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$.

3. Lei associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. Lei distributiva: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

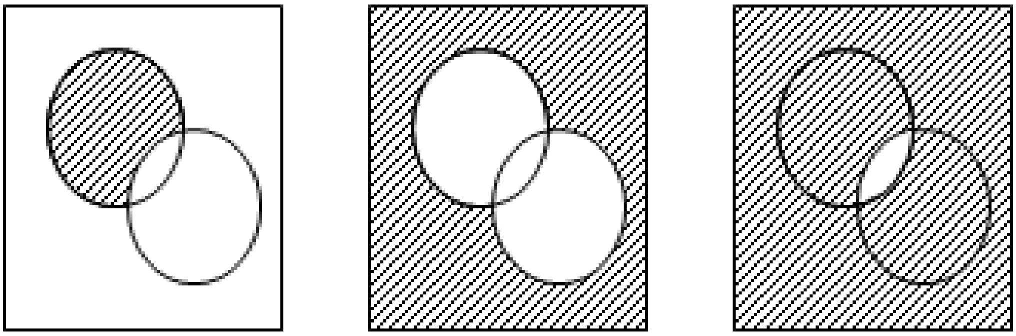
5. Leis de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

6. Para cada acontecimento A no espaço amostral S, $A \cap S = A$; por outro lado, existe um único evento $\emptyset$ tal que $A \cup \emptyset = A$ para cada evento A em S.

7. Para cada evento A em S existe um único evento A em S tal que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$.

Os diagramas de Venn das Leis de Morgan estão representados na Figure 4.3.

Por último, dois acontecimentos dizem-se **mutuamente exclusivos** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se a sua intersecção é nula (Figura 4.4). Um conjunto de acontecimentos constituem uma partição do espaço amostral se forem mutuamente exclusivos entre si e a sua união for igual ao espaço amostral.



(a) Diagrama de Venn representando $A \cap \bar{B}$.

(b) Diagrama de Venn representando $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(c) Diagrama de Venn representando $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Figura 4.3: Diagramas de Venn representando as Leis de Morgan.

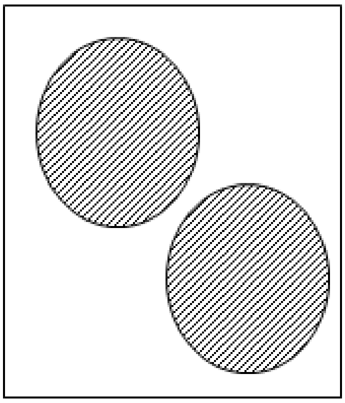


Figura 4.4: Diagrama de Venn representando acontecimentos mutuamente exclusivos, i.e., $A \cap B = \emptyset$.

Definição 4.4.5: Acontecimentos mutuamente exclusivos

A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos se não têm elementos comuns, i.e., $A \cap B = \emptyset$.

4.5 Probabilidade de um acontecimento

A probabilidade de um acontecimento indica a possibilidade do acontecimento ocorrer numa experiência aleatória. A probabilidade de um acontecimento é um número real não negativo e menor ou igual a 1 ($0 \leq P(A) \leq 1$). Se $P(A) = 1$, o acontecimento A diz-se ser um acontecimento certo. Por outro lado, se $P(A) = 0$, o acontecimento A diz-se acontecimento impossível. Para qualquer espaço amostral S, verifica-se que $P(S) = 1$ (e $P(\emptyset) = 0$).

Para experiências aleatórias com resultados equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dada pela Lei de Laplace.

Exemplo 4.5.1

Qual a probabilidade de tirar uma espada de um baralho de cartas?

- a probabilidade de tirar cada uma das 52 cartas é igual a $\frac{1}{52}$
- $N = 52$ e $n = 13$
- $P(A) = \frac{13}{52}$

Definição 4.5.1: Postulados

Para um qualquer acontecimento A de um espaço amostral S,

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(S) = 1$;
3. Se $A_1, A_2, A_3, \ldots$ é uma sequência finita ou infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos do espaço amostral S, então $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

Estes postulados estão de acordo com a interpretação frequencista de probabilidade. O primeiro postulado é verificado atendendo a que uma proporção é sempre uma quantidade positiva. Dado o espaço amostral S, um dos seus acontecimentos deve sempre ocorrer, o que se traduz no segundo postulado. Em termos frequencistas, este postulado implica que o acontecimento em causa ocorre 100% das vezes. Tomando em consideração dois acontecimentos mutuamente exclusivos, a probabilidade de um ou outro ocorrerem será dada pela soma das frequências respetivas (Lei dos grandes números).

Definição 4.5.2: Lei dos grandes números

Para um grande número de repetições de uma experiência aleatória, a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade do acontecimento.

Exemplo 4.5.2

Lançou-se um dado 100 vezes, tendo-se registado 15 vezes o valor "6". Indique uma aproximação à probabilidade de sair "6".

- $P(A) \approx \frac{15}{100}$

Se o dado for equilibrado e lançado aleatoriamente (sair cada uma das faces do dado são acontecimentos equiprováveis), qual a probabilidade de sair "6"?

- $N = 6$ e $n = 1$
- $P(A) = \frac{1}{6}$

Teorema 4.5.1. *Se A é um evento num espaço discreto S, então $P(A)$ iguala a soma das probabilidades dos acontecimentos individuais que compõem A.*

Demonstração. Seja A composto por uma sequência finita ou infinita de acontecimentos elementares, $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots$ e como os acontecimentos são mutuamente exclusivos, então $P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots$ □

Exemplo 4.5.3

Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de obter pelo menos duas caras (H)?

- o espaço amostral é $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$ e qualquer destes acontecimentos tem igual probabilidade de $\frac{1}{8}$. Atendendo a que a observação de um qualquer resultado não condiciona o seguinte, cada um dos acontecimentos tem uma probabilidade igual ao produto das respetivas probabilidades dos acontecimentos elementares, isto é, $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$
- Como A é o evento de que pelo menos uma cara ocorra, isto é,

$$A = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

então,

$$P(A) = P(HHH) + P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$
$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, se os eventos num espaço amostral têm igual probabilidade, como é o caso no lançamento de moedas equilibradas, é possível o cálculo das probabilidades por recurso ao seguinte teorema, que decorre da definição clássica de probabilidade.

Teorema 4.5.2. *Se uma experiência pode ter como resultado N eventos igualmente prováveis, e se o acontecimento A é constituído por n desses eventos, então a probabilidade de A é dada por,*

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Demonstração. Seja o espaço amostral S constituído por N acontecimentos elementares, mutuamente exclusivos, com probabilidade $\frac{1}{N}$ e seja A a união de n elementos, então

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n)$$
$$P(A) = \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N} + \ldots + \tfrac{1}{N} = \tfrac{n}{N}.$$

□

Convém realçar que o Teorema 4.5.2 coincide com a definição clássica de probabilidade, válida para eventos igualmente prováveis. Caso os eventos não sejam igualmente prováveis, o cálculo das probabilidades faz-se de acordo com o Teorema.

Exemplo 4.5.4

Suponha que um casal pretende ter três crianças e que a probabilidade de nascer um rapaz (R) ou menina (M) não é igual. Suponha que $P(M) = 0.4$ e $P(R) = 0.6$. Admitindo que os nascimentos são independentes, isto é, que o facto de nascer um bebé de um determinado sexo não condiciona o sexo do próximo bebé, qual a probabilidade de o casal ter pelo menos dois rapazes?

- O espaço de resultados é semelhante ao lançamento de três moedas. Assim, há 8 acontecimentos possíveis a que correspondem as seguintes probabilidades,

RRR	(0.6)(0.6)(0.6)	0.216
RRM	(0.6)(0.6)(0.4)	0.144
RMR	(0.6)(0.4)(0.6)	0.144
MRR	(0.4)(0.6)(0.6)	0.144
MMR	(0.4)(0.4)(0.6)	0.096
MRM	(0.4)(0.6)(0.4)	0.096
RMM	(0.6)(0.4)(0.4)	0.096
MMM	(0.4)(0.4)(0.4)	0.064

- O acontecimento A - pelo menos dois rapazes, define o seguinte subconjunto do espaço amostral,

$$A = \{RRR, RRM, RMR, MRR\}$$

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(RRR) + P(RRM) + P(RMR) + P(MRR) \\
P(A) &= 0.216 + 0.144 + 0.144 + 0.144 \\
P(A) &= 0.648
\end{aligned}$$

- De notar que caso a $P(M) = P(R) = 0.5$ a resposta seria igual a 0.5. Na realidade, a probabilidade de nascer um rapaz $P(R)$ é aproximadamente 0.52.

Teorema 4.5.3. *Se a A e $\bar{A}$ são os acontecimentos complementares num espaço amostral S, então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(S) = 1$ e $P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.*

Teorema 4.5.4. $P(\emptyset) = 0$ *para qualquer espaço amostral S.*

Demonstração. Os eventos S e $\emptyset$ são mutuamente exclusivos, logo $S = S \cup \emptyset$ e $P(S) = P(S) + P(\emptyset)$, o que implica que $P(\emptyset) = 0$. □

Teorema 4.5.5. *Se A e B são acontecimentos num espaço amostral S e $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.*

Demonstração. Uma vez que $S = A \cup \bar{A}$ e que $B = B \cap S$, pode-se escrever a seguinte igualdade,

$$\begin{aligned}
B &= A \cup (\bar{A} \cap B), \\
P(B) &= P(A) + P(\bar{A} \cap B)
\end{aligned}$$

logo

$$P(B) \geq P(A).$$

□

Teorema 4.5.6. $0 \leq P(A) \leq 1$ *para qualquer acontecimento A.*

Demonstração. Atendendo a que

$$\begin{aligned}
&\emptyset \subset A \subset S \\
&P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S)
\end{aligned}$$

e como $P(\emptyset) = 0$ e $P(S) = 1$, logo

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

□

Teorema 4.5.7. *Se A e B são dois quaisquer acontecimentos num espaço amostral S, então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração. Este teorema pode ser demonstrado por recurso a um diagrama de Venn (Figura 4.5), definindo as probabilidades de acordo com as áreas do diagrama. Assim, $P(A) = a + b$ e $P(B) = b + c$. Logo,

$$P(A \cup B) = a + b + c$$

ou somando e subtraindo b

$$P(A \cup B) = a + b + b + c - b$$

o que implica

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

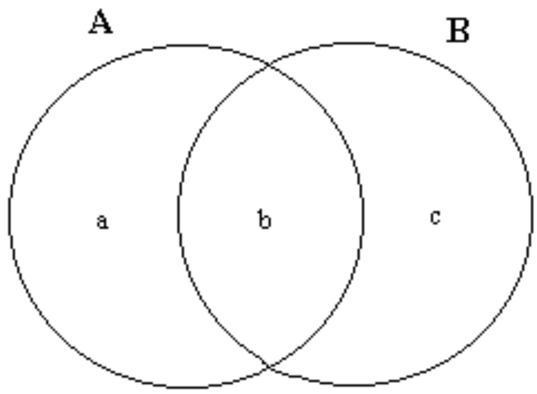


Figura 4.5: Diagrama de Venn representando a união de dois acontecimentos, i.e., $P(A \cup B)$.

Generalizando, é possível demonstrar o teorema seguinte para três acontecimentos como os representados no diagrama de Venn da Figura 4.6.

Exemplo 4.5.5

Considere o lançamento de dois dados e os seguintes acontecimentos:

- A - o resultado do lançamento soma 7 ou 8;
- B - pelo menos um dos dados exibe a face 4.

Calcule $P(A \cup B)$?

- O lançamento de dois dados conduz a 36 seis resultados possíveis, todos igualmente prováveis. Ao acontecimento A correspondem 11 resultados,

$$A = \left\{ \begin{array}{c} 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, \\ 2+6, 3+5, 4+4, 5+3+6+2 \end{array} \right\}$$

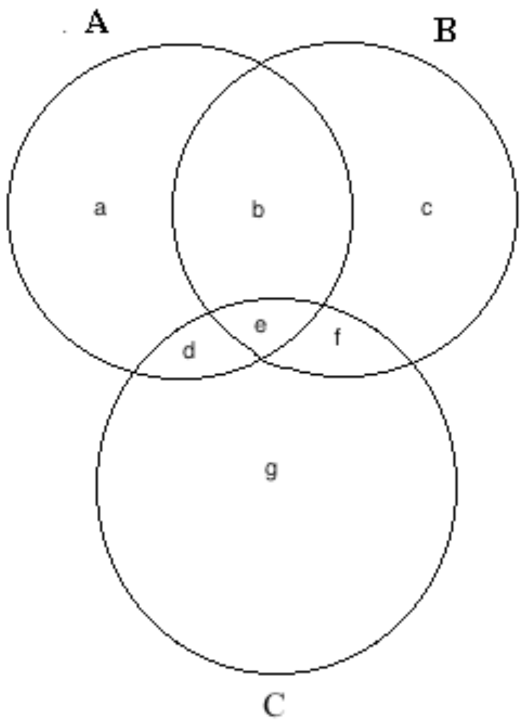


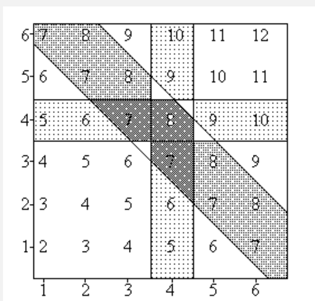
Figura 4.6: Diagrama de Venn representando a união de três acontecimentos, i.e., $P(A \cup B \cup C)$.

e ao acontecimento B, os seguintes 11 resultados,

$$B = \left\{ \begin{array}{c} 1+4, 2+4, 3+4, 4+4, 5+4, 6+4 \\ 4+1, 4+2, 4+3, 4+5, 4+6 \end{array} \right\}.$$

- A figura apresenta a sombreado os acontecimentos A e B. A sombreado mais escuro estão os elementos comuns aos dois acontecimentos, isto é, a interseção dos dois conjuntos,

$$A \cap B = \{4+3, 4+4, 3+4\}.$$



- Portanto, ao adicionar os dois conjuntos A e B é necessário subtrair os elementos comuns, pois doutra forma seriam contados duas vezes. Assim, a resposta será

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \tfrac{11}{36} + \tfrac{11}{36} - \tfrac{3}{36} = \tfrac{19}{36}$$

o que está de acordo com os 19 elementos sombreados na figura.

Teorema 4.5.8. *Se A, B e C são três quaisquer acontecimentos num espaço amostral S, então*

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.6

Considere o Paradoxo do Chevalier de Meré apresentado na introdução. Mostre que a probabilidade de tirar pelo menos um ás em 4 lançamentos é superior à probabilidade de tirar pelo menos um duplo ás em 24 lançamentos de um par de dados.

- Seja C o acontecimento - pelo menos um ás em 4 lançamentos, o que corresponde a um ou dois ou três ou quatros ases. A probabilidade de tirar pelo menos um ás em quatro lançamentos é igual ao complementar da probabilidade de não tirar nenhum ás nos quatro lançamentos. Num lançamento, a probabilidade de tirar um ás e de não tirar um ás é, respetivamente,

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

e em 4 lançamentos, não tirar nenhum ás é

$$P(B) = P(\bar{A})\, P(\bar{A})\, P(\bar{A})\, P(\bar{A})$$
$$P(B) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4.$$

- Logo, a probabilidade de tirar pelo menos um ás em 4 lançamentos é dada por

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518.$$

- Seja D o acontecimento - um par de ases num lançamento de dois dados. Existe um caso favorável em 36 possíveis (um par de ases corresponde à soma 2). Logo,

$$P(D) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad P(\bar{D}) = \frac{35}{36}.$$

- Seguindo o mesmo raciocínio, seja E o acontecimento - pelo menos um par de ases em 24 lançamentos, o que implica que nos 24 lançamentos não deixe de ocorrer pelo menos um par de ases. Por isso, a probabilidade de tirar pelo menos um par de ases será igual ao complementar de não tirar nenhum par de ases nos 24 lançamentos,

$$P(\bar{E}) = \left[P\left(\bar{D}\right)\right]^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

isto é,

$$P\left(E\right) = 1 - P\left(\bar{E}\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$$

o que mostra que a probabilidade de tirar um ás em 4 lançamentos é superior à probabilidade de tirar um par de ases em 24 lançamentos.

Exemplo 4.5.7

Um dado está viciado por forma que num lançamento a ocorrência de números ímpares seja duplamente mais provável do que números pares. Se o acontecimento A é definido como a ocorrência um número maior que 3 num único lançamento, calcule $P(A)$.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{4, 5, 6\}$
-

face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$2p$	p	$2p$	p	$2p$	p

- $P(S) = 1$ logo $2p + p + 2p + p + 2p + p = 9p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{9}$
- $P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

4.6 Probabilidade condicional

No cálculo de probabilidades interessa ter presente qual o espaço amostral, isto é, o conjunto de possibilidades em consideração. Em termos de notação, o símbolo $P\left(A\,|S\right)$ indica a probabilidade condicional do acontecimento A relativamente ao espaço amostral S, sendo, em geral, representado por $P\left(A\right)$ sempre que é claro que o espaço amostral é o conjunto S. Contudo, por vezes, o conjunto de possibilidades é um subconjunto do espaço amostral S e, nesse caso, é necessário explicitar essa dependência. Por exemplo, seja A o acontecimento de um carro tenha um consumo inferior a 8 litros por 100 Km. Então, $P\left(A\,|X\right)$ representa a probabilidade que um carro da marca X tenha um consumo inferior ao especificado e, igualmente, $P\left(A\,|Y\right)$, a probabilidade relativa a um carro da marca Y. Se o universo fosse constituído somente por carros das marcas X e Y, $P(A)$ representaria a probabilidade de que um carro, de qualquer marca, tivesse um consumo inferior ao especificado. Assim, $P(A|X)$ representa a probabilidade (condicional) de A dado X.

Definição 4.6.1: Probabilidade condicional

Se A e B são dois quaisquer acontecimentos no espaço amostral S e $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B dado A é dada por

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ onde } P(A) > 0$$

($P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrência do acontecimento B dado que ocorreu o acontecimento A).

Exemplo 4.6.1

O casal Costa afirma que tem duas crianças e que pelo menos uma delas é menina. Qual a probabilidade de que a outra criança seja uma menina? Assuma que a $P(R) = P(M) = 0.5$, e que a presença do casal neste problema se destina apenas a fins matemáticos.

- Uma resposta errada raciocinaria que só é preciso determinar qual o sexo da outra criança, que pode ser rapaz ou menina, e como as probabilidades são iguais, a probabilidade de que a outra criança seja uma rapariga é de 0.5. Veja-se, contudo, a listagem de todas as possibilidades.

RR	(0.5)(0.5)	0.25
RM	(0.5)(0.5)	0.25
MR	(0.5)(0.5)	0.25
MM	(0.5)(0.5)	0.25

  Qualquer uma destas quatro possibilidades tem a mesma probabilidade de $1/4$. No entanto, somente três acontecimentos incluem pelo menos uma menina, RM, MR e MM, qualquer deles igualmente provável no caso de duas crianças das quais pelo menos uma é menina. O facto de ser conhecido que uma das crianças é uma menina reduz o conjunto de acontecimentos relevantes. Como só num dos acontecimentos MM, a outra criança é uma menina, a probabilidade do casal Costa ter duas meninas dado que existe pelo menos uma menina é $1/3$. De outra maneira, o subconjunto A - pelo menos uma das crianças é uma menina, é definido pelos seguintes acontecimentos,

$$A = \{RM, MR, MM\}$$

e o acontecimento B - as duas crianças são meninas, compreende somente o acontecimento,

$$B = \{MM\}$$

e a sua interseção,

$$A \cap B = \{MM\}$$

Logo,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Assumindo que a $P(R) = 0.6$,

RR	(0.6)(0.6)	0.36
RM	(0.6)(0.4)	0.24
MR	(0.4)(0.6)	0.24
MM	(0.4(0.4)	0.16

a resposta seria

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.16}{0.64} = \frac{1}{4}$$

Teorema 4.6.1. *Se A e B são dois quaisquer acontecimentos no espaço amostral S com $P(A) \neq 0$, então*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

A definição de probabilidade condicional pode ser manipulada, obtendo-se $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Ou seja, a probabilidade de que ambos A e B ocorram é igual ao produto da probabilidade de A pela probabilidade de B dado A. Em alternativa, e pelo facto de $A \cap B = B \cap A$, o resultado anterior poderia ser reescrito, com $P(B) \neq 0$, como $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$.

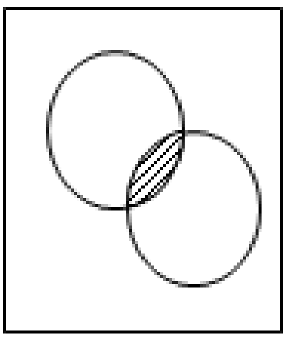


Figura 4.7: Diagrama de Venn representando a interseção de dois acontecimentos, i.e., $P(A \cap B)$.

O conceito de probabilidade condicional pode ser generalizado a mais de dois acontecimentos.

Teorema 4.6.2. *Se A, B e C são três quaisquer acontecimentos num espaço amostral S, tal que $P(A) \neq 0$ e $P(A \cap B) \neq 0$, então*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B).$$

Demonstração.

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B)P(C|A \cap B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B).$$

□

A Figura 4.7 representa o diagrama de Venn para a interseção de dois acontecimentos. A probabilidade de interseção de dois acontecimentos pode ser calculada pela regra da multiplicação: $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$. Esta regra pode ser estendida a mais de dois acontecimentos como é o caso da interseção de três acontecimentos como os representados no diagrama de Venn da Figura 4.8. Neste caso, pode-se calcular a interseção de dos acontecimentos A, B e C, calculando: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$.

Definição 4.6.2: Regra da multiplicação

A probabilidade da interseção de dois acontecimentos A e B ocorram é igual ao produto da probabilidade de A pela probabilidade de B dado A ou ao produto da probabilidade de B pela probabilidade de A dado B:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

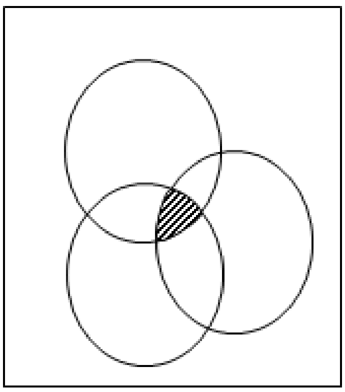


Figura 4.8: Diagrama de Venn representando a interseção de três acontecimentos, i.e., $P(A \cap B \cap C)$.

Exemplo 4.6.2

Considere o dado viciado do Exemplo 6. Qual é a probabilidade de que o número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito?

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 4\}$ (quadrado perfeito)
-

face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- $P(B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

E qual a probabilidade que seja um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

- $A = \{4, 5, 6\}$ (maior do que 3) e $B \cap A = \{4\}$ (quadrado perfeito e maior do que 3)
- $P(B \cap A) = \frac{1}{9}$, $P(A) = \frac{4}{9}$ e $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$

Exemplo 4.6.3

Suponha que tem uma urna com 10 bolas brancas e 5 bolas pretas. Duas bolas são retiradas aleatoriamente da urna. Qual a probabilidade de que ambas sejam pretas?

Solução Seja A o acontecimento de que a primeira bola é preta. A respetiva probabilidade é dada por $P(A) = \frac{5}{15}$.

Seja B o acontecimento de que a segunda bola seja preta, dado que a primeira bola é também preta. Ou seja, depois de retirada a primeira bola preta, a urna contém 4 bolas pretas e 10 brancas. A probabilidade condicional ao facto de a primeira bola retirada seja preta é, portanto, $P(B|A) = \frac{4}{14}$. Por fim, a probabilidade de que ambas as bolas retiradas sejam pretas é,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{15}\frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Exemplo 4.6.4

Considere-se a urna do exemplo anterior com 10 bolas brancas e 5 pretas. Se três bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, qual a probabilidade de sejam todas pretas?

Solução Sejam A o acontecimento de que a primeira bola é preta, B o acontecimento de que a segunda bola seja preta dado que a primeira também o é, e C, o acontecimento de que a terceira bola seja preta dado que ambas as anteriores sejam pretas.

$$P(A) = \frac{5}{15}$$
$$P(B|A) = \frac{4}{14}$$
$$P(C|A \cap B) = \frac{3}{13}$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{15}\frac{4}{14}\frac{3}{13} = \frac{2}{91}$$

4.7 Acontecimentos Independentes

Em linguagem comum, dois acontecimentos A e B são independentes se a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro. Assim, no exemplo das bolas negras e brancas, se a amostragem for feita com reposição, a probabilidade de tirar uma bola preta à primeira, segunda ou em outra qualquer tentativa é sempre a mesma, $5/15$.

Em termos da notação apresentada, e para dois acontecimentos A e B, com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, independência implica que $P(B|A) = P(B)$ e $P(A|B) = P(A)$, o que permite escrever $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$.

Definição 4.7.1: Independência

Dois acontecimento são independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

Definição 4.7.2: Independência de 2 acontecimentos

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Exemplo 4.7.1

Suponha que um casal deseja ter três filhos. Os oito acontecimentos possíveis são

$$S = \{RRR, RRM, RMR, MRR, MMR, MRM, RMM, MMM\}.$$

Assumindo que cada acontecimento é igualmente provável, isto é, $P(R) = P(M) = 0.5$, sejam definidos os seguintes acontecimentos:

- A - um rapaz em cada um dos dois primeiros nascimentos,
- B - uma menina ocorre no terceiro nascimento,
- C - exatamente dois rapazes nos três nascimentos.

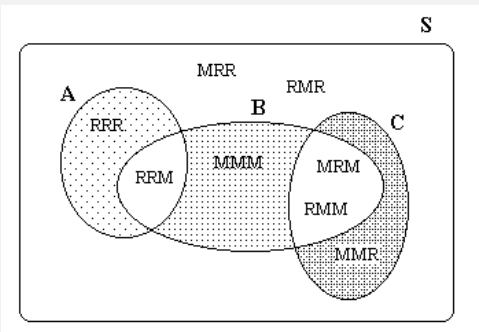
Mostre que os acontecimentos A e B são independentes enquanto que os acontecimentos B e C são dependentes.
Solução:
Os conjuntos definidos compreendem os seguintes acontecimentos,

$$\begin{aligned} A &= \{RRR, RRM\} \\ B &= \{RRM, RMM, MRM, MMM\} \\ C &= \{RMM, MRM, MMR\} \end{aligned}$$

e as respetivas interseções,

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{RRM\} \\ B \cap C &= \{RMM, MRM\} \end{aligned}$$

O diagrama pretende traduzir a definição dos conjuntos e a sua interseção no espaço amostral S.



$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{3}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Atendendo a que

$$P(A)\,P(B) = P(A \cap B)$$

A e B são acontecimentos independentes, enquanto que B e C não são independentes, pois

$$P(B)\,P(C) \neq P(B \cap C)$$

Por outro lado,

$$P(A\,|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} = P(A),$$

$$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2} = P(B),$$

$$P(C\,|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$P(B\,|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$$

Teorema 4.7.1. *Se dois acontecimentos A e B são independentes, então os acontecimentos A e $\bar{B}$ também são independentes.*

Demonstração. Uma vez que o acontecimento A pode ser definido como

$$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$$

e considerando as probabilidades dos acontecimentos, temos que

$$P(A) = P\left[(A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)\right].$$

Como A e B são independentes,

$$P(A) = P(A)\,P(B) + P\left(A \cap \bar{B}\right)$$

e considerando a probabilidade do complementar de B

$$P(A) = P(A)\left[1 - P\left(\bar{B}\right)\right] + P\left(A \cap \bar{B}\right)$$

mostra-se que

$$P\left(A \cap \bar{B}\right) = P(A)\,P\left(\bar{B}\right).$$

$\square$

Definição 4.7.3: Independência de k acontecimentos

Os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são independentes se e só se a probabilidade da interseção de quaisquer destes eventos igualar o produto das respetivas probabilidades

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k)$

Os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituem uma partição do espaço amostral S, se e só para quaisquer dois acontecimentos $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, isto é, são mutuamente exclusivos, com $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = S$.

Um qualquer acontecimento A no espaço amostral S pode ser definido como a união das interseções com os acontecimentos B_i, isto é,

$$\bigcup_{i=1}^{k} A \cap B_i.$$

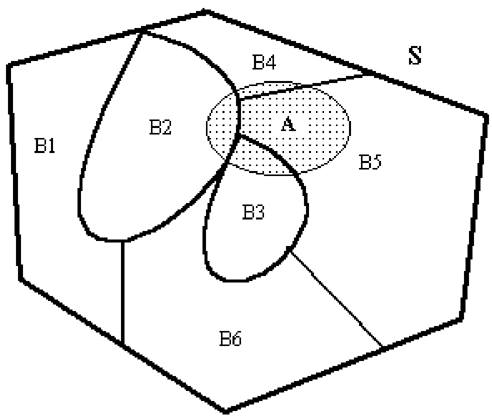


Figura 4.9: Diagrama de Venn representando uma partição do espaço amostral $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_6)$.

A Figura 4.9 mostra uma partição do espaço amostral S, com um acontecimento A referido a esse mesmo espaço.

Desta figura torna-se claro que o acontecimento A pode ser definido como a união das interseções com os acontecimentos B_i, isto é, $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_6)$. Assim, a probabilidade do acontecimento A é $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_6)$, que pode ser reescrita, por via da definição de probabilidade condicional como, $P(A) = P(B_1) P(A|B_1) +$

$P\,(B_2)\,P\,(A\,|B_2\,) + \ldots + P\,(B_6)\,P\,(A\,|B_6\,)$.

Teorema 4.7.2. *Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituem uma partição do espaço amostral S se e se para qualquer $i = 1, 2, \ldots, k$, $P(B_i) \neq 0$, então para qualquer acontecimento A em S,*

$$\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i).$$

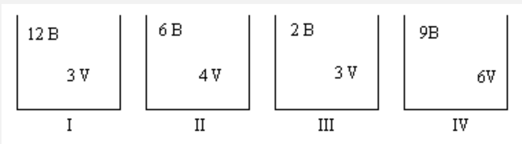
Definição 4.7.4: Probabilidade total

A probabilidade total de um acontecimentos A no espaço amostral S é dada por

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k). \end{aligned}$$

Exemplo 4.7.2

Suponha que dispõe de quatro urnas, cada uma das quais com bolas vermelhas e brancas, de acordo com a figura.



Uma bola é retirada de uma urna selecionada aleatoriamente. Qual a probabilidade de que a bola seja de cor vermelha?

Solução:

Seja V o acontecimento de que a bola retirada é de cor vermelha. A probabilidade de retirar uma bola vermelha de uma qualquer urna é condicionada pelo número de bolas vermelhas que esta contém. A escolha de uma das urnas constitui uma partição do espaço amostral. Assim, podem ser definidas as probabilidades de escolha de uma qualquer urna, bem como a respetiva probabilidade condicional de retirar uma bola vermelha:

$$P\,(I) = P\,(II) = P\,(III) = P\,(IV) = \frac{1}{4}$$

$$P\,(V\,|I\,) = \frac{3}{15}, P\,(V\,|II\,) = \frac{4}{10}, P\,(V\,|III\,) = \frac{3}{5}, P\,(V\,|IV\,) = \frac{6}{15}.$$

A probabilidade de que a bola retirada seja vermelha é então dada por,

$$P\,(V) = P\,(I)\,P\,(V\,|I\,) + P\,(II)\,P\,(V\,|II\,) + P\,(III)\,P\,(V\,|III\,) + P\,(IV)\,P\,(V\,|IV\,)$$

$$P\,(V) = \frac{1}{4}\frac{3}{15} + \frac{1}{4}\frac{4}{10} + \frac{1}{4}\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

O teorema anterior, através da manipulação da expressão da probabilidade condicional permite chegar à formulação do Teorema de Bayes.

Teorema 4.7.3. *Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ são mutuamente exclusivos e constituem uma partição do espaço amostral S, então para qualquer acontecimento A em S,*

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j \cap A)}$$
$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \textit{com} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Demonstração. O Teorema de Bayes pode também ser apresentado numa estrutura arborescente como mostra a Figura 4.10, entendendo-se que o acontecimento A pode ser atingido por um qualquer dos ramos da árvore. □

Definição 4.7.5: Teorema de Bayes

Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ são mutuamente exclusivos e constituem uma partição do espaço amostral S, então para qualquer acontecimento A em S:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, k.$$

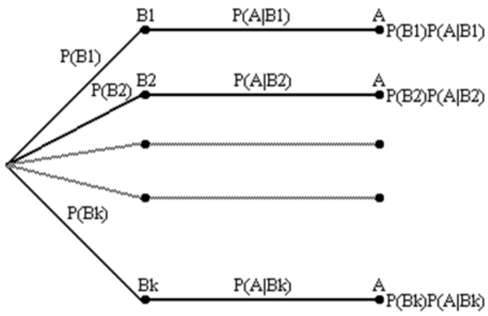


Figura 4.10: Diagrama em árvore representando o Teorema de Bayes.

Exemplo 4.7.3

Considere a mesma situação retratada no exemplo anterior das quatro urnas. Suponha agora que sabe que a ficha retirada é vermelha mas que desconhece qual a urna de onde foi retirada. Qual a probabilidade de que tenha sido extraída da urna IV?

Solução A aplicação do Teorema de Bayes permite a resposta à questão. Do exemplo anterior, as probabilidades relevantes são:

$$\begin{array}{l} P\left(V\right) = \frac{2}{5} \\ P\left(IV\right) P\left(V\left|IV\right.\right) = \frac{1}{4}\frac{6}{15} = \frac{1}{10} \end{array}.$$

Assim, a probabilidade de que a ficha vermelha tenha sido extraída da urna IV é dada por,

$$P\left(IV\left|V\right.\right) = \frac{P\left(IV\right) P\left(V\left|IV\right.\right)}{P\left(V\right)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 4.7.4

Considere 3 fábricas A, B e C, que produzem um determinado produto em lotes de 100, 200 e 300 peças, respetivamente. Um lote de cada fábrica é selecionado e as peças são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar peças defeituosas em cada um dos lotes uma das fábricas seja respetivamente de 10%, 5% e 1%. Selecionando-se uma peça ao acaso, calcule a probabilidade de ser defeituosa. Qual a probabilidade de a peça ser da fábrica A, sabendo que é defeituosa?

- $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$
- $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$
- $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$
- $P(D) = \frac{1}{6}\,\frac{10}{100} + \frac{2}{6}\,\frac{5}{100} + \frac{3}{6}\,\frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$
- $P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$
- $P(A|D) = \frac{\frac{1}{6}\,\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}\,\frac{10}{100}+\frac{2}{6}\,\frac{5}{100}+\frac{3}{6}\,\frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{600}} = \frac{10}{600}\,\frac{600}{23} = \frac{10}{23}$

4.8 Exercícios

1. Cada um dos cinco acontecimentos de uma experiência aleatória é igualmente provável. O espaço amostral é $\{a, b, c, d, e\}$. Seja A o evento $\{a, b, c\}$ e seja B o evento $\{c, d, e\}$. Determine o seguinte:

   a) $P(A)$

   b) $P(B)$

   c) $P(\bar{A})$

   d) $P(A \cup B)$

   e) $P(A \cap B)$

2. O espaço amostral de uma experiência aleatória é $\{a, b, c, d, e\}$ com probabilidades 0.1, 0.1, 0.2, 0.4 e 0.2, respetivamente. Seja A o evento $\{a, b, c, e\}$ e seja B o evento $\{c, d, e\}$. Determine o seguinte:

   a) $P(A)$

   b) $P(B)$

   c) $P(\bar{A})$

   d) $P(A \cup B)$

   e) $P(A \cap B)$

3. Dados dois acontecimentos C e D para os quais $P(C)$=0.67, $P(D)$=0.23 e $P(C \cap D)$=0.12, encontre

   a) $P(\bar{C})$

   b) $P(\bar{D})$

   c) $P(\bar{C} \cap D)$

   d) $P(C \cap \bar{D})$

   e) $P(C \cup D)$

   f) $P(\bar{C} \cap \bar{D})$

   (Nota: use um diagrama de Venn para responder à pergunta)

4. Duas cartas vermelhas e duas cartas pretas estão pousadas numa mesa com a face escondida. Pegam-se duas cartas e viram-se. Qual a probabilidade de que as duas cartas tenham cores diferentes?

5. Uma caixa com 12 ovos contém 2 estragados. Seja X o número de ovos estragados entre 3 escolhidos aleatoriamente. Apresente a distribuição de probabilidade de X.

6. Numa determinada cidade com 100 000 habitantes, o número de espetadores dos 3 canais disponíveis é o seguinte:

Canal A	60 000
Canal B	80 000
Canal C	50 000
Canal A e B	54 000
Canal A e C	28 000
Canal B e C	42 000
Canal A, B e C	24 000

Considere um habitante selecionado aleatoriamente.

a) Qual a probabilidade de não ver nenhum dos canais?

b) Qual a probabilidade de ver o Canal A dado que vê o Canal B?

c) Qual a probabilidade de ver o Canal C dado que vê o Canal A?

d) Qual a probabilidade de ver um só Canal?

e) Será que os acontecimentos, ver Canal A e B são independentes?

f) Será que os acontecimentos, ver Canal A B e C são independentes?

(Nota: use um diagrama de Venn para responder à pergunta)

7. Três mísseis são disparados contra a um alvo. As probabilidades de acertar são, respetivamente, 0.2, 0.4 e 0.6. Encontre a probabilidade de que o alvo seja atingido por:

a) três;

b) dois;

c) um;

d) nenhum míssil.

8. Uma carta é retirada aleatoriamente dum baralho de 52 cartas. Encontre a probabilidade de que pelo menos um dos três acontecimentos seguintes ocorrerá:

A: uma espada,

B: uma carta que não seja uma figura (rei, valete ou dama),

C: o número de manchas (se algum) é divisível por 3.

9. Uma pessoa lança dois dados e diz-lhe que há pelo menos um 6. Qual é a probabilidade de que a soma seja pelo menos 9?

10. Uma urna contém cinco fichas brancas e três pretas. Duas fichas são selecionadas aleatoriamente, uma de cada vez. Encontre a probabilidade de que a primeira é preta, dado que a segunda é branca,

    a) se há reposição e mistura depois da primeira seleção;

    b) se não há reposição.

    (Nota: defina P1 como o evento de que uma ficha preta é selecionada em primeiro lugar, e B2, uma ficha branca é selecionada em segundo lugar.)

11. Peças de plástico foram analisadas em relação à resistência a riscos e à resistência a choques. Os resultados para 100 peças são apresentados na tabela.

		Choque	
		alta	baixa
Risco	alta	80	9
	baixa	6	5

    Seja A o evento que a peça tem uma alta resistência a choques e B o evento que a peça tem uma alta resistência a riscos. Para uma peça selecionada ao acaso determine:

    a) $P(A)$

    b) $P(B)$

    c) $P(\bar{A})$

    d) $P(A \cap B)$

    e) $P(A \cup B)$

    f) $P(\bar{A} \cup B)$

    g) $P(A|B)$

    h) São os eventos A e B mutuamente exclusivos?

12. A probabilidade de que uma amostra de solo de um determinado lugar contenha um contaminante é de 0.10. Cinco amostras são recolhidas de forma aleatória e independente.

    a) Qual a probabilidade de que nenhuma contenha o contaminante?

    b) Qual a probabilidade de que pelo menos uma contenha o contaminante?

13. Numa turma de 18 rapazes e 12 meninas, um aluno é escolhido, todas as semanas, para assistir o professor nas aulas. Qual é a probabilidade de que uma menina seja escolhida em duas semanas seguidas se

    a) o mesmo estudante não pode ser escolhido em duas semanas seguidas;

    b) a restrição da parte a) for removida?

14. Considere os seguintes dados sobre acidentes de viação:

Grupo etário	% condutores	$P(acidente)$
18-25	15	0.1
26-45	35	0.04
46-65	35	0.06
mais de 65	15	0.08

    Calcule:

    a) a probabilidade de que um condutor escolhido ao acaso tenha um acidente nesse ano;

    b) a probabilidade de que um condutor pertença ao grupo etário 46-65 dado que teve um acidente.

15. Um lote contém 15 peças do fornecedor 1 e 25 peças do fornecedor 2. Duas peças são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, do conjunto das 40 peças. Seja A o acontecimento de que a primeira peça selecionada seja do fornecedor 1 e B o acontecimento de que a segunda peça selecionada seja também do fornecedor 1. Determine:

    a) $P(A)$

    b) $P(B|A)$

    c) $P(A \cap B)$

    d) $PA \cup B)$

    Supondo que três peças são selecionadas aleatoriamente e que C é o acontecimento de que a terceira peça é selecionada do fornecedor 1, determine

    e) $P(A \cap B \cap C)$

    f) $P(A \cap B \cap \bar{C})$

16. Sejam $M1$, $M2$ acontecimentos independentes, tais que $P(M1 \cup M2) = 0.8$ e $P(M1|M2) = 0.2$. Calcule $P(M2)$.

17. Seja A e B acontecimentos independentes e $P(A) = 1/6$ e $P(B) = 1/4$. Determine

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) $P(A \cap \bar{B})$

18. O Sérgio entrou numa Universidade e a probabilidade de que obtenha uma bolsa é de 0.35. Se ele conseguir a bolsa, a probabilidade de que conclua a licenciatura é de 0.82, e se não conseguir a bolsa, a probabilidade de conclusão da licenciatura é só de 0.44. Qual a probabilidade de que o Sérgio conclua a licenciatura?

19. Uma urna contém 2 bolas vermelhas e 2 brancas e uma segunda urna contém 1 branca e 4 vermelhas. A primeira urna pode ser escolhida com probabilidade 0.6 e a segunda com probabilidade 0.4.

    a) Se uma urna é escolhida e uma bola é aleatoriamente selecionada da urna, qual a probabilidade de que a bola escolhida seja branca?

    b) Se a bola selecionada é branca, qual a probabilidade de que tenha sido selecionada a primeira urna?

20. Uma caixa contém 2 bolas brancas e 2 bolas pretas. Outra caixa contém 3 bolas brancas e 2 pretas. Tira-se uma bola da 1ª caixa e mete-se na 2ª caixa e seguidamente extrai-se uma bola da 2ª caixa, que sai branca. Qual a probabilidade de que a bola retirada da 1ª para a 2ª caixa fosse branca?

21. Numa certa fábrica, à medida que os itens chegam ao fim da linha de produção, o controlador escolhe os itens que devem ser completamente inspecionados. Dos itens produzidos, 10% são defeituosos, 60% de todos os defeituosos são inspecionados completamente e 20% de todos os itens em bom estado são completamente inspecionados. Dado que um item é completamente inspecionado, qual a probabilidade que seja defeituoso?

22. Um auditor sabe que 70% de todas as contas de uma firma são da divisão de retalho e as restantes são da divisão por grosso. O auditor sabe que 10% das contas de retalho e 20% das contas por grosso contêm alguma espécie de erro contabilístico. Se um auditor observa um erro numa conta, encontre a probabilidade de que a conta tenha sido processada pela divisão de retalho?

23. Uma empresa comercializa 3 tipos de produtos, A, B e C. Um estudo de mercado permitiu determinar que 95% dos produtos A, 60% dos produtos B e 10% dos produtos C receberam boas classificações. As vendas dos 3 produtos A, B e C representam, respetivamente, 40%, 35% e 25%.

a) Qual a probabilidade de que um produto tenha uma boa classificação?

b) Se um produto tem uma boa classificação, qual a probabilidade de que seja do tipo A?

c) Se um produto não tem uma boa classificação, qual a probabilidade de que seja do tipo A?

24. Uma fábrica de automóveis, por razões de custo, só inspeciona 40% dos carros produzidos, antes do seu envio para os revendedores. Os registos da fábrica mostram que 5% de todos os carros que foram inspecionados e 15% dos carros que não foram inspecionados são devolvidos para reparação de algum defeito.

    a) Se um carro é devolvido para reparação de algum defeito, qual a probabilidade de que tenha sido sujeito a inspeção?

    b) Qual a probabilidade de que um carro selecionado ao acaso tenha algum defeito?

25. Frascos de laboratório são embalados em caixas de pequena dimensão ou de grande dimensão. Suponha que 2% e 1% dos frascos, embalados em caixas de pequena dimensão e de grande dimensão, respetivamente, partem durante o transporte. Se 60% dos frascos são embalados em caixas de grande dimensão e 40% em caixas de pequena dimensão, qual a proporção dos frascos que se parte durante o transporte?

26. Suponha que 2% dos rolos de algodão e 3% dos rolos de nylon têm defeito. Dos rolos usados por uma determinada fábrica, 70% são de algodão e 30% são de nylon. Qual a probabilidade de que um rolo selecionado aleatoriamente tenha defeito?

27. Depois de um estudo de mercado, um economista identificou três sectores (S1, S2 e S3) da economia portuguesa para investir. O estudo revelou que a probabilidade de uma empresa não ser lucrativa é de 0.2, 0.15 e 0.1 se essa empresa pertencer ao sector S1, S2 e S3 respetivamente. Sabe-se ainda que na economia em causa existem 7000 empresas do sector S1, 2000 do sector S2 e 1000 do sector S3.

    a) Diga qual a probabilidade de que uma empresa aleatoriamente selecionada de entre os três sectores, tenha lucro.

    b) Sabendo que a autoridade fiscal selecionou aleatoriamente uma empresa para realizar uma auditoria e que se verificou que a mesma empresa não era lucrativa, diga qual a probabilidade de que tenha sido uma empresa do sector S1 a selecionada.

Soluções

1. a) 0.6; b) 0.6; c) 0.4; d) 1; e) 0.2

2. a) 0.6; b) 0.8; c) 0.4; d) 1; e) 0.4
3. a) 0.33; b) 0.77; c) 0.11; d) 0.55; e) 0.78; f) 0.22
4. 2/3
5. $P(X=0)$=12/22; $P(X=1)$ =9/22; $P(X=2)$ =1/22
6. a) 10/100; b) 54/80; c) 28/60; d) 14/100; e) não; f) sim
7. a) 0.048; b) 0.296; c) 0.464; d) 0.192
8. 43/52
9. 7/11
10. a) 15/40 b) 15/35
11. a) 0.86; b) 0.89; c) 0.14; d) 0.80; e) 0.95; f) 0.94; g) 0.899; h) não.
12. a) $(0.9)^5$ b) $1-(0.9)^5$
13. a) 0.152 b) 0.16
14. a) 0.062 b) 0.339
15. a) 15/40; b) 14/39; c) 0.135; d) 0.615; e) 0.046; f) 0.089
16. 0.75
17. a) 1/24; b) 9/24; c) 15/24; d) 3/24
18. 0.573
19. a) 0.38; b) 0.789
20. 0.571
21. 0.25
22. 0.538
23. a) 0.615; b) 0.618; c) 0.052
24. a) 0.182; b) 0.11
25. 0.014
26. 0.023
27. a) 0.82; b) 0.778

Capítulo 5

Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

5.1 Variáveis aleatórias

Em geral, nos problemas que envolvem probabilidades, o interesse reside em alguns aspetos particulares dos acontecimentos possíveis. Por exemplo, no lançamento de dois dados, o interesse é obter soma 7, independentemente se essa soma resulta de um 2 com um 5, ou de 1 com 6, ou de outra qualquer combinação. Num inquérito sobre hábitos de consumo, o interesse pode residir no estatuto social, avaliado, possivelmente, pelo rendimento, na idade, na profissão, no estatuto marital, no número de filhos. O resultado de uma experiência ou observação, onde o acaso intervenha, é uma **variável aleatória**. Quando numa experiência medimos repetidamente uma variável de interesse, e as medições diferem devido a variáveis que não controlamos, diz-se que a experiência tem uma componente aleatória, isto é, é uma **experiência aleatória**.

Definição 5.1.1: Experiência aleatória

Experiência que pode ter diferentes resultados, mesmo quando é repetida nas mesmas condições.

Uma variável aleatória é uma função que associa um número com cada ponto do espaço amostral.

Definição 5.1.2: Variável aleatória

Se S é o espaço amostral com uma medida de probabilidade e X uma função real definida sobre os elementos de S, então X é uma variável aleatória.

As variáveis aleatórias podem ser **contínuas**, isto é, medidas numa escala contínua como sejam, por exemplo, distâncias, o tempo, pesos, onde o conjunto de valores possíveis não é passível de ser listado, ou **discretas**, isto é, quando o conjunto de valores possíveis é finito ou infinito mas contável, com por exemplo, o comprimento (tamanho) dos sapatos, o número de peças defeituosas num lote ou a idade avaliada em inteiros. Logo, uma variável aleatória de acordo o espaço amostral pode ser:

- **discreta**: apresenta uma gama de valores finita (ou infinita contável). Por exemplo: o número de pontos resultante de um lançamento de um dado $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- **contínua**: define-se num intervalo de valores reais para uma gama de valores infinita. Por exemplo: duração de uma lâmpada $X \geq 0$.

As variáveis aleatórias serão designadas por letras maiúsculas e os seus valores particulares por letras minúsculas. Portanto, uma variável aleatória, representada por X (em maiúsculas), associa um número real aos resultados de uma experiência aleatória. Já um valor medido da variável aleatória X é representado em minúsculas. Por exemplo, no lançamento de um par de dados, $x = 10$ representa o subconjunto $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$.

Exemplo 5.1.1: Variável aleatória discreta

Uma caixa contém 6 bolas pretas e 4 bolas brancas. Duas bolas são retiradas sucessivamente. Liste os elementos do espaço amostral, as respetivas probabilidades e os correspondentes valores de x da variável aleatória X, o número de bolas pretas selecionadas.

- O conjunto de resultados possível é o seguinte $\{(PP), (PB), (BP), (BB)\}$ onde P e B designam, respetivamente, bola preta e bola branca. Assim, a variável aleatória X pode tomar os seguintes valores, 2, 1 e 0, ou seja o número de bolas pretas nas duas bolas retiradas da caixa. As probabilidades podem ser calculadas pela razão entre os casos favoráveis sobre os casos possíveis. Na primeira seleção o número de casos possível são 10, enquanto que na segunda são 9. Assim, as respetivas probabilidades são

elemento	probabilidade	x
(PP)	$\frac{6}{10}\frac{5}{9}=\frac{30}{90}$	2
(PB)	$\frac{6}{10}\frac{4}{9}=\frac{24}{90}$	1
(BP)	$\frac{4}{10}\frac{6}{9}=\frac{24}{90}$	1
(BB)	$\frac{4}{10}\frac{3}{9}=\frac{12}{90}$	0

- Esta tabela permite estabelecer que $P(X=2)$, $P(X=1)$ e $P(X=0)$ são, respetivamente, $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{15}$ e $\frac{2}{15}$. De notar que há duas possibilidades para $X=1$, que são (PB) ou (BP), o que implica a soma das respetivas probabilidades.

Exemplo 5.1.2: Variável aleatória discreta

Uma moeda é lançada sucessivamente 3 vezes. Liste os acontecimentos possíveis e as respetivas probabilidades, bem como os correspondentes valores de x da variável aleatória X, o número total de caras.

- Os resultados possíveis (H - cara, T - coroa), com as respetivas probabilidades são:

Elemento	Probabilidade	x
HHH	1/8	3
HHT	1/8	2
HTH	1/8	2
THH	1/8	2
TTH	1/8	1
THT	1/8	1
HTT	1/8	1
TTT	1/8	0

- logo, as probabilidades para a variável aleatória X são

x	$P(X=x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

- Assim, por exemplo, $P(X=2)=\frac{3}{8}$, isto é, a probabilidade de se obterem 2 caras nos três lançamentos.

Exemplo 5.1.3: Variável aleatória discreta

Considere o lançamento de 2 dados. Liste os elementos do espaço amostral, os valores da variável aleatória X que representa a soma dos pontos e as probabilidades correspondentes.

- o espaço amostral é $S = \{(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(5,6),(6,5),(6,6)\}$
- os valores da variável aleatória X que representa a soma dos pontos e as correspondentes probabilidades são

elementos	x	probabilidade
$(1,1)$	2	$1/36$
$(1,2),(2,1)$	3	$2/36$
$(1,3),(3,1),(2,2)$	4	$3/36$
$(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)$	5	$4/36$
$(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)$	6	$5/36$
$(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)$	7	$6/36$
$(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$	8	$5/36$
$(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)$	9	$4/36$
$(4,6),(6,4),(5,5)$	10	$3/36$
$(5,6),(6,5)$	11	$2/36$
$(6,6)$	12	$1/36$

- Note-se que as probabilidades podem ser calculadas usando a seguinte função

$$P(X = x) = \frac{6 - |x - 7|}{36} \qquad \text{para } x = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$$

Exemplo 5.1.4: Variável aleatória discreta

Duas fichas são selecionadas aleatoriamente de uma urna contendo 5 fichas castanhas e 3 verdes. Liste os elementos do espaço amostral, os valores da variável aleatória W que representa o número de fichas castanhas selecionadas e as probabilidades correspondentes.

- o espaço amostral é $S = \{CC, CV, VC, VV\}$
- os valores da variável aleatória W e as correspondentes probabilidades são

elemento	W	probabilidade
CC	2	$5/8 \times 4/7 = 20/56$
CV	1	$5/8 \times 3/7 = 15/56$
VC	1	$3/8 \times 5/7 = 15/56$
VV	0	$3/8 \times 2/7 = 6/56$

- $P(W = w) = \begin{cases} 6/56 & w = 0 \\ 30/56 & w = 1 \\ 20/56 & w = 2 \end{cases}$

5.2 Distribuição de probabilidade discretas

A medida de probabilidade definida sobre um espaço amostral permite associar as probabilidades aos valores da variável aleatória. Logo, a distribuição de probabilidade indica como é que as probabilidades se encontram distribuídas para os diversos valores da variável aleatória discreta X. Por vezes, é possível expressar estas probabilidades através de uma função tal que $P(X = x) = f(x)$.

Definição 5.2.1: Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória discreta, a função dada por $f(x) = P(X = x)$, para cada valor de x na gama de valores da variável aleatória X, é designada como **função de probabilidade** de X.

Contudo, decorre dos postulados da probabilidade, algumas condições que estas funções devem observar para que possam ser consideradas funções de probabilidade; estas condições são apresentadas no Teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.1. *Uma função pode ser uma* ***função de probabilidade*** *discreta de uma variável aleatória X, se e só se, os seus valores satisfazerem as seguintes condições:*

1. $f(x) \geq 0$ *para cada valor no seu domínio;*
2. $\sum_x f(x) = 1$*, onde o somatório se estende a todos os valores do seu domínio.*

Demonstração. A primeira condição resulta do facto de não poderem existir probabilidades negativas (Postulado 1, Cap. 4) e a segunda condição exprime que a soma das probabilidades associadas ao espaço amostral é igual a unidade (Postulado 2, Cap. 4). □

Exemplo 5.2.1: Função de probabilidade

Verifique se a seguinte função

$$f(x) = \frac{2x+4}{36} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

pode ser usada como uma função de probabilidade de uma variável aleatória.

- Para os diferentes valores de x, a função toma os seguintes valores $f(1) = \frac{6}{36}$, $f(2) = \frac{8}{36}$, $f(3) = \frac{10}{36}$, $f(4) = \frac{12}{36}$ todos positivos e cuja soma é igual a 1.
- Assim, a função pode ser usada como função de probabilidade de uma variável aleatória que pode tomar os valores $\{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplo 5.2.2: Função de probabilidade

Encontre a fórmula para a função de probabilidade do número total de caras obtidas no lançamento de 4 moedas equilibradas.

- o espaço amostral é $S = \{HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$
- os valores da variável aleatória X e as correspondentes probabilidades são

elementos	X	probabilidade
$HHHH$	4	1/16
$HHHT, HHTH, HTHH, THHH$	3	4/16
$HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH$	2	6/16
$HTTT, THTT, TTHT, TTTH$	1	4/16
$TTTT$	0	1/16

- $f(x) = P(X = x) = \frac{C_x^4}{16} = \frac{\binom{4}{x}}{16} = \frac{\frac{4!}{x!(4-x)!}}{16} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

Exemplo 5.2.3: Função de probabilidade

Verifique se a função dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{25} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória.

- $f(x) \geq 0$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5$
- $\sum_{x=1}^{5} f(x) = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{6}{25} + \frac{7}{25} = \frac{25}{25} = 1$
- $f(x)$ é uma função de probabilidade

Para além das probabilidades para os diversos valores da variável aleatória, por vezes, pode ser necessário conhecer a probabilidade de que o valor da variável aleatória seja menor ou igual que um dado valor real x. Esta probabilidade de que X tome uma valor menor ou igual a x, representada por $F(x) = P(X \leq x)$ é designada como **função de distribuição** ou **função acumulada** de probabilidade da variável aleatória X.

Definição 5.2.2: Função de distribuição ou função acumulada

Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{onde} \quad -\infty < x < \infty$$

onde $f(t)$ é o valor da função de probabilidade de X em t, é designada por **função de distribuição** ou **função acumulada**.

A consideração dos postulados da probabilidade permite definir algumas propriedades para a função acumulada, expressas no Teorema 5.2.2.

Teorema 5.2.2. *Os valores de $F(x)$ da função acumulada da variável aleatória discreta X satisfazem as seguintes condições:*

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(\infty) = 1$
4. *se $a \leq b$, então $F(a) \leq F(b)$ para quaisquer números reais a e b ($F(x)$ é não decrescente)*

Exemplo 5.2.4: Função de distribuição acumulada

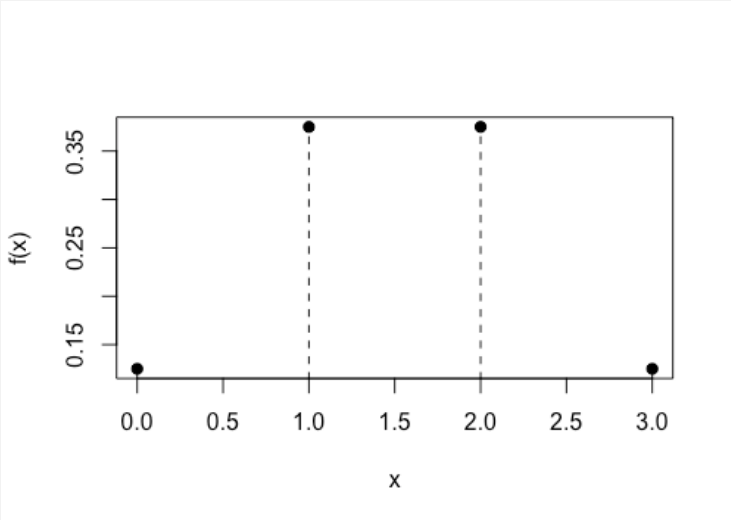
Encontre a função de distribuição do número total de caras em três lançamentos de uma moeda equilibrada. Apresente os gráficos da função de probabilidade e da função acumulada.

- Atendendo a que $f(0) = \frac{1}{8}$, $f(1) = \frac{3}{8}$, $f(2) = \frac{3}{8}$, $f(3) = \frac{1}{8}$ os valores da função acumulada são $F(0) = f(0) = \frac{1}{8}$, $F(1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, $F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ e $F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

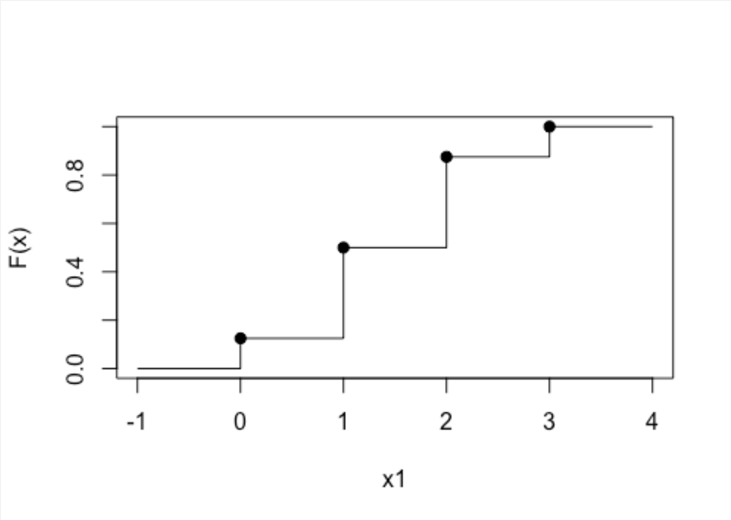
- Assim, a função de distribuição é dada por,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

- O gráfico da função de probabilidade é



- O gráfico da função acumulada é



Exemplo 5.2.5: Função de distribuição acumulada

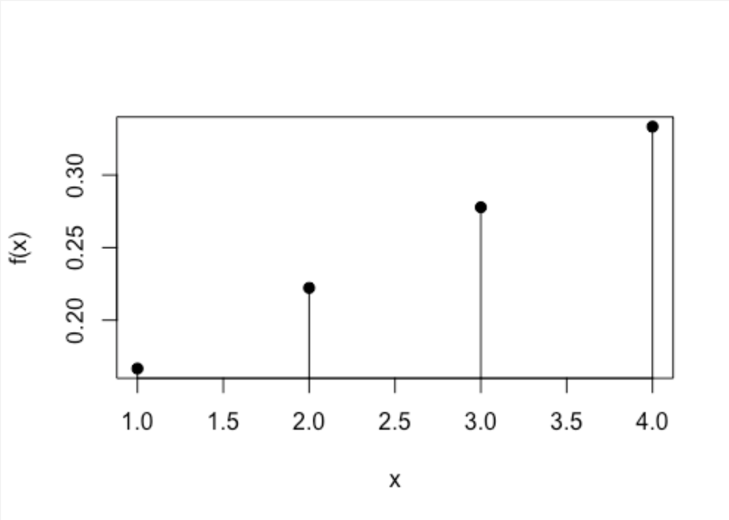
Encontre a função de distribuição da variável aleatória do Exemplo 5.2.1. Apresente os gráficos da função de probabilidade e da função acumulada.

- Os valores da função de probabilidade são $f(1) = \frac{6}{36}$, $f(2) = \frac{8}{36}$, $f(3) = \frac{10}{36}$, $f(4) = \frac{12}{36}$, o que permite calcular os valores da função acumulada, $F(1) = f(1) = \frac{6}{36}$, $F(2) = f(1) + f(2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} = \frac{14}{36}$, $F(3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} = \frac{24}{36}$ e $F(4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = 1$

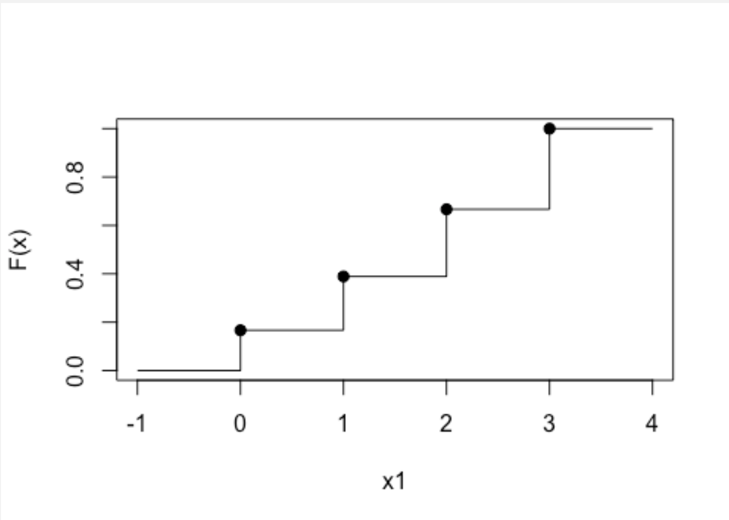
- Assim, a função de distribuição é dada por,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{6}{36} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{14}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{24}{36} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

- O gráfico da função de probabilidade é



- O gráfico da função acumulada é



Exemplo 5.2.6: Função de distribuição acumulada

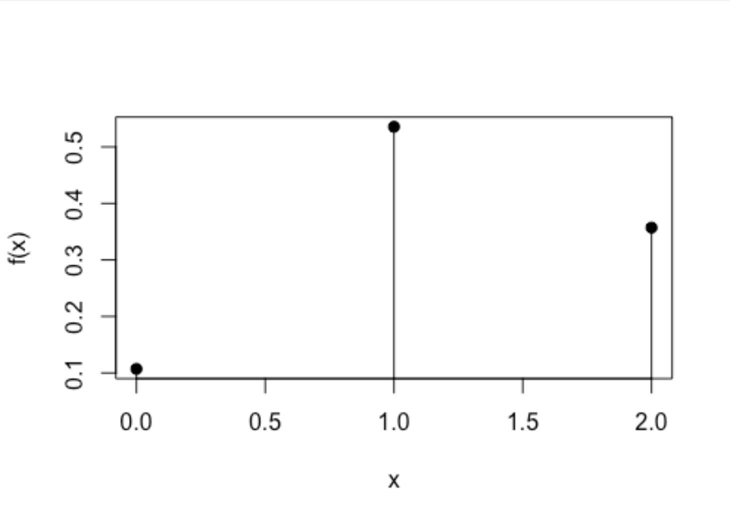
Considere a experiência em que duas fichas são selecionadas aleatoriamente de uma urna contendo 5 fichas castanhas e 3 verdes. Encontre a função de probabilidade acumulada da variável W, número de fichas castanhas extraídas da gaveta. Trace os gráficos de $f(w)$ e $F(w)$.

- Os valores da variável aleatória W e respetivas probabilidades são

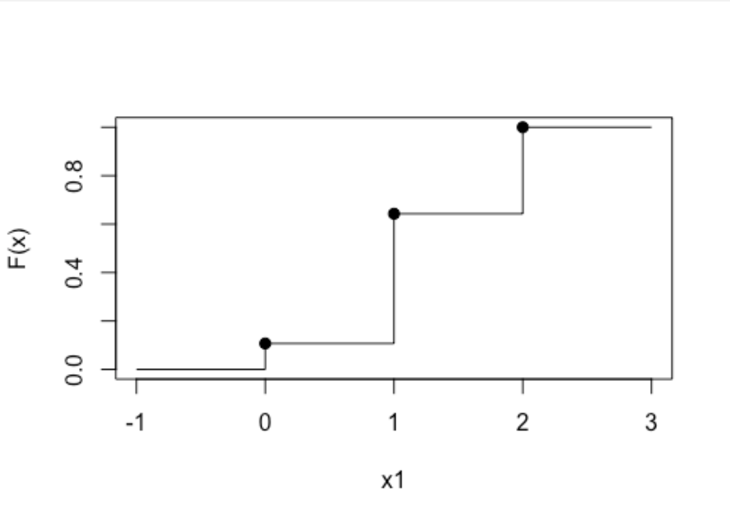
W	$f(w) = P(W = w)$	$F(w) = P(W \leq w)$	
0	$6/56$	$6/56$	$f(0)$
1	$30/56$	$36/56$	$f(0) + f(1)$
2	$20/56$	1	$f(0) + f(1) + f(2)$

- $F(w) = P(W \leq w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 6/56 & 0 \leq w < 1 \\ 36/56 & 1 \leq w < 2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases}$

- O gráfico da função de probabilidade é



- O gráfico da função acumulada é



Os gráficos das funções de probabilidade mostram que estas funções são definidas por um conjunto de pontos. Relativamente à função acumulada deve ser realçado que em todos os pontos de descontinuidade esta função toma o maior dos dois valores Por outro lado, as funções acumuladas de distribuições discretas têm sempre esta forma em escada, sendo a altura dos degraus definida pelo valor da função de probabilidade nesse ponto. Tal facto permite determinar os valores da função de probabilidade a partir da função de distribuição.

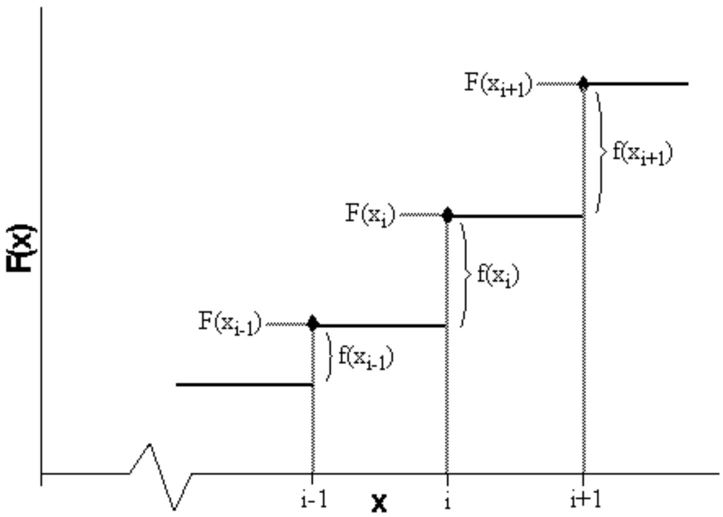


Figura 5.1: Relação entre $f(x)$ e $F(x)$.

Teorema 5.2.3. *Se a gama de valores da variável aleatória X consiste nos valores $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, então $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ para $i = 2, 3, \ldots, n$.*

A Figura 5.1 mostra, esquematicamente, a relação entre a função de distribuição e a função de probabilidade. Em conclusão, as funções de distribuição discretas são sempre funções monótonas não decrescentes.

Para uma variável aleatória discreta X, a **função de probabilidade** indica a probabilidade da variável tomar um certo valor x, i.e., $P(X = x)$ e a **função de distribuição** indica a soma das probabilidades menores ou iguais a um valor especificado x, i.e., $P(X \leq x)$.

5.3 Variáveis Aleatórias Contínuas e Funções Densidade de Probabilidade

As variáveis aleatórias contínuas são medidas numa escala contínua, como por exemplo, o tempo de vida de uma lâmpada ou a quantidade de precipitação num determinado lugar. Estas duas variáveis aleatórias estão definidas sobre a metade positiva da reta real, isto é, qualquer número real positivo pode ser observado, o que não implica que, dado um conjunto grande de observações, todos os números reais positivos sejam observados. O número de valores possíveis é infinito, e a probabilidade de ocorrência de um qualquer deles é zero. Por outras palavras, a probabilidade de observar um tempo de vida de uma lâmpada de 435.16 horas será nula dado que, mesmo observando muitos resultados, será quase impossível observar exatamente aquele, embora seja possível encontrar vários valores no intervalo de 400 a 500 horas de vida. Por esta razão, a probabilidade de um intervalo, contendo um número não contável de valores, poderá ter uma probabilidade positiva; por outro lado, não é possível atribuir um valor de probabilidade a cada ponto, como no caso discreto, e assumir que a soma das probabilidades de todos os pontos é igual a um.

Definição 5.3.1: Função densidade de probabilidade

Uma função com valores $f(x)$ definidos sobre o conjunto de todos os números reais é designada como **função densidade de probabilidade** de uma variável aleatória X, se e só se

$$P\left(a \leq x \leq b\right) = \int_a^b f\left(x\right)\, dx$$

para quaisquer constantes reais a e b com $a \leq b$.

O integral de $f(x)$ entre a e b representa a probabilidade que X pertença ao intervalo $a \leq x \leq b$.

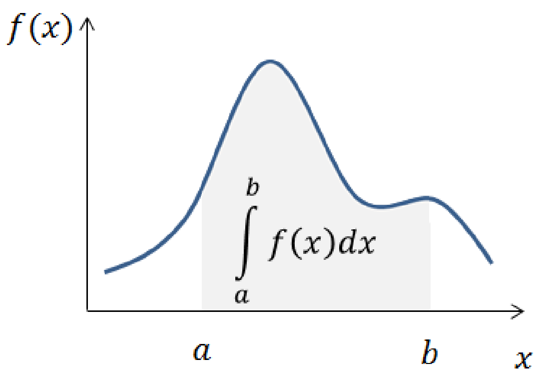


Figura 5.2: $P(a \leq X \leq b)$.

Teorema 5.3.1. *Se X é uma variável aleatória contínua e a e b duas constantes reais com $a \leq b$, então $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$.*

Teorema 5.3.2. *Uma função com valores $f(x)$ definidos sobre o conjunto de todos os números reais é designada como função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X, se e só se,*

1. *$f(x) \geq 0$ para $-\infty < x < \infty$;*
2. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.*

Em resumo, se $f(x)$ é função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X então os seus valores satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para $-\infty < x < \infty$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$;
4. $P(X = x) = 0$.

Definição 5.3.2: Função de distribuição ou função acumulada

Se X é uma variável aleatória contínua, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

para $-\infty < x < \infty$ onde $f(t)$ é o valor da função densidade de probabilidade de X em t, é designada por função de distribuição, ou função acumulada de X.

Exemplo 5.3.1: Função densidade de probabilidade

Considere a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = kx \qquad \text{para } 0 < x < 1$$

a) Determine o valor de k;

b) Apresente os gráficos da função densidade de probabilidade e da função acumulada;

c) Calcule $P(0.4 < X < 0.8)$.

Solução

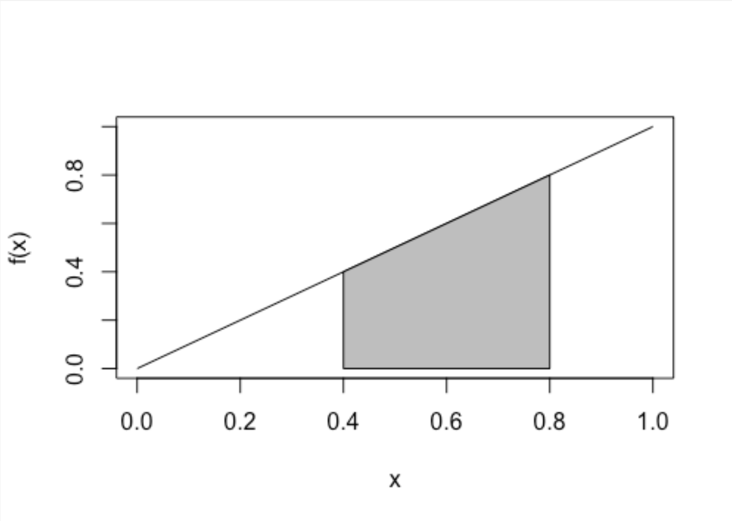
a) A função densidade de probabilidade tem que verificar as duas condições do Teorema

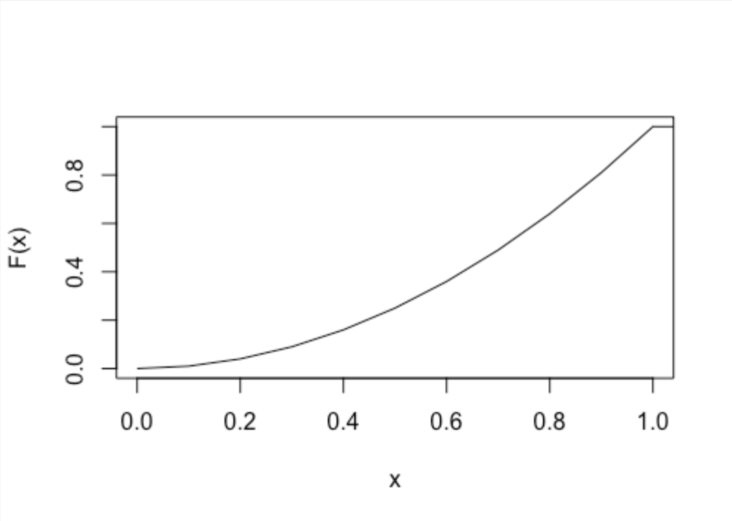
5.3.2. A primeira condição é verificada para $k \geq 0$. A segunda condição impõe

$$\int_0^1 kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{k}{2} = 1$$

o que implica que $k = 2$.

b) As seguintes figuras apresentam, respetivamente, os gráficos da função densidade de probabilidade e da função acumulada.





c) A probabilidade pode ser calculada através da área debaixo da curva da função densidade de probabilidade entre os limites especificados (ver Figura 4.6), ou seja,

$$P\left(0.4 < X < 0.8\right) = \int_{0.4}^{0.8} 2x\,dx = x^2\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.48.$$

Teorema 5.3.3. *Se $f(x)$ e $F(x)$ são, respetivamente, valores da distribuição de probabilidade e da função de distribuição de X em x, então*

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

para quaisquer constantes a e b, com $a \leq b$, e

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

onde a derivada existe.

Exemplo 5.3.2: Função densidade de probabilidade

Considere a seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = kx(1-x)$$

para $0 < x < 1$.

a) Determine o valor de k;

b) Apresente os gráficos da função densidade de probabilidade e da função acumulada;

c) Calcule $P(X > 0.6)$;

d) O valor da mediana, m, tal que $F(m) = 0.5$.

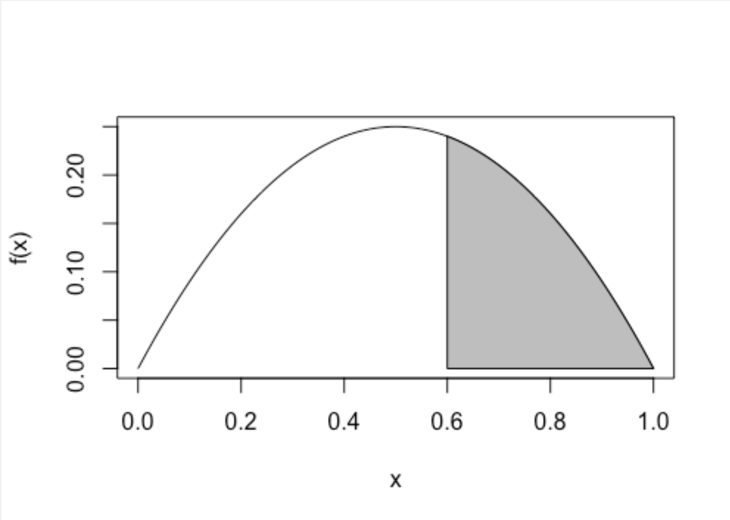
Solução

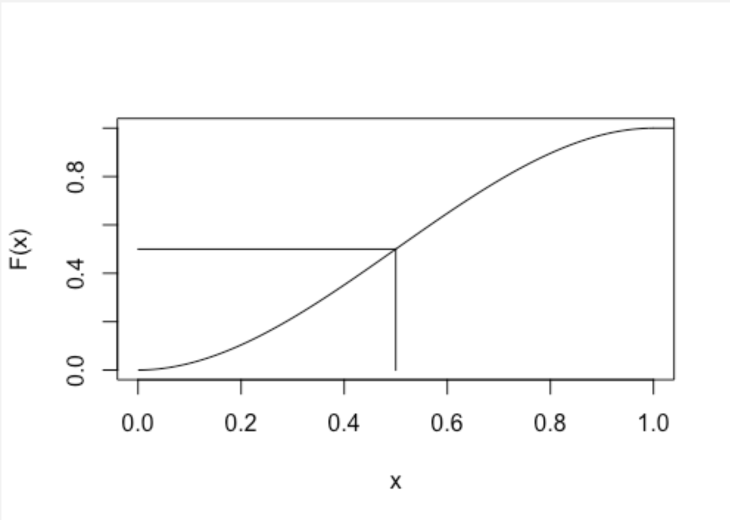
a) A função densidade de probabilidade tem que verificar as duas condições do Teorema 5.3.2. A primeira condição é verificada para $k \geq 0$. A segunda condição impõe

$$\int_0^1 kx(1-x)\,dx = k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{k}{6} = 1$$

o que implica que $k = 6$.

b) As figuras apresentam, respetivamente, os gráficos da função densidade de probabilidade e da função acumulada.





c) A probabilidade pode ser calculada através da área debaixo da curva da função densidade de probabilidade entre os limites especificados, ou seja,

$$P\left(X>0.6\right)=\int_{0.6}^{1}6x\left(1-x\right)\,dx=3x^2-2x^3\Big|_{0.6}^{1}=0.352,$$

que é equivalente a

$$P\left(X>0.6\right)=1-P\left(X<0.6\right)=1-F\left(0.6\right)=1-0.648=0.352.$$

d) O valor da mediana, tal como se pode ver na figura da função de distribuição, deve satisfazer a seguinte equação,

$$F\left(m\right)=3m^2-2m^3=0.5$$

o que implica que $m=0.5$.

Os gráficos das funções acumuladas de variáveis aleatórias discretas têm o aspeto das figuras dos exemplos 5.2.4 e 5.2.5, em escada, enquanto que os gráficos correspondentes para variáveis aleatórias contínuas apresentam sempre uma curva contínua como nas figuras dos 5.3.1 e 5.3.2. Gráficos de funções acumuladas que apresentam descontinuidades, e não são em escada, como no exemplo da Figura 5.3, correspondem a variáveis aleatórias mistas, tendo uma probabilidade diferente de zero no ponto de descontinuidade, equivalente à altura do degrau, e sendo contínuas em todos os outros pontos. A Figura 5.3 apresenta o gráfico da seguinte função acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

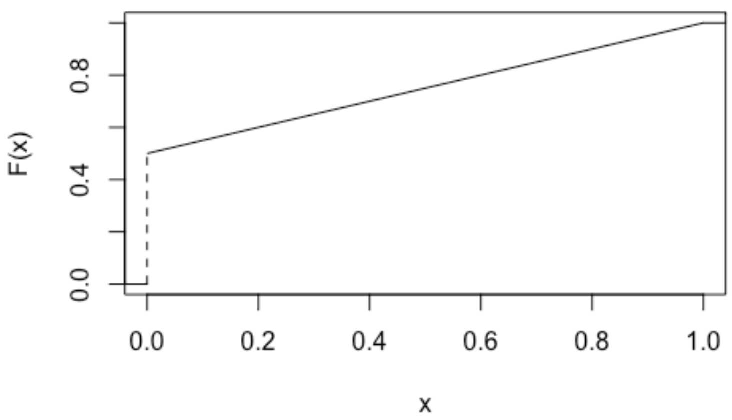


Figura 5.3: Gráfico da função acumulada de probabilidade.

Exemplo 5.3.3: Função de distribuição acumulada

A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine o valor de k. Calcule $P(X \geq 0.5)$ e $P(0.5 < X < 1)$.

Solução

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} ke^{-3x}dx = \left[k\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$

- $P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 3e^{-3x} dx = \left[3\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{0.5}^{\infty} = 0 - (-0.223) = 0.223$
- $P(0.5 < X < 1) = \int_{0.5}^{1} 3e^{-3x} dx = \left[3\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{0.5}^{1} = -0.050 - (-0.223) = 0.173$

Exemplo 5.3.4: Função de distribuição acumulada

Considere a seguinte função de distribuição acumulada

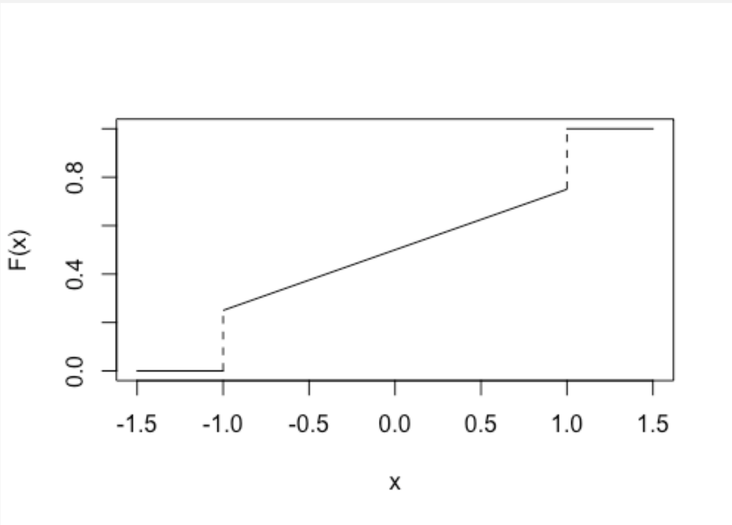
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Apresente o gráfico da função acumulada.

b) Calcule $P(-0.5 < X < 0.5)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ e $P(2 < X \leq 3)$.

Solução

a) A função acumulada de probabilidade é apresentada na figura.



b) As probabilidades são $P(-0.5 < X < 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ $P(X = 0) = 0$ $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ $P(2 < X \leq 3) = F(3) - F(2) = 0$

Exemplo 5.3.5: Função de distribuição acumulada

Determine a função de distribuição acumulada correspondente à função densidade de probabilidade da variável aleatória X:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}.$$

Utilizando a função de distribuição acumulada, calcule $P(X \geq 0.5)$ e $P(0.5 < X < 1)$.

Solução

- para $x > 0$, $F(x) = \int_0^x 3e^{-3x}dx = \left[3\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^x = 1 - e^{-3x}$
- $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-3x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $P(X \geq 0.5) = 1 - P(X < 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - (1 - 0.223) = 0.223$
- $P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = 1 - 0.050 - (1 - 0.223) = 0.173$

Exemplo 5.3.6: Função de distribuição acumulada

Encontre a função densidade de probabilidade para a variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Solução

- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- para $x < 0$, $f(x) = 0$
- para $0 \leq x < 1$, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 1$
- para $x \geq 1$, $f(x) = 0$
- logo $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$

5.4 Distribuições Multivariadas

Exemplo 5.4.1: Distribuições multivariadas

Suponha que uma urna contém 4 bolas vermelhas, 2 bolas pretas e 2 bolas azuis. Três bolas são sucessivamente removidas, sem reposição, de uma forma aleatória. Seja X o número de bolas vermelhas e Y o número de bolas azuis removidas. Faça a listagem de todos os acontecimentos possíveis, determinando as respetivas probabilidades.

Solução

- Os acontecimentos possíveis, sem considerar a ordem de remoção, podem ser representados, pelos triplos (x, y, z), que listam, respetivamente, o número de bolas vermelhas, azuis e pretas removidas: 0,1,2 0,2,1 1,0,2 1,1,1 1,2,0 2,0,1 2,1,0 3,0,0

- As probabilidades, que podem ser calculadas através do seguinte modelo,

$$\frac{C_x^4 C_y^2 C_z^2}{C_3^8}$$

  são apresentadas na tabela, e pode ser verificado que a sua soma é igual à unidade.

y / x	0	1	2	
0		1/28	1/28	2/28
1	1/14	2/7	1/14	12/28
2	3/14	3/14		12/28
3	1/14			2/28
	10/28	15/28	3/28	1

- As células não preenchidas na tabela correspondem a acontecimentos impossíveis, já que, por exemplo, não é possível obter zero bolas vermelhas, zero bolas azuis e retirar três bolas, dado que só existem duas bolas pretas. A tabela apresenta os totais de linha e coluna, cuja soma é, respetivamente, igual à unidade. Os totais de linha representam as probabilidades de encontrar um número de bolas vermelhas igual a 0, 1, 2 e 3. De igual modo, os totais de coluna representam as probabilidades de se observar nas três bolas removidas, um número de bolas azuis igual a 0, 1 e 2. Assim, por exemplo, a probabilidade de nas três bolas retiradas se encontrar uma bola vermelha é de 12/28, que corresponde a probabilidade de se observar exatamente uma bola vermelha, o que pode acontecer com 0, 1 ou 2 bolas azuis. Estas probabilidades são referidas como probabilidades marginais e a sua definição mais rigorosa será apresentada mais adiante.

Definição 5.4.1: Função de probabilidade conjunta

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, a função $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ para cada par de valores (x, y) na gama de valores de X e Y é designada como a função de probabilidade conjunta ou distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Teorema 5.4.1. *Uma função bivariada pode servir como função de probabilidade conjunta do par de variáveis discretas X e Y, se e só se os valores de $f(x, y)$ satisfizerem as seguintes condições:*

1. $f(x, y) \geq 0$ *para cada par de valores* (x, y) *no seu domínio;*
2. $\sum\limits_x \sum\limits_y f(x, y) = 1$, *para todos os valores dos pares* (x, y) *no seu domínio.*

Exemplo 5.4.2: Distribuição multivariada conjunta

Considere a seguinte função dada por

$$f(x, y) = k(3x + 2y) \text{ para } x = 0, 1, 2, 3; y = 1, 2.$$

a) Determine o valor de k por forma a que possa ser uma função de distribuição de probabilidade conjunta;

b) Calcule $P(X = 3, Y = 1)$;

c) Determine $P(X \leq 2, Y \geq 2)$.

Solução

a) As probabilidades conjuntas são listadas na tabela.

x / y	1	2	
0	$2k$	$4k$	$6k$
1	$5k$	$7k$	$12k$
2	$8k$	$10k$	$18k$
3	$11k$	$13k$	$24k$
	$26k$	$34k$	$60k$

Para que a função possa servir de função de distribuição de probabilidade, a soma das probabilidades tem que ser igual à unidade, o que implica que $k = \frac{1}{60}$

b) $P(X = 3, Y = 1) = \frac{11}{60}$;

c) $P(X \leq 2, Y \geq 2) = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$.

Definição 5.4.2: Função de distribuição conjunta

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, a função dada por

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(x,y)$$

para $-\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty$ onde $f(x,y)$ é o valor da função de probabilidade conjunta de X e Y em (s,t), é designada por função de distribuição conjunta ou função acumulada conjunta de X e Y.

Definição 5.4.3: Funções marginais

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas e $f(x,y)$ é o valor da função de probabilidade conjunta em (x,y), a função dada por

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

para cada x na gama de valores de X, é designada como função marginal de X. De forma análoga, a função dada por

$$h(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

para cada y na gama de valores de Y, é designada como função marginal de Y.

Exemplo 5.4.3: Funções marginais

Encontre as funções marginais função de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{60}(3x+2y) \text{ para } x = 0,1,2,3; y = 1,2.$$

Solução

- A função marginal de X é dada pelos totais de linha de linha (ver exemplo 5.4.2), isto é,

$$g(0) = f(0,1) + f(0,2) = \sum_{y=1}^{2} f(0,y) = \tfrac{6}{60}$$
$$g(1) = f(1,1) + f(1,2) = \sum_{y=1}^{2} f(1,y) = \tfrac{12}{60}$$
$$g(2) = f(2,1) + f(2,2) = \sum_{y=1}^{2} f(2,y) = \tfrac{18}{60}$$
$$g(3) = f(3,1) + f(3,2) = \sum_{y=1}^{2} f(3,y) = \tfrac{24}{60}$$

- e a função marginal de y é dada pelos totais de coluna,

$$h(1) = f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) = \sum_{x=0}^{3} f(x,1) = \tfrac{26}{60}$$
$$h(2) = f(0,2) + f(1,2) + f(2,2) + f(3,2) = \sum_{x=0}^{3} f(x,2) = \tfrac{34}{60}$$

- De forma mais condensada, estas funções podem ser definidas da seguinte forma,

$$g(x) = \frac{6(1+x)}{60} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3$$

$$h(y) = \frac{26 + 8(y-1)}{60} \quad \text{para } y = 1, 2$$

De uma forma análoga, é possível definir os mesmos conceitos para variáveis contínuas.

Definição 5.4.4: Função densidade conjunta

Uma função bivariada $f(x,y)$ definida sobre o plano xy é designada como função de densidade conjunta das variáveis contínuas X e Y se e só se

$$P[(x,y) \in A] = \iint_A f(x,y)\; dx\; dy$$

para qualquer região A definida no plano xy.

Teorema 5.4.2. *Uma função bivariada pode servir como função de densidade conjunta do par de variáveis contínuas X e Y se os valores de $f(x,y)$ satisfazerem as seguintes condições:*

1. $f(x,y) \geqslant 0$ *para* $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$*;*
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$.

Exemplo 5.4.4: Função densidade conjunta

Considere a seguinte função de densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = kxy$$

para $0 < x < 1{,}0 < y < 1$.

a) Determine o valor de k.

b) Calcule $P(0 < X < 1/2, 1/2 < Y < 1)$.

Solução

a) A função densidade de probabilidade tem que verificar as duas condições do Teorema 5.4.2. A primeira condição é verificada para $k \geq 0$. A segunda condição impõe

$$\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2} kxy\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1} ky\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1/2} dy = \int_{1/2}^{1}\frac{k}{2}y\,dy = \frac{k}{2}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{1/2}^{1} = \frac{k}{4} = 1$$

o que implica que $k = 4$.

b) A probabilidade pode ser calculada avaliando o integral duplo para os limites especificados, isto é,

$$P\left(0 < X < 1/2{,}1/2 < Y < 1\right) = \int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2} 4xy\,dxdy = \frac{3}{16}.$$

Teorema 5.4.3. *Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, a função dada por*

$$F\left(x,y\right) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f\left(s,t\right)\,ds\,dt$$

para $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$ onde $f\left(s,t\right)$ é o valor da função de densidade conjunta de x e y em (s,t), é designada como função de distribuição conjunta de X e Y.

Exemplo 5.4.5: Função densidade conjunta

Dada a seguinte função de densidade conjunta

$$f\left(x,y\right) = \frac{2}{3}\left(x+2y\right)$$

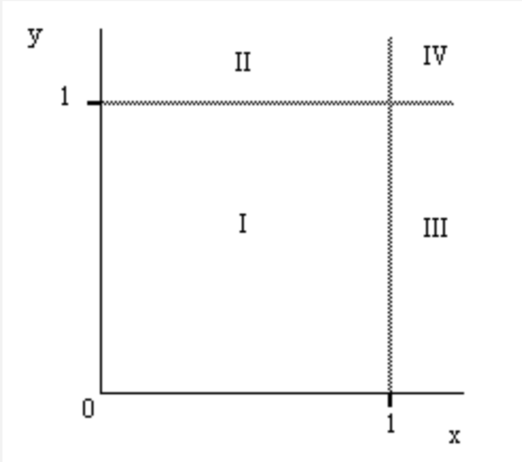
para $0 < x < 1, 0 < y < 1$, determine:

a) A função acumulada conjunta;

b) $P\left(X+Y > 1/3\right)$

Solução

a) A figura permite visualizar as diferentes regiões onde a função de distribuição acumulada é definida.



A função acumulada para cada uma destas regiões é dada por:

i) $x < 0$ ou $y < 0$,

$$F(x, y) = 0;$$

ii) $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, região I,

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^x \frac{2}{3}(x + 2y)\, dxdy = \frac{1}{3}xy(x + 2y);$$

iii) $0 < x < 1$ e $y > 1$, região II,

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^x \frac{2}{3}(x + 2y)\, dxdy = \frac{1}{3}x(x + 2);$$

iv) $x > 1$ e $0 < y < 1$, região III,

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y)\, dxdy = \frac{1}{3}y(1 + 2y);$$

v) $x > 1$ e $y > 1$, região IV,

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y)\, dxdy = 1.$$

Assim, e atendendo a que a função acumulada é contínua, os limites entre qualquer destas regiões podem ser incluídos em qualquer uma, isto é,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ ou } \leq 0 \\ \frac{1}{3}xy(x + 2y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ \frac{1}{3}y(1 + 2y) & x \geq 1, 0 < y < 1 \\ \frac{1}{3}x(x + 2) & 0 < x < 1, y \geq 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$P(X+Y>1/3) = 1 - P(X+Y<1/3)$$

$$P\left(X+Y<{}^1\!/_3\right) = \int_0^{1/3}\int_0^{1/3-y} \frac{2}{3}(x+2y)\,dxdy = \frac{2}{3}\int_0^{1/3}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_0^{1/3-y} dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{1/3}\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{3}y-\frac{3}{2}y^2\right)dy = \frac{1}{81}$$

$$P(X+Y>1/3) = 1-\frac{1}{81} = \frac{80}{81}$$

Definição 5.4.5: Funções densidade marginal

Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas e $f(x,y)$ é o valor da função densidade de probabilidade conjunta em (x,y), a função dada por

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

para $-\infty < x < \infty$ para cada x na gama de valores de X, é designada como função de densidade marginal de X. De forma análoga, a função dada por

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

para $-\infty < y < \infty$ para cada y na gama de valores de Y, é designada como função de densidade marginal de Y.

Exemplo 5.4.6: Função densidade conjunta

Dada a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{96}xy$$

para $0 < x < 4, 1 < y < 5$, encontre

a) a função acumulada conjunta;

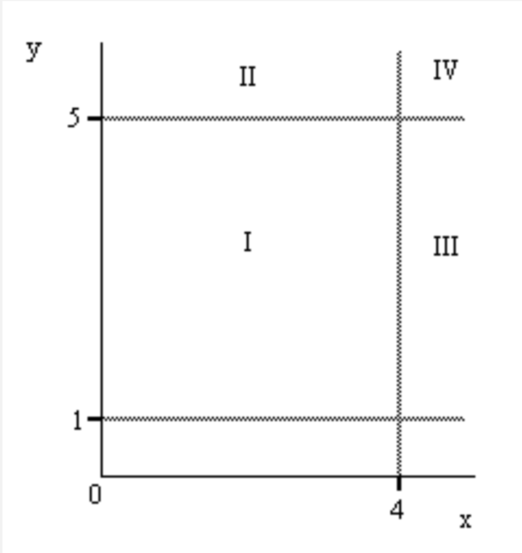
b) as funções de densidade marginal de X e Y;

c) $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$;

d) $P(X+Y<3)$.

Solução

a) A figura mostra diferentes regiões onde a função de distribuição acumulada é definida.



A função acumulada para cada uma destas regiões é dada por:

i) $x < 0$ ou $y < 1$,

$$F(x, y) = 0;$$

ii) $0 < x < 4$ e $1 < y < 5$, região I,

$$F(x, y) = \int_1^y \int_0^x \frac{1}{96} xy \, dx dy = \frac{1}{384} x^2 \left(y^2 - 1\right);$$

iii) $0 < x < 4$ e $y > 5$, região II,

$$F(x, y) = \int_1^5 \int_0^x \frac{1}{96} xy \, dx dy = \frac{x^2}{16};$$

iv) $x > 4$ e $1 < y < 5$, região III,

$$F(x, y) = \int_1^y \int_0^2 \frac{1}{96} xy \, dx dy = \frac{y^2 - 1}{24};$$

v) $x > 4$ e $y > 5$, região IV,

$$F(x, y) = \int_1^5 \int_0^4 \frac{1}{96} xy \, dx dy = 1.$$

Assim, e atendendo a que a função acumulada é contínua, os limites entre quaisquer duas destas regiões podem ser incluídos em qualquer uma, isto é,

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\leq 0 \text{ ou } y\leq 1\\ \frac{1}{384}x^2\left(y^2-1\right) & 0<x<4, 1<y<5\\ \frac{y^2-1}{24} & x\geq 4, 1<y<5\\ \frac{x^2}{16} & 0<x<4, y\geq 5\\ 1 & x\geq 4, y\geq 5\end{cases}$$

b) As funções de densidade marginal são obtidas por integração, isto é,

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_1^5 \frac{1}{96}xy\,dy=\frac{x}{8}$$

para $0<x<4$,

$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{96}xy\,dx=\frac{y}{12}$$

para $1<y<5$. Convém referir que estas funções de densidade marginal podiam ser obtidas por diferenciação das correspondentes funções acumuladas marginais obtidas na alínea anterior.

c) $P(1<X<2, 2<Y<3)=\int_2^3\int_1^2 \frac{xy}{96}\,dxdy=\frac{5}{128}$

d) A condição $x+y<3$ implica que $y<3-x$, que permite definir os limites de integração, $P(X+Y<3)=\int_0^2\int_1^{3-x}\frac{xy}{96}\,dydx=\frac{1}{48}$.

Exemplo 5.4.7: Funções densidade marginal

Dada a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x,y)=\frac{2}{3}(x+2y)$$

para $0<x<1, 0<y<1$, encontre as funções de densidade marginal de X e Y.

Solução

A integração da função de densidade conjunta permite encontrar as funções de densidade marginal, isto é,

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy=\frac{2}{3}(x+1)$$

para $0<x<1$,

$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx=\frac{1}{3}(1+4y)$$

para $0<y<1$.

A probabilidade condicionada de um acontecimento A dado B é dada por,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

desde que $P(B) \neq 0$. De forma semelhante, para uma distribuição bivariada, é possível escrever

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Definição 5.4.6: Funções de distribuição condicional

Se $f(x, y)$ é o valor da distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias discretas X e Y em (x, y), e $h(y)$ é o valor da distribuição marginal de Y em y, a função dada por

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \quad h(y) \neq 0$$

para cada x na gama de valores de X, é designada por distribuição condicional de X dado $Y = y$. De forma correspondente, se $g(x)$ é o valor da distribuição marginal de X em x, a função dada por,

$$w(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

para cada y na gama de valores de Y, é designada por distribuição condicional de Y dado $X = x$.

Exemplo 5.4.8: Distribuição condicional

Considere a função de distribuição conjunta (ver Exemplos 5.4.2 e 5.4.3)

$$f(x, y) = \frac{1}{60}(3x + 2y) \text{ para } x = 0, 1, 2, 3; y = 1, 2.$$

Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = 2$.

Solução

A distribuição condicional é dada por

$$f(0|2) = \frac{4/60}{34/60} = \frac{2}{17}$$

$$f(1|2) = \frac{7/60}{34/60} = \frac{7}{34}$$

$$f(2|2) = \frac{10/60}{34/60} = \frac{5}{17}$$

$$f(3|2) = \frac{13/60}{34/60} = \frac{13}{34}$$

De forma similar, para X e Y, variáveis aleatórias contínuas é possível definir densidades condicionadas.

Definição 5.4.7: Funções densidade condicional

Se $f(x,y)$ é o valor da densidade conjunta das variáveis aleatórias contínuas X e Y em (x,y), e $h(y)$ é o valor da densidade marginal de Y em y, a função dada por

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad h(y) \neq 0$$

para $-\infty < x < \infty$, é designada por densidade condicional de X dado $Y = y$. De forma correspondente, se $g(x)$ é o valor da densidade marginal de X em x, a função dada por,

$$w(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

para $-\infty < y < \infty$, é designada por densidade condicional de Y dado $X = x$.

Em presença de mais de duas variáveis aleatórias, quer discretas quer contínuas, é possível definir diferentes distribuições ou densidades marginais. Assim, seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ o valor da distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 em $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, então

$$r(x_4|x_1, x_4, x_5) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{g(x_1, x_4, x_5)} \text{ com } \quad g(x_1, x_4, x_5) \neq 0$$

é o valor da distribuição marginal de X_4 dado $X_1 = x_1, X_4 = x_4, X_5 = x_5$ em x_4, onde $g(x_1, x_4, x_5)$ é o valor da distribuição marginal de X_1, X_4, X_5 em (x_1, x_4, x_5). Por outro lado

$$s(x_2, x_4|x_3, x_5) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{h(x_3, x_5)} \text{ com } \quad h(x_3, x_5) \neq 0$$

é o valor da distribuição marginal de X_2 e X_4 dado $X_3 = x_3, X_5 = x_5$ em (x_2, x_4), onde $h(x_3, x_5)$ é o valor da distribuição marginal de X_3, X_5 em (x_3, x_5).

A independência entre duas ou mais variáveis aleatórias decorre das definições das funções de distribuição ou densidade condicional. No caso bivariado, a independência implica que o valor da função conjunta é igual ao produto dos valores das funções marginais.

Definição 5.4.8: Funções densidade marginal

Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o valor da distribuição conjunta de probabilidade (função de densidade conjunta) de n variáveis aleatórias discretas (contínuas) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ em $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $f_i(x_i)$ é o valor da distribuição marginal (densidade marginal) de X_i em x_i para $i = 1, 2, \ldots, n$, as variáveis aleatórias são independentes se e só se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ para todos os $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nas suas gamas de valores.

Exemplo 5.4.9: Independência

Verifique se as variáveis aleatórias X e Y do exemplo 5.4.2 são independentes.

Solução

As variáveis não são independentes pois

$$P(X = 2, Y = 1) = f(2, 1) = \frac{8}{60}$$

é diferente do produto das probabilidades marginais,

$$g(2)\,h(1) = \frac{18}{60}\frac{26}{60} = \frac{3}{100}$$

Exemplo 5.4.10: Independência

Considere a seguinte função conjunta de probabilidade

$$f(x, y) = \frac{1}{60}x(1 + y) \text{ para } x = 1, 2, 3, 4 \text{ e } y = 0, 1, 2$$

Verifique se variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Solução

x / y	0	1	2	
1	1/60	2/60	3/60	1/10
2	2/60	4/60	6/60	2/10
3	3/60	6/60	9/60	3/10
4	4/60	8/60	12/60	4/10
	1/6	2/6	3/6	1

As variáveis são independentes porque para qualquer par (x, y)

$$f(x, y) = g(x)\,h(y)$$

Exemplo 5.4.11: Funções marginais

Considere a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x, y, z) = 8xyz \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \quad 0 < z < 1$$

a) Calcule as funções marginais de X, Y, Z.

b) Verifique se X, Y, Z são variáveis aleatórias independentes.

c) Determine a função marginal de X dado Y, Z.

Solução

a) A função marginal de X é dada por

$$g(x) = \int_0^1 \int_0^1 8xyz\,dydz = 8x \int_0^1 z\frac{y^2}{2}|_0^1 dz = 4x \int_0^1 z\,dz = 2x \quad 0 < x < 1$$

e, por simetria, as funções marginais de Y, Z são dadas por

$$h(y) = 2y \quad 0 < y < 1$$

$$l(z) = 2z \quad 0 < z < 1$$

b) As variáveis são independentes pois

$$f(x, y, z) = g(x)\,h(y)\,l(z)$$

c) A função de densidade marginal condicionada é dada por

$$s(x\,|y, z) = \frac{f(x, y, z)}{t(y, z)} = \frac{8xyz}{4yz} = 2x$$

Exemplo 5.4.12: Funções marginais

Considere a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x, y) = 6(1 - y) \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

a) Encontre as funções de densidade marginal de X e Y.

b) Encontre a função densidade condicional de X dado Y.

c) Encontre a função densidade condicional de Y dado X.

d) Calcule $P\left(Y \leq \frac{1}{2}\,\middle|X \leq \frac{3}{4}\right)$.

e) Calcule $P\left(Y \geq \frac{3}{4}\,\middle|X = \frac{1}{4}\right)$.

Solução

a) A função densidade marginal de X é dada por

$$g(x) = \int_x^1 6(1 - y)\,dy = \left(6y - 3y^2\right)|_x^1 = 3(1 - x)^2 \quad 0 < x < 1$$

e a função densidade marginal de Y

$$h(y) = \int_0^y 6(1-y)\,dx = (6y - 6yx)\,|_0^y = 6y(1-y) \qquad 0 < y < 1$$

b) A função de densidade condicional de X dado Y

$$s(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{6(1-y)}{6y(1-y)} = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y$$

c) A função densidade condicional de Y dado X

$$t(y\,|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{6(1-y)}{3(1-x)^2} = 2\frac{(1-y)}{(1-x)^2} \qquad x < y < 1$$

d) A probabilidade é dada por $P\left(Y \le \frac{1}{2}\,\middle|X \le \frac{3}{4}\right) = \frac{\int_0^{1/2}\int_0^y 6(1-y)\,dxdy}{\int_0^{3/4} 3(1-x)^2\,dx} = \frac{1/2}{63/64} = \frac{32}{63}$

e) A probabilidade é dada por $P\left(Y > \frac{3}{4}\,\middle|X = \frac{1}{2}\right) = \int_{3/4}^1 t\left(y\,\middle|x = \frac{1}{2}\right)dy = \int_{3/4}^1 8(1-y)\,dy = \frac{1}{4}$

5.5 Exercícios

1. Dada a função de probabilidade discreta

$$P(X = x) = \frac{x}{6} \qquad x = 1, 2, 3$$

determine a função de distribuição acumulada e apresente o seu gráfico. Calcule $P(X \geq 2)$.

2. Verifique se as seguintes funções podem ser usadas como funções de probabilidade e explique as suas respostas:

a) $f(x) = \frac{x}{10}$ para $x = 1, 2, 3, 4$;

b) $f(x) = \frac{x^2}{14}$ para $x = 0, 1, 2, 3$;

c) $f(x) = \frac{x-3}{3}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. A variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidade:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.05	0.10	0.15	0.45	0.25

a) verifique que tem uma distribuição de probabilidade válida;

b) encontre a probabilidade de X ser maior que 3;

c) encontre a probabilidade de X ser menor ou igual a 2;

d) encontre a probabilidade de X ser um número ímpar;

e) determine a função de distribuição e apresente o respetivo gráfico.

4. Considere a seguinte função densidade $f(x) = \frac{x}{2}$ para $0 < x < 2$, 0 para outros valores. Encontre

a) a função de distribuição;

b) $P(X < \frac{1}{2})$;

c) $P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$.

5. Seja $F(x) = 3x - 2x^2$ para $0 < x < 1$, $F(x) = 0$ para $x \leq 0$, e $F(x) = 1$ para $x \geq 1$. É uma função de distribuição? Se sim, encontre a sua função densidade.

6. Considere o lançamento de 3 moedas, sendo X o número de caras. Apresente o respetivo gráfico. Calcule $P(1 \leq X < 2)$.

7. Se a função densidade de probabilidade da variável é dada por

$$g(x) = 6x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

encontre

a) $P(X > \frac{1}{2})$;

b) a função de distribuição acumulada.

8. A percentagem de impurezas por lote num certo produto químico é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade,

$$g(x) = 90x^6(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

Um lote com mais de 80% de impurezas não pode ser vendido. Qual a probabilidade de que um lote selecionado aleatoriamente não possa ser vendido por excesso de impurezas?

9. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x) = c(1-|x|)$, para $|x| < 1$, onde c é uma constante positiva. Encontre

a) o valor de c;

b) $P(|X| < \frac{1}{2})$;

c) a mediana e o primeiro quartil de X ;

d) a função acumulada de X.

10. Suponha que a procura diária X de uma certa peça em determinado estabelecimento é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \frac{2kx}{x!} \qquad x = 1, 2, 3, 4$$

a) Determine k.

b) Defina a função de distribuição e construa o gráfico respetivo.

c) Qual deverá ser o stock mínimo de peças para que a procura diária seja satisfeita com uma probabilidade de pelo menos 0.8?

11. O tempo requerido pelos alunos para completarem um exame de uma hora é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por $f(x) = cx^2 + x$ para $0 \leq x \leq 1$.

a) Determine o valor de c;

b) Determine $F(x)$;

c) Calcule $F(-1)$, $F(0)$ e $F(1)$;

d) Encontre a probabilidade de um aluno selecionado aleatoriamente termine o exame em menos de meia hora.

12. Considere a seguinte função densidade de probabilidade $f(x) = 2e^{-2x}$ para $x > 0$. Determine:

a) $F(x)$;

b) $P(X > a)$.

13. Seja $F(x) = x^2$ para $0 < x < 1$. Determine:

a) $P(X < \frac{1}{2})$;

b) $P(X < \frac{1}{4}|X < \frac{1}{2})$;

c) $P(\sqrt{X} < \frac{1}{2}$.

14. Seja $F(x) = x^4$ para $0 < x < 1$. Determine:

a) $P(X < 0.5)$;

b) $P(X^2 < 0.5)$.

15. Seja $f(x) = 30x^2(1-x)^2$ para $0 < x < 1$. Determine:

a) $F(x)$;

b) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$;

c) $P(X < \frac{1}{4}|X < \frac{1}{2})$.

16. Seja $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ para $|x| < 1$. Determine:

a) $F(x)$;

b) a mediana.

17. A variável aleatória tem a seguinte distribuição de probabilidade:

x	4	5	7	10
$f(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Determine:

a) $P(X \leq 5)$;

b) $P(X > 4.6)$;

c) $P(4.8 < X < 7.2)$.

18. Seja $f(x) = 0.5x - 1$ para $2 < x < 4$. Determine:

a) $F(x)$;

b) $P(X < 2)$;

c) $P(X > 3)$;

d) $P(2.5 < X < 3.5)$.

19. Considere a seguinte função probabilidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21} \qquad x = 1,2,3 \qquad y = 1,2$$

Determine:

a) A função de probabilidade marginal de X.

b) A função de probabilidade marginal de Y.

c) A função de probabilidade condicional de X dado Y.

d) A função de probabilidade condicional de Y dado X.

20. Considere a seguinte função de probabilidade conjunta

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{108} \qquad x = 1,2,3 \qquad y = 1,2,3 \qquad z = 1,2$$

Determine:

a) a função marginal conjunta de X e Y;

b) a função marginal conjunta de X e Z;

c) a função marginal conjunta de X;

d) a distribuição condicional de Z dado $X = 1$ e $Y = 2$;

e) se as variáveis são independentes.

21. Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = k(x-y) \qquad 0 < y < x < 1$$

a) Determine o valor da constante k que verifica aquela função como uma função de densidade conjunta.

b) Calcule a função marginal de Y.

c) Calcule a função marginal de X.

d) São X e Y variáveis aleatórias independentes?

22. Suponha que X e Y têm uma densidade conjunta

$$f(x,y) = 6xy^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Calcule $P(X + Y < 1)$.

b) Calcule $P(\frac{1}{3} < X < 2, 0 < Y < \frac{1}{4})$.

c) Calcule a função marginal de Y.

d) Calcule a função marginal de X.

e) São X e Y variáveis independentes?

23. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = 24xy \quad x > 0, y > 0, x + y < 1$$

a) Encontre a função marginal de X.

b) Encontre a função marginal de Y.

c) São X e Y variáveis independentes?

d) Calcule a probabilidade de $P(X + Y < \frac{1}{2})$.

24. Seja $f(x,y) = kxy$, definida para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, uma função de densidade de probabilidade conjunta de X e Y.

a) Determine o valor de k.

b) Calcule a probabilidade de $P(0 < X < \frac{1}{4}, \frac{1}{4} < Y < 1)$.

25. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com funções densidades de probabilidades $g(x) = 2x$, $0 < x < 1$, e $h(y) = 4y^3$, $0 < y < 1$.

a) Determine $f(x,y)$, a função densidade de probabilidade conjunta.

b) Calcule $P(\frac{1}{2} < X < 1, \frac{2}{5} < Y < \frac{4}{5}))$.

26. Considere a seguinte função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y.

$$f(x,y) = 2 \quad 0 < x < y \quad 0 < y < 1$$

Determine:

a) a função marginal de X;

b) a função marginal de Y;

c) a função condicional de X dado Y.

27. Considere a seguinte função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y.

$$f(x,y) = 21x^2y^3 \qquad 0 < x < y \qquad 0 < y < 1$$

Determine:

a) a função marginal de X;

b) a função marginal de Y;

c) a função condicional de X dado Y.

Soluções

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1/2 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$; 5/6

2. a) sim; b) sim; c) não

3. a) sim; b) 0.7; c) 0.15; d) 0.45; e) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.05 & 1 \leq x < 2 \\ 0.15 & 2 \leq x < 3 \\ 0.30 & 3 \leq x < 4 \\ 0.75 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$

4. a) $F(x) = x^2/4$; b) 1/16; c) 1/12

5. Não

6. 3/8

7. a) 1/2; b) $G(x) = 3x^2 - 2x^3$

8. 0.624

9. a) 1; b) 0.25; c) 0, -0.293; d) $F(x) = \begin{cases} 1/2 + x + x^2/2 & -1 \leq x < 0 \\ 1/2 + x - x^2/2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

10. a) 3/16; c) 3

11. a) 1.5; b) $1/2x^2\,(x+1)$; c) 0, 0, 1; d) 0.1875

12. a) $F(x) = 1 - e^{-2x}$; b) e^{-2x}

13. a) $1/4$; b) $1/4$; $1/2$

14. a) 0.0625; b) 0.25

15. a) $F(x) = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$; b) 0.7930; 0.2070

16. a) $F(x) = 3/4x - 1/4x^2 + 1/2$; b) 0

17. a) 0.6; b) 0.8; c) 0.7

18. a) $F(x) = x^2/4 - x + 1$; b) $3/4$; c) 0.5

19. a) $g\,(x) = 5/21 + 2/21\,(x-1) \quad x = 1,2,3$; b) $h\,(y) = 9/21 + 3/21\,(y-1) \quad y = 1,2$ c) $f\,(x|y) = (x+y)/(6+3y) \quad x = 1,2,3; y = 1,2$; d) $f\,(y|x) = (x+y)/(3+2x) \quad x = 1,2,3; y = 1,2$

20. a) $l\,(x,y) = xy/36 \quad x = 1,2,3; y = 1,2,3$ b) $m\,(x,z) = xz/18 \quad x = 1,2,3; z = 1,2$ c) $g\,(x) = x/6 \quad x = 1,2,3$; d) $f\,(z|x=1,y=2) = z/3 \quad z = 1,2$; e) sim

21. a) 6; b) $g\,(x) = 3x^2 \quad 0 < x < 1$; c) $h\,(y) = 3(y-1)^2 \quad 0 < y < 1$ d) não

22. a) 0.1; b) $1/72$; c) $h\,(y) = 3y^2 \quad 0 < y < 1$; d) $g\,(x) = 2x \quad 0 < x < 1$; e) sim

23. a) $g\,(x) = 12x(1-x)^2 \quad 0 < x < 1$; b) $h\,(y) = 12y(1-y)^2 \quad 0 < y < 1$; c) não d) $1/16$

24. a) 4; b) $15/256$

25. a) $f\,(x,y) = 8xy^3$; b) $36/125$

26. a) $g\,(x) = 2\,(1-x) \quad 0 < x < 1$; b) $h\,(y) = 2y \quad 0 < y < 1$ c) $f\,(x|y) = 1/y \quad 0 < x < 1$

27. a) $g\,(x) = 21/4\ x^2\left(1 - x^4\right) \quad 0 < x < 1$; b) $h\,(y) = 7y^6 \quad 0 < y < 1$ c) $f\,(x|y) = 3x^2/y \quad 0 < x < 1$

Capítulo 6

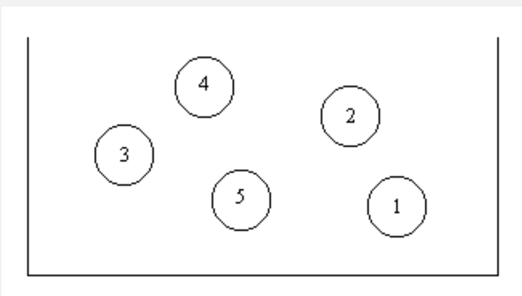
Esperança matemática

6.1 Introdução

O conceito de esperança matemática ou valor esperado esteve, na sua origem, ligado ao jogos de azar. Assim, por exemplo, no jogo em que se aposta 100 unidades monetárias de que o resultado de um lançamento de uma moeda será cara, o valor esperado do ganho resulta do produto do que o jogador ganhará pela respetiva probabilidade, isto é, 50 unidades monetárias. Contudo, como para participar no jogo é necessário apostar 100 unidade monetárias, o valor esperado da perda é também de 50 unidade monetárias. Por isso, quando este jogo é repetido milhares de vezes os ganhos compensam as perdas, isto é, o valor esperado é nulo, e, por isso, estes jogos são referidos como de soma nula.

Exemplo 6.1.1: Valor esperado

Considere uma urna como a representada na figura que contem 5 fichas idênticas, numeradas de 1 a 5. As fichas são mexidas de forma aleatória e é retirada uma, sendo registado o seu valor, após o que é novamente introduzida na urna.

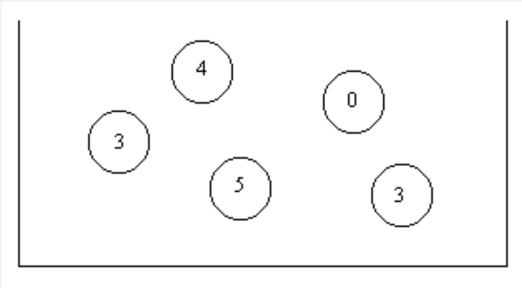


O jogo é repetido 25 vezes. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?

Solução: O valor esperado da soma estará, obviamente, entre 25 e 125, caso as 25 fichas retiradas apresentassem todas o número 1 ou o número 5 inscrito. De qualquer forma, a probabilidade de selecionar uma qualquer ficha é de 1/5. O valor esperado, designado por $E[X]$ é dado por $E[X] = 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5} + 5\frac{1}{5} = \frac{15}{3} = 3$. Assim, em 25 tentativas, o valor esperado da soma é 75. De notar que este resultado também pode ser entendido como retirar cada uma das fichas 5 vezes, isto é, $5(1+2+3+4+5) = 75$.

Exemplo 6.1.2: Valor esperado

Suponha que a urna do exemplo anterior contém as seguintes fichas.



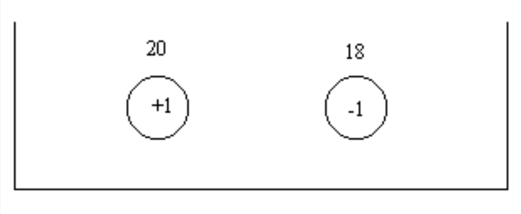
São retiradas 25 fichas com reposição. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?

Solução: O valor esperado é dado por $E[X] = 0\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5} + 4\frac{1}{5} + 5\frac{1}{5} = \frac{15}{3} = 3$, e, portanto, em 25 tentativas, o valor esperado da soma é 75.

Exemplo 6.1.3: Valor esperado

No jogo da roleta existem 36 números, inscritos, alternadamente, em casas vermelhas e negras. Além destes 36 números existem ainda duas casas, de cor verde, com 0 e 00 inscritos. Neste jogo existe a possibilidade de apostar na cor negra ou na cor vermelha. A ocorrência da cor escolhida dá direito a um prémio igual ao montante apostado. Caso ocorra uma das casas verdes, a banca recolhe tudo o que está em cima da mesa, isto é, nenhuma aposta sai vitoriosa. Suponha que um jogador pode apostar exatamente 1 unidade monetária e o decide fazer na cor preta. Calcule o valor esperado do ganho por parte da banca.

Solução: O jogo pode ser visualizado como retirar fichas de uma urna, com $+1$ ou -1 inscrito, significando, respetivamente, que a banca ganhou e que perdeu. A figura retrata a situação descrita, sendo de notar que existem 18 fichas com -1, isto é, as possibilidades de o jogador ganhar, e 20 fichas com +1, 18 correspondentes aos números de cor vermelha mais os dois 0 e 00, que são as possibilidades de a banca ganhar.



O valor esperado neste jogo é, portanto,

$$E[X] = (-1)\frac{18}{38} + (+1)\frac{20}{36} = \frac{1}{18} = 0.055$$

Desta forma, o valor esperado, em cada jogada, por parte da banca é de 0.055 unidades monetárias. Pode parecer pouco, mas tendo em consideração os milhares de apostas feitas numa só noite, entende-se porque razão os casinos ganham dinheiro. Pelas mesmas razões o casino está interessado em que a roleta e todos os outros jogos não sejam viciados, pois existe sempre uma pequena vantagem a seu favor, em termos de probabilidade.

6.2 O valor esperado de uma variável aleatória

Os exemplos anteriores permitiram clarificar o conceito de valor esperado em termos do produto do valor observado da variável aleatória pela respetiva probabilidade. Embora os exemplos apresentados se refiram a variáveis aleatórias discretas é possível definir também o conceito para variáveis aleatórias contínuas.

Definição 6.2.1: Média de distribuição discreta

Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória X, representado por μ ou $E(X)$, é dado por

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

Definição 6.2.2: Média de distribuição contínua

Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória X, representado por μ ou $E(X)$, é dado por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Nesta definição é assumido que soma ou integral convergem, pois de outra maneira o valor esperado não existe.

Exemplo 6.2.1: Valor esperado

Calcule o valor esperado da variável aleatória número de caras em três lançamentos.

Solução: A tabela apresenta os possíveis valores de x e as respetivas probabilidades,

x	$f(x)$
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$

O valor esperado é

$$E[X] = 0\frac{1}{8} + 1\frac{3}{8} + 2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 6.2.2: Valor esperado

Uma vendedora de aspiradores ganha uma comissão de 100 unidades monetárias por cada aspirador vendido. Tendo por base os registos do passado, o número de aspiradores vendidos em cada semana e a respetiva probabilidade são apresentados na tabela. Qual o valor esperado da comissão semanal da vendedora?

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.40	0.35	0.20	0.05

Solução: O valor esperado de aspiradores vendidos numa semana é

$$E[X] = 0\,(0.40) + 1\,(0.35) + 2\,(0.20) + 3\,(0.05) = 0.9$$

de onde a comissão esperada numa semana é de 90 unidades monetárias

Exemplo 6.2.3: Valor esperado

Considere a seguinte função densidade de probabilidade $f(x) = 6x(1-x) \quad 0 < x < 1$
Calcule o seu valor esperado.

Solução: O valor esperado é dado por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

o que corresponde ao valor médio.

Exemplo 6.2.4: Valor esperado

Uma companhia de seguros quer determinar qual o prémio que deve cobrar pelo seu seguro do ramo automóvel, no valor de 100000 euros. Este tipo de seguro cobre acidentes de carro que ocorrem a uma taxa de 8 acidentes por cada 10000 condutores, em cada ano. Considere X o ganho anual da companhia e C o valor do prémio. Calcule o valor de C tal que o valor esperado do ganho seja nulo.

Solução: Se nenhum acidente ocorrer a companhia ganha C euros. Se um acidente ocorrer a companhia perde $(100000 - C)$. Assim, para que o valor esperado seja nulo

Ganho	Probabilidade
C	$9992/10000$
$-(100000-C)$	$8/10000$

O valor esperado será $E[X] = \sum_x xf(x) = C\left(\frac{9992}{10000}\right) + [-(100000-C)]\left(\frac{8}{10000}\right) = 0$
$\left(\frac{9992}{10000}\right)C + \left(\frac{8}{10000}\right)C - 80 = 0 \Rightarrow C = 80$

Assim, para um prémio de 80 euros, o ganho da companhia seria nulo. O valor final do prémio teria que incluir os custos gerais de funcionamento bem como o lucro.

Em determinadas situações, pode ser de interesse o cálculo do valor esperado de funções de uma variável aleatória, do tipo $Y = g(X)$.

Definição 6.2.3: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ é o valor esperado da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado de $g(X)$ é dado por

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$$

De forma análoga, se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado de $g(X)$ é dado por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

Exemplo 6.2.5: Valor esperado

Seja X o número de pontos do lançamento de um dado. Considere a seguinte função $Y = 2X + 10$. Calcule $E[Y]$ que pode ser entendido como o valor esperado do lançamento de dois dados, a cujos resultados se soma a constante 10.

Solução:

$E[X] = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5$ $E[Y] = E[2X + 10] = 2E[X] + 10 = 17$

Exemplo 6.2.6: Valor esperado

Considere a seguinte função densidade de probabilidade $f(x) = 6x(1-x) \quad 0 < x < 1$ Calcule o valor esperado de $Y = X^2$.

Solução:

$$E[Y] = E\left[X^2\right] = \int_0^1 x^2 6x(1-x)dx = 6\left[\int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x^4 dx\right] = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

Os cálculos das esperanças matemáticas podem ser facilitados através das seguintes regras, cujas provas são bastante simples.

O valor esperado $E(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $E[aX + b] = aE[X] + b$ com a e b constantes;
2. $E[aX] = aE[X]$ com a constante;
3. $E[b] = b$ com b constante;
4. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$;
5. $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i E[g_i(X)]$;
6. $E[g(X,Y)] = \sum\limits_{x} g(x,y) f(x,y)$ sendo X discreta;
7. $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dxdy$ sendo X contínua;

8. $E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right]$;

9. se X e Y são independentes, então $E\left[g\left(X\right)h\left(Y\right)\right] = E\left[g\left(X\right)\right]E\left[h\left(Y\right)\right]$.

Definição 6.2.4: Momento centrado na origem

O momento de ordem r centrado na origem de uma variável aleatória X, designado por μ'_r é o valor esperado de X^r,

$$\mu'_r = E\left[X^r\right] = \sum_x x^r f\left(x\right)$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots$ no caso discreto e,

$$\mu'_r = E\left[X^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f\left(x\right) dx$$

no caso contínuo.

Definição 6.2.5: Média

μ'_1 é a média da distribuição de X, ou simplesmente a média de X, designada por μ.

Definição 6.2.6: Momento centrado na média

O momento de ordem r centrado na média de uma variável aleatória X, designado por μ_r, é o valor esperado de $\left(X-\mu\right)^r$,

$$\mu_r = E\left[\left(X-\mu\right)^r\right] = \sum_r \left(x-\mu\right)^r f\left(x\right)$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots$ no caso discreto e,

$$\mu_r = E\left[\left(X-\mu\right)^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^r f\left(x\right) dx$$

no caso contínuo.

Definição 6.2.7: Variância

μ_2 é a variância da distribuição de X, ou simplesmente a variância de X, designada por σ^2, $Var\left[X\right]$ ou $V\left[X\right]$; σ, a raiz positiva da variância é designada por desvio padrão.

Teorema 6.2.1.

$$\sigma^2 = {\mu'}_2 - \mu^2$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2X\mu + \mu^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2\mu E\left[X\right] + E\left[\mu^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= {\mu'}_2 - \mu^2\end{aligned}$$

□

Definição 6.2.8: Variância de X (σ^2)

Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ a sua função de probabilidade, a variância da variável aleatória X, representada por σ^2 ou $V(X)$, é dada por

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Definição 6.2.9: Variância de X (σ^2)

Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ a sua função densidade de probabilidade, a variância da variável aleatória X, representada por σ^2 ou $V(X)$, é dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \\ = E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

Exemplo 6.2.7: Variância - caso discreto

Considere a seguinte distribuição de probabilidade para a variável aleatória X, que representa o número de vezes que uma mãe telefona, em cada semana, ao seu filho estudante da Universidade do Minho.

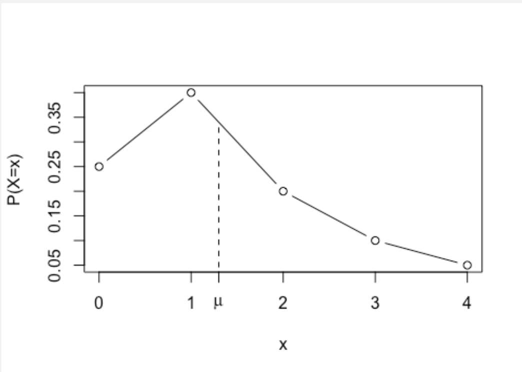
x	0	1	2	3	4
$P(X=x)=f(x)$	0.25	0.40	0.20	0.10	0.05

Calcule a média, a variância e o desvio padrão de X. Apresente o gráfico de $f(x)$ e localize a média no gráfico.

Solução:

x	$f(x)$	$xf(x)$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2 f(x)$
0	0.25	0	-1.30	0.4225
1	0.40	0.40	-0.30	0.0360
2	0.20	0.40	0.70	0.0980
3	0.10	0.30	1.70	0.2890
4	0.05	0.20	2.70	0.3645
Total	1.00	1.30	3.50	1.2100

$E[X] = \mu = 1.30$ $Var[X] = \sigma^2 = 1.21$ $\sigma = 1.10$



Exemplo 6.2.8: Variância - caso contínuo

Considere a seguinte função densidade de probabilidade $f(x) = 6x(1-x)$ $\quad 0 < x < 1$

Calcule a variância de X.

Solução:

O valor esperado de X (ver exemplo 6.2.3) é $E[X] = \frac{1}{2}$ e o valor esperado X^2 (ver exemplo 6.2.6) é dado por $E[X^2] = \frac{3}{10}$

Logo, a variância é dada por $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ donde, $Var[X] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$

A variância $V(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $Var[aX + b] = a^2 Var[X] = a^2\sigma^2$ com a e b constantes;

2. $Var[aX] = a^2 Var[X]$ com a constante;

3. $Var[b] = 0$ com b constante;

4. $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y]$, sendo $Cov[X,Y] = E[X-\mu_X]E[Y-\mu_Y]$

Exemplo 6.2.9: Média e variância

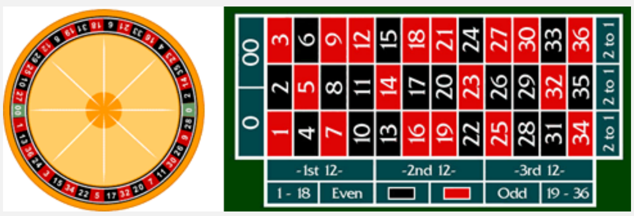
Considere a experiência em que duas fichas são selecionadas aleatoriamente de uma urna contendo 5 fichas castanhas e 3 verdes. Encontre a média, a variância e o desvio padrão da variável W, número de fichas castanhas extraídas da urna.

W	$f(w)$
0	$6/56$
1	$30/56$
2	$20/56$

- $\mu = E(W) = \sum_{w} wf(w) = 0 \times f(0) + 1 \times f(1) + 2 \times f(2) = = 0 + 30/56 + 40/56 = 70/56 = 1.25$
- $\sigma^2 = V(W) = E(W^2) - (E(W))^2$
- $E(W^2) = \sum_{w} w^2 f(w) = 0^2 \times f(0) + 1^2 \times f(1) + 2^2 \times f(2) = = 0 + 30/56 + 80/56 = 110/56 = 1.964$
- $\sigma^2 = V(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = 110/56 - (70/56)^2 = 0.402$
- $\sigma = \sqrt{V(W)} = 0.634$

Exemplo 6.2.10: Média

No jogo da roleta existem 36 números inscritos, alternadamente, em casas vermelhas e **negras**. Além destes 36 números existem ainda duas casas verdes, com **0** e **00** inscritos.



Neste jogo existe a possibilidade de **apostar na cor negra ou na cor vermelha**:

- se **sair a cor em que apostou**, o jogador **recebe um prêmio igual ao montante apostado**;
- se **sair uma das casas verdes**, o jogador **perde o dinheiro apostado** pois a banca recolhe tudo o que está em cima da mesa.

Suponha que um jogador **aposta 1000 euros na cor negra**. Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão do ganho por parte do jogador.

- Seja X a variável aleatória que representa o resultado desta experiência (o ganho do jogador quando aposta numa das cores), então as probabilidades são:

X	$f(X)$	
-1000	$20/38$	(o jogador perde e a banca ganha)
1000	$18/38$	(o jogador ganha e a banca perde)

- $\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = -1000 \times 20/38 + 1000 \times 18/38 = -55$ euros, i.e., o ganho médio do jogador é -55 euros
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (-1000)^2 \times 20/38 + 1000^2 \times 18/38 = 1000000$
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1000000 - (-55)^2 = 996975$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 998.49$ euros, i.e., o desvio padrão do ganho do jogador é 998.49 euros

Exemplo 6.2.11: Variância

No jogo da roleta existe também a possibilidade de **apostar num de três grupos de 12 números dispostos em 3 colunas na mesa**:

- se **sair um dos números da coluna em que apostou**, o jogador **recebe um prémio igual ao dobro do montante apostado**;
- se **sair uma das casas verdes**, o jogador **perde o dinheiro apostado** pois a banca recolhe tudo o que está em cima da mesa.

Suponha que um jogador **aposta 1000 euros na primeira coluna**. Calcule para este tipo de aposta o valor esperado, a variância e o desvio padrão do ganho por parte do jogador.

- Seja Y a variável aleatória que representa o resultado desta experiência (o ganho do jogador quando aposta numa das colunas), então as probabilidades são:

Y	$f(Y)$	
-1000	$26/38$	(o jogador perde e a banca ganha)
2000	$12/38$	(o jogador ganha e a banca perde)

- $\mu = E(Y) = \sum_y y f(y) = -1000 \times 26/38 + 2000 \times 12/38 = -55$ euros, i.e., o ganho médio do jogador é -55 euros
- $\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$
- $E(Y^2) = \sum_y y^2 f(y) = (-1000)^2 \times 26/38 + 2000^2 \times 12/38 = 1947368$
- $\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1947368 - (-55)^2 = 1944343$
- $\sigma = \sqrt{V(Y)} = 1394.40$ euros, i.e., o desvio padrão do ganho do jogador é 1394.40 euros

O que será melhor apostar numa cor ou numa coluna?

- cor: $\mu = -55$ euros e $\sigma = 998.49$ euros
- coluna: $\mu = -55$ euros e $\sigma = 1394.40$ euros

Exemplo 6.2.12: Valor esperado e variância

Considere a seguinte função densidade de probabilidade para a variável aleatória X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1) & 2 < x < 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ e o desvio padrão.

- $\mu = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{2}^{4} x \frac{1}{8}(x+1) dx = \frac{1}{8} \int\limits_{2}^{4} (x^2 + x) dx = = \frac{1}{8} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \frac{1}{8} \left(\frac{64}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{37}{12} = 3.083$
- $E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int\limits_{2}^{4} x^2 \frac{1}{8}(x+1) dx = \frac{1}{8} \int\limits_{2}^{4} (x^3 + x^2) dx = = \frac{1}{8} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{1}{8} \left(64 + \frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{59}{6}$
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{59}{6} - \left(\frac{37}{12}\right)^2 = \frac{47}{144} = 0.326$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 0.571$

6.3 Função Geradora de Momentos

Como foi visto, os momentos de muitas distribuições podem ser determinados por integração ou por somatórios. Uma forma alternativa de determinar os momentos é através da função geradora de momentos.

Definição 6.3.1: Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos de uma variável aleatória X, quando existe, é dada por

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} f(x)$$

no caso discreto e

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)$$

no caso contínuo.

A variável independente t e a razão porque esta função é designada por função geradora de momentos pode ser melhor entendida através da expansão em série de MacLaurin,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{t^rx^r}{r!} + \ldots$$

No caso discreto,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_x \left[1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{t^rx^r}{r!} + \ldots\right] f(x) \\ &= \sum_x f(x) + t\sum_x xf(x) + \frac{t^2}{2!}\sum_x x^2 f(x) + \ldots + \frac{t^r}{r!}\sum_x x^r f(x) + \ldots \\ &= 1 + \mu t + {\mu'}_2\frac{t^2}{2!} + \ldots + {\mu'}_r\frac{t^r}{r!} + \ldots \end{aligned}$$

Constata-se que o coeficiente de $\frac{t^r}{r!}$ é${\mu'}_r$ o momento de ordem r na origem. De forma semelhante, o mesmo resultado é obtido para o caso contínuo.

O cálculo dos primeiros momentos pode ser facilitado através da seguinte relação

$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = {\mu'}_r$$

dado que, para uma função expandida como uma série de potências de t, o coeficiente de

$$\frac{t^r}{r!}$$

é a derivada de ordem r com respeito a t em $t = 0$.

A importância da função geradora de momentos resulta do facto de ser única (diferentes distribuições não podem ter a mesma função geradora de momentos) e de determinar completamente a distribuição da variável aleatória. Contudo, nem todas as distribuições possuem uma função geradora de momentos, dado que esta só existe para distribuições com momentos de todas as ordens e finitos. No entanto, $E\left[e^{itX}\right]$, designado como função característica, existe para todas as distribuições. $E\left[e^{itX}\right] = E\left[\cos(tX)\right] + iE\left[\sin(tX)\right]$ onde $i = \sqrt{-1}$. As funções seno e cosseno são limitadas e por isso o integral converge.

Propriedades da função geradora de momentos

1. $M_{X+a}(t) = E\left[e^{(X+a)t}\right] = e^{at}M_X(t)$
2. $M_{bX}(t) = E\left[e^{bXt}\right] = M_X(bt)$
3. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left[e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)t}\right] = e^{\frac{a}{b}t}M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

De notar que no caso especial em que $a = -\mu$ e $b = \sigma$,

$$M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = E\left[e^{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)t}\right] = e^{-\frac{\mu}{\sigma}t}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right).$$

Para variáveis aleatórias independentes, e tendo por base a lei dos expoentes, $a^{x+y} = a^x a^y$, é possível escrever para duas variáveis aleatórias X e Y,

$$E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}e^{tY}\right] = E\left[e^{tX}\right]E\left[e^{tY}\right]$$

logo

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\,M_Y(t).$$

Teorema 6.3.1. *Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, então*

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

onde $M_{X_i}(t)$ é o valor da função geradora de momentos de X_i em t.

Exemplo 6.3.1: Função Geradora de Momentos

Seja X o número de pontos num lançamento de um dado. Encontre a função geradora de momentos de X. Determine a média e a variância de X. Encontre a função geradora de momentos para o número de pontos correspondente ao lançamento de 3 dados.

Solução: A função geradora para X é dada por

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \sum_{x=1}^{6} e^{tx}\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right) \end{aligned}$$

A primeira derivada é $M'_X(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}\right)$ que avaliada no ponto $t = 0$ produz a resposta já encontrada no exemplo 6.2.5,

$$M'_X(t)|_{t=0} = E[X] = \frac{21}{6} = 3.5.$$

A segunda derivada é $M''_X(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t} + 16e^{4t} + 25e^{5t} + 36e^{6t}\right)$ que avaliada no ponto $t = 0$,

$$M''_X(t)|_{t=0} = E\left[X^2\right] = \frac{91}{6} = 15.17.$$

A variância é, então, $Var[X] = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$. A função geradora para o lançamento de 3 dados pode ser vista como a soma de 3 variáveis aleatórias independentes $Y = X_1 + X_2 + X_3$, donde

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \left[\frac{1}{6}\left(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right)\right]^3$$

O valor esperado será dado pela primeira derivada no ponto $t = 0$,

$$M'_Y(t) = 3\left[\frac{1}{6}\left(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right)\right]^2 \left(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}\right)\frac{1}{6}$$

isto é,

$$M'_Y(t)|_{t=0} = E[Y] = 3\left(\frac{1}{6}\right)(21) = 10.5$$

Exemplo 6.3.2: Função Geradora de Momentos

O número de caras (H) no lançamento de 4 moedas equilibradas tem a seguinte distribuição de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{16}\binom{4}{x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Evento	x
$TTTT$	0
$TTTH$;$TTHT$;$THTT$;$HTTT$	1
$HHTT$;$TTHH$;$THHT$;$HTTH$;$HTHT$;$THTH$	2
$HHHT$;$HHTH$;$HTHH$;$THHH$	3
$HHHH$	4

Encontre a função geradora de momentos e determine a média e a variância.

Solução:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \frac{1}{16}\sum_{x=0}^{4} e^{tx}\binom{4}{x} = \frac{1}{16}\left(1 + 4e^t + 6e^{2t} + 4e^{3t} + e^{4t}\right) = \frac{1}{16}\left(1 + e^t\right)^4$$

A primeira derivada é,

$$M'_X(t)|_{t=0} = \frac{4}{16}\left(1+e^t\right)^3 e^t\Big|_{t=0} = 2.$$

A segunda derivada é,

$$M''_X(t)|_{t=0} = \frac{12}{16}\left(1+e^t\right)^2 e^{2t} + \frac{4}{16}\left(1+e^t\right)^3 e^t\Bigg|_{t=0} = 5.$$

Logo, a média e a variância são, $E[X] = 2$, $Var[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = 5 - 4 = 1$

Exemplo 6.3.3: Função Geradora de Momentos

Considere a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 < x < 1$$

Determine a função geradora de momentos e calcule a média e a variância da variável aleatória.

Solução:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^1 e^{tx} 6x(1-x)dx = 6\left(\int_0^1 e^{tx} x dx - \int_0^1 e^{tx} x^2 dx\right) \\ &= 6\left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2} - \frac{e^t}{t} + \frac{2te^t - 2e^t + 2}{t^3}\right) \end{aligned}$$

Através de integração por partes, os dois integrais podem ser calculados como

$$\int_0^1 xe^{tx}dx = x\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{tx}}{t}dx = \frac{e^t}{t} - \left(\frac{1}{t}\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{tx}dx = x^2\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 - \frac{2}{t}\int_0^1 xe^{tx}dx = \frac{e^t}{t} - \frac{2}{t}\left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2e^t}{t^3} - \frac{2}{t^3}.$$

A função geradora pode ser simplificada, obtendo-se a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= 6\left(\frac{t^2e^t - te^t + t}{t^3} - \frac{t^2e^t}{t^3} + \frac{2te^t - 2e^t + 2}{t^3}\right) \\ &= \frac{6}{t^3}\left(te^t - 2e^t + t + 2\right) = \frac{6}{t^3}\left[e^t(t-2) + t + 2\right] \end{aligned}$$

Expandindo e^t, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6}{t^3}\left[\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{120}\ldots\right)(t-2)+t+2\right] \\
&= \frac{6}{t^3}\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{6}+\frac{t^5}{24}+\frac{t^6}{120}\ldots-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{12}-\frac{t^5}{60}\ldots\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{6}+\frac{t^2}{24}+\frac{t^3}{120}\ldots\frac{1}{3}-\frac{t}{12}-\frac{t^2}{60}\ldots\right) \\
&= \frac{1}{3}+t+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{20}\ldots 2-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{10}\ldots
\end{aligned}
$$

O cálculo da primeira derivada, no ponto $t=0$,

$$M'_X(t) = 1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{20}+\ldots-\frac{1}{2}-\frac{t}{5}-\ldots$$

$$M'_X(t)\big|_{t=0} = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Assim, o valor esperado é $E[X]=\frac{1}{2}$. O cálculo da segunda derivada, no ponto $t=0$,

$$M''_X(t) = \frac{1}{2}+\frac{3t^2}{10}+\ldots-\frac{1}{5}-\ldots$$

$$M''_X(t)\big|_{t=0} = \frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

$$E\left[X^2\right]=\frac{3}{10}$$

Assim, a variância é $Var[X]=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20}$.

6.4 Covariância

O produto de momentos centrados na média permite definir uma relação importante, a covariância entre duas variáveis.

Definição 6.4.1: Produto de Momentos

O produto de ordem r e s de duas variáveis aleatórias X e Y, designado por $\mu_{r,s}$, é o valor esperado de $(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s$,

$$\mu_{r,s}=E\left[(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s\right]=\sum_x\sum_y(x-\mu_X)^r(y-\mu_Y)^s f(x,y)$$

para $r=0,1,2,\ldots$ e $s=0,1,2,\ldots$ para X e Y variáveis discretas, e

$$\mu_{r,s}=E\left[(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)^r(y-\mu_Y)^s f(x,y)\,dxdy$$

no caso contínuo.

O caso especial de $\mu_{1,1}$ explicita a relação entre duas variáveis e é designado por covariância.

Definição 6.4.2: Covariância

$\mu_{1,1}$ é designado por covariância de X e Y, sendo apresentada como σ_{XY}, $Cov\,(X,Y)$ ou $C\,(X,Y)$, $\mu_{1,1} = E\,[X-\mu_X]\,E\,[Y-\mu_Y]$

$$\sigma_{XY} = {\mu'}_{1,1} - \mu_X\mu_Y$$

Prova

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= E\,[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)]\\ &= E\,[XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y]\\ &= E\,[XY] - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y\\ &= {\mu'}_{1,1} - \mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

Exemplo 6.4.1: Covariância

Considere a seguinte função dada por

$$f\,(x,y) = {}^{1}\!/_{60}\;(3x+2y)\;\text{ para } x = 0,1,2,3; y = 1,2.$$

Encontre a covariância de X e Y.

Solução:

As probabilidades conjuntas são listadas na tabela.

x / y	1	2	
0	2/60	4/60	6/60
1	5/60	7/60	12/60
2	8/60	10/60	18/60
3	11/60	13/60	24/60
	26/60	34/60	60/60

$${\mu'}_{1,1} = (0)\,\frac{2}{60} + (0)\,\frac{4}{60} + (1)\,\frac{5}{60} + (2)\,\frac{7}{60} + (2)\,\frac{8}{60} + (4)\,\frac{10}{60} + (3)\,\frac{11}{60} + (6)\,\frac{13}{60} = \frac{181}{60}$$

Através das funções marginais, $\mu_X = 0\frac{6}{60} + 1\frac{12}{60} + 2\frac{18}{60} + 3\frac{24}{60} = \frac{120}{60}$ $\mu_Y = 1\frac{26}{60} + 2\frac{34}{60} = \frac{94}{60}$

A covariância vem igual a $\sigma_{XY} = \frac{181}{60} - \frac{120}{60}\frac{94}{60} = -\frac{3}{60}$. Logo, as duas variáveis não são independentes.

Exemplo 6.4.2: Covariância

Considere a função de densidade conjunta do Exemplo 5.4.12,

$$f(x,y) = 6(1-y) \quad 0 \le x \le y \le 1$$

cujas funções marginais são, respetivamente,

$$g(x) = 3(1-x)^2 \quad 0 < x < 1$$

$$h(y) = 6y(1-y) \quad 0 < y < 1$$

Encontre a covariância de X e Y.

Solução:

$$\mu_X = \int_0^1 x3(1-x)^2 dx = \left(3\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

ou, de forma equivalente,

$$\mu_X = \int_0^1 \int_0^y x6(1-y)\,dxdy = \int_0^1 6(1-y)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y dy = \int_0^1 \left(3y^2 - 3y^3\right)dy = 3\frac{y^3}{3} - 3\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\mu_Y = \int_0^1 y6y(1-y)\,dy = 6\frac{y^3}{3} - 6\frac{y^4}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu'_{1,1} = E[X,Y] = \int_0^1 \int_0^y 6(1-y)\,xydxdy = = \int_0^1 6y(1-y)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y dy = \int_0^1 3y^3(1-y)\,dy$$

$$= 3\frac{y^4}{4} - 3\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}$$

$\sigma_{XY} = \frac{3}{20} - \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{40}$

Teorema 6.4.1. *Se X e Y são independentes, então*

$$E[XY] = E[X]\,E[Y]$$

$$\sigma_{XY} = 0$$

Demonstração. Para o caso discreto, e sem perda de generalidade, se duas variáveis aleatórias são independentes, $f(x,y) = g(x)\,h(y)$, onde $g(x)$ e $h(y)$ são as distribuições marginais de X e Y e,

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyg(x)h(y) = \sum_x xg(x) \sum_y yh(y) = E[X]\,E[Y]$$

Assim,

$$\sigma_{XY} = \mu'_{1,1} - \mu_X\mu_Y = E[X]\,E[Y] - E[X]\,E[Y] = 0$$

□

Exemplo 6.4.3: Covariância

A distribuição de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

x / y	-1	0	1	
-1	1/6	1/3	1/6	2/3
0	0	0	0	0
1	1/6	0	1/6	1/3
	1/3	1/3	1/3	1

Mostre que a covariância é nula embora as variáveis não sejam independentes.

Solução:

$$\mu_X = (-1)\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 0$$

$$\mu_Y = (-1)\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\mu'_{1,1} = (-1)(-1)\frac{1}{6} + (0)(-1)\frac{1}{3} + (1)(-1)\frac{1}{6} + (-1)(1)\frac{1}{6} + (1)(1)\frac{1}{6} = 0$$

Assim,

$$\sigma_{XY} = 0 - (0)\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Embora a covariância seja nula, as variáveis não são independentes dado que $f(x,y) \neq g(x)h(y)$.

Exemplo 6.4.4: Covariância

Considere a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x,y) = 4xy \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

a) Calcule as funções marginais de X e Y.

b) Verifique se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

c) Calcule a covariância de X e Y.

Solução:

a) As funções marginais são $g(x) = \int_0^1 4xydy = 4x\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 2x \quad 0 < x < 1$ Por simetria, tem-se que $h(y) = 2y \quad 0 < y < 1$

b) As variáveis são independentes dado que $f(x, y) = g(x) h(y)$

c) Os valores esperados são, $\mu_X = \int_0^1 2x^2 dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$ $\mu_Y = \int_0^1 2x^2 dy = 2\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$

$$\mu'_{XY} = \int_0^1 \int_0^1 4x^2y^2 dxdy = \int_0^1 4y^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{4}{3}y^2 dy = \frac{4}{3}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{9}$$

A covariância é, então, $\sigma_{XY} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} = 0$

Exemplo 6.4.5: Covariância

Considere as seguintes variáveis aleatórias X, Y e Z, para as quais se tem a seguinte informação:

$$\begin{array}{lll} \mu_X = 4 & \sigma_X^2 = 2 & Cov(X, Y) = -3 \\ \mu_Y = 2 & \sigma_Y^2 = 3 & Cov(X, Y) = -1 \\ \mu_Z = -5 & \sigma_Z^2 = 1 & Cov(X, Y) = 2 \end{array}$$

Encontre a média e a variância de $T = 4X - 2Y + 2Z$.

Solução:

$$E[T] = E[4X - 2Y + 2Z] = 4E[X] - 2E[Y] + 2E[Z] = 4(4) - 2(2) + 2(-5) = 2$$

$$\begin{aligned} Var[T] &= 16Var[X] + 4Var[Y] + 4Var[Z] \\ &\quad + 2(4)(-2)Cov[X, Y] + 2(4)(2)Cov[X, Z] - 2(-2)(2)Cov[Y, Z] = 64 \end{aligned}$$

A covariância indica como as duas variáveis variam em conjunto. Se, para valores elevados de X, estão associados valores elevados de Y, a covariância é positiva, isto é, os pontos estão à volta de uma linha com declive positivo. Por outro lado, se aos maiores valores de X estão associados os menores valores de Y, a covariância é negativa, ou seja, os pontos concentram-se à volta de uma linha de declive negativo.

A variância da soma de duas variáveis aleatórias é, por isso, dada por

$$Var[X + Y] = E[(X + Y - \mu_{X+Y})^2] = E[(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)]^2.$$

Desenvolvendo o quadrado,

$$[(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)]^2 = (X - \mu_x)^2 + (Y - \mu_y)^2 + 2(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$

e, assim,

$$Var[X + Y] = E[(X - \mu_x)^2] + E[(Y - \mu_y)^2] + 2E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)],$$

isto é,

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y].$$

Se X e Y forem independentes, $Cov[X,Y] = 0$ e, a expressão reduz-se a

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y].$$

Portanto, se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes par a par, a expressão da variância da soma é

$$Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n].$$

Com base na variância para a soma, a variância para a diferença pode ser deduzida de forma análoga e, pode-se escrever que

$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y].$$

No caso geral de

$$Var[aX \pm bY] = a^2Var[X] + b^2Var[Y] \pm 2abCov[X,Y].$$

Exemplo 6.4.6: Covariância

Uma urna contém 4 fichas numeradas de 1 a 4. Duas fichas são retiradas da urna. Seja X a ficha com o maior valor e Y a ficha com o menor valor.

x/y	1	2	3	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
2	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{18}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{48}{6}$
$\sum$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{20}{6}$	$\frac{70}{6}$

O valor esperado de X é dado por $E[X] = \frac{20}{6}$.
A variância de X é igual a $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{70}{6} - (\frac{20}{6})^2 = \frac{20}{36}$.
A distribuição de Y é a igual à distribuição de $5 - X$, ou seja, $E[Y] = 5 - E[X]$, ou seja $E[Y] = 5 - \frac{20}{6} = \frac{10}{6}$. Em tabela,

y	$g(y)$	$yg(y)$	$y^2g(y)$
1	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$
$\sum$	1	$\frac{10}{6}$	$\frac{20}{6}$

Assim, o valor esperado de Y pode ser calculado como $\frac{10}{6}$.

A variância é igual a $Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{20}{6} - (\frac{10}{6})^2 = \frac{20}{36}$ ou, sabendo que $Var[Y] = Var[5 - X] = Var[X]$. Para calcular $E[XY]$ é necessário construir as tabelas seguintes:

x y	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9
4	4	8	12

x y	1	2	3
2	$\frac{2}{6}$	0	0
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{6}$	0
4	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{12}{6}$

Assim, $E[XY] = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} + \frac{4}{6} + \frac{8}{6} + \frac{12}{6} = \frac{35}{6}$ e a $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{35}{6} - \frac{20}{6}\frac{10}{6} = \frac{10}{36}$.
O valor esperado de $Z = X + 2Y$ fica igual a $E[Z] = E[X] + 2E[Y] = \frac{20}{6} + 2 \times \frac{10}{6} = \frac{40}{6}$ e a variância por $Var[Z] = Var[X] + (2)^2 Var[Y] + 2(2)Cov[X,Y] = \frac{20}{36} + 4 \times \frac{20}{36} + 4 \times \frac{10}{36} = \frac{140}{36}$.

z	$h(z)$	$zh(z)$	$z^2h(z)$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{16}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1	6
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{49}{6}$
8	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{64}{6}$
9	0	0	0
10	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{100}{6}$
$\sum$	1	$\frac{40}{6}$	$\frac{290}{6}$

A esperança e a variância de Z também podem ser calculadas a partir da tabela acima. Assim, $E[Z] = \frac{40}{6}$ e a $Var[Z] = \frac{1740}{36} - (\frac{40}{6})^2 = \frac{140}{6}$.

6.5 Exercícios

1. Uma variável aleatória tem a seguinte distribuição de probabilidade

x	0	1	2	3
$P(X = x) = f(x)$	0.05	0.15	0.40	0.40

   Calcule a média, a variância e o desvio padrão de X. Apresente o gráfico de $f(x)$ e localize a média no gráfico.

2. Encontre o valor esperado da variável aleatória discreta X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$f(x) = \frac{|x-2|}{7} \qquad x = -1, 0, 1, 3$$

3. Encontre o valor esperado da variável aleatória X com a seguinte a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{8}(x+1) \qquad 2 < x < 4$$

4. Encontre o valor esperado da variável aleatória X com a seguinte a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

5. Considere a seguinte função de probabilidade

$$f(x) = \frac{x}{15} \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

   Encontre:

   a) $E[X]$, $E[X^2]$

   b) $E[3X + 2)^2]$

6. Considere a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 3} \qquad 1 < x < 3$$

   Encontre:

   a) $E[X]$, $E[X^2]$, $E[X^3]$

   b) $E[X^3 + 2X^2 - 3X + 1]$

7. Um agente de vendas de sistemas computacionais recebe uma comissão de 300? por cada sistema que vende. Com base nos registos de vendas do passado, a distribuição de X , o número de sistemas vendidos por mês, é dado na seguinte tabela. Qual o valor esperado das comissões mensais do vendedor?

x	0	1	2	3	4
$P(X = x) = f(x)$	0.40	0.30	0.15	0.10	0.05

8. Uma companhia de seguros oferece uma apólice contra incêndios que pode cobrir uma perda total com uma probabilidade de 0.003 e uma perda de 50% com uma probabilidade de 0.06. Assumindo que o valor da indemnização é de 100000? para a perda total, qual o valor do prémio anual para soma nula?

9. Considere a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad 0 < x < 2$$

   Encontre:

   a) $E[X]$, $E[X^2]$

   b) $V[X]$

   c) A função geradora de momentos.

10. Considere a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

   Encontre

   a) $E[X]$;

   b) A função geradora de momentos.

11. Considere a seguinte função densidade de probabilidade.

   Encontre:

   a) $E[X]$

   b) A função geradora de momentos e use a respetiva expansão em série para calcular as alíneas anteriores.

12. Considere a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$

   Encontre:

a) $E[X]$

b) $E[X^2]$

c) A função geradora de momentos e use a respetiva expansão em série para calcular as alíneas anteriores.

13. Se X_1, X_2 e X_3 são independentes, com médias 4, 9 e 3, e variâncias 3, 7 e 5, encontre a média e a variância de

    a) $Y = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3$

    b) $Z = X_1 + 2X_2 - X_3$

14. Se , e são variáveis aleatórias, com médias 4, 9 e 3, e variâncias 3, 7 e 5, e $Cov[X_1, X_2] = 1$, $Cov[X_2, X_3] = -2$ e $Cov[X_1, X_3] = -3$, encontre a média e a variância de

    a) $Y = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3$

    b) $Z = X_1 + 2X_2 - X_3$

15. Considere a seguinte distribuição de probabilidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{30}(x + y) \qquad x = 0, 1, 2, 3 \qquad y = 0, 1, 2$$

    Encontre $E[2X - Y]$.

16. Considere a seguinte função de densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y \qquad 0 < y < 1$$

    Encontre:

    a) $P(X + Y > \frac{1}{2})$

    b) $E[\frac{X}{Y}]$

    Nota:$\int ln(ax + b)dx = \frac{ax+b}{a} ln(ax + b) - x + C$

Soluções

1. 2.15; 0.7275; 0.8529;

2. 1/7

3. 5/3

4. 1

5. a) 11/3; 15; b) 183

6. a) $2/\ln 3$; $4/\ln 3$; $26/(3\ln 3)$; b) 7.9785

7. 330

8. 3300

9. a) 4/3; b) 2; c) 2/9 d)

10. a) 0; b)

11. a) 0; b) 1/6; c) ;

12. a) 2/3; b) 1/18; c) ;

13. a) 1; 153; b) 19; 26

14. a) 1; 141; b) 19; 44

15. 2.7333

Capítulo 7

Distribuições de Probabilidade

7.1 Introdução

Neste capítulo serão estudadas algumas distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias discretas e contínuas. Estas distribuições descrevem muitos dos fenómenos observados no contexto das aplicações em ciências experimentais e em engenharia. Este capítulo tem por base todos os conceitos apresentados no Capítulo 5, para variáveis aleatórias, quer discretas quer contínuas. De facto, este capítulo constitui uma generalização desses conceitos a algumas distribuições particulares.

7.2 Distribuições de variáveis aleatórias discretas

Uma variável aleatória discreta só pode assumir um número contável de valores, como por exemplo, o número de peças com defeito num dado lote ou o número de partículas emitidas por uma fonte de radiação. Nesta secção serão apresentadas algumas distribuições de probabilidade discretas que possuem determinadas características e que traduzem fenómenos observados na natureza e no dia a dia. Para todas estas distribuições, as condições descritas no Capítulo 5 se aplicam, em particular, no que respeita à função de probabilidade discreta de uma variável aleatória X, se e só se, os seus valores satisfazerem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$, para cada valor no seu domínio;

2. $\sum_{x} f(x) = 1$, onde o somatório se estende a todos os valores do seu domínio.

7.2.1 Distribuição Uniforme discreta

Uma variável aleatória que pode tomar diferentes valores com igual probabilidade é uma variável que segue uma distribuição uniforme discreta. Exemplo de variáveis aleatórias discretas é o número de pontos no lançamento de um dado (Figura 7.1).

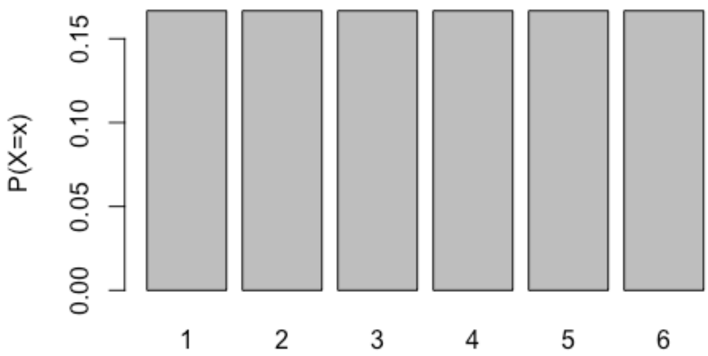


Figura 7.1: Distribuição de probabilidade uniforme para o lançamento de um dado.

Definição 7.2.1: Distribuição Uniforme Discreta

Uma variável aleatória tem uma distribuição uniforme discreta, designada por variável aleatória uniforme discreta, se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

onde $x_i \neq x_j$ quando $i \neq j$. A média e a variância são:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{1}{k}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \frac{1}{k}$$

No caso especial em que $x_i = i$, atendendo a que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ e $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, vem que

$$\mu = \frac{k+1}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{k^2-1}{12}$$

7.2.2 Distribuição de Bernoulli

Uma experiência em que só há dois resultados possíveis, sucesso e insucesso, com probabilidades de p e $(1-p)$, respetivamente, o número de sucessos segue uma distribuição de Bernoulli.

Definição 7.2.2: Distribuição de Bernoulli

Uma variável aleatória X tem uma distribuição de Bernoulli, designada por variável aleatória de Bernoulli, se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

A média e a variância são:

$$\mu = p$$
$$\sigma^2 = p(1-p)$$

7.2.3 Distribuição Binomial

Experiências em que, em cada tentativa só há dois resultados possíveis, são designadas por tentativas de Bernoulli; tal é o caso do lançamento de uma moeda, em que os resultados possíveis são cara ou coroa. Tentativas repetidas descrevem, por exemplo, o número de caras nos n lançamentos de uma moeda. Outros exemplos são o número de bebés do sexo feminino nos próximos 100 nascimentos num hospital, o número de respostas certas, ao acaso, em testes de resposta múltipla com 20 questões, cada com 5 alternativas. Para descrever estas tentativas repetidas por meio de uma distribuição é necessário assumir que as probabilidades de sucesso e insucesso se mantêm constantes (probabilidade de sair uma cara, de nascer uma menina) e que as tentativas são independentes, ou seja, que um resultado observado não condiciona a observação do seguinte. Estas condições, independência entre tentativas, somente dois resultados mutuamente exclusivos, com probabilidade de sucesso constante definem o que se designa por uma experiência binomial.

Condições de uma variável binomial:

1. A experiência consiste em n tentativas idênticas;

2. Há só duas possibilidades em cada tentativa (sucesso - S e falha - F);

3. A probabilidade de sucesso, p, mantém-se constante, com a probabilidade de falha designada por $q = 1 - p$, e $p + q = 1$;

4. As tentativas são independentes;

5. A variável aleatória X é o número de sucessos em n tentativas.

Definição 7.2.3: Distribuição Binomial

Uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial, designada por variável aleatória binomial, se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x; n, p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Nota: $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$
A média e a variância são:

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

A expansão binomial para duas constantes a e b é,

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_x^n a^x b^{n-x}$$

o que, para $a = p$ e $b = 1 - p$ mostra que a soma das probabilidades binomiais é igual a um.

A Figura 7.2 representa a distribuição de probabilidade binomial para $n = 10$ e $p = 0.2$.

Teorema 7.2.1. *A média e a variância da distribuição binomial com parâmetros n e p são,*

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{n} x C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

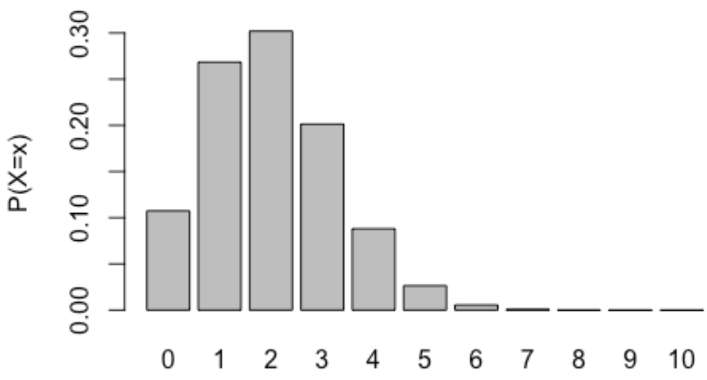


Figura 7.2: Distribuição de probabilidade binomial para $n = 10$ e $p = 0.2$.

Considerando as seguinte variáveis auxiliares, $y = x - 1$ e $m = n - 1$, vem que

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\,(m-y)!} p^{y} (1-p)^{m-y} \end{aligned}$$

Como o último termo é a soma dos valores de uma distribuição binomial com parâmetros m e p, então, a sua soma é igual a 1. Assim, $E\left[X\right] = np$.

A variância pode ser determinada tendo em atenção que $E\left[X^2\right] = E\left[X\left(X-1\right)\right] + E\left[X\right]$. Assim,

$$\begin{aligned} E\left[X\left(X-1\right)\right] &= \sum_{x=0}^{n} x\left(x-1\right) C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} x\left(x-1\right) C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^{n} x\left(x-1\right) \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)!}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)!\,(n-x)!} p^2 p^{x-2} (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Considerando as seguinte variáveis auxiliares, $y = x - 2$ e $m = n - 2$, vem que

$$\begin{aligned} E\left[X\left(X-1\right)\right] &= n\left(n-1\right) p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\ &= n\left(n-1\right) p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\,(m-y)!} p^{y} (1-p)^{m-y} \end{aligned}$$

logo,

$$E\left[X\left(X-1\right)\right] = n\left(n-1\right) p^2.$$

O valor esperado de $E\left[X^2\right]$ vem dado por

$$E\left[X^2\right] = n\left(n-1\right)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$$

e a variância por

$$Var\left[X\right] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np\left(1-p\right)$$

$\square$

Teorema 7.2.2. *A função geradora de momentos da distribuição binomial é dada por*

$$M_X\left(t\right) = \left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^n$$

Demonstração. $M_X\left(t\right) = E\left[e^{tX}\right] = \sum\limits_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n p^x \left(1-p\right)^{n-x} = \sum\limits_{x=0}^{n} C_x^n \left(pe^t\right)^x \left(1-p\right)^{n-x}$ que pode ser expressa como uma expansão binomial,

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{x=0}^{n} C_x^n a^x b^{n-x}$$

em que $a = pe^t$ e $b = 1-p$, o que conduz a $M_X\left(t\right) = \left[pe^t + \left(1-p\right)\right]^n = \left[p\left(e^t-1\right)+1\right]^n$. $\square$

Exemplo 7.2.1: Distribuição binomial

Considere o lançamento de 4 moedas equilibradas. Liste o conjunto de acontecimentos possíveis e calcule as probabilidades de observar exatamente 1 cara e também a probabilidade de observar exatamente 2 caras. Determine a média e a variância da variável aleatória.
Solução:

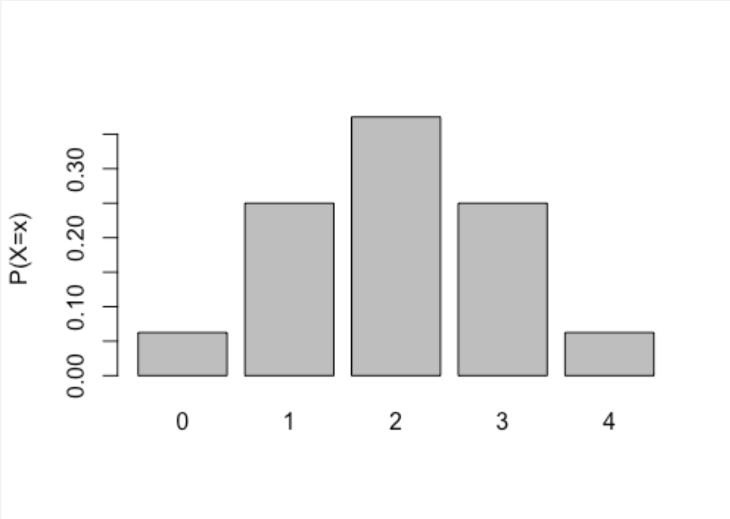
Evento	$X = x$	$P\left(X = x\right)$	Evento	$X = x$	$P\left(X = x\right)$
HHHH	4	p^4	THTH	2	$p^2(1-p)^2$
HHHT	3	$p^3\left(1-p\right)$	THHT	2	$p^2(1-p)^2$
HHTH	3	$p^3\left(1-p\right)$	TTHH	2	$p^2(1-p)^2$
HTHH	3	$p^3\left(1-p\right)$	HTTT	1	$p(1-p)^3$
THHH	3	$p^3\left(1-p\right)$	THTT	1	$p(1-p)^3$
HHTT	2	$p^2(1-p)^2$	TTHT	1	$p(1-p)^3$
HTHT	2	$p^2(1-p)^2$	TTTH	1	$p(1-p)^3$
HTTH	2	$p^2(1-p)^2$	TTTT	0	$(1-p)^4$

A probabilidade de obter uma cara é dada por, $P\left(X=1\right) = C_1^4 \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$, e a probabilidade de obter duas caras é, $P\left(X=2\right) = C_2^4 \frac{1}{2}^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

A média e a variância são,

$$\mu = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$
$$\sigma^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

A distribuição de probabilidade binomial para o lançamento de 4 moedas está representada na seguinte figura



7.2.4 Distribuição Hipergeométrica

Em amostragem com reposição, a probabilidade de um sucesso é sempre constante. Por exemplo, num conjunto de 20 peças nas quais 4 são defeituosas, a probabilidade de tirar duas peças com defeito depende se a amostragem é feita com ou sem reposição. No caso de amostragem com reposição, as tentativas são independentes e, em cada uma delas, a probabilidade de tirar uma peça com defeito é constante. Neste caso, as probabilidades do número de peças com defeito numa amostra podem ser calculadas através da distribuição binomial (a probabilidade de tirar duas peças com defeito seria $(0.2)^2$. Obviamente esta é uma situação pouco usual. Na amostragem sem reposição, as tentativas não são independentes e, por exemplo, tirar uma peça com defeito à segunda tentativa depende do que aconteceu na anterior. Assim, a probabilidade de tirar uma primeira peça com defeito é $P(D_1) = 4/20$ e a probabilidade de tirar uma segunda com defeito dado que a primeira é defeituosa é $P(D_2|D_1) = 3/19$. Logo, a probabilidade de tirar duas peças com defeito, em amostragem sem reposição, será $P(D_2 \cap D_1) = 12/380$. Na maioria das situações, a amostragem é feita sem reposição, sendo o cálculo das probabilidades realizado através da distribuição hipergeométrica.

Condições de uma variável hipergeométrica:

1. A experiência consiste em retirar aleatoriamente n elementos, sem reposição, de um conjunto de N elementos, r dos quais são Sucessos e $(N-r)$ são Falhas;
2. A variável aleatória hipergeométrica X é o número de sucessos na retirada de n elementos.

Definição 7.2.4: Distribuição hipergeométrica

A variável aleatória X segue uma distribuição hipergeométrica, referida como variável aleatória hipergeométrica, se e só se a sua função de distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x;n,N,k) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N} \quad x = 0,1,2,\ldots,n \quad x \leq k,\ n-x \leq N-k$$

A média e variância são:

$$\mu = \frac{nk}{N}$$
$$\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Teorema 7.2.3. *A média e a variância da distribuição hipergeométrica são*

$$\mu = \frac{nk}{N}$$
$$\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Demonstração. $E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$ mas, tendo em consideração cada termo, obtém-se para o primeiro termo do numerador,

$$xC_x^k = x\frac{k(k-1)!}{x(x-1)!(k-1-x+1)!} = kC_{x-1}^{k-1}.$$

Em relação à segunda parcela do numerador, tendo em atenção que $N-k = N-1-(k-1)$ e que $n-k = n-1-(k-1)$, vem que

$$C_{n-x}^{N-k} = C_{n-1-(x-1)}^{N-1-(k-1)} = \frac{(N-k)!}{(n-x)!(N-k-n+x)!},$$

e, em relação ao denominador,

$$C_n^N = \frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-1-n+1)!} = \frac{N}{n}C_{n-1}^{N-1}.$$

Donde se pode verificar que $\frac{C_{x-1}^{k-1}C_{n-1-(x-1)}^{N-1-(k-1)}}{C_{n-1}^{N-1}}$ é a distribuição de uma variável aleatória hipergeométrica $y = x-1$, onde y representa o número de sucessos em $n-1$ tentativas, com um total de $k-1$ sucessos em $N-1$ elementos. Assim, a soma será igual a 1 e, portanto, $E[X] = \frac{k}{N/n} = \frac{kn}{N}$.

Em relação à variância, tendo presente que

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=E\left[X^{2}\right]-E\left[X\right]=\sum_{x=0}^{n}x\left(x-1\right)\frac{C_{x}^{k}C_{n-x}^{N-k}}{C_{n}^{N}}.$$

Trabalhando cada termo de per si,

$$x\left(x-1\right)C_{x}^{k}=x\left(x-1\right)\frac{k\left(k-1\right)\left(k-2\right)!}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)!\left(k-2-x+2\right)!}=k\left(k-1\right)C_{x-2}^{k-2},$$

considerando que $N-k=N-2-(k-2)$ e que $n-k=n-2-(k-2)$, vem que

$$C_{n-x}^{N-k}=C_{n-2-(x-2)}^{N-2-(k-2)}=\frac{(N-k)!}{(n-x)!\left(N-k-n+x\right)!}$$

e, em relação ao denominador,

$$C_{n}^{N}=\frac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)!}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)!\left(N-2-n+2\right)!}=\frac{N\left(N-1\right)}{n\left(n-1\right)}C_{n-2}^{N-2}.$$

Donde se pode verificar que $\frac{C_{x-2}^{k-2}C_{n-2-(x-2)}^{N-2-(k-2)}}{C_{n-2}^{N-2}}$ é a distribuição de uma variável aleatória hipergeométrica $y=x-2$, onde y representa o número de sucessos em $n-2$ tentativas, com um total de $k-2$ sucessos em $N-2$ elementos. Assim, a soma será igual a 1 e, portanto,

$$E\left[X^{2}\right]-E\left[X\right]=\frac{k\left(k-1\right)n\left(n-1\right)}{N\left(N-1\right)}-\frac{kn}{N}=\frac{k\left(k-1\right)n\left(n-1\right)-kn\left(N-1\right)}{N\left(N-1\right)}.$$

A variância vem dada por,

$$Var\left[X\right]=E\left[X^{2}\right]-\left(E\left[X\right]\right)^{2}=\frac{k\left(k-1\right)n\left(n-1\right)-kn\left(N-1\right)}{N\left(N-1\right)}-\left(\frac{kn}{N}\right)^{2}$$

o que, após redução ao mesmo denominador comum,

$$\begin{aligned}Var\left[X\right]&=\frac{Nk\left(k-1\right)n\left(n-1\right)-Nkn\left(N-1\right)-k^{2}n^{2}\left(N-1\right)}{N^{2}\left(N-1\right)}\\&=\frac{N\left(k^{2}n^{2}-k^{2}n-kn^{2}+kn\right)+knN^{2}-knN-k^{2}n^{2}N+k^{2}n^{2}}{N^{2}\left(N-1\right)}\\&=\frac{-Nk^{2}n-Nkn^{2}+knN^{2}+k^{2}n^{2}}{N^{2}\left(N-1\right)}\\&=\frac{kn\left(N^{2}-kN-nN+nk\right)}{N^{2}\left(N-1\right)}\end{aligned}$$

donde,

$$Var\left[X\right]=\frac{kn\left(N-k\right)\left(N-n\right)}{N^{2}\left(N-1\right)}.$$

□

Há uma relação entre a distribuição binomial e a distribuição hipergeométrica. De facto, definindo $p=\frac{k}{N}$, verifica-se que a expressão para a média é igual a np, sendo que a variância pode ser escrita como

$$Var\left[X\right]=\frac{kn\left(N-k\right)\left(N-n\right)}{N^{2}\left(N-1\right)}=n\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1}=np\left(1-p\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

O termo $\frac{N-n}{N-1}$ é definido como o fator de correção para populações finitas. Esta designação torna-se mais clara tendo presente que a amostragem com reposição é equivalente a uma amostragem de uma população infinita, pois a proporção de sucessos permanece inalterada. Assim, em amostragem com reposição, a variável aleatória X segue uma distribuição binomial com variância $np\,(1-p)$; portanto, no caso de amostragem sem reposição, a variância binomial deve ser corrigida pelo fator de correção para populações finitas. De notar, contudo, que se n é pequeno quando comparado com N, o fator de correção é pequeno e os resultados pela distribuição binomial são semelhantes.

Exemplo 7.2.2: Distribuição hipergeométrica

Um lote de 20 circuitos integrados contém 4 com defeito. Pretende-se selecionar uma amostra de 4 circuitos para inspeção. Determine:

a) $P\,(X=1)$;

b) $P\,(X=4)$;

c) $P\,(X\leq 2)$;

d) a média e a variância de X.

Solução:

a) $P\,(X=1)=\frac{C_1^4 C_{4-1}^{20-4}}{C_4^{20}}=0.4623$

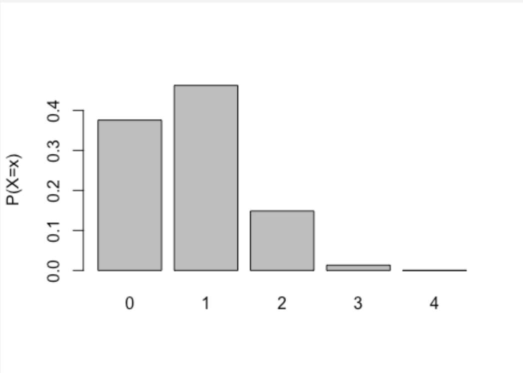
b) $P\,(X=4)=\frac{C_4^4 C_{4-4}^{20-4}}{C_4^{20}}=0.0002$

c) $P\,(X\leq 2)=P\,(X=0)+P\,(X=1)+P\,(X=2)=0.3756+0.4623+0.1486=0.9866$

d) $E\,[X]=\frac{(4)(4)}{20}=0.8$;

$Var\,[X]=\frac{(4)(4)(20-4)(20-4)}{(20)^2(20-1)}=0.5389$

A distribuição de probabilidade hipergeométrica para este exemplo é representada na seguinte figura



7.2.5 Distribuição de Poisson

A frequência relativa de eventos raros como o número de acidentes por dia num determinado cruzamento, o número de defeitos numa peça, o número de portadores de uma doença rara, pode ser descrita através da distribuição de Poisson. Esta distribuição pode ser usada como modelo para experiências em que se estudam eventos por intervalos de tempo, área ou volume.

Condições de uma variável de Poisson:

1. A experiência consiste no número de vezes que um evento particular ocorre durante um dado período de tempo, ou numa dada área ou volume (ou outra unidade de medida);

2. A probabilidade de que o evento ocorre numa dada unidade de tempo, área ou volume é a mesma para todas as unidades;

3. O número de eventos que ocorre numa unidade de tempo, área ou volume é independente do número que ocorre em outras;

4. A variável aleatória de Poisson X é o número de vezes que o evento ocorre, com a média do número de eventos em cada unidade designada por λ.

Definição 7.2.5: Distribuição de Poisson

A variável aleatória X segue uma distribuição de Poisson, referida como variável aleatória de Poisson, se e só se a sua função de distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

A média e a variância são:

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$

Teorema 7.2.4. *A média e a variância da distribuição de Poisson são*

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$

Demonstração.

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\lambda}{x(x-1)!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

Introduzindo a variável auxiliar $y = x - 1$, obtém-se

$$E[X] = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \lambda$$

A variância pode ser determinada tendo em atenção que

$$E\left[X^2\right] = E[X(X-1)] + E[X].$$

Assim,

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}\lambda^{2}}{x(x-1)(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!}.$$

Considerando a variável auxiliar $y = x - 2$, vem que

$$E[X(X-1)] = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \lambda^2,$$

e, assim,

$$E\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda,$$

logo,

$$Var[X] = \lambda.$$

□

Teorema 7.2.5. *A função geradora de momentos da distribuição de Poisson é dada por*

$$M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

Demonstração.

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(1 + e^t\lambda + \frac{\left(e^t\lambda\right)^2}{2!} + \frac{\left(e^t\lambda\right)^3}{3!} + \ldots\right) = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}$$

logo,

$$M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}.$$

□

Exemplo 7.2.3: Distribuição de Poisson

Suponha que o número de clientes que chegam a uma repartição de finanças segue uma distribuição de Poisson com média de 2.5 pessoas por minuto.

a) Encontre a média e o desvio padrão do número de pessoas que chegam à repartição.

b) Calcule a probabilidade de que num dado minuto cheguem exatamente 6 pessoas.

c) Calcule a probabilidade de que cheguem 2 ou mais pessoas num dado minuto.

Solução:

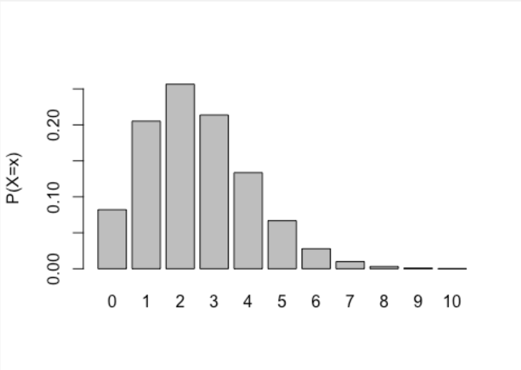
a) $\mu = 2.5$;

$\sigma = \sqrt{2.5} = 1.58$

b) $P(X = 6) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^6}{6!} = 0.0278$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.0821 - 0.2052 = 0.7127$

A distribuição de probabilidade de Poisson para $\lambda = 2.5$ está representada na seguinte figura



A distribuição de Poisson está relacionada com a distribuição binomial, podendo ser vista como um seu caso limite. Nesse sentido, pode ser usada para aproximar a distribuição binomial quando n é grande e np pequeno (regra empírica, $np \leq 5$). A aproximação é tanto melhor quanto p for mais pequeno $(1 - p \approx 1)$; neste caso, a média e a variância da distribuição binomial são aproximadamente iguais, isto é, $np \approx np(1 - p)$.

Exemplo 7.2.4: Aproximação da distribuição binomial pela Poisson

O serviço de chamadas de emergência 115, a partir dos registos, verificou que o número de chamadas de emergência falsas é de 2% (lamentavelmente a percentagem é bem mais elevada). Construa uma tabela com as probabilidades calculadas pela distribuição binomial e de Poisson para $X \leq 6$. Calcule a média e a variância da distribuição binomial.

Solução:

$X = x$	Binomial	Poisson
0	0.6035	0.6065
1	0.3079	0.3033
2	0.0754	0.0758
3	0.0118	0.0126
4	0.0013	0.0016
5	0.0001	0.0002
6	0.0000	0.0000

Como se pode verificar, a diferenças situam-se ao nível da terceira casa decimal: $\mu = 25\,(0.02) = 0.5$; $\sigma^2 = 25\,(0.02)\,(0.98) = 0.49$.

7.3 Distribuições de variáveis aleatórias contínuas

Apesar da utilidade das variáveis aleatórias discretas, há muitas variáveis aleatórias observadas na natureza que são contínuas, isto é, que podem assumir um número de infinito de valores entre dois limites e, por isso, não contável. Exemplos deste tipo de variáveis são os tempos de espera, a resistência de provetes de betão armado ou o peso de sacos de um processo de enchimento. Para uma variável contínua, a sua função densidade de probabilidade satisfaz as seguintes condições, apresentadas no Capítulo 5,

1. $f\,(x) \geq 0$ para $-\infty < x < \infty$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x)\,dx = 1$.

De notar que as funções acumuladas de variáveis aleatórias discretas são funções em degrau enquanto que no caso contínuo, as funções acumuladas são funções contínuas crescentes e monótonas. O cálculo de probabilidades no caso contínuo envolve a determinação da área abaixo das curvas de função densidade de probabilidade. Nesta secção serão apresentadas algumas funções que, apesar de não poderem ser expressas por integrais em forma fechada, serão aproximadas por métodos numéricos, sendo as áreas calculadas por recurso a tabelas apropriadas.

7.3.1 Distribuição Uniforme contínua

Uma variável aleatória contínua que pode tomar quaisquer valores entre dois limites é designada como uma variável uniforme contínua. A distribuição uniforme tem, por isso, uma forma rectangular. Esta distribuição descreve variáveis contínuas distribuídas uniformemente num intervalo, como por exemplo, as espessuras de placas de madeira produzidas numa máquina ou tempos de espera num dado intervalo.

Definição 7.3.1: Distribuição Uniforme

Uma variável tem uma função densidade de probabilidade uniforme, se e só se a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

A média e a variância são:

$$\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Teorema 7.3.1. *A média e a variância da distribuição uniforme são*

$$\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Demonstração.

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \left. \frac{x^2}{2} \right|_\alpha^\beta = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$E\left[X^2\right] = \int_\alpha^\beta x^2 \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \left. \frac{x^3}{3} \right|_\alpha^\beta = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}.$$

Logo, e tendo presente a expansão binomial para duas constantes

$$(b-a)^3 = \sum_{x=0}^{3} C_x^3 a^x b^{3-x} = b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3$$

pode escrever-se que

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{4\left(\beta^3-\alpha^3\right) - 3(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)}{12(\beta-\alpha)} \\ &= \frac{\beta^3 - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3}{12(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \end{aligned}$$

□

Teorema 7.3.2. *A função geradora de momentos da distribuição uniforme contínua é dada por*

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta-\alpha} \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t}$$

Demonstração.

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_\alpha^\beta e^{tx}\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{e^{t\beta}-e^{t\alpha}}{t}$$

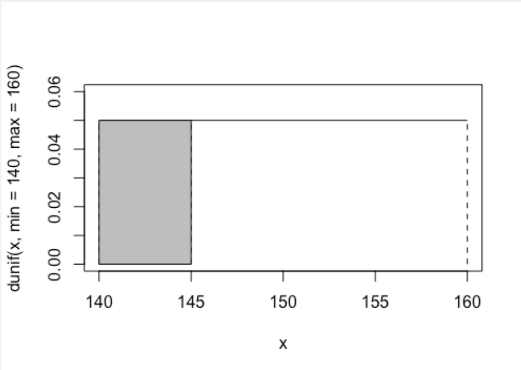
□

Exemplo 7.3.1: Distribuição Uniforme

Uma máquina produz pregos com uma distribuição uniforme do comprimento, que varia entre 140 e 160 mm. Supondo que os clientes não aceitam pregos com um comprimento inferior a 145 mm, determine qual a fração de pregos que serão rejeitados.

Solução:

A função densidade de probabilidade tem a forma $f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{160-140} = \frac{1}{20}$ A probabilidade pode ser calculada através da área do retângulo sombreado na figura, $P(X < 145) = \frac{1}{20}(145-140) = \frac{1}{4}$



7.3.2 Distribuição Exponencial

Tempos de espera, como por exemplo, o tempo até que uma máquina avarie, o tempo entre avarias, ou o tempo de espera num hospital ou numa repartição pública, são, em geral, caracterizados pela chamada distribuição Exponencial. A Figura 7.3 apresenta várias curvas da função densidade exponencial, para vários valores de λ. A forma das curvas depende unicamente do parâmetro λ.

Se o número de eventos, por exemplo, a chegada de doentes à urgência, ou o número de avarias de uma máquina, segue uma distribuição de Poisson, o tempo entre os eventos, segue uma distribuição Exponencial.

A distribuição de Poisson e a distribuição Exponencial estão relacionadas. Considere-se, por exemplo, o número de defeitos ao longo de um tecido. A distância entre os defeitos é também uma variável aleatória. Assim, pode-se afirmar que a distância para o primeiro defeito excede os 3 metros se e só se não há nenhum defeito nos 3 primeiros metros.

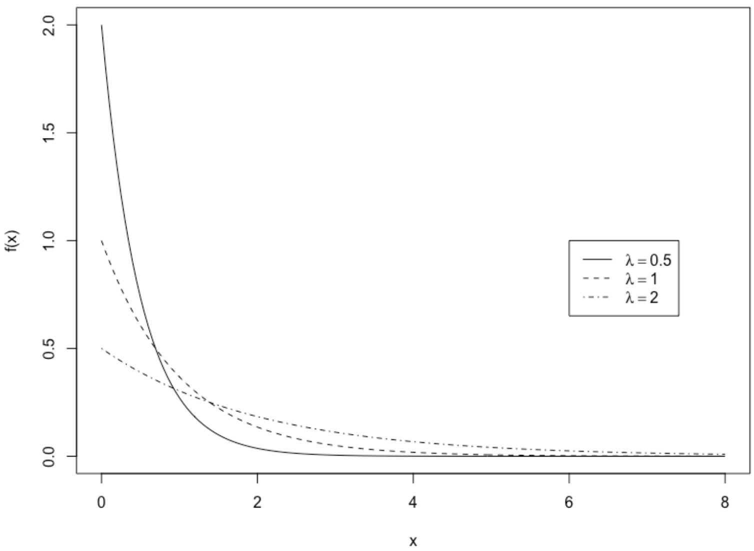


Figura 7.3: Distribuição Exponencial para diferentes valores do parâmetro λ.

Seja Y o número de defeitos em x metros, e a média é seja λ defeitos por metro; então, Y segue uma distribuição de Poisson com média λx. Assumindo que o tecido é mais comprido que x,

$$P\left(X > x\right) = P\left(Y = 0\right) = \frac{e^{-\lambda x}\left(\lambda x\right)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

Contudo, a distribuição acumulada será dada por

$$F\left(x\right) = P\left(X \leq x\right) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0.$$

A função densidade de probabilidade pode ser obtida por diferenciação, ou seja,

$$f\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

A derivação depende unicamente da hipótese de que os defeitos seguem um processo de Poisson. Mais ainda, o ponto inicial de medida de X não tem relevância porque a probabilidade do número de defeitos num intervalo de um processo de Poisson depende só do comprimento do intervalo e não da sua localização. Assim, a variável aleatória X que iguala a distância entre contagens sucessivas de um processo de Poisson com média $\lambda > 0$, segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, sendo a função densidade de probabilidade dada por

$$f\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0.$$

Definição 7.3.2: Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória X segue uma distribuição exponencial, se e só se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

com $\theta > 0$.

A média e a variância são

$$\mu = \theta$$

$$\sigma^2 = \theta^2$$

Teorema 7.3.3. *A média e a variância da distribuição exponencial são*

$$\mu = \theta$$

$$\sigma^2 = \theta^2$$

Demonstração.

$$E[X] = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \left[-x\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty + \theta \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right] = \theta$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \left[-x^2\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty + 2\theta \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right] = 2\theta^2$$

$$Var[X] = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

□

Teorema 7.3.4. *A função geradora de momentos da distribuição exponencial é dada por*

$$M_X(t) = \frac{1/\theta}{1/\theta - t}$$

Demonstração.

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\theta} - t\right)} dx = \frac{1}{\theta} \left. \frac{-e^{-x\left(\frac{1}{\theta} - t\right)}}{\frac{1}{\theta} - t} \right|_0^\infty = \frac{1/\theta}{1/\theta - t}$$

□

Exemplo 7.3.2: Distribuição Exponencial

O tempo de atendimento num posto de correios segue uma distribuição exponencial com média igual a 2 minutos. Determine qual a fração de pessoas que terão atendimentos superiores a 0.5 minutos?

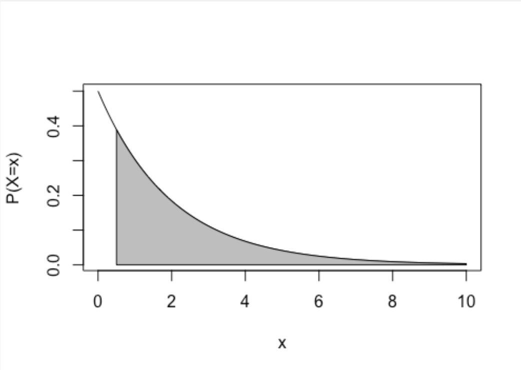
Solução:

A função densidade exponencial tem a seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} = \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

A probabilidade pretendida é dada pela a área sombreada na figura, ou seja,

$$\begin{aligned} P(X > 0.5) &= 1 - P(X < 0.5) \\ &= 1 - \int_0^{0.5} \frac{1}{2} e^{-x/2}\, dx = 1 - \left(-e^{-x/2}\right)\Big|_0^{0.5} \\ &= 1 - \left(-e^{-0.5/2} + 1\right) = e^{-1/4} = 0.7788 \end{aligned}$$



7.3.3 Distribuição Normal

Muitas variáveis seguem uma distribuição aproximadamente Normal, como sejam, pesos, estaturas, comprimentos. A Figura 7.4 apresenta a distribuição dos pesos, em gramas, de recém-nascidos. O histograma aproxima-se da curva Normal, sendo que apresenta uma cauda pronunciada à esquerda que corresponde a bebés prematuros.

A Figura 7.5 apresenta o histograma de uma prova de marcha num teste de capacidade respiratória. Também, neste caso, o histograma aproxima-se da curva Normal.

A função de densidade normal foi proposta por Gauss no contexto da distribuição dos erros. Muitas variáveis aleatórias possuem uma distribuição de frequências em forma de sino, como mostra a Figura 7.6. O valor da média, $E[X] = \mu$, determina o centro da distribuição e o valor da variância $Var[X] = \sigma^2$, o achatamento e comprimento da curva. A Figura 7.6 apresenta várias

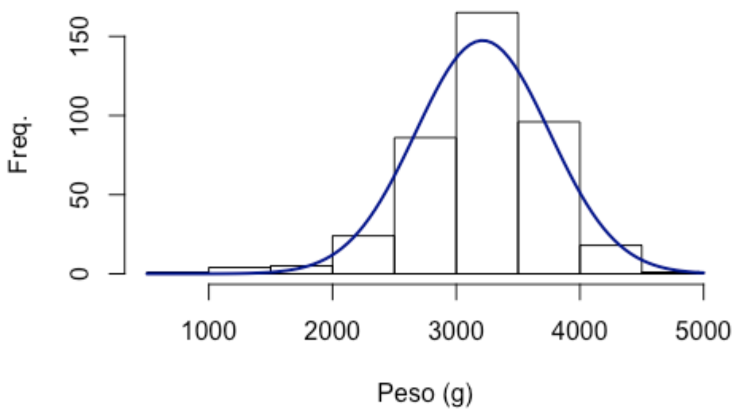


Figura 7.4: Histograma e curva Normal para a distribuição do peso de bebés prematuros.

densidades normais com diferentes valores dos parâmetros μ e σ^2.

Definição 7.3.3: Distribuição Normal

Uma variável aleatória segue uma distribuição normal se e só se a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty \quad \sigma > 0$$

A média e a variância são

$$E[X] = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2$$

A área debaixo da curva normal é igual a 1. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Freund (1992).

Teorema 7.3.5. *A média e a variância da distribuição Normal são*

$$E[X] = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2$$

Teorema 7.3.6. *A função geradora de momentos da distribuição normal é dada por*

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

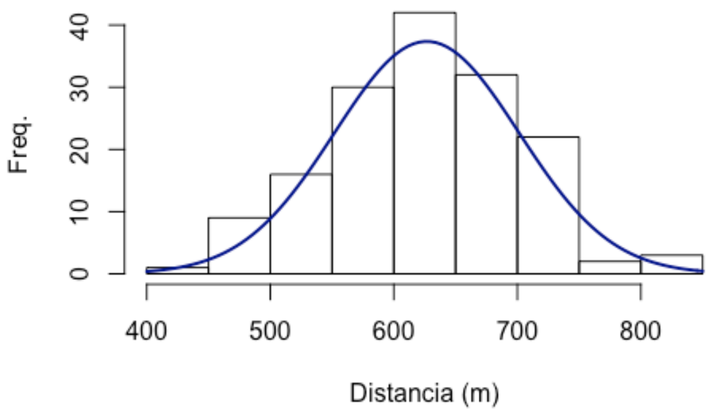


Figura 7.5: Histograma e curva Normal para a distribuição da capacidade respiratória de uma prova de marcha.

Demonstração.

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2xt\sigma^2+(x-\mu)^2\right]} dx.$$

Contudo, dado que

$$-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2 = \left[x - \left(\mu + t\sigma^2\right)\right]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

o integral toma a forma

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\left(\mu+t\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2} dx \right\}.$$

Como o termo entre chavetas corresponde a uma função densidade normal com parâmetros $\mu + t\sigma^2$ e σ, este integral é igual a um e, assim, a função geradora de momentos é igual a

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

A primeira e a segunda derivadas da função geradora de momentos são,

$$M'_X(t) = \left(\mu + \sigma^2 t\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} = \left(\mu + \sigma^2 t\right) M_X(t)$$

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= \sigma^2 M_X(t) + \left(\mu + \sigma^2 t\right)\left(\mu + \sigma^2 t\right) M_X(t) \\ &= \left[\sigma^2 + \left(\mu + \sigma^2 t\right)^2\right] M_X(t) \end{aligned}$$

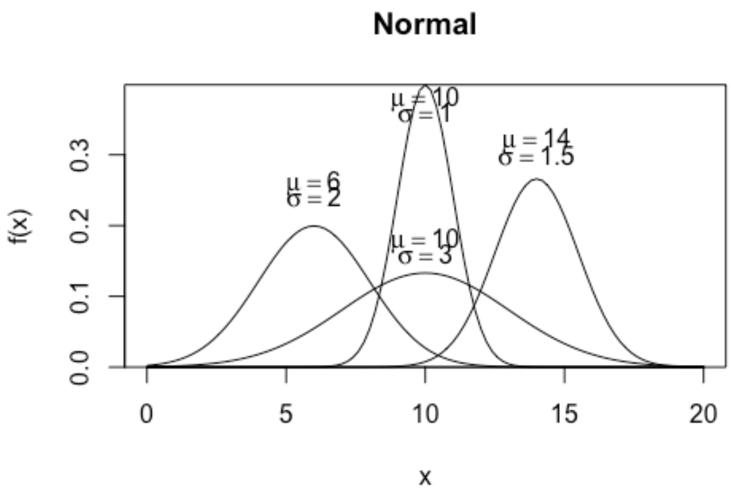


Figura 7.6: Função densidade de probabilidade da distribuição Normal.

No ponto $t = 0$, obtém-se que

$$E[X] = \mu$$
$$E\left[X^2\right] = \mu^2 + \sigma^2$$

e, assim, $Var[X] = \sigma^2$ □

Definição 7.3.4: Distribuição Normal Padrão

A distribuição normal com $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$ é designada como variável normal padrão.

O cálculo das áreas debaixo da curva normal padrão faz-se por recurso à tabela de probabilidades acumuladas.

Exemplo 7.3.3: Distribuição Normal Padrão

Suponha que Z é uma variável normal padrão. Usando a tabela das probabilidades acumuladas determine:

a) $P(Z < 1.5)$;

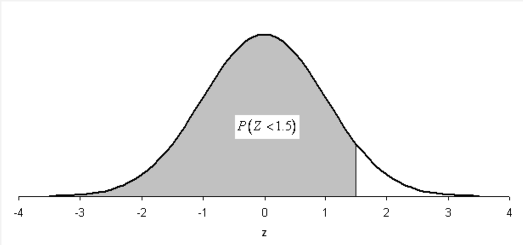
b) $P(Z > 0.87)$;

c) $P(Z > -1.5)$;

d) $P\left(-2.15 < Z < 0.87\right)$

Solução:

a) A figura apresenta a curva normal com a área sombreada correspondente.

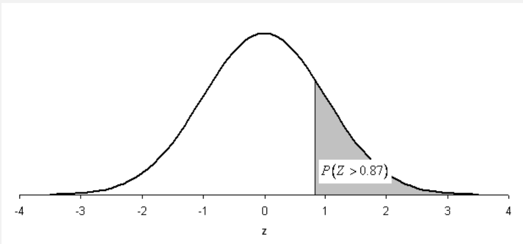


A tabela permite determinar a área correspondente

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382

Assim, $P\left(Z < 1.5\right) = 0.9332$

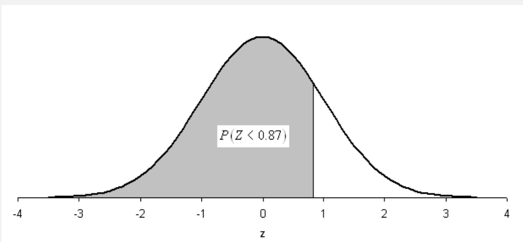
b) A figura apresenta a curva normal com a área sombreada correspondente.



A tabela permite determinar a área correspondente

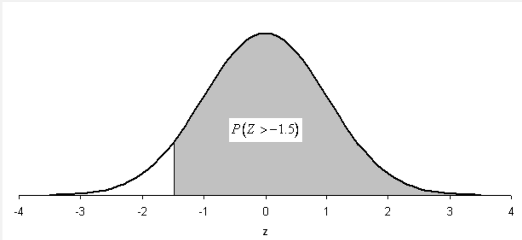
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133

$P\left(Z > 0.87\right) = 1 - P\left(Z < 0.87\right)$ ou seja, a área à esquerda, representada na figura



Assim, $P(Z > 0.87) = 1 - P(Z < 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$

c) A figura apresenta a curva normal com a área sombreada correspondente.

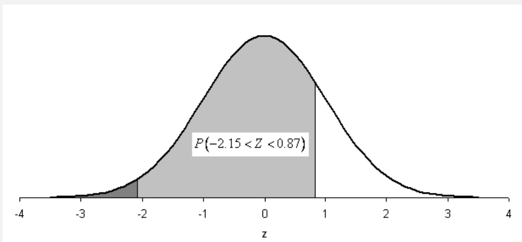


A tabela permite determinar a área à esquerda,

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840

e, portanto, $P(Z > -1.5) = 1 - P(Z < -1.5) = P(Z < 1.5) = 0.9332$

d) A área a cinzento claro na figura representa a área debaixo da curva normal correspondente à probabilidade pedida.



De notar, contudo, que a área de interesse pode ser vista como uma diferença entre a soma das áreas a cinzento claro e escuro, menos a área a cinzento escuro. Isto é, $P(-2.15 < Z < 0.87) = P(Z < 0.87) - P(Z < -2.15)$ Por recurso à tabela de probabilidades acumuladas

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

$$P(-2.15 < Z < 0.87) = P(Z < 0.87) - P(Z < -2.15) = 0.8078 - 0.0158 = 0.7920$$

O exemplo anterior mostra como calcular probabilidades para uma variável normal padrão. Para variáveis normais, para quaisquer valores μ e σ é necessário uma transformação de variável que permite usar a tabela de probabilidades acumuladas da distribuição Normal padrão.

Definição 7.3.5: Padronização

Se X é uma variável normal com média $E[X] = \mu$ e variância $Var[X] = \sigma^2$, a variável $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ é uma variável normal com $E[Z] = 0$ e variância $Var[Z] = 1$, ou seja, Z é variável normal padrão.

Exemplo 7.3.4: Padronização

Suponha que as alturas dos jovens portugueses, com 20 anos de idade, seguem uma distribuição normal média de 170 cm e desvio padrão de 10 cm.

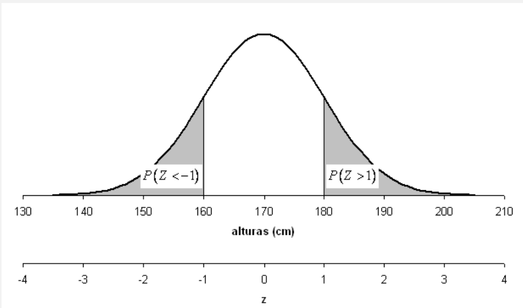
a) Determine a percentagem de jovens com alturas inferiores a 160 cm.

b) Determine a percentagem de jovens com alturas compreendidas entre 150 e 185 cm.

Solução:

a) A percentagem de jovens pode ser determinada através de $P(X < 160) = P\left(Z < \frac{160-170}{10}\right) = P(Z < -1) = 0.1587$ ou seja, 15.87%.

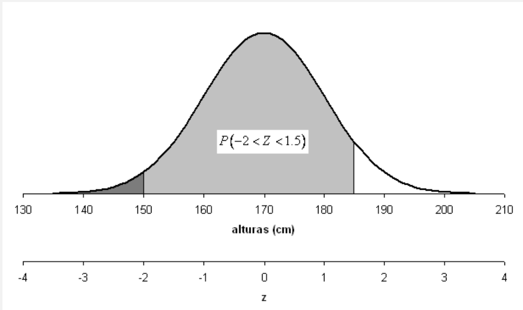
De notar que a percentagem de jovens com mais de 180 cm é exatamente a mesma, o que pode ser visto por simetria na figura. $P(X > 180) = P\left(Z > \frac{180-170}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$



b) A percentagem pode ser expressa como

$$P(150 < X < 185) = P\left(\frac{150-170}{10} < Z < \frac{185-170}{10}\right) = P(-2 < Z < 1.5)$$
$$= P(Z < 1.5) - P(Z < -2) = 0.9332 - 0.0228 = 0.9104$$

ou seja, 91.04%.



Importa referir que, para uma qualquer variável Normal, se verificam as seguintes relações, medidas em termos de desvios relativamente à média da distribuição:

$$P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=P\left(-1<Z<1\right)=0.6827$$

$$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=P\left(-2<Z<2\right)=0.9545$$

$$P\left(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\right)=P\left(-3<Z<3\right)=0.9973$$

A Figura 7.7 ilustra estas probabilidades para uma distribuição Normal.

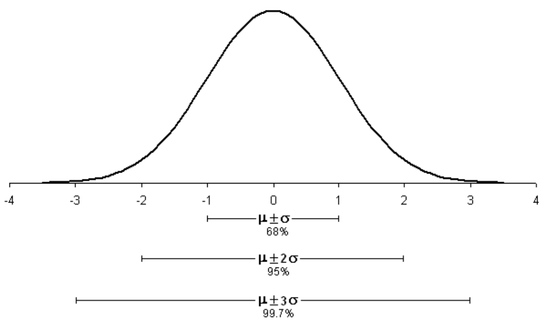
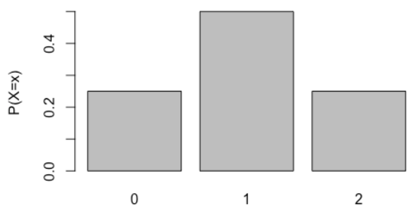


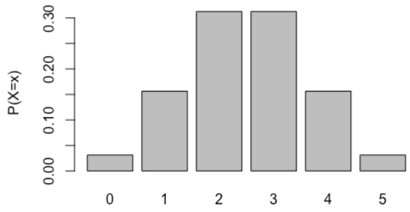
Figura 7.7: Probabilidade para casos particulares da distribuição normal.

7.3.4 Aproximação Normal à distribuição Binomial

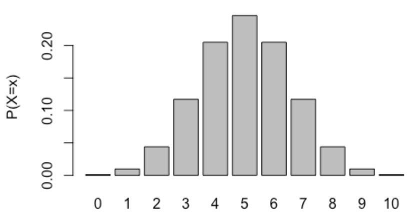
A distribuição normal pode ser usada para aproximar o cálculo de probabilidades binomiais. De facto, como mostram os gráficos da Figura 7.8, a distribuição binomial com p igual a $\frac{1}{2}$ e n igual a 2, 5, 10 e 20 aproxima-se da distribuição normal à medida que n aumenta.



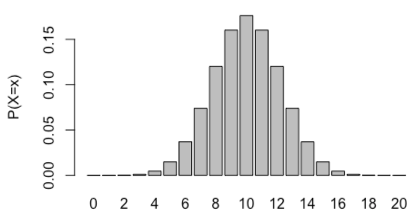
(a) $n = 2$.



(b) $n = 5$.



(c) $n = 10$.



(d) $n = 20$.

Figura 7.8: Distribuições binomiais com $p = 1/2$.

Definição 7.3.6: Aproximação Normal à distribuição Binomial

Se X é uma variável aleatória seguindo uma distribuição binomial com parâmetros n e p, então

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$$

é aproximadamente uma variável normal padrão. Tendo em atenção que para uma distribuição binomial $E\,[X] = np$ e a variância $Var\,[X] = np\,(1-p)$, Z corresponde à padronização da variável X. Esta aproximação melhora à medida que $n \to \infty$, embora seja usada para valores moderados de n, observando, como regra empírica, que $np > 5$ e $n\,(1-p) > 5$.

Como a variável aleatória binomial é discreta, a aproximação pode ser melhorada através de um fator de correção de 0.5 adicionado ou subtraído ao valor da variável. Esta correção é referida como correção da continuidade.

Exemplo 7.3.5: Aproximação Normal à distribuição Binomial

Considere que X é uma variável aleatória binomial com $n = 50$ e $p = 0.2$. Calcule as seguintes probabilidades através da aproximação normal, sem e com correção, para a continuidade, e compare-as com os valores exatos calculados a partir da distribuição binomial.

a) $P(X \leq 4)$; $P(X \leq 4.5)$

b) $P(X \geq 4)$; $P(X \geq 3.5)$

c) $P(2 \leq X \leq 5)$; $P(1.5 \leq X \leq 10.5)$

d) $P(X > 8)$; $P(X > 8.5)$

e) $P(X = 10)$; $P(9.5 \leq X \leq 10.5)$

Solução:

A média e a variância da distribuição binomial são:

$$\mu = np = 50\,(0.2) = 10$$
$$\sigma^2 = np\,(1-p) = 50\,(0.2)\,(0.8) = 8$$

a)

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \leq -2.12) = 0.0170$$
$$P(X \leq 4.5) = P\left(Z \leq \frac{4.5-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \leq -1.94) = 0.0262$$
$$P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = 0.0185$$

b)

$$P(X \geq 4) = P\left(Z \geq \frac{4-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq -2.12) = 0.9830$$
$$P(X \geq 3.5) = P\left(Z \geq \frac{3.5-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq -2.30) = 0.9893$$
$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{50} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = 0.9943$$

c)

$$P(4 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{4-10}{\sqrt{8}} \leq X \leq \frac{10-10}{\sqrt{8}}\right) = P(-2.12 \leq Z \leq 0) = 0.4830$$
$$P(3.5 \leq X \leq 10.5) = P\left(\frac{3.5-10}{\sqrt{8}} \leq X \leq \frac{10.5-10}{\sqrt{8}}\right) = P(-2.30 \leq Z \leq 0.18) = 0.5607$$
$$P(4 \leq X \leq 10) = \sum_{x=4}^{10} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = 0.5779$$

d)

$$P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z > -0.71) = 0.7611$$

$$P(X > 8.5) = P\left(Z > \frac{8.5-10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z > -0.53) = 0.7019$$

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=9}^{50} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = 0.6927$$

e)

$$P(X = 10) = C_{10}^{50} p^{10} (1-p)^{50-10} = 0.1398$$

$$P(9.5 \leq X \leq 10.5) = P\left(\frac{9.5-10}{\sqrt{8}} \leq X \leq \frac{10.5-10}{\sqrt{8}}\right) = P(-0.18 \leq Z \leq 0.18) = 0.1428$$

7.4 Exercícios

1. A variável aleatória X segue uma distribuição binomial com $n = 10$ e $p = 0.4$. Determine as seguintes probabilidades:

   a) $P(X = 5)$; b) $P(X \leq 2)$; c) $P(X \geq 9)$; d) $P(3 \leq X < 5)$.

2. A variável aleatória X segue uma distribuição binomial com $n = 4$ e $p = 0.17$. Determine as seguintes probabilidades:

   a) $P(X = 3)$; b) $P(X \leq 2)$; c) $P(X \geq 1)$; d) $P(1 \leq X < 4)$.

3. Na população geral, 40% das pessoas têm sangue do tipo A. Numa amostra aleatória de 15 pessoas, qual a probabilidade de encontrar:

   a) Exatamente 0 pessoas com sangue do tipo A? b) Exatamente 1 pessoas com sangue do tipo A? c) Menos de 2 pessoas com sangue do tipo A? d) 3 ou mais pessoas com sangue do tipo A?

4. Um aluno de Estatística I resolve fazer o teste de resposta múltipla completamente ao acaso. Cada pergunta tem 5 alternativas de resposta sendo que só 1 está correta. O teste tem 20 perguntas.

   a) Qual a probabilidade de falhar todas as perguntas? b) Qual a probabilidade de acertar todas as perguntas? c) Qual a probabilidade de acertar exatamente 10? d) Qual a probabilidade de acertar em 10 ou mais perguntas?

5. Um antibiótico tem uma probabilidade de cura de 70% para o tratamento de uma infeção pulmonar. Num determinado hospital há 20 doentes com infeção pulmonar. Qual a probabilidade de obter

   a) no máximo 15 curas? b) 12 ou mais curas? c) exatamente 14 curas? d) entre 12 e 16 curas, inclusive?

6. Considere o lançamento de um dado.

   a) Em 3 lançamentos, qual a probabilidade de obter exatamente um 6? b) Em 3 lançamentos, qual a probabilidade de obter pelo menos um 6? c) Quantas vezes deve o dado ser lançado para que a probabilidade de pelo menos um 6 seja pelo menos 0.9?

7. Um plano de aceitação específica que uma amostra de n itens é rejeitada se contém mais do que a itens defeituosos. Suponha que um produtor de computadores compra componentes eletrónicos em grandes lotes dum fornecedor, que refere que 5% dos itens que fornece são defeituosos. Se o produtor usa n = 100, a = 6 como plano de aceitação.

a) Qual a probabilidade de um lote ser aceite se a proporção de defeituosos é 5%? b) Qual a probabilidade de um lote ser rejeitado se a proporção de defeituosos do fornecedor subir para 10%?

8. A experiência mostra que um produtor de produtos informáticos produz 1 disquete defeituosa em 100.

   a) Das três próximas disquetes, qual a probabilidade de que todas as 3 sejam não defeituosas? b) Em geral, se k disquetes são produzidas, qual a probabilidade de que pelo menos uma das k seja defeituosa?

9. A mudança de valores entre os trabalhadores sugere que muitos jovens não possuem a mesma ética que os seus pais. Num estudo recente sobre trabalhadores com menos de 40 anos de idade, 60% disseram que favorecem uma redução da carga média semanal de trabalho para 36 horas (das atuais 40 horas em média). Suponha que um grupo de n = 20 trabalhadores com menos de 40 anos de idade são aleatoriamente escolhidos para uma entrevista. Encontre as seguintes probabilidades:

   a) uma maioria favorece a redução da carga média semanal de trabalho para 36 horas;
   b) pelo menos 15 favorecem uma redução para 36 horas; menos 10 mas não mais de 15 favorecem a redução para a semana de 36 horas.

10. Um teste de escolha múltipla inclui 20 questões, cada com quatro alternativas. Um estudante que tente adivinhar tem uma probabilidade de 1/4 de acertar em cada questão. Seja U o resultado do estudante quando cada questão vale 5 pontos. Encontre:

    a) o valor médio das respostas certas e o resultado esperado;
    b) o desvio padrão de U;
    c) a probabilidade de o estudante ter um resultado de exatamente 50 pontos;
    d) a probabilidade de que o estudante obtenha no máximo 20 pontos.

11. Considere a distribuição binomial

$$f\left(x;n,p\right)=C_x^n p^x\left(1-p\right)^{n-x} \qquad x=0,1,\ldots,n$$

    a) Determine a função geradora de momentos.
    b) Determine a média e a variância da distribuição.

    Nota: expansão binomial $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$

12. Suponha que X segue uma distribuição hipergeométrica com $N=80$, $n=6$ e $k=20$. Determine:

a) $P(X = 1)$;

b) $P(X = 3)$

c) $P(X = 4)$

d) a média e a variância de X.

13. Pretende-se selecionar 20 peças sem reposição da produção diária de 140 peças de uma máquina.

    a) Supondo que existem 20 peças com defeito, qual a probabilidade de que pelo menos uma peça na amostra de 20 seja defeituosa?

    b) Supondo que existem 5 peças com defeito, qual a probabilidade de que pelo menos uma peça na amostra de 20 seja defeituosa?

14. Recalcule as probabilidades do problema anterior usando a distribuição binomial. Qual o fator de correção para populações finitas?

15. A produção diária de duas máquinas (1 e 2) foi, respetivamente, de 200 e 300 peças. Pretende-se selecionar uma amostra de 4 peças.

    (a) Qual a probabilidade de que todas as peças sejam da máquina 1?

    (b) Qual a probabilidade de que pelo menos 1 peça seja da máquina 1?

16. A variável aleatória segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 1.5$. Determine as seguintes probabilidades:

    a) $P(X = 5)$;

    b) $P(X \leq 2)$;

    c) $P(X \geq 6)$;

    d) $P(3 \leq X < 5)$.

17. A variável aleatória segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 1.71$. Determine as seguintes probabilidades:

    a) $P(X = 3)$;

    b) $P(X \leq 2)$;

    c) $P(X \geq 1)$;

    d) $P(1 \leq X < 4)$.

18. Uma companhia de bebidas sabe que o número de avarias numa máquina de enchimento ocorre à média de 1.5 por turno de oito horas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente duas avarias ocorram no turno da meia-noite?

b) Qual a probabilidade de que menos de duas avarias ocorram no turno da tarde?

c) Qual a probabilidade de que não haja avarias durante três turnos consecutivos, assumindo que a máquina opera de forma independente durante os turnos?

19. Suponha que o número médio de carros que chegam a um cruzamento num determinado período de tempo é de um carro por minuto.

    a) Qual a probabilidade de que num dado minuto, o número de chegadas seja igual ou superior a três?

    b) Pode assegurar que o número de chegadas raramente excederá três por minuto?

20. As chamadas telefónicas chegam a uma determinada central a uma média de 8 por minuto. Encontre a probabilidade de

    a) pelo menos 8 chamadas num minuto;

    b) nenhuma chamada num período de 15 segundos;

    c) não mais que 10 chamadas num período de 30 segundos;

    d) pelo menos 2 chamadas num período de 10 segundos.

21. Um tear de produção de tecido para lençóis produz, em média, um defeito por cada 300 m. Assumindo que o número de defeitos por unidade de comprimento segue uma distribuição de Poisson, calcule a probabilidade:

    a) de um rolo com 780m tenha no máximo 3 defeitos?

    b) de um rolo com 200 m não tenha defeitos?

22. Numa grande empresa de transportes, o número de veículos que se avariam em cada mês segue uma distribuição de Poisson com média 4.

    a) Qual a probabilidade de que num dado mês avariem 5 ou mais veículos?

    b) Qual a capacidade mínima que a oficina de reparação deve ter por forma a que a probabilidade de não haver veículos aguardando reparação seja de pelo menos 0.9.

23. O número de doentes que chega a uma urgência de um pequeno hospital é, em média, de 8 por hora.

    a) Qual a probabilidade de haver uma hora sem que dê entrada um doente?

    b) Qual a probabilidade de, numa dada hora, entrarem 4 ou mais doentes?

    c) Qual a probabilidade de numa dada meia hora chegarem mais de 2 doentes?

24. Considere a distribuição de Poisson

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, \ldots$$

a) Determine a função geradora de momentos.

b) Determine a média e a variância da distribuição.

25. Calcule as probabilidades binomiais com $n = 20$ e $p = 0.01$ e compare-as com os resultados da aproximação com a distribuição de Poisson

a) $P(X = 0)$;

b) $P(X = 1)$;

c) $P(X = 2)$;

d) $P(X = 3)$;

26. Verifique para cada caso se os valores e satisfazem as condições para uma boa aproximação quando se pretende usar a distribuição de Poisson para aproximar as probabilidades binomiais. Use a folha de cálculo EXCEL.

a) $n = 125$ e $P = 0.10$

b) $n = 25$ e $P = 0.04$

c) $n = 120$ e $P = 0.05$

d) $n = 40$ e $P = 0.06$

27. Um fabricante de um aparelho elétrico espera que 2% dos aparelhos falhem durante a garantia. Uma amostra de aleatória de 500 aparelhos é selecionada, sendo os aparelhos testados, num laboratório que simula as condições de utilização.

a) Qual a probabilidade de que nenhum falhe durante a garantia?

b) Qual o valor esperado de falhas durante a garantia?

c) Qual a probabilidade de que mais do que dois aparelhos falhem durante a garantia?

28. Uma determinada companhia produz componentes elétricos dos quais 0.5% são defeituosos. Encontre a probabilidade de que num lote de 300,

a) nenhum é defeituoso.

b) exatamente um é defeituoso.

c) pelo menos três são defeituosos.

29. Sabe-se que a percentagem de chamadas falsas num serviço de auxílio é de 1.4%. Calcule a probabilidade de que das 150 chamadas recebidas, 2 sejam falsas.

30. Uma companhia de seguros sabe que numa dada cidade, 4% dos condutores segurados estarão envolvidos num acidente num dado ano. Qual a probabilidade de que entre 150 condutores segurados, selecionados aleatoriamente,

    a) só 6 estejam envolvidos num acidente num dado ano;

    b) no máximo 4 estejam envolvidos num acidente num dado ano.

31. Uma empresa alimentar possui 20 máquinas de enchimento em operação contínua. Num dado dia, a probabilidade de uma máquina avariar é de 0.05. Qual a probabilidade de num dado dia avariarem 2 máquinas?

    Use a distribuição binomial para o cálculo das probabilidades exatas e também a aproximação de Poisson.

32. Suponha que X segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 2$. Calcule:

    a) $P(X \leq 0)$;

    b) $P(X \geq 2)$;

    c) $P(X \leq 1)$;

    d) $P(1 < X < 2)$;

    e) O valor de x tal que $P(X < x) = 0.05$.

33. Suponha que X segue uma distribuição exponencial com média igual a 20. Calcule:

    a) $P(X > 20)$;

    b) $P(X \geq 40)$;

    c) $P(X > 60)$;

    d) O valor de x tal que $P(X < x) = 0.95$.

34. O tempo entre chamadas para um serviço de reparações domésticas segue uma distribuição exponencial com um tempo médio entre chamadas de 15 minutos.

    a) Qual a probabilidade de que não haja chamadas num intervalo de 30 minutos?

    b) Qual a probabilidade de que pelo menos uma chamada chegue num intervalo de 10 minutos?

    c) Qual a probabilidade de que a primeira chamada chegue entre os 5 e os 10 minutos após a abertura?

d) Determine o intervalo de tempo para que a probabilidade de pelo menos uma chamada seja de 0.90.

35. O tempo de vida de uma bateria de automóvel segue uma distribuição exponencial com média de 6 anos. Suponha que comprou um automóvel com 6 anos e pensa conserva-lo nos próximos 6 anos.

    a) Qual a probabilidade de que a bateria falhe durante a sua posse do automóvel?

    b) Se a bateria falha depois de possuir o carros por 3 anos, sendo substituída, qual é o tempo médio até uma nova falha?

36. Suponha que o tempo entre mensagens que chegam ao seu computador segue uma distribuição exponencial com média de 2 horas.

    a) Qual a probabilidade de que não receba nenhuma mensagem nas próximas duas horas?

    b) Se não teve uma mensagem nas últimas 4 horas, qual a probabilidade de que não receba uma mensagem nas próximas duas horas?

    c) Qual é o tempo esperado entre a quinta e a sexta mensagem?

37. O tempo entre chamadas para um serviço de informações segue uma distribuição exponencial com média de 10 minutos.

    a) Qual a probabilidade de que mais do que 3 chamadas em meia hora?

    b) Qual a probabilidade de que não haja chamadas num período de meia hora?

    c) Determine tal que a probabilidade de que não haja chamadas dentro das horas seja 0.01.

38. Seja X uma variável aleatória exponencial. Determine as expressões para a:

    a) média;

    b) variância;

    c) função geradora de momentos.

39. Dado que X é normalmente distribuído com média $\mu = 20$ e variância $\sigma^2 = 9$, encontre a probabilidade de

    a) $P(X > 23)$;

    b) $P(17 < X < 23)$;

    c) $P(X < 14)$;

    d) $P(14 < X < 26)$.

40. Encontre o valor Z_0 da variável normal padrão tal que:

 a) $P(Z > Z_0) = 0.05$;

 b) $P(Z > Z_0) = 0.80$;

 c) $P(Z < Z_0) = 0.0013$;

 d) $P(Z < Z_0) = 0.5596$.

41. Dado que X é normalmente distribuído com média $\mu = 200$ e variância $\sigma^2 = 100$, encontre o valor de X_0 tal que:

 a) $P(X \leq X_0) = 0.75$;

 b) $P(X \leq X_0) = 0.20$;

 c) $P(X > X_0) = 0.66$;

 d) $P(X \geq X_0) = 0.05$.

42. Seja X o peso de sacos de batatas. Sendo X normal com média 8 Kg e desvio padrão 0.25 Kg, encontre

 a) $P(X > 7.5)$;

 b) $P(7.5 < X < 8.5)$;

 c) o valor de c tal que 90% dos sacos pesam entre $8 - c$ e $8 + c$kg.

43. Assumindo que o peso duma população é uma variável normalmente distribuída, com $\mu = 74.5$Kg e $\sigma = 5.1$ Kg, calcule:

 a) a probabilidade duma pessoa pesar entre 72.5 e 81 Kg;

 b) menos de 65 Kg;

 c) mais do que 84.5 Kg.

44. O tempo de vida duma máquina de lavar é aproximadamente normal, com média 3.1 anos e desvio padrão 1.2 anos. Se este tipo de máquina é garantido por 1 ano, qual a fração das vendas originais que requererá substituição?

45. Os coeficientes de inteligência dos recrutas num dado ano são normalmente distribuídos com $\mu = 110$ e $\sigma = 8$. O exército quer dar um treino especial a 10% dos recrutas com coeficiente de inteligência mais elevado. Qual é o valor do coeficiente de inteligência mais baixo aceitável para o treino especial?

46. Depois do início dum programa de conservação de energia, a companhia de eletricidade notou que as poupanças de energia nas residências eram em média 10.4 KWh por mês com um desvio padrão de 7.8 KWh. Suponha que foi selecionada a conta de uma residência aleatoriamente. Encontre a probabilidade de que

    a) as poupanças excedam 5 KWh;
    b) o consumidor realizou poupanças de energia;
    c) a poupança esteja entre 5 e 15 KWh;
    d) o consumidor consumiu pelo menos mais 5 KWh do que o usual.

47. A procura diária de interruptores elétricos segue uma distribuição normal com média 200 e desvio padrão 50.

    a) Qual a percentagem dos dias em que a procura será menor que 90 interruptores?
    b) Qual a percentagem dos dias em que a procura se situará entre 225 e 275 interruptores?
    c) Baseada em considerações de custo, a companhia determinou que a melhor estratégia é produzir um número suficiente de interruptores para garantir a procura 94% dos dias. Quantos interruptores deve a companhia produzir por dia?

48. Suponha que os pedidos de empréstimos, para compra de carro, de um banco têm uma média de 22500 euros com um desvio padrão de 2500 euros.

    a) Qual a proporção de pedidos de empréstimos abaixo de 20000 euros?
    b) Qual a proporção de pedidos de empréstimos acima dos 26000 euros?
    c) Qual a proporção de pedidos de empréstimos entre 21000 e 23000 euros?
    d) Qual o montante acima do qual se encontram 5% dos pedidos de empréstimos?

49. O dono de um restaurante de hambúrgueres sabe que a sua procura diária é normalmente distribuída, com média 240Kg e desvio padrão de 23Kg. Uma vez que o ramo de restaurantes de hambúrgueres é bastante competitivo, o gestor gostaria de assegurar que existe carne suficiente, em cada dia, para que a probabilidade de esgotar a reserva diária não seja maior que 1%.

    a) Quantos quilogramas de carne picada deve o gestor ter disponível em cada dia?
    b) Qual a probabilidade de a procura ser inferior a 200kg?
    c) Qual a probabilidade de a procura se situar entre 220Kg e 270Kg?

50. Um teste de escolha múltipla tem 200 questões, com 4 respostas possíveis, das quais só uma é correta. Qual é a probabilidade que respostas ao acaso produzam 25 a 30 soluções corretas para 80 das 200 questões acerca das quais o aluno não tem qualquer conhecimento?

51. Um estudo recente mostra que 23.4% das casas de habitação de um determinado país são ocupadas por uma única pessoa. Se 10000 habitações são aleatoriamente escolhidas para uma sondagem nacional sobre escolhas televisivas, qual é a probabilidade de que não mais do que 2400 habitações sejam ocupadas por uma só pessoa?

52. Sabe-se que 23% de todos os doentes com pressão arterial elevada sofrem de efeitos secundários devido a um determinado medicamento. Calcule a probabilidade de que entre 120 doentes mais do que 32 sofram de efeitos secundários.

Soluções

1. a) 0.2007; b) 0.1673; c) 0.0017; d) 0.4658
2. a) 0.0163; b) 0.9829; c) 0.5254; d) 0.5246
3. a) 0.005; b) 0.0047; c) 0.0.0052 d) 0.9729
4. a) 0.0115; b) 0; c) 0.0020 d) 0.0026
5. a) 0.7625; b) 0.8867; c) 0.1916; d) 0.7796
6. a) 0.3472; b) 0.4213; c) 13
7. Aproximação pela Poisson a) 0.7622; b) 0.1301; [binomial a) 0.7660; b) 0.1172]
8. a) 0.9703; b) $1-(0.99)^k$
9. a) 0.7553; b) 0.1256; c) 0.8215
10. a) 5, 20; b) 75/4; c) 0.0099; d) 0.4148
11. a) $[pe^t+(1-p)]^n$; b) np; c) $np\,(1-p)$
12. a) 0.3635; b) 0.1298; c) 0.0285; d) 1.5; 1.0538
13. a) 0.9644; b) 0.5429
14. a) 0.9542; b) 0.5168; c) 0.8633
15. a) 0.0251; b) 0.8714
16. a) 0.0141; b) 0.8088; c) 0.0045; d) 0.1726
17. a) 0.1507; b) 0.7546; c) 0.8191; d) 0.7244
18. a) 0.2510; b) 0.5578; c) 0.0111
19. a) 0.0803; b) 0.0190

20. a) 0.5740; b) 0.1353; c) 0.9972; d) 0.3849
21. a) 0.7360; b) 0.5134
22. a) 0.3712; b) 7
23. a) 0.0003; b) 0.9576; 0.9084
24. a)$\exp(\lambda e^t)$; b) λ; c) λ
25. a) 0.8179, 0.8187; b) 0.1652, 0.1637; c) 0.0159, 0.0164; d) 0.0010, 0.0011
26.
27. a) 0; b) 10; c) 0.9972
28. a) 0.2231; b) 0.3347; c) 0.1912
29. 0.2700
30. a) 0.1606; b) 0.2851
31. 0.1887; 0.1839
32. a) 0; b) 0.0183; c) 0.8647; d) 0.1170; e) 0.0256
33. a) 0.3679; b) 0.1353; c) 0.0498; d) 59.9
34. a) 0.1353; b) 0.4866; c) 0.2031; d) 34.54
35. a) 0.3679; b) 6
36. a) 0.3679; b) 0.3679; c) 2
37. a) 0.3528; b) 0.04978; c) 46.05
38.
39. a) 0.1587; b) 0.6827; c) 0.0228 d) 0.9545
40. a) 1.6449; b) -0.8416; c) -3.0115; d) 0.1500
41. a) 207.74; b) 191.58; c) 195.86; d) 216.45
42. a) 0.9773; b) 0.9545; c) 0.41
43. a) 0.5513; b) 0.0312; c) 0.025
44. 0.0401

45. 120.25

46. a) 0.7556; b) 0.9098; c) 0.4779; d) 0.0242

47. a) 1.39%; b) 24.17%; c) 278

48. a) 0.1587; b) 0.0808; c) 0.3050; d) 26612

49. a) 293.5; b) 0.0410; c) 0.7117

50. 0.1193

51. 0.9235

52. 0.1439

Apêndice A

Tabelas estatísticas

A.1 Tabela da distribuição binomial

$$f(x; n.p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0.1.\ldots.n$$

$n = 2$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	2
1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000	1
2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 3$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250	3
1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750	2
2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750	1
3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 4$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	4
1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500	3
2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750	2
3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500	1
4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 5$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	5
1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563	4
2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125	3
3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125	2
4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563	1
5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 6$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	6
1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938	5
2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344	4
3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125	3
4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344	2
5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938	1
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 7$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	7
1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547	6
2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641	5
3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734	4
4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734	3
5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641	2
6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547	1
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 8$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	8
1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313	7
2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094	6
3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188	5
4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734	4
5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188	3
6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094	2
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313	1
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 9$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	9
1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176	8
2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703	7
3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641	6
4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461	5
5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461	4
6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641	3
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703	2
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176	1
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 10$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	10
1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098	9
2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439	8
3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172	7
4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051	6 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 10$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461	5
6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051	4
7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172	3
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439	2
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098	1
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 11$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005	11
1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054	10
2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269	9
3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806	8
4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611	7
5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256	6
6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256	5
7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611	4
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806	3
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269	2
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054	1
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 12$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	12
1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029	11
2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161	10
3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537	9
4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208	8
5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934	7
6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256	6
7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934	5
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208	4
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537	3
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161	2
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029	1
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 13$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	13 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 13$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016	12
2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095	11
3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349	10
4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873	9
5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571	8
6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095	7
7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095	6
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571	5
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873	4
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349	3
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095	2
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	1
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 14$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	14
1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009	13
2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056	12
3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222	11
4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611	10
5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222	9
6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833	8
7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095	7
8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833	6
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222	5
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611	4
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222	3
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056	2
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009	1
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 15$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	15
1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005	14
2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032	13
3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139	12
4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417	11
5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916	10
6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527	9 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 15$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964	8
8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964	7
9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527	6
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916	5
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417	4
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139	3
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032	2
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	1
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 16$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	16
1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002	15
2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018	14
3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085	13
4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278	12
5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667	11
6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222	10
7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746	9
8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964	8
9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746	7
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222	6
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667	5
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278	4
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085	3
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	2
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	1
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 17$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	17
1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001	16
2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010	15
3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052	14
4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182	13
5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472	12
6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944	11
7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484	10
8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855	9 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 17$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855	8
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484	7
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944	6
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472	5
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182	4
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	3
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	2
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	1
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 18$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	18
1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001	17
2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006	16
3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031	15
4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117	14
5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327	13
6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708	12
7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214	11
8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669	10
9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855	9
10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669	8
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214	7
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708	6
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327	5
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117	4
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031	3
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	2
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	1
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 19$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	19
1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000	18
2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003	17
3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018	16
4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074	15
5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222	14
6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518	13 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 19$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961	12
8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442	11
9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762	10
10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762	9
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442	8
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961	7
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518	6
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222	5
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074	4
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	3
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	2
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 20$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	20
1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000	19
2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002	18
3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011	17
4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046	16
5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148	15
6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370	14
7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739	13
8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201	12
9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602	11
10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762	10
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602	9
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201	8
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739	7
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370	6
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148	5
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046	4
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	3
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	2
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 25$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 0	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	25 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

$n = 25$

$p \rightarrow$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
$\downarrow x$ 1	0.3650	0.1994	0.0759	0.0236	0.0063	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	24
2	0.2305	0.2659	0.1607	0.0708	0.0251	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000	23
3	0.0930	0.2265	0.2174	0.1358	0.0641	0.0243	0.0076	0.0019	0.0004	0.0001	22
4	0.0269	0.1384	0.2110	0.1867	0.1175	0.0572	0.0224	0.0071	0.0018	0.0004	21
5	0.0060	0.0646	0.1564	0.1960	0.1645	0.1030	0.0506	0.0199	0.0063	0.0016	20
6	0.0010	0.0239	0.0920	0.1633	0.1828	0.1472	0.0908	0.0442	0.0172	0.0053	19
7	0.0001	0.0072	0.0441	0.1108	0.1654	0.1712	0.1327	0.0800	0.0381	0.0143	18
8	0.0000	0.0018	0.0175	0.0623	0.1241	0.1651	0.1607	0.1200	0.0701	0.0322	17
9	0.0000	0.0004	0.0058	0.0294	0.0781	0.1336	0.1635	0.1511	0.1084	0.0609	16
10	0.0000	0.0001	0.0016	0.0118	0.0417	0.0916	0.1409	0.1612	0.1419	0.0974	15
11	0.0000	0.0000	0.0004	0.0040	0.0189	0.0536	0.1034	0.1465	0.1583	0.1328	14
12	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0074	0.0268	0.0650	0.1140	0.1511	0.1550	13
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0025	0.0115	0.0350	0.0760	0.1236	0.1550	12
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0042	0.0161	0.0434	0.0867	0.1328	11
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0064	0.0212	0.0520	0.0974	10
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0021	0.0088	0.0266	0.0609	9
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0031	0.0115	0.0322	8
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0042	0.0143	7
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0053	6
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0016	5
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	4
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	3
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 $x \uparrow$
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	$\leftarrow p$

A.2 Tabela da distribuição Poisson

$$f\left(x;\lambda\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\quad x=0.1.2.\ldots$$

λ

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1733	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0281	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339

λ

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0244	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0263
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0099	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107

λ

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1381	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.0160	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006

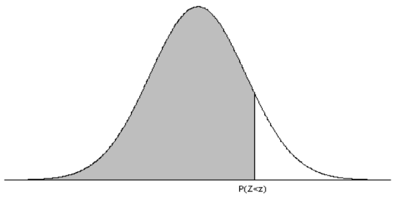
λ

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

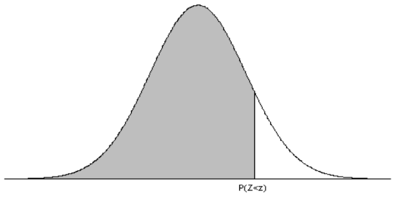
λ

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

A.3 Tabela da distribuição Normal



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Bibliografia

[1] John E Freund and Ronald E Walpole. *Mathematical Statistics (4th Ed.)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.

[2] Kurt Hornik. R FAQ, 2016.

[3] William Mendenhall and Terry Sincich. *Statistics for Engineering and the Sciences (5th Edition)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2006.

[4] Douglas C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 2006.

[5] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016.

[6] RStudio Team. *RStudio: Integrated Development Environment for R*. RStudio, Inc., Boston, MA, 2015.

[7] T.H. Wonnacott and R.J. Wonnacott. *Introductory Statistics for Business and Economics*. John Wiley & Sons, Incorporated, 1990.