Ficha 1: Função

1.1 Generalidades

Definição 1.1 *Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função f definida em A de valores em B é uma relação tal que para cada $x \in A$ associamos um único $y = f(x) \in B$.*
Dizemos que o y é a imagem do elemento (objeto) x pela função f.
O conjuntos A e B chamam-se respetivamente conjunto de partida e conjunto de chegada.

Seja $E \subset A$ um subconjunto,

$$f(E) = \{B \ni y = f(x) \text{ tal que } x \in E\}.$$

chama-se imagem de E pela função f.

Exemplo 1.1 Seja $f(x) = x^2$ e $E = \{-4\} \cup [-1, 1] \cup]2, 3[$, então $f(E) = [0, 1] \cup]4, 9[\cup \{16\}$.

Definição 1.2 *Notamos por $D_f \subset \mathbb{R}$ o maior domínio onde f está definida. O conjunto $CD_f = \{y = f(x);\ x \in D_f\}$ chama-se contradomínio.*

Nota 1.1 Usa também a notação D'_f para o contradomínio mas esta notação pode ser confundida com $D_{f'}$ que é o domínio da derivada.

Exemplo 1.2 Seja a função $f(x) = x^2$, o seu domínio é $\mathbb{R}$ enquanto o contradominio é $[0, +\infty[$. Temos ambos $f(-2) = f(2) = 4$ então 4 é a imagem de 2 e -2 enquanto -2 e 2 são os antecedentes de 4.

Cuidado. Uma função pode ter uma expressão analítica e portanto não existir. Por exemplo consideramos a função $f(x) = \sqrt{-|x| - 1}$, podemos verificar que nenhum valore é eligível então $D_f = \emptyset$, quer dizer que a função não existe na prática (apenas simbolicamente).

Definição 1.3 *Seja f uma função de valores reais e D_f o seu domínio. Notamos por*

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D_f\}$$

o gráfico (ou curva representativa) da função f.

Nota 1.2 Uma curva corresponde a uma função desde que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$ não corta o gráfico (zero interseção) se $x \notin D_f$, ou corta apenas uma vez o gráfico se $x \in D_f$.

Exemplo 1.3 Podemos também definir uma função por ramos onde a expressão é diferente em função do intervalo. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \sin(x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x \in [1, 4], \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

Definição 1.4 (paridade) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *f é uma função par em E se: $\forall x \in E$, $-x \in E$ e $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$.*
- *f é uma função ímpar em E se: $\forall x \in E$, $-x \in E$ e $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.*

Definição 1.5 (período) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é periódica em E de período $T > 0$ se: $\forall x \in E$, $x + T \in E$ e $\forall x \in E$, $f(x+T) = f(x)$.*

Definição 1.6 (monotonia) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *A função é crescente em E se: $\forall x, y \in E$, $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *A função é estritamente crescente em E se: $\forall x, y \in E$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*
- *A função é decrescente em E se: $\forall x, y \in E$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *A função é estritamente decrescente em E se: $\forall x, y \in E$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

Uma função crescente ou decrescente num conjunto E diz-se monótona em E. Determinar os intervalos de monotonia de uma função f consiste em determinar os intervalos de D_f onde f é crescente ou decrescente.

NOTA 1.3 É muito importante precisar o conjunto E. Por exemplo, a funcção $f(x) = x^2$ é crescente em $E = [0, +\infty[$ mas decrescente em $]-\infty, 0]$. Além de mais, nem é crescerente nem é decrescente em $\mathbb{R}$.

Definição 1.7 (limitada) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *m é um minorante de f em E se $\forall x \in E$, $f(x) \geq m$*
- *f admite um mínimo m em E se existe $x_m \in E$ tal que $\forall x \in E$, $f(x) \geq m = f(x_m)$.*
- *M é um majorante de f em E se $\forall x \in E$, $f(x) \leq M$*
- *f admite um máximo M em E se existe $x_M \in E$ tal que $\forall x \in E$, $f(x) \leq M = f(x_M)$.*

Uma função majorada e minorada é limitada.

Proposição 1.1
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. O mínimo e o máximo, quando exitem são únicos.

NOTA 1.4 A função $f(x) = x^2$ tem 0 como mínimo e 1 como máximo em $[-1, 1]$. Podemos notar que existem dois pontos ($x = -1$ e $x = 1$) que conduzem ao mesmo máximo.
A função $f(x) = x^2$ não admite majorante no conjunto $E = [5, +\infty[$.

Exemplo 1.4 Seja a função $f(x) = \sin(x)$. A função não admite nem um mínimo nem um máximo no conjunto $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ porque $-\frac{\pi}{2} \notin E$ e $\frac{\pi}{2} \notin E$.

Nota 1.5 Mínimo, mínimo absoluto ou mínimo global têm exatamente o mesmo significado. Portanto, neste curso usamos de preferência a expressão mínimo global em oposição a mínimo local (ver capítulo sobre as derivadas) enquanto a palavra **absoluto** é reservada as situação onde se trata do sinal (valor absoluto, convergência absoluta).

Nota 1.6 Existe também a noção de supremo de E que é o mínimo dos majorantes e de ínfimos de E como o máximo dos minorante, sejam

- supremo: $\sup(E) = \min\{x \in \mathbb{R},\ x \text{ majorante de } E\}$
- ínfimos: $\inf(E) = \max\{x \in \mathbb{R},\ x \text{ minorante de } E\}$

Por exemplo $\sup[3,4] = \sup]3,4[= 4$, enquanto temos $\inf(\mathbb{R}^-) = -\infty$.

Definição 1.8 *Seja f uma função e D_f o seu domínio. Dizemos que $x \in D_f$ é um zero (ou uma raiz) da função se $f(x) = 0$. Notamos por $\mathcal{Z}_f = \{x \in D_f;\ f(x) = 0\}$ o conjunto dos zeros da função f.*

Exemplo 1.5 Os zeros da função $f(x) = x^2 - 1$ são -1, 1 e temos $\mathcal{Z}_f = \{-1, 1\}$.

Definição 1.9 (soma, produto) *Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$. A função soma em E é definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in E$ enquanto a função produto é dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.*

Definição 1.10 (quociente) *Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$* **tal que** *$\forall x \in E$, $g(x) \neq 0$. Definimos a função quociente por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemplo 1.6 A função quociente $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ é bem definida desde que $\cos(x) \neq 0$, seja $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.11 (composta) *Sejam f e g duas funções.*

- *O conjunto $E \subset D_f$ é compatível para a composta se $f(E) \subset D_g$.*
- *Se E é compatível, definimos a função composta $h = g \circ f$ em E por*

$$\forall x \in E,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big).$$

Exemplo 1.7 A principal dificuldade na composta de funções é determinar qual é o maior domínio $E \subset D_f$ compatível para a composta. Por exemplo se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \ln(y)$ como $D_g =]0, +\infty[$ temos escolher E tal que $f(E) \subset]0, +\infty[$ quer dizer procurar os $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 > 0$. O maior conjunto compatível é finalmente $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

1.2 Exemplos de funções

Definição 1.12 *Seja $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = ax + b$ chama-se função afim. O caso $a = 0$ corresponde à função constante.*

Definição 1.13 *Para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$, a função $x \to x^i$ chama-se monómio de grau i. Um polinómio de grau n é constituido por monómios de grau $i \leq n$ tal que*

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são os coeficientes reais do polinómio. Notamos por $\mathcal{Z}(f)$ o conjunto dos zeros (ou das raizes) de f, seja os valores $z \in \mathbb{R}$ tais como $f(z) = 0$.

Nota 1.7 O quociente $h = \dfrac{f}{g}$ de dois polinómios f e g chama-se função racional. $\mathcal{Z}(f)$ e $\mathcal{Z}(g)$ são os zeros e os polos de h respetivamente.

Exemplo 1.8 A função $f(x) = x^3$ é um monómio de grau 3 e $g(x) = 3 - 4x^4 - 12x^5$ é um polinómio de grau 5. Finalmente obtemos a fração racional $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x^3}{3 - 4x^4 - 12x^5}$.

Proposição 1.2
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Notamos por $E(x) = n$ a parte inteira de x. Além de mais, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $E(x + 1) = E(x) + 1$.

Exemplo 1.9 $E(1.21) = 1$, $E(-1.21) = -2$. Existe outro tipo de arredondamento na literatura e também em programação, como o Matlab, tal que 'round', 'floor', 'ceil' and 'trunc'.

Exercício 1.1 Seja a função $f(x) = x - E(x)$ então f é periódica de período 1 e $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$.

Definição 1.14 (Módulo) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo de x, notado por $|x|$, a quantidade*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Definimos a função sinal $sng(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$ e $sng(0) = 0$.

Nota 1.8 Uma outra definição do módulo é $|x| = \max\{-x, x\}$. Deste última definição, é facil verificar que se $|x| = 0$ então $x = 0$.

Proposição 1.3
Seja $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Temos as equivalencias seguintes

$$|x| < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x < \alpha \\ \textbf{e} \\ x > -\alpha \end{cases}, \qquad |x| \leq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \beta \\ \textbf{e} \\ x \geq -\beta \end{cases},$$

$$|x| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x > \alpha \\ \textbf{ou} \\ x < -\alpha \end{cases}, \qquad |x| \geq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \beta \\ \textbf{ou} \\ x \leq -\beta \end{cases}.$$

Exercício 1.2 Determinar os x tal que $|2x-3|<1$.
A relação $|2x-3|<1$ é equivalente á $-1<2x-3<1$, quer dizer $-1+3<2x<1+3$, seja ainda $1<x<2$. Conclusão $x\in]1,2[$.

Exercício 1.3 Determinar os x tal que $|-3x+5|\geq 1$.
A relação $|-3x+5|\geq 1$ é equivalente á $-3x+5\leq -1$ ou $-3x+5\geq 1$. A primeira desigualde dá $-3x\leq -1-5$, seja ainda $x\geq 2$. Do mesmo modo temos $-3x+5\geq 1$, seja ainda $x\leq\frac{4}{3}$. Conclusão $x\in]-\infty,\frac{4}{3}]\cup[2,+\infty[$.

Proposição 1.4
Sejam $x,y\in\mathbb{R}$. Então temos ① $x\leq|x|$, ② $|xy|=|x||y|$, ③ $|x+y|\leq|x|+|y|$, ④ $|x|-|y|\leq|x-y|$, ⑤ $2|xy|\leq x^2+y^2$.

Podemos verificar a propriedade: $\min(0,x)=-\max(0,-x)$ seja $g(x)=-f(-x)$. Verificamos também $x=\min(0,x)+\max(0,x)$ e $|x|=\max(0,x)-\min(0,x)$.

Exercício 1.4 Mostrar que para qualquer $\varepsilon>0$, $X,Y\in\mathbb{R}$, temos $|XY|\leq\frac{\varepsilon}{2}X^2+\frac{1}{2\varepsilon}Y^2$.

1.3 Exercícios

Exercício 1 Determinar majorantes, minorantes, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes quando existir

1. $[0,1]$, $[-1,5]\cup]2,7[$, $\mathbb{R}^+\setminus[10,100]$, $\mathcal{Z}(x^3-x)$.
2. $\{x\in\mathbb{R},\ x^2+2x-3<1\}$, $\{x\in\mathbb{R},\ |x-1|<1\}\cap\{x\in\mathbb{R},\ |x+1|>2\}$.
3. $\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$, D_f com $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$, CD_f com $f(x)=\sin(2\pi x)$.

Exercício 2 Determinar a paridade e a periodicidade das funções seguintes

1. $f(x)=\sin(x)$ em $[0,2\pi]$, $f(x)=\sin(x)$ em $]-\pi,\pi[$, $f(x)=E(x)$ em $\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\sin(\pi x)$ em $\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x-1)$ em $\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)\cos(x)$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 3 Seja a função $f(x)=x-E(x)$. Desenhar o gráfico de f no intervalo $[-2,2]$. Determinar o domínio e contradominio de f. Mostrar que f é periódica de periódo T para determinar no seu domínio.

Exercício 4 Usando $(x+y)^2$ e $(x-y)^2$, mostrar que $2|xy|\leq x^2+y^2$. Usando $|x+y|\leq|x|+|y|$, mostrar que $|x|-|y|\leq|x-y|$.

Exercício 5 Determinar o conjunto solução:

1. $|5x-1|<4$, $|-3x-4|\geq 1$, $||x|-1|>2$.

2. $|2x-1| = x+1$, $\quad |2x-1| \leq x-6$, $\quad |x-1| \geq 2x-3$.

3. $|(x+2)(x-1)| < x-1$, $\quad |(x-1)^2 - x^2| > 1$, $\quad \left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$, $\quad |x^2-1| \geq 3$.

Exercício 6 Determinar o domínio e contradominio das funções seguintes

1. $f(x) = [\sin(x^2)]^2$, $\quad f(x) = \sqrt{\tan(x)}$, $\quad f(x) = \ln(|x|-1)$.
2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$, $\quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$, $\quad f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x-1}\right)$.
3. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}\right)$, $\quad f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$, $\quad f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

Exercício 7 Determinar o domínio da função composta h=$g \circ f$ com

1. $f(x) = \ln(x)$, $g(y) = \sqrt{y}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(y) = \ln(y)$.
3. $f(x) = x^2 - 1$, $g(y) = \ln(y-1)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $g(y) = \dfrac{1}{\cos(y)}$.

Solução 1

1. *(i) Minorante$\leq$Min$=0$ e $1=$Max$\leq$Majorante, (ii) Minorante$\leq$Min$=-1$ e $7\leq$Majorante e não existe Max, (iii) Minorante$\leq=0$ e não há Min não há Max não há Majorante, (iv) $\mathcal{Z}(x^3-x) = \{-1,0,1\}$ Minorante$\leq$Min$=-1$ e $1=$Max$\leq$Majorante.*

2. *(i) Minorante$\leq -1-\sqrt{5}$ e $-1+\sqrt{5}\leq$Majorante, não há Max nem Min , (ii) $S=]1,2[$ Minorante≤ 1 e $2\leq$Majorante, não há Max nem Min ,*

3. *(i) Minorante≤ 0 e $1=$Max$\leq$Majorante, não há Min , (ii) $D_f =]-\infty,-1/\sqrt{3}]\cup[1/\sqrt{3},+\infty[$, não há majorante,minorante, Min, Max, (iii) $CD_f = [-1,1]$,Minorante$\leq$Min$=-1$ e $1=$Max $\leq$Majorante.*

Solução 2

1. *(i) Não há paridade nem periodicidade, (ii) impar, não é periódica, (iii) Não há paridade nem periodicidade.*

2. *(i) impar, periodico $T=1$, (ii) Não há paridade, periodico $T=2\pi$, (iii) impar, periodico $T=\pi$.*

Solução 3

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = [0,1[$, temos $f(x+1) = f(x)$.

Solução 4

(i) substrair as duas relações. (ii) usar $z = x-y$.

Solução 5

1. *(i) $S =]-3/5, 1[$, (ii) $S =]-\infty, -5/3] \cup [-1, +\infty[$, (iii) $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.*

2. *(i)* $S = \{0, 2\}$, *(ii)* $S = \emptyset$, *(iii)* $S =]-\infty, 2]$.

3. *(i)* $S = \emptyset$, *(ii)* $S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, *(iii)* $S =]-\infty, -1/2[$, *(iv)* $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Solução 6

1. *(i)* $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = [0, 1]$, *(ii)* $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $CD(f) = [0, +\infty[$, *(iii)* $D(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $CD(f) = \mathbb{R}$.

2. *(i)* $D(f) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $CD(f) = \mathbb{R}$, *(ii)* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{1/(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$, $CD(f) = \mathbb{R}$, *(iii)* $D(f) = [1, +\infty[$, $CD(f) = [0, +\infty[$.

3. *(i)* $D(f) = [0, +\infty[\setminus\{1+2k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, $CD(f) = \mathbb{R}$, *(ii)* $D(f) = [2, +\infty]$, $CD(f) = [0, +\infty[$, *(iii)* $D(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $CD(f) = [0, \pi/2[$.

Solução 7

1. $D(g \circ f) = [1, +\infty[$.

2. $D(g \circ f) =]0, +\infty[$.

3. $D(g \circ f) =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

4. $D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{\pi/2 + k\pi} - 1,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ficha 2: Função inversa

2.1 Bijeção

Definição 2.1 (injetiva) *Seja f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é injetiva em E se temos*

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

A condição acima chama-se o critério de injetividade

Proposição 2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é injetiva.

Definição 2.2 (sobrejetiva) *Seja f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é sobrejetiva de E sobre F se $f(E) = F$. Por outras palavras*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$

Exemplo 2.1 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é sobrejetiva de $[-2, 2]$ em $[0, 4]$ mas não é injetiva porque $f(-2) = f(2) = 4$ (dois valores diferentes do domínio têm a mesma imagem).

Definição 2.3 (bijetiva) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é bijetiva de E sobre F se ela é injetiva e sobrejetiva. Por outras palavras*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$$

e x é único.

Exemplo 2.2 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é bijetiva de $[0, 2]$ sobre $[0, 4]$.

Corolário 2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é bijetiva de E sobre $f(E)$.

Definição 2.4 (função inversa (recíproca)) *Seja f uma função bijetiva de $E \subset D_f$ sobre $F \subset \mathbb{R}$. Então para qualquer $y \in F$, notamos por $x = f^{-1}(y)$ o único x tal que $f(x) = y$. Além de mais temos*

$$\forall x \in E,\ x = f^{-1}(f(x)), \quad e \quad \forall y \in F,\ y = f(f^{-1}(y)).$$

f^{-1} chama-se função inversa (ou recíproca) definida de F sobre E.

Nota 2.1 Infelizmente a notação f^{-1} pode ser ambígua porque podemos confundir com $\frac{1}{f(x)}$. Por exemplo a notação $(x^2)^{-1}$ não é clara porque pode ser o inverso algébrico $\frac{1}{x^2}$ ou a função inversa $\sqrt{x}$.

Notação 2.1 *Notamos $f^{-1} \circ f = Id_E$ e $f \circ f^{-1} = Id_F$ onde Id_E e Id_F são as funções identidades em E e F, respetivamente.*

Seja f é uma função bijetiva $E \subset D_f$ sobre F e f^{-1} a sua função inversa. Para qualquer ponto $M = (x, f(x))$ do gráfico de f, observamos que $M = (f^{-1}(y), y)$. Por consequência o ponto $M' = (y, f^{-1}(y))$ é o ponto simétrico de M relativamente à reta diagonal $y = x$. Concluimos que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à diagonal.

2.2 Funções potência, exponencial, logarítmica

Definição 2.5 *Seja $a \in \mathbb{R}$, notamos por x^a a função potência. O domínio depende do valor do a. ① $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Z}$, $D_f = [0, +\infty[$, ② $a \in \mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Z}$, $D_f =]0, +\infty[$. ③ $a \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. ④ $a \in \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R}$.*
No caso particular $a = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, notamos $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Nota 2.2 O monómio x^5 ou o seu inverso algebrico x^{-5} são exemplos de funções potências.

Proposição 2.2
Seja $x > 0$, temos as propriedades seguintes para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x^0 = 1, \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad \frac{1}{x^a} = x^{-a}, \quad (x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab}.$$

Nota 2.3 As propridades são também verdadeiras para $x \in \mathbb{R}$ desde que $a, b \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3
Seja $a \neq 0$ então $f(x) = x^a$ é uma bijecção de $]0, +\infty[$ sobre $]0, +\infty[$ e a sua função inversa é dada por $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}}$

Nota 2.4 Temos casos mais complexos onde temos uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Por exemplo se $a = 2k + 1$ é um número inteiro ímpar, então x^a e $x^{\frac{1}{a}}$ faz sentido mesmo se $x \leq 0$.

Definição 2.6 *Seja $a > 0$, notamos por a^x a função exponencial de base a. É a única função que satisfaz as propriedades $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ① $a^{x+y} = a^x a^y$, ② $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$, ③ $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.*

Consideramos a sucessão $u_i = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$. Podemos mostrar que esta sucessão converge para um valor que notamos habitualmente e (o número de Neper) seja

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$$

Simplificamos a notação por $\exp(x) = \exp_e(x)$ quando tratamos da função exponecial com $a = e$. A razão fundamental deste caso particular é que é o único valor que verifica a propriedade $(e^x)' = e^x$.

NOTA 2.5 É importante distinguir a função potência x^a da função exponencial a^x. Notamos também $\exp_a(x) = a^x$ a exponecial de base a.

NOTA 2.6 É facil verificar que $a^x \geq 0$ porque $a^x = a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}}a^{\frac{x}{2}} \geq 0$. Por outro lado verificamos que $1 = a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x} \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Proposição 2.4
Se $a \in]0,1[$ a função é estritamente decrescente enquanto é estritamente crescente se $a > 1$.

Proposição 2.5
Seja $a > 0$, $a \neq 1$, a função exponencial de base a é bijetiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ e notamos por $\log_a(x)$ a função inversa (função logarítmica) tal que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exp_a(\log_a(x)) = x.$$

Notação 2.2 *Para tratar do logaritmo na base $a = e$ usamos a notação especial $\ln(x) = \log_e(x)$. Alguns autores usam também da notação $\log(x)$ ou Log(x) para o logarítmo em base $a = 10$.*

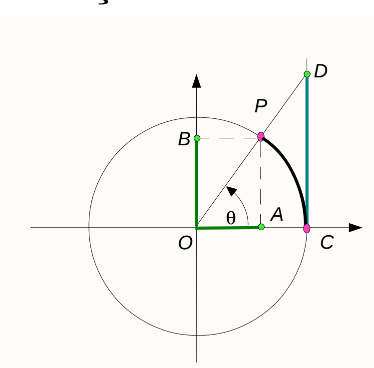
Recordadamos aqui as principais propriedades do logarítmo.

Proposição 2.6
Seja $a > 0$ e $x, y > 0$ então ① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, ② $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, ③ $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$.

Proposição 2.7
Outras propriedades entre as diferentes bases e o logaritmo neperiano são dadas aqui. Seja $a, b > 0$ e $x > 0$ então ① $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, ② $a^x = e^{x\ln(a)}$, ③ $\log_a(b^x) = x\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

2.3 Funções trigonométricas elípticas

Definição 2.7 *Consideramos uma circunferência de raio 1 centrado em 0*



Seja P um ponto na circunferência, A e B são as projeções nos eixos horizontal e vertical respetivamente e a orientação trigonométrica é dada pelo vetor no ponto A de direção $(0,1)$.
O comprimento do arco entre C e P se chama ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$.
O seno é a medida algébrica $\overline{OB}$.
O cosseno é a medida algébrica $\overline{0A}$.

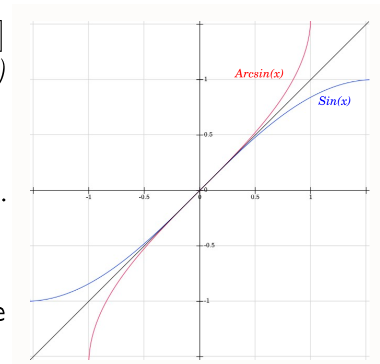
Como $\sin(0) = \sin(2\pi)$ e $\cos(0) = \cos(2\pi)$ depois fazer uma revolução completa, efetuamos uma extensão das funções por periodicidade do modo seguinte. Seja $x \in \mathbb{R}$, então existe

um único $n \in \mathbb{Z}$ é um único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $x = \theta + 2\pi n$ e definimos $\cos(x) = \cos(\theta)$, $\sin(x) = \sin(\theta)$.
A função sin é impar enquanto a função cos é par. Por construção, as duas funções são periódicas de periodo 2π.

Definição 2.8 *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Esta função corresponde a medida algebrica $\overline{CD}$ quando $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.*
Do mesmo modo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos $\cot(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
As duas funções são ímpares e periódicas de período π.

Proposição 2.8 (arco-seno)
A função $x \to y = \sin(x)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arcsin(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $[-1, 1]$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin(y)) = y.$$



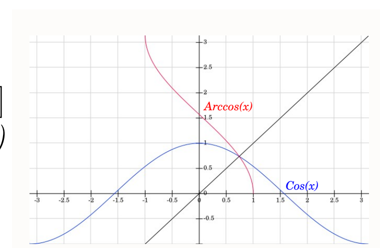
Funções $\sin(x)$ e $\arcsin(x)$.

Nota 2.7 Os conjuntos de partida e chegada são muito importantes. Podemos também usar a notação $\sin^{-1}(y)$ para a função inversa mas existe um risco muito elevado de confusão com a função $\dfrac{1}{\sin(y)}$ que usa exatamente a mesma notação. Por isso aconselhamos usar a notação $\arcsin(y)$.

Exercício 2.1 Resolver as equações $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(y) = -\frac{\pi}{4}$.

Proposição 2.9 (arco-cosseno)
A função $x \to y = \cos(x)$ é uma bijeção de $[0, \pi]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arccos(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $[-1, 1]$ sobre $[0, \pi]$

$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos(y)) = y.$$



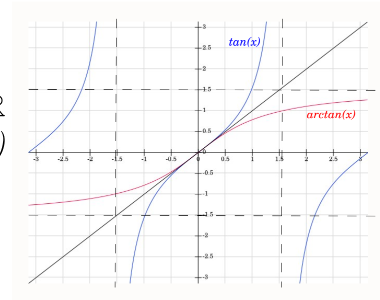
Funções $\cos(x)$ e $\arccos(x)$.

Nota 2.8 Podemos também usar a notação $\cos^{-1}(y)$ para a função inversa.

Exercício 2.2 Resolver as equações $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-x) = \frac{1}{2}$, $\arccos(y/2) = 0$.

Proposição 2.10 (arco-tangente)
A função $x \to y = \tan(x)$ *é uma bijeção de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sobre* $\mathbb{R}$ *e notamos por* $y \to x = \arctan(y)$ *a função inversa (recíproca) definida de* $\mathbb{R}$ *sobre* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y.$$



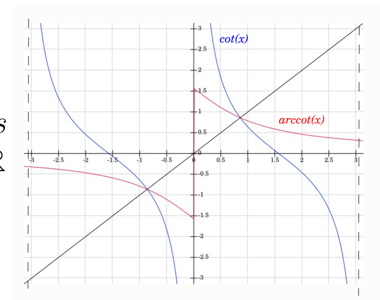
Funções $\tan(x)$ e $\arctan(x)$.

Nota 2.9 Podemos também usar a notação $\tan^{-1}(y)$ para a função inversa.

Exercício 2.3 Resolver as equações $\tan(x) = \frac{1}{3}$, $\tan(1/x) = -1$, $\arctan(y) = \pi/3$.

Proposição 2.11 (arco-cotangente)
A função $x \to y = \cot(x)$ *é uma bijeção de* $]0, \pi[$ *sobre* $\mathbb{R}$ *e notamos por* $y \to x = \operatorname{arccot}(y)$ *a função inversa (recíproca) definida de* $\mathbb{R}$ *sobre* $[0, \pi]$

$$\forall x \in]0, \pi[, \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \cot(\operatorname{arccot}(y)) = y.$$



Funções $\cot(x)$ e $\operatorname{arccot}(x)$.

Exercício 2.4 Resolver as equações $\cot(x) = -1$, $\operatorname{arccot}(y) = \pi/4$.

2.4 Funções trigonométrias hiperbólicas

Definição 2.9 (Cosseno hiperbólico) *Para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *definimos o cosseno hiperbólico por*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

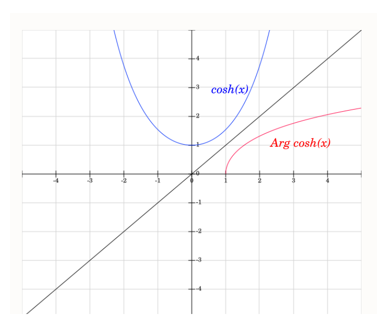
Notamos que a função é par e positiva.

Proposição 2.12
A função $x \to y = \cosh$ *é uma bijeção de* $[0, +\infty[$ *sobre* $[1, +\infty[$ *e notamos por* $y \to x = \arg\cosh(y)$ *a função inversa (recíproca) de* $[1, +\infty[$ *sobre* $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ \arg\cosh(\cosh(x)) = x,$$
$$\forall y \in [1, +\infty[, \ \cosh(\arg\cosh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in [1, +\infty[$, *temos*

$$\arg\cosh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$



Funções $\cosh(x)$ e $\arg\cosh(x)$.

Definição 2.10 (Seno hiperbólico) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos o seno hiperbólico por*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

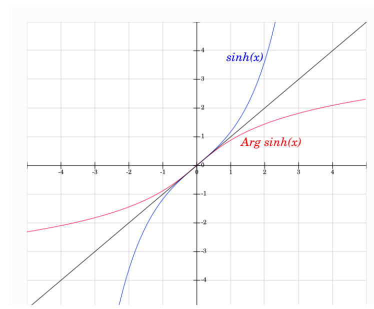
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.13
A função $x \to y = \sinh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \arg\sinh(y)$ a função inversa (recíproca) de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arg\sinh(\sinh(x)) = x,$$
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sinh(\arg\sinh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\arg\sinh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$



Funções $\sinh(x)$ e $\arg\sinh(x)$.

Definição 2.11 (tangente hiperbólica) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos a tangente hiperbólica por*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

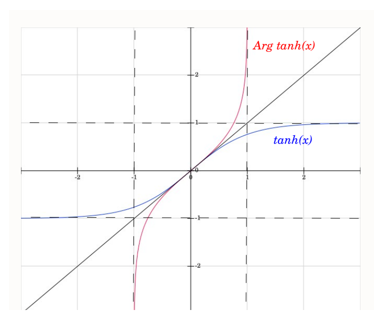
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.14
A função $x \to y = \tanh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$ e notamos por $y \to x = \arg\tanh(y)$ a função inversa (recíproca) de $]-1,1[$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arg\tanh(\tanh(x)) = x,$$
$$\forall y \in]-1,1[,\ \tanh(\arg\tanh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in]-1,1[$, temos

$$\arg\tanh(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$



Funções $\tanh(x)$ e $\arg\tanh(x)$.

Definição 2.12 (cotangente hiperbólica) *Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos a cotangente hiperbólica por*

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

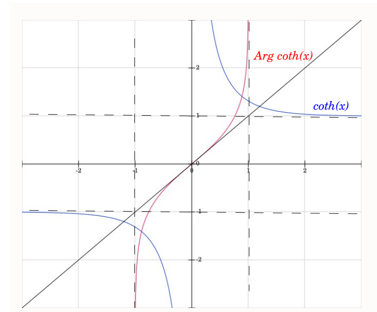
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.15
A função $x \to y = \coth$ é uma bijeção de $]0,+\infty[$ sobre $]1,+\infty[$ e notamos por $y \to x = \arg\coth(y)$ a função recíproca de $]1,+\infty[$ sobre $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \arg\coth(\coth(x)) = x,$$
$$\forall y \in]1,+\infty[,\ \coth(\arg\coth(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in]1,+\infty[$, temos

$$\arg\coth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$



Funções $\coth(x)$ e $\arg\coth(x)$.

2.5 Exercícios

Exercício 1 Determinar os ângulos seguintes:

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arctan\left(\tan(\frac{7\pi}{4})\right)$.
2. $\arcsin(\sin(\frac{18\pi}{5}))$, $\arccos(\cos(\frac{18\pi}{5}))$ $\arcsin(-\sin(-\frac{15\pi}{7}))$, $\arccos(\cos(-\frac{10\pi}{3}))$.

Exercício 2 Determinar o conjunto solução:

1. $\cos(x) > \frac{1}{2}$, $|\tan(x)| > 1$, $\sin^2(x) < \frac{1}{4}$.

Exercício 3 Mostrar as relações seguintes:

1. $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3. $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Exercício 4 Mostrar as propriedade seguintes

1. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,
2. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
3. $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Exercício 5 Simplificar as relações seguintes e determinar o conjunto solução.

1. $f(x) = \log_{10}(2x^n)$, $f(x) = \exp(2+x)\exp(2x-3)$, $f(x) = \ln(x+1)+\ln(x-1)-\ln(x^2-1)$.
2. $f(x,y) = e^{x\ln(y)-y\ln(x^2)}$, $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$, $f(x) = \sin(\pi\sinh(\ln(2)))$.
3. $f(x,y) = e^{3x\ln(5)+y\ln(2)}$, $f(x) = 2\ln(e^{\frac{x}{2}}) - 2e^{\ln(\frac{x}{2})}$, $f(x) = \ln(2xe^{4x})$.

Exercício 6 Determine o conjunto solução das equações seguintes:

1. $\ln(x-1) = 2\ln(x+1), \quad e^{x+4} = 3e^{2x-1}, \quad 25^x + 5^{x+1} - 6 = 0.$

2. $2^x > 3^x, \quad \ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x+11), \quad -\cosh(x) + 2\sinh(x) = -1.$

Solução 1

1. *(i)* $\pi/6$, *(ii)* $3\pi/4$, *(iii)* $\pi/6$, *(iv)* $-\pi/4$.

2. *(i)* $-2\pi/5$, *(ii)* $2\pi/5$, *(iii)* $\pi/7$, *(iv)* $2\pi/3$.

Solução 2

1. *(i)* $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \dfrac{\pi}{3}+2k\pi[$, *(ii)* $S = \Big(\cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+k\pi[\Big) \bigcup \Big(\cup_{k\in\mathbb{Z}}]\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[\Big)$,
   (iii) $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, \dfrac{\pi}{6}+2k\pi[$.

Solução 3

1. *Seja* $y = \arctan(x)$, *mostrar que* $\frac{\sqrt{1-\cos^2(y)}}{\cos(y)} = x$ *usando* $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. *Deduzir* $\cos(y)$ *en função de* x.

2. *Usar de novo* $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

3. *Usar* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Solução 4

As relações se deduzem da definição de $\sinh$ *e de* $\cosh$ *em função de* e^x.

Solução 5

1. *(i)* $f(x) = \frac{1}{\ln(10)}(n\ln(x) + \ln(2))$, *(ii)* $f(x) = \exp(3x-1)$, *(iii)* $f(x) = 0$.

2. *(i)* $f(x) = \frac{y^x}{x^{2y}}$, *(ii)* $f(x) = e^{-x}$, *(iii)* $f(x) = -1$.

3. *(i)* $f(x,y) = 125^x 2^y$, *(ii)* $f(x) = 0$, *(iii)* $f(x) = \ln(2) + \ln(x) + 4x$.

Solução 6

1. *(i)* $S = \emptyset$, *(ii)* $S = \left\{\frac{\ln(3)+4}{\ln(3)-1}\right\}$, *(iii) Fazer* $X = 5^x$ *e obtemos* $S = \{1\}$.

2. *(i)* $S =]-\infty, 0[$, *(ii)* $S = \{-5, 1\}$, *(iii) Fazer* $X = e^x$ *e obtemos* $S = \{0\}$.

Ficha 3: Derivada

3.1 Definição e propriedades

Definição 3.1 (derivada lateral) *A função f admite uma derivada lateral à esquerda de x_0 (ou f é derivável em x_0^-) se o limite seguinte existe*

$$f'_e(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da mesma maneira definimos a derivada lateral à direita como o limite

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definição 3.2 (derivada) *A função f admite uma derivada em x_0 (ou f é derivável em x_0) se o limite seguinte existe*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

NOTA 3.1 Existe também um outra notação onde consideramos o acréscimo $h = x - x_0$ e a taxa de variação escreve-se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

NOTA 3.2 A função f admite uma derivada em x_0 se e somente se f admite derivadas laterais em x_0 tal que $f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$.

Notação 3.1 *Usamos também a notação diferencial $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$ Para indicar que a variação infinitesimal de f sobre a variação infinitesimal de x é igual à derivada.*

Consideramos agora intervalos da forma $I = [a.b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Definição 3.3 *A função é derivável em I se f é derivável em qualquer ponto $x_0 \in]a, b[$. Se $a \in I$, f é derivável à direita de a. Se $b \in I$, f é derivável à esquerda de b.*
Notamos por f' a função derivada que para qualquer $x \in I$ associa o valor $f'(x)$ (resp. $f'_d(a)$ ou $f'_e(b)$ se $a \in I$ ou $b \in I$).

Notamos por $C^1(I)$ o conjunto das funções f deriváveis em I tal que $f' \in C^0(I)$ (quer dizer a função derivada é contínua).

NOTA 3.3 Podemos estender esta definição para qualquer reunião de intervalos. Por exemplo se $E =]-1,4[\cup[12,+\infty[$, a função é $C^1(E)$ se $f \in C^1(]-1,4[)$ e $f \in C^1([12,+\infty[)$.

Proposição 3.1
Sejam f e g duas funções definidas, deriváveis em E. Então a função soma e a função produto são deriváveis em E e temos

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Proposição 3.2
Sejam f e g duas funções definidas, deriváveis em E e supomos que $\forall x \in E,\ g(x) \neq 0$. Então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

NOTA 3.4 Todos os resultados enunciados neste parágrafo são também verdadeiros com a derivada à direita ou à esquerda. Por exemplo se ambas f e g admitem uma derivada à direita em x_0, então (fg) admite também derivada à direita e temos

$$(fg)'_d(x_0) = f'_d(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'_d(x_0).$$

3.2 Derivada da função composta e da função inversa

Proposição 3.3 (Derivada de funções compostas)
Sejam f, g duas funções tal que f é derivável em x_0 e g é derivável em $y_0 = f(x_0)$. Então a função composta $g \circ f$ é derivável em x_0 é temos

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Esta fórmula chama-se regra da cadeia.

NOTA 3.5 O resultado é verificado em qualquer intervalo $I \subset D_f$ tal que $f(I) \subset D_g$ onde f e g são ambas deriváveis.

EXEMPLO 3.1 Desta fórmula geral obtemos várias derivadas de funções compostas de revelo. Por exemplo, seja $U(x)$ é uma função derivável, temos

- $(U(x)^\alpha)' = \alpha U(x)^{\alpha-1}U'(x)$.
- $\ln(U(x))' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$, $(\exp(U(x))' = \exp(U)U'(x)$.
- $\sin(U(x))' = \cos(U(x))U'(x)$, $\cos(U(x))' = -\sin(U(x))U'(x)$.
- $\tan(U(x))' = \Big[1 + \tan^2(U(x))\Big]U'(x)$, $\cot(U(x))' = -\Big[1 + \cot^2(U(x))\Big]U'(x)$.

Proposição 3.4 (função inversa)
Seja f uma bijeção de I sobre $J = f(I)$ derivável em $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Seja f^{-1} a função recíproca. Então a função f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ é temos

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemplo 3.2 Determinar a função derivada de arcsin.
Sabemos que a função $\sin(x)$ é uma bijeção de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $J = [-1, 1]$ e admite uma função inversa $\arcsin(y)$. Para qualquer $x \in I$ tal que $\cos(x) \neq 0$, temos

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Como $\cos(x) \leq 0$ no intervalo I, podemos escrever $\cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Notando $y = \sin(x)$, deduzimos

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Nota que a função arcsin é derivável apenas no intervalo $]-1, 1[$.

Exemplo 3.3 Determinar a função derivada de arctan.
Sabemos que a função tan é uma bijeção de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ para $\mathbb{R}$ e a sua função inversa é $\arctan(y)$. Para qualquer $x \in I$, temos

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}.$$

Pomos $y = \tan(x)$ e deduzimos que para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$.

3.3 Derivada de ordem superior

Definição 3.4 (segunda derivada) *Seja $f \in C^1(I)$ com $I \subset D_f$. f admite uma segunda derivada (ou derivada de ordem dois) em x_0 se f' é derivável no ponto x_0 e notamos*

$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Notamos por $C^2(I)$ as funções duas vezes deriváveis tal que f'' seja uma função contínua em I.

Nota 3.6 Temos uma definição semelhante com as derivadas laterais de ordem dois o que permite tratar o caso dos extremos dum intervalo.

Do mesmo modo definimos as derivadas de ordem superior.

Definição 3.5 (derivada de ordem superior) *Por indução indicamos formalmente por $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ a derivada de ordem $k+1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Indicamos por $C^k(I)$ as funções k vezes deriváveis tal que $f^{(k)}$ seja contínua em I.*

NOTA 3.7 A definição estende-se com as derivadas laterais de ordem k para tratar dos extremos do intervalo.

Proposição 3.5 (fórmula de Leibniz)
Supomos que f e g são duas funções de $C^k(I)$ então temos $f+g,\ fg \in C^k(I)$ com $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ e

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} f^{(i)} g^{(k-i)}, \qquad \text{onde } \binom{i}{k} = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

EXEMPLO 3.4

$$\begin{aligned}
(\sin(x)\cos(x))^{(4)} &= \sin^{(4)}(x)\cos(x) + 4\sin(x)^{(3)}\cos^{(1)}(x) + 6\sin^{(2)}(x)\cos^{(2)}(x) \\
&\quad +4\sin^{(1)}(x)\cos^{(3)}(x) + \sin(x)\cos^{(4)}(x) \\
&= \sin(x)\cos(x) + 4\cos(x)\sin(x) + 6\cos(x)\sin(x) \\
&\quad +4\cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) \\
&= 16\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

3.4 Exercícios

Exercício 1 Seja $f(x) = |x|$, determinar as derivadas em 0^- e 0^+. Que podemos concluir sobre a existência de derivada em $x_0 = 0$?

Exercício 2 Demonstrar que para $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 3 Seja $\alpha \in]0, +\infty]$. Calcular a derivada das funções $\sin(\alpha x)$, $\cos(\alpha x)$, $e^{\alpha x}$, $\ln(\alpha x)$, $\sqrt{1+\alpha x}$, $(1-\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Exercício 4 Calcular as derivadas seguintes.

1. $f(x) = [\ln(1-3x)]^4$, $\quad f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^4+1}\right)$, $\quad f(x) = [\ln(3x)]^4$,
2. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $\quad f(x) = [\cos(3x)]^{-4}$, $\quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$,
3. $f(x) = [\tan(4x)]^{-2}$, $\quad f(x) = \ln(\arcsin(2x))$, $\quad f(x) = [\ln(4x\sin(x))]^{-3}$, $\quad f(x) = \ln(\tan(2x))$.

Exercício 5 Determinar o valor da derivada função inversa no ponto $y_0 = f(x_0)$ $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\quad f(x) = \tan(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\quad f(x) = \ln(1+2x)$, $x_0 = 0$.

Exercício 6 Determinar a derivada da função composta $h(x) = g(f(x))$.

1. $f(x) = \sin(x^2)$, $g(y) = (y+1)^{1/6}$, $\quad f(x) = \arg\sinh(x^2)$, $g(y) = e^y$.
2. $f(x) = x^5 - x^3 + 12$, $g(y) = \frac{1}{2y+1}$, $\quad f(x) = \tan(x)$, $g(y) = y^2 + 4y - 3$.

Exercício 7 Determinar a derivada de ordem n das funções seguintes $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=x^{2000}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\cos(x)$, $f(x)=\sin(\pi x)$, $f(x)=e^{2x}$.

Solução 1
Seja $f(x)=|x|$, temos $f'_e(0)=-1$ e $f'_d(0)=1$. Logo f não admite uma derivada no ponto 0.

Solução 2
Seja $f(x)=\arcsin(x)+\arccos(x)$. Temos que $f'=0$ então $f(x)=f(0)=\frac{\pi}{2}$.

Solução 3

1. $\big\{\sin(\alpha x)\big\}'=\alpha\cos(\alpha x)$.
2. $\big\{\cos(\alpha x)\big\}'=-\alpha\sin(\alpha x)$.
3. $\big\{e^{\alpha x}\big\}'=\alpha e^{\alpha x}$.
4. $\big\{\ln(\alpha x)\big\}'=\frac{1}{x}$.
5. $\big\{\sqrt{1+\alpha x}\big\}'=\frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha x}}$.
6. $\big\{(1-\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\big\}'=-(1-\alpha x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

Solução 4

1. *(i)* $f'(x)=\dfrac{-12}{1-3x}\,[\ln(1-3x)]^3$, *(ii)* $f'(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^4+1}}\left(1-\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right)$,
   (iii) $f'(x)=\dfrac{4}{x}\,[\ln(3x)]^3$,
2. *(i)* $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, *(ii)* $f'(x)=12\sin(3x)\,[\cos(3x)]^{-5}$, *(iii)* $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. *(i)* $f'(x)=-8[1+\tan^2(4x)]\,[\tan(4x)]^{-3}$, *(ii)* $f'(x)=\dfrac{1}{\arcsin(2x)}\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$,
   (iii) $f'(x)=-3\,[\ln(4x\sin(x))]^{-4}\left\{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sin(x)}\right\}$, *(iv)* $f'(x)=2\dfrac{1+\tan^2(2x)}{\tan(2x)}$.

Solução 5
(i) $(f^{-1})'(\sqrt{2}/2)=\dfrac{1}{\cos(\pi/4)}=\sqrt{2}$, *(ii)* $(f^{-1})'(\sqrt{3})=\dfrac{1}{2(1+\tan^2(2\times\pi/6))}=\dfrac{1}{8}$,
(iii)$(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Solução 6

1. *(i)* $(g\circ f)'(x)=\dfrac{x\cos(x^2)}{3}(\sin(x^2)+1)^{-5/6}$, *(ii)* $(g\circ f)'(x)=1+\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$,
2. *(i)* $(g\circ f)'(x)=-\dfrac{5x^4-3x^2}{\big[2x^5-2x^3+25\big]^2}$, *(ii)* $(g\circ f)'(x)=(2\tan(x)+4)(\tan^2(x)+1)$.

Solução 7
(i) $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-n-1}$, $f^{(n)}(x)=x^{2000-n}\dfrac{2000!}{(2000-n)!}$ *se* $n\le 2000$ *e* $f^{(n)}(x)=0$ *se* $n>2000$,
(i) $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)x^{\frac{1-2n}{2}}$,

(ii) $f^{(n)}(x) = \cos(x)$ *se* $n = 4k$, $f^{(n)}(x) = -\sin(x)$ *se* $n = 4k+1$, $f^{(n)}(x) = -\cos(x)$ *se* $n = 4k+2$, $f^{(n)}(x) = \sin(x)$ *se* $n = 4k+3$,
(iii) $f^{(n)}(x) = \pi^n \sin(\pi x)$ *se* $n = 4k$, $f^{(n)}(x) = \pi^n \cos(\pi x)$ *se* $n = 4k+1$, $f^{(n)}(x) = -\pi^n \sin(\pi x)$ *se* $n = 4k+2$, $f^{(n)}(x) = -\pi^n \cos(\pi x)$ *se* $n = 4k+3$,
(iv) $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

Ficha 4: Aplicação da derivada

4.1 4.1 Teoremas com a derivada

Teorema 4.1 (Lagrange)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Do mesmo modo, uma outra forma popular do teorema é obtida notando $h = b - a$, $x_0 = a$.

Corolário 4.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[x_0, x_0 + h]$, derivável em $]x_0, x_0 + h[$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)$.

Proposição 4.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Se $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$ então f é uma função constante.

Proposição 4.2
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$.

1. *f' é não negativa (resp. não positiva) $\Leftrightarrow$ f é crescente (resp. decrescente).*
2. *f' é positiva (resp. negativa) $\Rightarrow$ f é estritamente crescente (resp. decrescente).*

Proposição 4.3 (Teorema de Cauchy)
Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em $]a, b[$. Supomos além de mais que $g'(x) \neq 0$ no intervalo $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Proposição 4.4 (Regra de l'Hospital)
Sejam f e g duas funções de diferenciaveis no intervalo $]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ tal que

1. *f, g são não nulas exceto em x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,*
2. *$g'(x_0) \neq 0$.*

Então temos:

- *Se* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *então* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
- *Se* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ *então* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

NOTA 4.1 A prova mostra que a regra de l'Hospital também funciona com as derivadas laterais e derivadas de ordem superior.

EXEMPLO 4.1 Calcular o limite em $x_0 = 0$ de $\frac{\sin(x)}{x}$. Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x$. Verificamos que ambos $f(0) = g(0) = 0$. Do outro lado, temos $g'(0) = 1 \neq 0$. Por consequência, podemos aplicar a regra de l'Hospital e temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Tecnica de substituição Calcular o limite em $x_0 = 0$ de $\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$ Consideramos a substituição $y = x^3$. Temos $\lim_{x\to 0} y = 0$ logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}.$$

Sejam $f(y) = \ln(1+y)$, $g(y) = y$, verificamos $f(0) = g(0) = 0$ assim que $g'(0) = 1 \neq 0$. Podemos usar a regras de l'Hospital e deduzimos

$$\lim_{y\to 0} \frac{1/(1+y)}{1} = 1.$$

Tecnica de separação Calcular o limite em $x_0 = 0^+$ de $\frac{\ln(1+x)}{x^3}$. Escrevemos a função em duas partes (separação) como

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{x^2} = \frac{f(x)}{g(x)}h(x).$$

Usando o caso anterior, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = 1 \times +\infty = +\infty.$$

4.2 4.2 Aproximação polinomial

Definição 4.1 *Seja f uma função definida no intervalo I.*

- *$f \in C^0(I)$ se f continua em qualquer ponto de I.*
- *$f \in C^1(I)$ se f admite uma derivada em I tal como $f' = f^{(1)} \in C^0(I)$.*
- *$f \in C^2(I)$ se $f' \in C^1(I) \Leftrightarrow$, $f'' = f^{(2)} \in C^0(I)$.*
- *Por indução, $f \in C^{k+1}(I)$ se $f' \in C^k(I) \Leftrightarrow f^{(k+1)} \in C^0(I)$.*

NOTA 4.2 Uma função $f \in C^\infty(I)$ se podemos derivar para qualquer ordem e $f^{(k)} \in C^0(I)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2 (desenvolvimento Taylor de ordem 2)
Seja uma função $f \in C^2([a,b])$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) \quad = \quad f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(b-a)^2.$$

Seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f''(x_0+\theta h)}{2}h^2.$$

A extensão do teorema de Taylor para qualquer ordem é a seguinte.

Teorema 4.3 (desenvolvimento Taylor de ordem k)
Seja uma função $f \in C^{k+1}([a,b])$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}.$$

Em particular, seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i + \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!}h^{k+1}.$$

Definição 4.2 *As funções $p_k(h;x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i$ e $R_k(h;x_0) = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!}h^{k+1}$ são respetivamente o polínomio e o resto de Taylor de ordem k. $p_k(h;x_0)$ representa uma aproximação de f de ordem k na vizinhança do ponto x_0.*

Exemplo 4.2 Dar uma aproximação de ordem 3 no ponto $x_0 = 0$ da função $f(x) = e^x$. Calculamos as derivadas áte o ordem 3 e temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$ e deduzimos $p(h) = p_3(h;0) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$. Podemos verificar que $p(h) \approx e^h$ quando $h < 0.1$.

Exemplo 4.3 Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ usando o desenvolvimento de Taylor de ordem 2. Temos $f(x) = f^{(0)}(x) = \cos(x) - 1$, $f^{(1)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(2)} = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$. O polinómio e o resto de Taylor escreve-se

$$p_2(h;0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}h^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}h^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}h^2 = -\frac{h^2}{2}, \quad R_2(h;0) = \frac{f^{(3)}(\theta h)}{3!}h^3, \quad \theta \in]0,1[.$$

Usando o desenvolvimento de Taylor $f(h) = p_2(h;0) + R_2(h;0)$ deduzimos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2/2 + \sin(\theta h)h^3/6}{h^2} = -\frac{1}{2} + \lim_{h\to 0} \frac{h}{6}\sin(\theta h) = -\frac{1}{2}.$$

4.3 4.3 Extremos locais, concavidade, convexidade

Definição 4.3 (extremo local) *Sejam f uma função, $I \subset D_f$ um intervalo e $x_0 \in I$.*

- *f admite um mínimo local em x_0 (ou x_0 é um minimizante local) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[,\ f(x) \geq f(x_0)$.*
- *f admite um mínimo local estrito em x_0 (ou x_0 é um minimizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ e $x \neq x_0,\ f(x) > f(x_0)$.*
- *f admite um máximo local em x_0 (ou x_0 é um maximizante local) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[,\ f(x) \leq f(x_0)$.*
- *f admite um máximo local estrito em x_0 (ou x_0 é um maximizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ e $x \neq x_0,\ f(x) < f(x_0)$.*

Chama-se extremo local (estrito) um máximo ou um mínimo local (estrito).

Definição 4.4 (Ponto crítico) *Seja $f \in C^1(I)$. $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.*

Proposição 4.5
Seja $f \in C^1(I)$ tal que f' é derivável em I e $x_0 \in I$. Temos as asserções seguintes

1. *Se f admite um mínimo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.*
2. *Se f admite um máximo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.*
3. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ então f admite um mínimo local estrito em x_0.*
4. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ então f admite um máximo local estrito em x_0.*

NOTA 4.3 Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ nada podemos concluir com apenas estes dois argumentos.

Definição 4.5 (concavidade, convexidade) *Seja $f \in C^0(I)$.*

A função é concava em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$ temos $f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.

A função é convexa em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$ temos $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.

Proposição 4.6
Seja $f \in C^2(I)$.

A função é concava em I se e somente se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) \leq 0$.

A função é concava em I se e somente se a função f' é decrescente em $]a, b[$.

A função é convexa em I se e somente se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) \geq 0$.

A função é convexa em I se e somente se a função f' é crescente em $]a, b[$.

Definição 4.6 (ponto de inflexão) *Seja $f \in C^2(I)$. x_0 é um ponto de inflexão de f se $f''(x_0) = 0$.*

4.4 4.4 Exercícios

Exercício 1 Demonstrar que se $f'(x) > 0$ no intervalo $]a, b[$ então f é estritamente crescente no intervalo $I = [a, b]$.

Exercício 2 Demonstrar que $x \to y = f(x)$ é uma equação da reta no intervalo $[a, b]$ se e somente se $f'(x)$ é constante no intervalo $]a, b[$ usando o teorema de Lagrange.

Exercício 3 Usando a regra de l'Hospital, determine os limites seguintes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(2x)-1}{3x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arg\sinh(x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\sin(x)}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x^3}$, $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{x^3}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x^3)}{x}$.

Exercício 4 Determinar os extremos locais (relativos) das funções seguintes e precisar se são estritos ou não.

1. $f(x) = x - 3x^{1/3}$, $\quad f(x) = x + \cos(x)$, $\quad f(x) = x - \ln(x)$, $\quad f(x) = (1+x)e^{-x}$,
2. $f(x) = |x^2 - x|$, $\quad ,f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad f(x) = x - \arctan(x)$ $\quad f(x) = x\cosh(x)$.

Exercício 5 Determinar os pontos críticos, a natureza dos pontos críticos e os intervalos onde a função é concava ou convexa.

1. $f(x) = x\ln(x^2+1)$, $\quad f(x) = \arctan(4x)$, $\quad f(x) = x + \sin(x)$.
2. $f(x) = x\ln(|1+x|)$, $\quad f(x) = e^{x^2+1}$.

Exercício 6 Determinar o desenvolvimento de Taylor de ordem k no ponto 0 das funções seguintes.

1. $f(x) = e^{3x}$ com $k = 3$, $\quad f(x) = \sin(2x)$ com $k = 3$, $\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$ com $k = 4$.
2. $f(x) = \ln(1+x)$ com $k = 2$ e deduzir o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
3. $f(x) = \ln(1-x^2)$ com $k = 2$ e deduzir o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Exercício 7 Calcular uma aproximação usando o polinómio de Taylor.

1. $\exp(\frac{1}{10})$ com $p_3(h;0)$ da função $\exp(x)$.
2. $\ln(0.9)$ com $p_2(h;0)$ da função $\ln(1-x)$.
3. $\sin(\pi/2+\pi/10)$ com $p_3(h;0)$ da função $\sin(\pi/2+x)$.

Solução 1
Sejam $x, y \in I$ tal que $x < y$. O teorema de Lagrange implica que existe $z \in]x,y[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$. Como $y - x > 0$ e $f'(z) > 0$ por hipotese, temos $f(y) - f(x) > 0$. Logo f é estritamente crescente.

Solução 2
$\Rightarrow$ *Suposmos que $f'(z) = \alpha$, para qualquer $z \in I$ então seja $x > a$, existe $z \in]a,x[$ tal que $f(x) - f(a) = \alpha(x-a)$, seja $f(x) = \alpha x + f(a) - \alpha a$.*
$\Leftarrow$ *Se f é a equação de uma reta então $f(x) = \alpha x + \beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Logo $f'(x) = \alpha$.*

Solução 3

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(2x)-1}{3x} = \dfrac{2}{3}.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\arcsin(x)} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arg\sinh(x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x-1} = 0.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\sin(x)} = \pi, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x^3} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

Solução 4

1. *(i) $f(x) = x - 3x^{1/3}$: mínimo estrito em 1, (ii) $f(x) = x + \cos(x)$: pontos críticos $-\pi/2 + 2k\pi$, ponto de inflexão, (iii) $f(x) = x - \ln(x)$: mínimo estrito em 1, (iv) $f(x) = (1+x)e^{-x}$: máximo estrito em 0,*
2. *(i) $f(x) = |x^2 - x|$: mínimo estrito em 0 e 1, (ii) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$: mínimo estrito em -1 e máximo estrito em 1, (iii) $f(x) = x - \arctan(x)$: ponto de inflexão em 0, (iv) $f(x) = x\cosh(x)$: ponto de inflexão em 0 .*

Solução 5

1. *(i) $f(x) = x\ln(x^2+1)$: ponto de infexão em 0, função convexa em $\mathbb{R}$, (ii) $f(x) = \arctan(4x)$: não há ponto crítico, função convexa em $\mathbb{R}$, (iii) $f(x) = x + \sin(x)$: pontos de inflexão em $\pi + 2k\pi$, função convexa em $\mathbb{R}$.*
2. *(i) $f(x) = x\ln(|1+x|)$: ponto de infexão em 0, concava se $x < -2$ e convexa se $x > -2$, (ii) $f(x) = e^{x^2+1}$: função convexa com mínimo estrito em 0.*

Solução 6

1. *(i) $p_3(h;0) = 1 + 3h + \frac{9}{2}h^2 + \frac{9}{2}h^3$ e $R_3(h;0) = \frac{27}{4}\exp(\theta h)h^4$, (ii) $p_3(h;0) = 2h - \frac{4}{3}h^2$ e $R_3(h;0) = \frac{3}{2}\sin(\theta h)h^4$, (iii) $P_4(h;0) = 1 + h + h^2 + h^3 + h^4$ e $R_4(h;0) = \frac{h^5}{(1-\theta h)^6}$.*

2. $f(x) = \ln(1+x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. $p_2(h;0) = h - \frac{h^2}{2}$ e $R_2(h;0) = \frac{h^3}{3(1+\theta h)^3}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2/2 + \frac{h^3}{3(1+\theta h)^3}}{h^2} = \lim_{h\to 0} -1/2 + \frac{h}{3(1+\theta h)^3} = -\frac{1}{2}.$$

3. $f(x) = \ln(1-2x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{-2}{1-2x}$, $f^{(2)}(x) = \frac{-4}{(1-2x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{-16}{(1-2x)^3}$. $p_2(h;0) = -2h - 2h^2$ $R_2(h,0) = -\frac{8}{3}\frac{h^3}{(1-2\theta h)^3}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1-2h)}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h - 2h^2 - 8/3\frac{h^3}{(1-2\theta h)^3}}{h^2} == \lim_{h\to 0^+} -\frac{2}{h} - 2 - 8/3 \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{(1-2\theta h)^3} = -\infty.$$

Solução 7

1. $p_3(h,0) = 1 + h + h^2/2 + h^3/6$ *logo* $exp(0.1) \approx p_3(1/10,0) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000}$.
2. $p_2(h,0) = -h - h^2$ *logo* $\ln(0.9) \approx p_2(0.1,0) = -\frac{11}{100}$.
3. $p_3(h,0) = 1 - h^2/2$ *logo* $\sin(\pi/2 + \pi/10) \approx \frac{200-\pi^2}{200}$.

Ficha 5: Primitivas

5.1 Definição e propriedades

Definição 5.1 *Seja f uma função definida num intervalo $I \subset D_f$. Uma função F, definida no intervalo I, é uma primitiva de f se F é derivável em I e $F'(x) = f(x)$.*

Notação 5.1 *Existem várias notações para uma primitiva F da função f: $\mathcal{P}f$ ou $\displaystyle\int f(x)dx$*

Proposição 5.1
Seja f uma função definida num intervalo $I \subset D_f$. Suponhamos que existem duas primitivas F e G de f então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$.
Seja $x_0 \in I$ tal que $F(x_0) = 0$, então dizemos que Pf é a primitiva que se anula em x_0 (desta vez temos a unicidade da primitiva).

Exemplo 5.1 Seja $f(x) = \cos(2x)$ então a função $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3.14$ é uma primitiva de f.

Cuidado com esta notação porque não temos unicidade da primitiva. Em consequência o operador "primitivação "$f \to \mathcal{P}f$ faz sentido apenas para funções que diferem de uma constante.

Proposição 5.2
Sejam f e g duas funções que admitem uma primitiva em I então para qualquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{P}f + \mu \mathcal{P}g.$$

Teorema 5.1
Seja f uma função contínua num intervalo $I \subset D_f$. Então f admite uma primitiva.

Nota 5.1 **Cuidado**, em geral $\mathcal{P}(f \cdot g) \neq \mathcal{P}(f) \cdot \mathcal{P}(g)$ e $\mathcal{P}(f/g) \neq \mathcal{P}(f)/\mathcal{P}(g)$

5.2 Técnicas de primitivação

Primitivas imediatas. As primitivas imediatas são aquelas que vêm de funções com derivadas previamente conhecidas. De facto a tabela das derivadas fornece também a tabela das primitivas.

Exemplo 5.2 Determinar uma primitiva de $f(x) = \cos(2\pi x)$.
Como $[\sin(2\pi x)]' = 2\pi\cos(2\pi x)$ deduzimos que $\frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi x)]' = \cos(2\pi x)$ e finalmente $\int f(x)\, d\boldsymbol{x} = \mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ é uma primitiva de f.

Primitivas por substituição de variáveis. Em algumas situações, é necessário realizar um troca de variável para termos uma primitiva imediata. Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo I e $\phi(t)$ uma bijeção derivável de J sobre I. Então temos a fórmula

$$\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt.$$

Fazemos a substituição da variável x pela variável t

Exemplo 5.3 Determinar uma primitiva de $\sqrt{1-x^2}$ usando a mundança de variável $x = \phi(t) = \sin(t)$.
Consideramos x como uma função de t e escrevemos $\dfrac{dx}{dt} = x'(t) = \sin'(t) = \cos(t)$. Deduzimos assim $dx = \cos(t)dt$. Por outro lado, usando a substituição temos $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$. Aplicando a fórmula

$$\int \sqrt{1-x}\, d\boldsymbol{x} = \int \cos(t)\cos(t)\ dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} = \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + \frac{t}{2}$$

e deduzimos a primitiva $\mathcal{P}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{2}\cos(\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Uma outra técnica muito prática para realizar a troca de variável é a seguinte.

Proposição 5.3
Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e supomos que podemos escrever f como $f(x) = g(u(x))u'(x)$. Se a função $u \to g(u)$ admite uma primitiva $G(u)$ então $\mathcal{P}f(x) = G(u(x))$.

Nota 5.2 Substituimos a variável x pela variável u. Cuidado, temos um abuso de notação visto que u é ao mesmo tempo uma função de t é uma variável de g.

Exemplo 5.4 Seja $f(t) = \cos^{14}(t)\sin(t)$. Podemos reescrever esta expressão como $f(t) = g(u(t))u'(t)$ onde $g(u) = u^{14}$ e $u(t) = -\cos(t)$. Como $G(u) = \mathcal{P}g(u) = \frac{u^{15}}{15}$, concluimos então que $Pf = -\frac{\cos^{15}(t)}{15}$.

Primitivação por partes. Sejam u e v duas funções deriváveis, então sabemos que $(uv)' = u'v + uv'$. Primitivando esta última relação deduzimos a fórmula de primitivação por partes

$$\int u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx.$$

Exemplo 5.5 Usando a técnica de primitiva por partes, determine uma primitiva de $f(x) = xe^{2x+1}$.
Se escolhemos $u'(x) = e^{2x+1}$ é $v(x) = x$ então $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ e $v = 1$. Aplicando a fórmula de primitivação por partes deduzimos

$$\int xe^{2x+1} = x\frac{1}{2}e^{2x+1} - \int \frac{1}{2}e^{2x+1}\ dx == x\frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1}.$$

Nota que as outras primitivas se deduzem com uma constante adicional.

5.3 Primitivas de funções racionais

Chamamos a atenção que uma fração racional é uma função da forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinómios constituidos por monómios da forma $a_i x^i$ em que o grau do polinómio P (notado deg(P) por "degree") corresponde ao grau mais elevado dos monómios.

Divisão Euclidiana

Definição 5.2 *Sejam P e Q dois polinónios. A fração racional $\frac{P}{Q}$ é irredutível se deg(P) <deg(Q) e as raizes de P são diferentes das raízes de Q, i.e. $Z_P \cap Z_Q = \emptyset$.*

Proposição 5.4 (divisão Euclidiana)
Sejam N e Q dois polinómios então existe sempre um polinómio E e um polinómio P com deg(P) <deg(Q) tal que

$$\frac{N}{Q} = E + \frac{P}{Q}.$$

Esta expressão chama-se "redução de fração "onde $\frac{P}{Q}$ é uma fração irredutível.

A técnica é baseada na divisão euclidiana de um polínomio. Damos aqui um exemplo simples.

Exemplo 5.6 Seja a fração racional $\frac{N}{Q}$ com $N = x^3 + 4x^2 + x - 1$, $Q = x^2 - 3$, podemos escrever

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^2 - 3} = x + 4 + \frac{4x + 11}{x^2 - 3},$$

onde a fração é irreductível.

Decomposição em elementos simples

Definição 5.3 *Os elementos (frações) simples são da forma*

- *Elemento simples de tipo I (raiz simples):*

$$\frac{A}{(ax + b)^n}, \quad a \neq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

- *Elemento simples de tipo II:*

$$\frac{AX + B}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad b^2 - 4ac < 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Nota 5.3 Cuidado no segundo caso. Quando $4b^2 - 4ac \geq 0$, não é um elemento simples de tipo II (nem tipo I).

Proposição 5.5 (Decomposição em elementos simples)
Sejam P e Q dois polinómios tal a fração racional $\frac{P}{Q}$ seja irredutível. Então podemos sempre decompor a fração racional numa soma de elementos simples.

Apresentamos vários cenários onde propomos algumas técnicas de decomposição.

Exemplo 5.7 (Por identificação) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x-1)(x+2)}$. Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x-1$

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{x+2} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x+2}.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = 1$ o que dá o coeficiente A_1

$$\frac{1+4}{1+2} = A_1 + \frac{A_2(1-1)}{1+2} = A_1 = \frac{5}{3}.$$

Do mesmo modo, multiplicamos a expressão por $x+2$ que avaliamos no ponto $x = -2$.

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{x-1} = A_2 + \frac{A_1(x+2)}{x-1}.$$

Obtemos assim o segundo coeficiente $A_2 = -\frac{2}{3}$.
Deduzimos finalmente a decomposição em elementos simples

$$F(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{5/3}{x-1} - \frac{3/2}{x+2}.$$

Exemplo 5.8 (Por anulação) Consideramos de novo a igualdade

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

① Multicando com $x-1$ temos $\dfrac{x+4}{x+2} = A_1 + \dfrac{A_2(x-1)}{x+2}$. Usando o valor $x = 1$ como valor de anulação deduzimos $A_1 = \frac{5}{3}$.
② Multicando com $x+2$ temos $\dfrac{x+4}{x-1} = \dfrac{A_1(x+2)}{x-1} + A_2$. Usando o valor $x = -2$ como valor de anulação deduzimos $A_2 = -\frac{2}{3}$.
Concluimos como no exemplo anterior.

Exemplo 5.9 (Usando os limites) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}$. Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2, A_3 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x+2$

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x+2)}{x-1} + \frac{A_2(x+2)}{(x-1)^2} + A_3.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = -2$ o que dá o coeficiente $A_3 = \frac{2}{9}$.
Agora multiplicamos F por $x-1$ e obtemos

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9}\frac{(x-1)}{x+2}.$$

Tomando o limite em $+\infty$ deduzimos que

$$\lim_{+\infty} \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \lim_{+\infty} \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9}\lim_{+\infty} \frac{(x-1)}{x+2} \Longrightarrow 0 = A_1 + \frac{2}{9}$$

e deduzimos que $A_1 = -\frac{2}{9}$.
Finalmente, escolhendo o valor $x = 0$ temos

$$F(0) = \frac{0+4}{(0+2)(0-1)^2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{0-1} + \frac{A_2}{(0-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{0+2}$$

e deduzimos $2 = \frac{2}{9} + A_2 + \frac{1}{9}$ de onde tiramos $A_2 = \frac{5}{3}$. Em conclusão temos a decomposição em elementos simples

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = -\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2}.$$

Primitivação Quando se trata de uma fração racional, usamos uma redução da fração com a divisão euclidiana, se for necessario, depois efetuamos uma decomposição em elementos simples. Finalmente, determinamos uma primitiva de cada termo da decomposição.

Exemplo 5.10 Determinar um primitiva da função racional $f(x) = \dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3}$.
① A divisão euclidiana dá $\dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = x-1-\dfrac{x^2-2x-5}{x^3+3x^2+x+3}$.
② Notando que $x^3+3x^2+x+3 = (x+3)(x^2+1)$, temos a decomposição $\dfrac{x^2-2x-5}{x+3)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+1} - 2x^2+1$.
③ Determinamos uma primitiva com

$$\int f(x) = \int (x-1) + \int \frac{1}{x+1} - \int 2x^2+1 = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) - 2\arctan(x).$$

5.4 Exercícios

Exercício 1 Determinar as primitivas (imediatas) das funções seguintes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{e^{1+4x}}$, $\quad f(x) = xe^2 + 2e^x$, $\quad f(x) = 15e^{1+4x}$,
2. $f(x) = \dfrac{2}{(1-4x)^{1/3}}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{12-5x}}{\sqrt[3]{5x-12}}$, $\quad f(x) = \sqrt{(12-3x)^7}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-2x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x+4x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$, $\quad f(x) = \dfrac{5}{4x^2+9}$,
5. $f(x) = \cos(3-2x)$, $\quad f(x) = \sin(17-5x)$, $\quad f(x) = \sqrt{1+[\sinh(x)]^2}$,
6. $f(x) = 2\tan^2(2x) - 3$, $\quad f(x) = \cos(\pi x) + 2 + [\tan(x)]^2$, $\quad f(x) = 1 + \sin^2(x)$,
7. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, $\quad f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\quad f(x) = \sin^2(3x-1)$.

Exercício 2 Determinar as primitivas das funções seguintes usando uma substituição de função.

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+4x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{5x^2}{2x^3-6}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x^3}{x^4-1}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2+3x^2}}$,
2. $f(x) = 3x^2e^{1+x^3}$, $\quad f(x) = xe^{x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[6]{1+4x^2}}$
3. $f(x) = 12\sin(3x)\big[\cos(3x)\big]^7$, $\quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(2x)}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$,
4. $f(x) = 2x\ln(4)4^{x^2}$.

Exercício 3 Determinar as primitivas das funções seguintes usando uma técnica de primitivação por partes.

1. $f(x) = x\cos(2\pi x)$, $\quad f(x) = x^2\sin(x)$, $\quad f(x) = x\arctan(x)$, $\quad f(t) = t^2\ln(t)$,
2. $f(t) = (1+t^2)\ln(2t)$, $\quad f(x) = \ln(x)$, $\quad f(x) = x\exp(2x)$, $\quad f(t) = \frac{1+x^2}{e^x}$.

Exercício 4 Determinar as primitivas das funções racionais seguintes usando a divisão euclidiana e a decomposição em elementos simples quando necessário.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$, $\quad f(x) = \dfrac{-2x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{(x+2)(x^2+1)}$,

2. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{(2x-1)^3}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Solução 1

1. *(i)* $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$, *(ii)* $f(x) = -\dfrac{1}{4e^{1+4x}}$, *(iii)* $f(x) = x^2e^2/2 + 2e^x$, *(iv)* $\dfrac{15}{4}e^{1+4x}$
2. *(i)* $-\dfrac{3}{4}(1-4x)^{2/3}$, *(ii)* $\dfrac{6}{35}(12-5x)^{\frac{7}{6}}$, *(iii)* $-\frac{2}{27}\sqrt{(12-3x)^9}$,
3. *(i)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(x)$, *(ii)* $\dfrac{1}{2}\arctan(2x)$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(2x)$, *(iv)* $\dfrac{1}{2}\ln|1+2x|$
4. *(i)* $\arcsin(x/3)$, *(ii)* $\operatorname{arg\,cosh}(x/3)$, *(iii)* $\operatorname{arg\,cosh}\big((x-1)/3\big)$, *(iv)* $\dfrac{15}{18}\arctan(2x/3)$,
5. *(i)* $\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)$, *(ii)* $\dfrac{1}{5}\cos(5x-17)$, *(iii)* $\sinh(x)$,
6. *(i)* $\tan(2x) - 5$, *(ii)* $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + x + \tan(x)$, *(iii)* $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{\sin(2x)}{4}$,
7. *(i)* $-\dfrac{\cos(2x)}{4}$, *(ii)* $-\dfrac{\sin(2x)}{2}$, *(iii)* $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(6x-2)}{12}$.

Solução 2

1. *(i)* $\dfrac{1}{8}\ln|1+4x^2|$, *(ii)* $\dfrac{5}{6}\ln|2x^3-6|$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\ln|x^4-1|$, *(iv)* $\dfrac{1}{3}\sqrt{2+3x^2}$,
2. *(i)* e^{1+x^3}, *(ii)* $\frac{1}{2}e^{x^2}$, *(iii)* $f(x) = 2\sqrt{1+e^x}$, *(iv)* $\dfrac{3}{20}\sqrt[6]{(1+4x^2)^5}$
3. *(i)* $= -\dfrac{1}{2}\big[\cos(3x)\big]^8$, *(ii)* $\dfrac{1}{2}e^{\sin(2x)}$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\ln|1+\cos^2(x)|$, *(iv)* 4^{x^2}.

Solução 3

1. *(i)* $x\dfrac{\sin(2\pi x)}{2\pi} + \dfrac{\cos(2\pi x)}{(2\pi)^2}$, *(ii)* $(2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)$,
   (iii) $(x^2+1)\arctan(x) - x$, *(iv)* $\dfrac{t^3}{9}\Big(3\ln(t) - 1\Big)$,
2. *(i)* $(t+\dfrac{t^3}{3})\ln(2t) - t - \dfrac{t^3}{9}$, *(ii)* $x\ln(x) - x$, *(iii)* $\dfrac{2x-1}{4}\exp(2x)$, *(iv)* $-\dfrac{1+x^2+2x+3}{e^x}$.

Solução 4

1. *(i)* $f(x) = \dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{5}{x-2}$ *e* $\int f(x)dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2|$,

   (ii) $f(x) = \dfrac{5/2}{x+1} - \dfrac{7}{x+2} + \dfrac{9/2}{x+3}$ *e* $\int f(x)dx = 5/2\ln|x+1| - 7\ln|x+2| + 9/2\ln|x+3|$,

   (iii) $f(x) = -\dfrac{2/5}{x+1} + \dfrac{7x+11}{5(x^2+1)}$ $\int f(x)dx = -2/5\ln|x+1| + 2/10\ln(x^2+1) + 11/5\arctan(x)$,

2. *(i)* $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{(2x-1)^3} = \dfrac{x-1}{(2x-1)^2} = -\dfrac{1/2}{2x-1} - \dfrac{1/2}{(2x-1)^2}$ *e* $\int f(x)dx = -1/4\ln|2x-1| + \dfrac{1/4}{(2x-1)}$,

   (ii) Divisão polynomial $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x - \dfrac{4}{(x-2)(x+2)} = x - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+2}$ *e* $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2\ln|x-2| - 2\ln|x+2|$.

   (iii) Fazer anulação com $x = -1$, *depois o limite , a seguir usar valores* $x = 1$ *e* $x = 0$. *Obtemos* $f(x) = \dfrac{5/2}{x+1} - \dfrac{4}{(x+1)^2} + \dfrac{-x/2+1/2}{x^2+1}$, $\int f(x)dx = 5/2\ln|x+1| + \dfrac{4x}{x+1} - 1/4\ln(x^2+1) + 1/2\arctan(x)$.

Ficha 6: Integral de Riemann

6.1 Definição do integral

Definição 6.1 *Seja f uma função não negativa no intervalo $[a, b]$. O integral de f no intervalo $[a, b]$ é a área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo, e notamos*

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Do mesmo modo, seja f uma função não positiva no intervalo $[a, b]$. Definimos o integral de f no intervalo $[a, b]$ como o valor algébrico da área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo, mas desta vez com o sinal negativo.
Notamos então

$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

Afinal para qualquer função f definimos a parte positiva $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e a parte negativa $f^-(x) = \min(f(x), 0)$ e o integral vale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx.$$

Nota 6.1 Quando escrevemos o integral $\int_a^b f(x)dx$, a variável x chama-se variável muda. Em consequência, as expressões seguintes

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(r)dr$$

representam o mesmo integral.

Proposição 6.1
As funções contínuas em $[a, b]$ admitem sempre um integral.

Exemplo 6.1 A função $f(x) = \sin(2\pi x)$ é contínua em $[0, 1]$, então ela admite um integral.

6.2 Propriedades do integral

Proposição 6.2

- *Se $f = \alpha$ é uma função constante então*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\alpha.$$

- *(Linearidade) Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

- *(Monotonia)Se $f \leq g$ então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- *para qualquer função f definida em $[a, b]$*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

- *(aditividade) Seja $c \in [a, b]$, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- *Seja $c \in [a, b]$, temos*

$$\int_c^c f(x)dx = 0.$$

Adoptamos também a convenção

Notação 6.1 *Para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ então*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Esta convenção é compatível com a aditividade no sentido que

$$0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

NOTA 6.2 Cuidado! $\int_a^b (gf)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$. Por exemplo, sejam $f(x) = g(x) = x$ podemos verificar que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x) = 0$$

visto que a área abaixo de $y = 0$ compensa a área acima. Por conseguinte como a função $f(x)g(x) = x^2$ temos

$$\int_{-1}^1 (fg)(x)dx > 0.$$

6.3 Integração e primitivação

Definição 6.2 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. para qualquer $x \in [a, b]$ definimos a função integral por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 6.1

- *para qualquer $x \in]a, b[$, $F(x)$ é derivável em x com $F'(x) = f(x)$*
- *F é derivável pela direita em a e pela esquerda em b com $F'(a) = f(a)$ e $F'(b) = f(b)$.*

Em particular, $F(x)$ é a primitiva da função f que se anula em a.

Corolário 6.1 (Fórmula de Barrow)
Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e G uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Exemplo 6.2 Calcular o integral seguinte $I = \displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{1+x}dx$.
Seja $f(x) = \frac{1}{1+x}$, a função é contínua no intervalo $[1, 10]$ com primitiva $G(x) = \ln(1 + x)$. Obtemos assim

$$\int_1^{10} \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1 + x)]_1^{10} = \ln(11) - \ln(2) = \ln(11/2).$$

Como as primitivas dependem apenas de uma constante, qualquer primitiva pode escrever-se como $G(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$. Em consequência, o limite inferior do integral não tem importância quando queremos apenas determinar uma primitiva.

6.4 Técnica de cálculo de integral

6.4.1 Integrção com mudança de variável

Definição 6.3 (mudança de variável) *Seja $y = \phi(x)$ uma função e $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ dois intervalos. Dizemos que ϕ é uma mudança de variável de I sobre J se:*

- *ϕ é uma bijeção de I sobre J.*
- *ϕ é derivável em I tal que $\phi'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in]a, b[$.*

Proposição 6.3
Seja f uma função contínua em $[c, d]$ e $y = \phi(x)$ uma mudança de variável de $[a, b]$ sobre $[c, d]$. Então temos:

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

Para realizar uma mudança (ou substituição) de variável, procedemos em três etapas.

1. Mudar os limites: passar de c, d para a, b.
2. Mudar a função: passar de $f(y)$ para $f(\phi(y))$.
3. Mudar o diferencial: passar de dy para $\phi'(x)dx$.

Exemplo 6.3 (Mudança de variável) Usando a mudança de variável $y = \sin(t)$ calcular o intergral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy$.
A função $\sin(t)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1, 1]$ e verificamos que $\phi'(t) = \cos(t) > 0$ para qualquer $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Além de mais temos $\phi(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Na segunda etapa determinamos a nova função

$$f(\phi(t)) = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t).$$

Finalmente, na útima etapa sabemos que $\phi'(t) = \frac{dy}{dt}$ então $dy = \phi'(t)dt = \cos(t)dt$. Deduzimos finalmente

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt.$$

Usando a formula $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, obtemos

$$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

6.4.2 Integração e primitivação por partes

Proposição 6.4
Sejam f e g duas funções contínuas, diferenciáveis em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx, \ \ onde \ \Big[fg\Big]_a^b = (fg)(b) - (fg)(a).$$

Nota 6.3 Podemos aplicar a mesma fórmula quando consideramos a primitivação, seja

$$\int^x f(t)g'(t)dt = (fg)(x) - \int^x f'(t)g(t)dx$$

ou escrito de um modo diferente $P(fg') = fg - P(f'g)$.

Exemplo 6.4 (Integração por partes) Usando uma integração por partes, calcular o integral seguinte $\displaystyle\int_0^{10} te^t dt$.
Consideramos $f(t) = t$ e $g'(t) = e^t$, então, $f'(t) = 1$ e $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned} \int_0^{10} te^t dt &= \Big[te^t\Big]_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt \\ &= 10e^{10} - (e^{10} - e^0) \\ &= 9e^{10} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 6.5 (Primitivação por partes) Usando uma primitivação por partes, determinar uma primitiva de $\ln(x)$.
Seja $f(t) = \ln(t)$, $g'(t) = 1$, então, $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = t$.

$$\begin{aligned}\int^x \ln(t)dt &= x\ln(x) - \int^x \frac{t}{t}dt \\ &= x\ln(x) - x.\end{aligned}$$

6.4.3 Integração de funções racionais

Graças à decomposição em elementos simples calculamos o integral de uma fração racional.

Exemplo 6.6 Calcular o integral seguinte

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}dx.$$

Usando a decomposição em elementos simples, podemos escrever

$$\begin{aligned}I(F) &= \int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[-\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2}\right] dx \\ &= -2/9\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}dx + 5/3\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}dx + 2/9\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}dx \\ &= -2/9\Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0} + 5/3\Big[\frac{-1}{x-1}\Big]_{-1}^{0} + 2/9\Big[\ln|x+2|\Big]_{-1}^{0} \\ &= 2/9\ln(2) + 5/6 - 2/9\ln(2) = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

6.5 Aplicação

6.5.1 Comprimento de uma curva

Proposição 6.5
Seja f uma função diferenciável em $[a,b]$ e G_f o seu gráfico ou curva. Então o comprimento $|G_f|$ da curva associado a f é dado por

$$|G_f| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Nota 6.4 A razão desta definição vem da medida de uma curva parametrizada que nós estudamos na cadeira de Análise onde usamos uma parametrização particular $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$.

Exemplo 6.7 Calcular o comprimento da curva da função $\frac{1}{2}x^2$ no intervalo $[0,1]$.

$$|G_f| = \int_0^1 \sqrt{1 + [x]^2}dx.$$

Introduzimos a mudança de variável $\sinh(t) = x$. Temos $\sinh(0) = 0$ e $\sinh(t_1) = 1$ onde $t_1 = \arg\sinh(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2}) = \ln(1+\sqrt{2})$. Por outro lado, verificamos que

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \sinh'(t) = \cosh(t).$$

Usando a mudança de variável, temos

$$|G_f| = \int_0^{t_1} \cosh^2(t)dt = \frac{1+\cosh(2t)}{2}dt = \Big[\frac{t}{2}+\frac{\sinh(2t)}{4}\Big]_0^{t_1} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)+\sinh\left(2\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

6.5.2 Cálculo da área de um domínio plano

Proposição 6.6
Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$ e D o domínio compreendido entre os lados verticais $x=a$, $x=b$ das funções f e g. Então a área (não algébrica) de D (notação $|D|$ ou área(D)) é dada por

$$|D| = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

Nota 6.5 Cuidado para não confundir a área algébrica (que pode ser negativa) com a área geométrica (que é sempre não negativa).

Exemplo 6.8 Calcular a área situada entre $x=-1$ e $x=1$ para as funções $f(x)=x$, $f(x)=-x$.

$$|S| = \int_{-1}^1 |x-(-x)| = 2\int_0^1 2x = 4\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 2.$$

6.5.3 Cálculo do volume de um sólido de revolução

Proposição 6.7
Seja f uma função contínua em $[a,b]$, não negativa e definimos o sólido gerado por revolução a partir de f como

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\in[a,b], \sqrt{y^2+z^2}\leq f(x)\}.$$

Então o volume do sólido $|V|$ é dado por

$$|V| = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Nota 6.6 Notar que $\pi f^2(x)$ corresponde a área de uma circunferência de raio $f(x)$.

Exemplo 6.9 Calcular o volume gerado por revolução a partir de $f=(1-x)$ no intervalo $[0,1]$. Verificamos bem que $f(x)\geq 0$ quando $x\in[0,1]$.

$$|V| = \pi\int_0^1 (1-x)^2dx = \pi\Big[-\frac{(1-x)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

6.6 Exercícios

Exercício 1 Calcular os integrais imediatos seguintes.

1. $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - x)dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+2x^2}dx, \quad \int_{-1}^1 (e^{-x} + e^{2x})dx, \quad \int_0^1 (\cos(\pi t) + \sin(2\pi t))dt.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{12}{2x-5}dx, \quad \int_0^{1/4} (1 + \tan^2(\pi x))dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)dt, \quad \int_{\sin(-1)}^{\sin(1/2)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Exercício 2 Calcular os integrais imediatos seguintes com substituição de função.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 2x\sqrt{1+x^2}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin(x^4)dx, \quad \int_0^5 \frac{5x}{1+2x^2}dx, \quad \int_0^2 12x^3 e^{x^4}dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{9x^2}{e^{x^3}}dx.$

Exercício 3 Calcular os integrais seguintes usando a integração por partes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx, \quad \int_1^3 x[\ln(x)]^2dx, \quad \int_0^1 \arg\sinh(x)\, dx,$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\, dx, \quad \int_0^1 x^2\cos(2\pi x)\, dx, \quad \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt.$

Exercício 4 Calcular os integrais usando a mundança de variável.

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-(2x)^2}dx$ com $x = \cos(t)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t\sqrt{t}}dt$ com $s = \sqrt{t}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{2+3t^{\frac{2}{3}}}dt$ com $t = s^3$.

Exercício 5 Sejam $f = \frac{P}{D}$ com $P = x+1$, $Q = (x-2)(x+3)$.

1. Justificar que a fração racional é uma fração racional irredutível. Determinar a decomposição em elementos simples de $\frac{P}{Q}$.

2. Calcular o valor do integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

3. Mesmas questões com $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+5x^2-4}{x+2}dx$.

4. Mesmas questões com $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+x^2-3x-1}{x^2+1}\, dx$.

5. Mesmas questões com $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)}\, dx.$

Solução 1

1. *i)* $\displaystyle\int_0^3 (x^2-x)dx = \frac{9}{2}$, *ii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2x^2}dx = \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$,
   iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^{-x}+e^{2x})dx = e - \frac{1}{e} + e^2/2 - \frac{1}{2e^2}$, *iv)* $\displaystyle\int_0^1 (\cos(\pi t)+\sin(2\pi t))dt = 0.$

2. *i)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{12}{2x-5}dx = 6\ln(3/7)$, *ii)* $\displaystyle\int_0^{1/4} (1+\tan^2(\pi x))dx = \frac{1}{\pi}$,
   iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)dt = \pi$, *iv)* $\displaystyle\int_{\sin(-1)}^{\sin(1/2)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{2}.$

Solução 2

1. *i)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1+x^2}dx = 0$, *ii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin(x^4)dx = \frac{1}{4}(1-\cos(\pi^4/16))$,
   iii) $\displaystyle\int_0^5 \frac{5x}{1+2x^2}dx = \frac{5}{4}\ln(51)$, *iv)* $\displaystyle\int_0^2 12x^3e^{x^4}dx = 3(e^{16}-1)$, *v)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{9x^2}{e^{x^3}}dx = 6\sinh(1).$

Solução 3

1. *i)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = 1$, *ii)* $\displaystyle\int_1^3 x[\ln(x)]^2dx = \frac{9}{2}\ln(3)(\ln(3)-1)+2$,
   iii) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arg\,sinh}(x)\, dx = \operatorname{arg\,sinh}(1) - \sqrt{2} + 1$,

2. *i)* $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\, dx = 1$, *ii)* $\displaystyle\int_0^1 x^2\cos(2\pi x)\, dx = \frac{1}{2\pi}$, *iii)* $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = \frac{\ln(3)}{3} + \frac{2}{3}.$

Solução 4

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-(2x)^2}dx\frac{\pi}{4}$, *2.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t\sqrt{t}}dt\frac{2}{3}\ln(2)$, *3.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{2+3t^{\frac{2}{3}}}dt = \frac{8}{3}[1-\sqrt{2/3}\arctan(\sqrt{3/2})].$

Solução 5

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}dx = -\frac{21}{5}\ln(2)$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+5x^2-4}{x+2}dx = 1/3+3/2+6+16\ln(2/3)$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+x^2-3x-1}{x^2+1}\, dx = 2-5/2\ln(2)$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)}\, dx = 1+3\ln(2)+9\ln(2/3).$

Ficha 7: Integral impróprio

Na ficha anterior, considerámos situações onde a função fosse contínua num intervalo fechado $[a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos agora considerar intervalos abertos (ou semi-abertos) de tipo $[a, b[$ onde a, b são reais mas podem ser também $+\infty$ ou $-\infty$. Neste caso falamos de integrais impróprios.

7.1 Caso $[a, b[$ ou $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definição 7.1 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b[$, temos as três possibilidades seguintes.*

- *A função é integrável no intervalo (ou admite um integral impróprio no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- *O integral é divergente para $\pm\infty$ se*
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- *Caso contrário, dizemos que o integral diverge (não converge) no intervalo $[a, b[$*

NOTA 7.1 Temos a mesma definição para o intervalo $]a, b]$ onde consideramos o limite

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

EXEMPLO 7.1 (CONVERGÊNCIA) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0, 1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0, 1]$, o integral

$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t, 1]$. Temos assim

$$I(t) = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \Big[\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}\Big]_t^1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t}).$$

Como $\lim\limits_{t \to 0^+} \sqrt{t} = 0$, deduzimos que $\lim\limits_{t \to 0^+} I(t) = \dfrac{1}{2}$ e concluimos que o integral converge para um meio seja

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 7.2 (Divergência para infinito) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0, 1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0, 1]$, o integral

$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t, 1]$. Temos assim

$$I(t) = \int_t^1 x^{-\frac{3}{2}} dx = \Big[-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\Big]_t^1 = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}).$$

Como $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$, deduzimos que $\lim\limits_{t \to 0^+} I(t) = +\infty$ e concluimos que o integral diverge para $+\infty$.

Exemplo 7.3 (Divergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua no intervalo $]0, 1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0, 1]$, o integral

$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t, 1]$. Notando que uma primitiva de f é $F(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, deduzimos que

$$I(t) = \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_t^1 = \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Consideramos as duas sequências $t_i = \frac{1}{2i\pi}$ e $s_i = \frac{1}{\pi/2 + 2i\pi}$, obtemos

$$\sin\left(\frac{1}{t_i}\right) = \sin(2i\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{1}{s_i}\right) = \sin(\pi/2 + 2i\pi) = 1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i \to \infty} I(t_i) = \sin(1), \qquad \lim_{i \to \infty} I(s_i) = \sin(1) - 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 e o intergral diverge (não converge).

NOTA 7.2 O princípio do método é considerar o integral no intervalo $[t, 1]$ depois passar ao limite. Para avaliar o integral sobre $[t, 1]$, podemos usar qualquer técnica que usamos anteriormente como a mudança de variável ou a integração por partes.

7.2 Caso $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definição 7.2 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$, temos as três possibilidades seguintes.*

- *A função é integrável no intervalo (ou admite um integral impróprio no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- *O integral é divergente para $\pm\infty$ se*
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- *Caso contrário, dizemos que o integral diverge (não converge) no intervalo $[a, +\infty[$*

NOTA 7.3 Temos a mesma definição para o intervalo $]-\infty, b]$ onde consideramos o limite
$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

EXEMPLO 7.4 (CONVERGÊNCIA) Determinar, se existir, o integral
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral
$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$
faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim
$$I(t) = \int_1^t x^{-2}dx = \Big[-x^{-1}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Como $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$, deduzimos que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} I(t) = 1$ e concluimos que o integral converge para um seja
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Exemplo 7.5 (Divergência para o infinito) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral

$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \int_1^t x^{-1} dx = \Big[\ln(t)\Big]_1^t = \ln(t).$$

Como $\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$, deduzimos que $\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty$ e concluimos que o integral é divergente para $+\infty$.

Exemplo 7.6 (Divergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx.$$

A função $f(x) = \cos(x)$ é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 0$, o integral

$$I(t) = \int_0^t \cos(x) dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \Big[\sin(t)\Big]_0^t = \sin(t).$$

Consideramos as duas sequências $t_i = 2i\pi$ e $s_i = \pi/2 + 2i\pi$, obtemos

$$\sin(t_i) = \sin(2i\pi) = 0, \quad \sin(s_i) = \sin(\pi/2 + 2i\pi) = 1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i \to \infty} I(t_i) = 0, \qquad \lim_{i \to \infty} I(s_i) = 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 e o intergral diverge (não converge).

7.3 Casos combinados

Seja I um intervalo qualquer e $c \in I$, notamos por $I^- = I \cap]-\infty, c]$, $I^+ = I \cap [c, +\infty[$.

Definição 7.3 *Seja f uma função definida contínua no intervalo I. A função é integrável em I se f é integravel em I^- e em I^+ e escrevemos*

$$\int_I f(x) dx = \int_{I^-} f(x) dx + \int_{I^+} f(x) dx.$$

NOTA 7.4 A definição é independente da escolha de c porque temos o teorema de Chasles (aditividade).

NOTA 7.5 Se apenas um dos dois integrais diverge não podemos concluir, não termos fenómenos de compensação.

EXEMPLO 7.7 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A função é simétrica (par) então devemos só de considerar o integral no intervalo $[0, +\infty[$. Seja $t > 0$, uma primitiva da função $\frac{1}{1+x^2}$ é $\arctan(x)$ e deduzimos

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \Big[\arctan(t)\Big]_0^t = \arctan(t)$$

Como $\lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = \pi/2$, concluimos que o integral é convergente e temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

EXEMPLO 7.8 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1} dx.$$

A função é contínua no intervalo $]-1, 1[$. Usamos uma decomposição em elementos simples e encontramos

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Seja $t \in]0, 1[$ e consideramos o integral

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{x^2-1} = \int_0^t \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) dx = \Big[1/2 \ln(1-x) + 1/2 \ln(1+x)\Big]_0^t = 1/2 \ln(1-t^2).$$

Como $\lim_{t \to 1^-} \ln(1-t^2) = -\infty$ concluimos que o intergral é divergente é então não podemos calcular o integral no intervalo $]-1, 1[$.

7.4 Comparações

Proposição 7.1
Seja f, g, h três funções contínuas no intervalo $]a, b]$ tais como $0 \leq g \leq f \leq h$.

- *Se h admite um integral impróprio então f admite um integral impróprio e temos*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx.$$

- *O integral de g é divergente para $+\infty$ então f é também divergente e*

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx = +\infty.$$

Nota 7.6 Temos o mesmo resultado com os intervalos de tipo $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$.

Exemplo 7.9 Mostrar que $x\leq \sin(x)$, e deduzir que o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$ é convergente.

Exemplo 7.10 Mostrar que se $x\geq 4$, temos $\frac{1}{2}x^3\geq x^2+2x+1$. Deduzir que o integral $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3-x^2-2x-1}$ é convergente.

7.5 Exercícios

Exercício 1 Determinar, se existir, o integral

1. $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2t}\,dt,\quad I=\int_{-1}^1\frac{1}{1+t}\,dt,\quad I=\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt,\quad I=\int_1^3\frac{1}{\sqrt[5]{t-1}}\,dt.$
2. $I=\displaystyle\int_0^5\frac{t^2-1}{2t}\,dt,\quad I=\int_1^e\frac{1}{t\ln(t)}\,dt,\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx.$
3. $I=\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{1-e^t}\,dt,\quad I=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx,\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}\,dx.$

Exercício 2 Determinar, se existir, o integral

1. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}\,dt,\quad I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)^2}\,dt,\quad I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt,\quad I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{t/2}}{e^t+1}\,dt.$
2. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ por partes, $\quad I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+3t^2}\,dt,\quad I=\int_{-\infty}^{-1}\frac{7t}{1-4t^2}\,dt.$
3. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt$ e $u=\sqrt{t}$, $\quad I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^{5/2}}\,dt$ e $t=\sinh(x)$.

Exercício 3 Determinar, se o integral é convergente ou divergente (sem calcular explicitemente o valor)

1. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2te^t}\,dt,\ I=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}+t}{(1+t)^2}\,dt,\quad I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\,dt.$
2. $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)\,dt,\quad I=\int_0^{1/4}\frac{\tan(\pi\sqrt{x})}{x}\,dt,\quad I=\int_1^{+\infty}(1-\tanh(x))dx.$

Solução 1

1. *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t}\,dt = +\infty$, *ii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t}\,dt = +\infty$, *iii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = 2\sqrt{2}$,
   iv) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{t-1}}\,dt = \frac{5\sqrt[5]{2}}{4}$.
2. *i)* $\displaystyle\int_0^5 \frac{t^2-1}{2t}\,dt = +\infty$, *ii)* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = +\infty$, *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = +\infty$.
3. *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1-e^t}\,dt = +\infty$, *ii)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \sqrt[4]{8}$, *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}\,dx = +\infty$.

Solução 2

1. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt = +\infty$, *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = 1$, *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = +\infty$,
   iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{t/2}}{e^t+1}\,dt = \frac{\pi}{2}$.
2. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = 1$, *ii)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+3t^2}\,dt = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, *iii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{7t}{1-4t^2}\,dt = +\infty$.
3. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt = +\infty$, *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}}\,dt = \frac{1}{3}$.

Ficha 8: Séries numéricas

8.1 Generalidades

Definição 8.1 (soma parcial) *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ uma sucessão de números reais. Designamos por*

$$s_n = \sum_{i \leq n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

a soma parcial da sucessão $(u_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.

NOTA 8.1 A soma parcial define uma nova sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Graficamente, corresponde à soma das áreas algebricas dos retangulos (com sinal) de lado 1 e comprimento u_i.

EXERCÍCIO 8.1 Mostre que temos, para qualquer $a \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Definição 8.2 (convergência de uma série numérica) *Seja $(u_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ uma sucessão de números reais.*

- *Se a soma parcial s_n converge para $S \in \mathbb{R}$ quando $n \to +\infty$, i. e. $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$, dizemos que a série de termo geral u_i converge e escrevemos $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = S$.*
- *Se a soma parcial s_n diverge para $\pm\infty$ quando $n \to +\infty$, i. e. $\lim_{n \to +\infty} s_n = \pm\infty$, dizemos que a série de termo geral u_i diverge e escrevemos $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \pm\infty$.*

Proposição 8.1 (linearidade das séries)
Sejam duas séries de termo geral u_i, v_i e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se as séries são convergentes então a série de termo geral $\lambda u_i + \mu v_i$ é convergente e temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} u_i + \mu \sum_{i=0}^{\infty} v_i.$$

NOTA 8.2 Cuidado, a recíproca é falsa. Por exemplo, sejam as séries de termos $u_i = i$, $v_i = 2i$. Então a série de termo $w_i = 1u_i - \frac{1}{2}v_i = 0$ é convergente (aqui $\lambda = 1$ e $\mu = -1/2$). Contudo u_i e v_i são termos de duas séries divergentes.

Proposição 8.2
Se a série de termo geral u_i é convergente, então $\lim_{i\to\infty} u_i = 0$.

Esta última proposição é muito útil para mostrar que uma série não converge. Por exemplo podemos afirmar que a série de termo geral $u_i = 2i-1$ não converge porque $\lim_{\infty} u_i = +\infty \neq 0$.

Definição 8.3 (convergência absoluta) *Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais.*

- *A série de termo geral u_i é absolutamente convergente se a série de termo geral $|u_i|$ é convergente*
- *A série de termo geral u_i é absolutamente divergente se a série de termo geral $|u_i|$ diverge para $+\infty$.*

Exemplo 8.1 Apresentamos exemplos correspondentes às várias situações que podemos encontrar.

1. A série de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i^2}$ converge e temos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. A série de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i}$ diverge $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$.
3. A série de termo geral $u_i = (-1)^i$ não converge. Neste caso, não escrevemos a soma infinita.
4. A série de termo geral $u_i = \dfrac{(-1)^i}{i}$ é convergente mas não é absolutamente convergente.

Proposição 8.3
Uma série absolutamente convergente é convergente e temos $\left|\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i|$.

Proposição 8.4 (comparação com série)
Sejam duas séries de termos gerais u_i, v_i respetivamente e supomos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq u_i \leq v_i \quad \forall i \geq i_0.$$

- *Se a série de termo geral v_i é convergente então a série de termo geral u_i é convergente.*
- *Se a série de termo geral u_i é divergente, então a série de termo geral v_i é divergente.*

Proposição 8.5 (comparação com integral)
Sejam a série de termos gerais $u_i \geq 0$ e supomos que existe duas funções continuas $f, g \in C^0([0, +\infty[)$ tais como

$$0 \leq f(x) \leq u_i \leq g(x) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad x \in [i, i+1].$$

- *Se o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ é convergente então a série de termo geral u_i é convergente.*
- *Se o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ é divergente, então a série de termo geral v_i é divergente.*

8.1.1 Séries numéricas particulares

Definição 8.4 (série geométrica) *Dado $r \in \mathbb{R}$, a série numérica de termo geral $u_i = r^i$ chama-se série geométrica de razão r.*

Proposição 8.6
Temos as propriedades seguintes

- *Se $|r| < 1$, a série de termo geral r^i é convergente e temos $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$.*
- *Se $r \geq 1$ a série diverge para $+\infty$.*
- *Se $r \leq -1$ a série não converge.*

Definição 8.5 (série de Riemann) *Seja $r > 0$, a série de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i^r}$ chama-se série de Riemann.*

Proposição 8.7
Temos as propriedades seguintes:

- *Se $r > 1$ a série é convergente.*
- *Se $r \leq 1$ a série é divergente.*

Definição 8.6 (Série alternada) *Uma série numérica de termo geral u_i chama-se série alternada se $u_{i+1}u_i \leq 0$. Os sinais de dois termos sucessivos são opostos.*

Por exemplo, a série de termo geral $u_i = (-1)^i$ é alternada. Em geral para estudar a convergência duma série alternada, agrupamos dois termos consecutivos.

Exemplo 8.2 Seja a série de termo geral $u_i = \dfrac{(-1)^i}{i}$. Podemos escrever

$$v_i = u_{2i} + u_{2i+1} = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2i(2i+1)} \leq \frac{1}{(2i+1)^2}$$

A série de termo geral $w_i = \dfrac{1}{(2i+1)^2}$ é de Riemann com $r = 2$ então converge. Com o critério de comparação, deduzimos que a série de termo geral v_i converge, e então, a série alternada converge.

Proposição 8.8
Seja a série alternada numérica de termo geral u_i. Supomos que:

- *a sucessão $|u_i|$ é decrescente;*
- $\displaystyle\lim_{i\to\infty} u_i = 0$.

Então a série é convergente.

8.2 Critérios de convergência ou divergência

Existem vários critérios para saber se uma série de termo geral converge ou não. Vamos apresentar aqui os dois princípios: o critério de Cauchy e o critério de d'Alembert.

Proposição 8.9 (Critério de d'Alembert)
Seja uma série de termo geral u_i positivo (i.e. $u_i > 0$) tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = l.$$

- *Se $l < 1$, então a série é convergente.*
- *Se $l > 1$, então a série é divergente.*
- *Se $l = 1$, nada podemos concluir.*

Exemplo 8.3 Seja a sucessão definida por indução $u_{i+1} = u_i \times \sqrt{i+1}$, $u_0 = 2$. Temos uma sucessão crescente então $u_i > 0$. Por outro lado $\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = +\infty > 1$ então o critério de d'Alembert permite afirmar que a série é divergente.

Proposição 8.10 (Critério de Cauchy)
Seja uma série de termo geral u_i positivo tal que

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{u_i} = l.$$

- *Se $l < 1$, então a série é convergente.*
- *Se $l > 1$, então a série é divergente.*
- *Se $l = 1$, nada podemos concluir.*

Exemplo 8.4 Seja a sucessão $u_i = e^{-i} > 0$, temos

$$\sqrt[i]{u_i} = \left(e^{-i}\right)^{\frac{1}{i}} = e^{-1} < 1$$

O critério de Cauchy garante que a série de termo geral e^{-i} é convergente.

8.3 Exercícios

Exercício 1 Usando as séries geométricas ou de Riemann, identificar a natureza das séries seguintes.

- $u_i = \dfrac{1}{2^i}$, $\quad u_i = \dfrac{(1/3)^i}{(1/2)^i}$, $\quad u_i = \dfrac{\sqrt{3^i}}{2^i}$, $\quad u_i = \dfrac{3^i}{(2^i)^2}$
- $u_i = \dfrac{\sqrt{i}}{i}$, $\quad u_i = \dfrac{\sqrt{3i}}{i^2}$, $\quad u_i = \dfrac{i}{(2i)^4}$, $\quad u_i = \dfrac{i-1}{i^2-1}$.

Exercício 2 Usando o critério de comparação, identificar a natureza das séries seguintes.

- $u_i = \dfrac{1}{1+i}, \quad u_i = \dfrac{1}{\sqrt{1+i}}, \quad u_i = \dfrac{1}{1+\sqrt{i}}, \quad u_i = \dfrac{1}{i+\sqrt{i}}, \quad u_i = \dfrac{\sqrt{i}}{i^2-2i+2},$
- $u_i = \dfrac{1}{i^2-2i+2}, \quad u_i = \dfrac{i+\sin(i)}{i^3-i^2+16}, \quad u_i = \dfrac{i^2+\ln(i+1)}{(i^2-1)^3+1}, \quad u_i = \dfrac{2^i}{3^i+i},$
- $u_i = \dfrac{3^i}{2^i+i^3}, \quad u_i = \dfrac{3^i}{2^i-5^i}, \quad u_i = \dfrac{3^i+i^3}{(2^i)^2-i^2}, \quad u_i = \dfrac{1}{i!}, \quad u_i = \dfrac{i^2}{i!}, \quad u_i = \dfrac{2^i}{i!},.$

Solução 1

1.

Ficha 9: Séries de potências

9.1 Definições gerais

Definição 9.1 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Chamamos série de potências centrada no ponto x_0 uma série de termo geral $f_i(x) = a_i(x - x_0)^i$ onde $a_i \in \mathbb{R}$.*

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, notamos por $s_n(x)$ a soma parcial

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i.$$

Proposição 9.1
A função s_n é definida, contínua, infinitamente derivável no domínio $\mathbb{R}$.

Demonstração. É claro que a função s_n é um polinómio de grau n. □

Definição 9.2 *Notamos $f(x)$ o limite da série quando converge e notamos*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i.$$

$D(f)$ é o domínio de f, i.e. os pontos $x \in \mathbb{R}$ tal que a série numérica converge.

A questão importante é saber quando a série converge. Temos a proposição seguinte.

Proposição 9.2 (Convergência normal)
Seja uma série de potências de termo geral $f_i(x) = a_i(x - x_0)^i$ centrada em x_0 e supomos que existe $r > 0$ tal que a série numérica $u_i = |a_i|r^i$ converge. Então a série de potências converge normalmente para uma função

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i$$

no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Demonstração. É uma aplicação direta da noção de convergência normal. □

Corolário 9.1 (Convg. Absoluta implica Normal)
Seja uma série de potências de termo geral $f_i(x) = a_i(x - x_0)^i$ *centrada em* x_0 *e supomos que existe* $\bar{x} \neq x_0$ *tal que a série numérica de termo geral* $u_i = a_i(\bar{x} - x_0)^i$ *converge absolutamente. Então a série de potências converge normalmente sobre o intervalo* $[x_0 - r, x_0 + r]$ *com* $r = |\bar{x} - x_0|$.

DEMONSTRAÇÃO. Notar que se $y \in [x_0 - r, x_0 + r]$ temos para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$

$$0 \leq |a_i(y - x_0)^i| \leq |a_i(\bar{x} - x_0)^i|$$

e o critério de comparação permite concluir. □

NOTA 9.1 Este último corolário mostra que no caso das séries de potências, a convergência normal e absoluta são equivalentes. Por isso, falaremos sempre de convergência absoluta.

Definição 9.3 (Raio de convergência) *Seja*

$$R = \sup\{r \textit{ tal que } |a_i| r^i \textit{ converge}\}.$$

R chama-se raio de convergência da série de potência e temos

$$]x_0 - R, x_0 + R[\subset D(f).$$

NOTA 9.2 Cuidado! R pode ser um número real mas também pode ser $R = \infty$. Neste último caso, temos uma série que converge em $\mathbb{R}$.

NOTA 9.3 Supomos que $R > 0$ seja um número real, então sabemos que a série de termo geral $a_i r^i$ converge se $|r| < R$.
Chega a questão da convergência nos pontos limites do intervalo quer $r = -R$, quer $r = R$.
Se a série de termo geral $a_i R^i$ converge então a série de termo geral $a_i(-R)^i$ támbem converge. Por outro lado, se a série de termo geral $a_i R^i$ diverge, temos de estudar a convergência da série alternada de termo geral $a_i(-R)^i$.

Proposição 9.3
Se o raio de convergência $R > 0$, *temos as propriedades seguintes.*

- *A função* f *é contínua em* $]x_0 - R, x_0 + R[$.
- *A função* f *é integrável* $\forall a, b$ *tal que* $x_0 - R < a \leq b < x_0 + R$,

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \right) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_i (x - x_0)^i \, dx \right).$$

- *A função admite a primitiva* Pf *que se anula em* x_0

$$Pf(x) = P\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} P a_i (x - x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{(x - x_0)^{i+1}}{i + 1}.$$

- *A função f infinitamente derivável no intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$ e temos*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{i!}{(i-k)!}(x - x_0)^{(i-k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração da primeira parte é simples usando a definição de uma série normalmente convergente.
A segunda parte do teorema é também fácil usando a propriedade de convergência uniforme de funções contínuas.
A última parte do teorema é mais complexa. Mostrar que a série de termo geral $u_i^{(k)} = |a_i|\dfrac{i!}{(i-k)!}r^{(i-k)}$ converge sabendo que a série $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| r^i$ é convergente para $r < R$. É um bom exercício!!! □

9.2 Critério de convergência

Nesta secção, consideramos que $x_0 = 0$ para simplificar as notações. O caso $x_0 \neq 0$ deduz-se por translação.

Proposição 9.4
Seja uma série de potências centrada em 0 de termo geral $u_i = a_i x^i$ onde $a_i \neq 0$. Suponhamos que existe $L \in]0, +\infty[$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} L \right| < 1$$

então a série convergence normalmente no intervalo $] - L, L[$ e temos $R \geq L$.

NOTA 9.4 Notar que os coeficientes a_i tem de ser não nulos.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos em primeiro lugar que $L > 0$. Para qualquer $|x| < L$ aplicamos o críterio de d'Alembert e temos

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{a_{i+1}x^{i+1}}{a_i x^i} = \frac{a_{i+1}}{a_i}x.$$

Deduzimos então que

$$\left| \frac{u_{i+1}}{u_i} \right| \leq v_i = \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} L \right|.$$

□

A série de termo geral v_i satisfaz o critério de d'Alembert de uma série numérica a partir de uma posição N_0, e por consequência converge.

Corolário 9.2
Se para qualquer x, temos

$$\lim_{i \to \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} x \right| < 1$$

então $R = +\infty$.

9.3 Séries de Taylor

Recordamos a definição do desenvolvimento de Taylor já apresentado no capítulo sobre a derivada.

Definição 9.4 (Desenvolvimento de Taylor) *Seja f uma função definida sobre o intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$ tal que f é $k+1$ derivável com $k \in \mathbb{N}$. Então, para qualquer $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$:*

- *existe um polinómio de grau k*

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i,$$

- *existe uma função*

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

  onde $\xi = \xi(x) \in [\min(x, x_0), \max(x, x_0)]$

tal que

$$f(x) = p_k(x) + R_k(x).$$

p_k chama-se polinómio de Taylor de ordem k e R_k chama-se o resto de Taylor- Maclaurin (ou também de Lagrange) de ordem k. Em princípio, a denominação Maclaurin corresponde só ao caso $x_0 = 0$.

NOTA 9.5 Assumimos as mesmas hipóteses que na definição ?? e para qualquer $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $x \neq x_0$, pomos $\theta = \theta(x) = \frac{\xi(x) - x_0}{x - x_0}$. Por consequência, a função R_k escreve-se

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

com $\theta \in]0, 1[$. Isto é uma outra maneira de escrever o desenvolvimento de Taylor.

NOTA 9.6 Podemos provar que o desenvolvimento de Taylor de ordem k é único: existe um único polinómio p_k de grau k e uma única função R_k que satisfazem a propriedade $f = p_k + R_k$.

Damos agora a definição geral de um desenvolvimento em série de potências.

Definição 9.5 *Seja f uma função definida no intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$. A função admite um desenvolvimento em série de potências centrada em x_0 de raio R, se existem coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$, tal que a série de termo geral $a_i(x - x_0)^i$ converge absolutamente para $f(x)$ no intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$.*

No caso de função regular (infinitamente derivável), podemos explicitar o desenvolvimento em série de potências com as derivadas sucessivas de f.

Proposição 9.5
Seja f uma função infinitamente derivável no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ com $r > 0$ e $(v_i)_i$ uma sequência tal que

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r], \ |R_i(x)| \leq v_i.$$

Se a sequência $(v_i)_i$ converge para 0 então a função f admite uma representação como série de Taylor no intevalo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

NOTA 9.7 Cuidado! O facto de uma função ser infinitamente derivável no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ com $r > 0$ não implica que esta função admita um desenvolvimento em série de Taylor. Por exemplo, a função $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ é $C^\infty(\mathbb{R})$ não admite uma representação em série de Taylor centrada em 0. Com efeito, podemos verificar que $f^{(i)}(0) = 0$ então a série dá

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 \times x^i = 0$$

então $g \neq f$.

Vamos dar alguns exemplos de séries de Taylor e apresentar como determinar o raio de convergência destas séries.

EXERCÍCIO 9.1 Seja $f(x) = e^x$. Mostrar que f admite uma representação como série de Taylor centrada em 0 de raio $R = +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. No ponto $x_0 = 0$ temos então $f^{(i)}(0) = 1$ e consideramos a série de potências de termo geral

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \frac{1}{i!} x^i = a_i x^i.$$

Claramente, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} x = \dfrac{x}{i+1}$ cujo limite é 0. Por consequência, a série de potências é (normalmente) convergente no domínio $\mathbb{R}$. Mas isso não é suficiente para provar que a função exponencial admite uma representação em série de Taylor.

Para este fim, consideramos o desenvolvimento de Taylor de ordem k. Seja $r > 0$ e $x \in [-r, r]$, o resto do desenvolvimento de Taylor é dado por

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x)^{k+1}$$

onde $|\xi| < |x| < r$. Como a função $f^{(k+1)}(\xi) = e^\xi < e^r$ temos

$$|R_k(x)| \leq e^r \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} = u_k.$$

Agora necessário verificar que para $k > r$ temos $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{r}{k+1}$. Se $k > r$, o críterio de d'Alembert implica que a sequência u_k converge para 0 e a função e^x admite uma representação como série de Taylor no intervalo $[-r, r]$. Como isto é verdade para qualquer r então temos uma representação para todo $\mathbb{R}$. $\square$

NOTA 9.8 Em muitos casos, usamos a mudança de variável $h = x - x_0$, então se $|h| < R$, temos

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^i.$$

onde a série de potências é centrada em 0. Em particular, vamos estudar o caso onde $x_0 = 0$ que corresponde a $h = x$.

9.4 Exercícios

Exercício 1