

Estatística aplicada

Lino Costa

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
lac@dps.uminho.pt

Ano letivo 2018/2019

Sumário

Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade

1. Variável aleatória
2. Distribuições de probabilidade discretas
 - Função de probabilidade
 - Função de distribuição acumulada
3. Distribuições de probabilidade contínuas
 - Função densidade de probabilidade
 - Função de distribuição acumulada

Variável aleatória

Uma variável aleatória, representada por X (em maiúsculas), associa um número real aos resultados de uma experiência aleatória.

De notar que um valor medido da variável aleatória X é representado em minúsculas (por exemplo, $x = 10$).

Tipo de variáveis aleatórias

- **Variável aleatória discreta:** apresenta uma gama de valores finita (ou infinita contável). Por exemplo: o número de pontos resultante de um lançamento de um dado $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- **Variável aleatória contínua:** define-se num intervalo de valores reais para uma gama de valores infinita. Por exemplo: duração de uma lâmpada $X \geq 0$.

Variável aleatória

Exemplo 1

Considere o lançamento de 2 dados. Liste os elementos do espaço amostral, os valores da variável aleatória X que representa a soma dos pontos e as probabilidades correspondentes.

- $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

elementos	X	probabilidade
(1, 1)	2	1/36
(1, 2), (2, 1)	3	2/36
(1, 3), (3, 1), (2, 2)	4	3/36
(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)	5	4/36
(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)	6	5/36
(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)	7	6/36
(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)	8	5/36
(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)	9	4/36
(4, 6), (6, 4), (5, 5)	10	3/36
(5, 6), (6, 5)	11	2/36
(6, 6)	12	1/36

- $f(x) = P(X = x) = \frac{6 - |x - 7|}{36} \quad x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

Variável aleatória

Exemplo 2

Duas meias são selecionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Liste os elementos do espaço amostral, os valores da variável aleatória W que representa o número de meias castanhas selecionadas e as probabilidades correspondentes.

- $S = \{CC, CV, VC, VV\}$

elemento	W	probabilidade
CC	2	$5/8 \times 4/7 = 20/56$
CV	1	$5/8 \times 3/7 = 15/56$
VC	1	$3/8 \times 5/7 = 15/56$
VV	0	$3/8 \times 2/7 = 6/56$

- $f(w) = P(W = w) = \begin{cases} 6/56 & w = 0 \\ 30/56 & w = 1 \\ 20/56 & w = 2 \end{cases}$

Distribuição de probabilidade

A distribuição de probabilidade indica como é que as probabilidades se encontram distribuídas para os diversos valores da variável aleatória discreta X .

Tipos de funções para uma variável aleatória discreta X

- **função de probabilidade:** indica a probabilidade de uma valor de X , i.e., $P(X = x)$
- **função de distribuição acumulada:** indica a soma das probabilidades dos valores de X que são menores ou iguais a um valor especificado, i.e., $P(X \leq x)$.

Função de probabilidade

Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por $f(x) = P(X = x)$, para cada valor de x na gama de valores de X , é chamada **função de probabilidade** de X .

Propriedades

$f(x)$ é função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X se e só se os seus valores satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio;
2. $\sum_x f(x) = 1$.

Função de probabilidade

Exemplo 3

Encontre a fórmula para a função de probabilidade do número total de caras obtidas no lançamento de 4 moedas equilibradas.



$$S = \{HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$



elementos	X	probabilidade
$HHHH$	4	$1/16$
$HHHT, HHTH, HTHH, THHH$	3	$4/16$
$HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH$	2	$6/16$
$HTTT, THTT, TTHT, TTTH$	1	$4/16$
$TTTT$	0	$1/16$



$$f(x) = P(X = x) = \frac{C_x^4}{16} = \frac{\binom{4}{x}}{16} = \frac{4!}{x!(4-x)!} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Função de probabilidade

Exemplo 4

Verifique se a função dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{25} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória.

- $f(x) \geq 0$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5$
- $\sum_{x=1}^5 f(x) = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{6}{25} + \frac{7}{25} = \frac{25}{25} = 1$
- $f(x)$ é uma função de probabilidade

Função de distribuição acumulada

A **função de distribuição acumulada** $F(x)$ de um variável aleatória discreta X é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{onde} \quad -\infty < x < \infty$$

Propriedades

A função de distribuição acumulada $F(x)$ satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(\infty) = 1$
4. $F(a) \leq F(b)$ se $a \leq b$ ($F(x)$ é não decrescente)

Função de distribuição acumulada

Exemplo 5

Considere a experiência em que duas meias são selecionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Encontre a função de probabilidade acumulada da variável W , número de meias castanhas extraídas da gaveta. Trace os gráficos de $f(w)$ e $F(w)$.

•

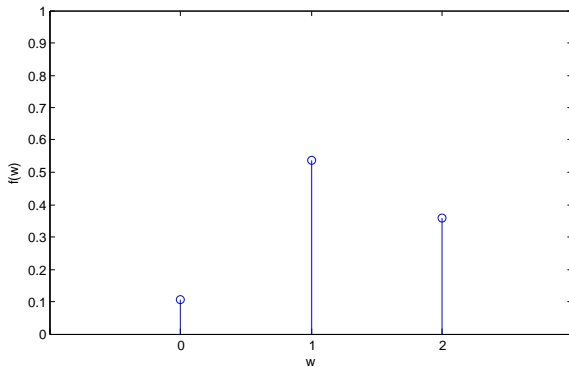
W	$f(w) = P(W = w)$	$F(w) = P(W \leq w)$	
0	6/56	6/56	$f(0)$
1	30/56	36/56	$f(0) + f(1)$
2	20/56	1	$f(0) + f(1) + f(2)$

•
$$F(w) = P(W \leq w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 6/56 & 0 \leq w < 1 \\ 36/56 & 1 \leq w < 2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases}$$

Função de probabilidade

Exemplo 5

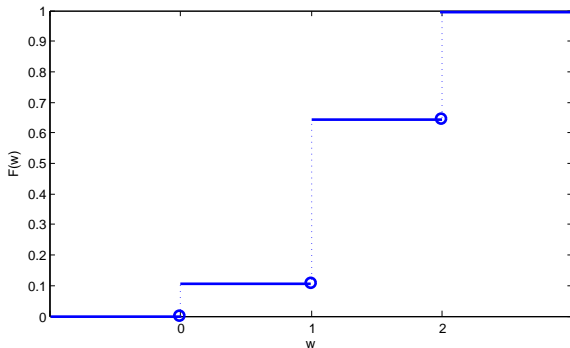
$$f(w) = P(W = w) = \begin{cases} 6/56 & w = 0 \\ 30/56 & w = 1 \\ 20/56 & w = 2 \end{cases}$$



Função de distribuição acumulada

Exemplo 5

$$F(w) = P(W \leq w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 6/56 & 0 \leq w < 1 \\ 36/56 & 1 \leq w < 2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases}$$



Distribuição de probabilidade

A distribuição de probabilidade indica como é que as probabilidades se encontram distribuídas na gama de valores da variável aleatória contínua X .

Tipos de funções para uma variável aleatória contínua X

- **função densidade de probabilidade:** descreve a densidade de probabilidade num intervalo de valores de X
- **função de distribuição acumulada:** representa a probabilidade de X ser menor ou igual a um valor especificado, i.e., $P(X \leq x)$.

Função densidade de probabilidade

Se X é uma variável aleatória contínua, a função dada por $f(x)$, para valores de x na gama de valores de X , é chamada **função densidade de probabilidade** de X .

Propriedades

$f(x)$ é função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X se e só se os seus valores satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio;

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$$

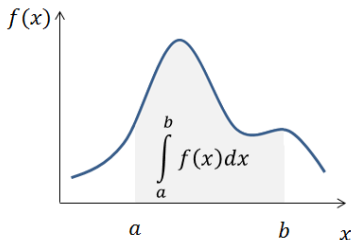
$$3. P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx;$$

$$4. P(X = x) = 0.$$

Função densidade de probabilidade

O integral de $f(x)$ entre a e b representa a probabilidade que X pertença ao intervalo $a \leq x \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Como $P(X = x) = 0$ então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

Função densidade de probabilidade

Exemplo 6

A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine o valor de k . Calcule $P(X \geq 0.5)$ e $P(0.5 < X < 1)$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} ke^{-3x}dx = \left[k \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$
- $P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 3e^{-3x}dx = \left[3 \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_{0.5}^{\infty} = 0 - (-0.223) = 0.223$
- $P(0.5 < X < 1) = \int_{0.5}^1 3e^{-3x}dx = \left[3 \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_{0.5}^1 = -0.050 - (-0.223) = 0.173$

Função de distribuição acumulada

A **função de distribuição acumulada** $F(x)$ de um variável aleatória contínua X é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{onde} \quad -\infty < x < \infty$$

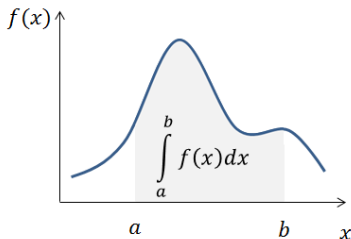
Propriedades

A função de distribuição acumulada $F(x)$ satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(\infty) = 1$
4. $F(a) \leq F(b)$ se $a \leq b$ ($F(x)$ é não decrescente)

Função de distribuição acumulada

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Se a derivada existir então

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Função de distribuição acumulada

Exemplo 7

Determine a função de distribuição acumulada correspondente à função densidade de probabilidade da variável aleatória X :

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}.$$

Utilizando a função de distribuição acumulada, calcule $P(X \geq 0.5)$ e $P(0.5 < X < 1)$.

- para $x > 0$, $F(x) = \int_0^x 3e^{-3x} dx = \left[3 \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^x = 1 - e^{-3x}$
- $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-3x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $P(X \geq 0.5) = 1 - P(X < 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - (1 - 0.223) = 0.223$
- $P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = 1 - 0.050 - (1 - 0.223) = 0.173$

Função de distribuição acumulada

Exemplo 8

Encontre a função densidade de probabilidade para a variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- para $x < 0$, $f(x) = 0$
- para $0 \leq x < 1$, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 1$
- para $x \geq 1$, $f(x) = 0$
- logo $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$

Sumário

Esperança matemática

1. Valor esperado de uma distribuição de probabilidade discreta
 - média
 - variância
 - desvio padrão
2. Valor esperado de uma distribuição de probabilidade contínua
 - média
 - variância
 - desvio padrão

Valor esperado

Média de X (μ)

Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ a sua função de probabilidade, o valor esperado da variável aleatória X , representado por μ ou $E(X)$, é dado por

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

Propriedades

O valor esperado $E(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $E(kX) = kE(X)$ com k constante
2. $E(k) = k$ com k constante
3. $E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$ sendo $g(X)$ uma qualquer função da variável aleatória X

Variância

Variância de X (σ^2)

Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ a sua função de probabilidade, a variância da variável aleatória X , representada por σ^2 ou $V(X)$, é dada por

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriedades

A variância $V(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $V(kX) = k^2 V(X)$ com k constante
2. $V(k) = 0$ com k constante

Valor esperado e variância

Exemplo 1

Considere a experiência em que duas meias são selecionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Encontre a média, a variância e o desvio padrão da variável W , número de meias castanhas extraídas da gaveta.

- | W | $f(w)$ |
|-----|--------|
| 0 | 6/56 |
| 1 | 30/56 |
| 2 | 20/56 |
- $\mu = E(W) = \sum_w w f(w) = 0 \times f(0) + 1 \times f(1) + 2 \times f(2) = 0 + 30/56 + 40/56 = 70/56 = 1.25$
 - $\sigma^2 = V(W) = E(W^2) - (E(W))^2$
 - $E(W^2) = \sum_w w^2 f(w) = 0^2 \times f(0) + 1^2 \times f(1) + 2^2 \times f(2) = 0 + 30/56 + 80/56 = 110/56 = 1.964$
 - $\sigma^2 = V(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = 110/56 - (70/56)^2 = 0.402$
 - $\sigma = \sqrt{V(W)} = 0.634$

Valor esperado e variância

Exemplo 1

No jogo da roleta existem 36 números inscritos, alternadamente, em casas **vermelhas** e **negras**. Além destes 36 números existem ainda duas casas **verdes**, com **0** e **00** inscritos.

Neste jogo existe a possibilidade de **apostar na cor negra ou na cor vermelha**:

- se **sair a cor em que apostou**, o jogador **recebe um prémio igual ao montante apostado**;
- se **sair uma das casas verdes**, o jogador **perde o dinheiro apostado** pois a banca recolhe tudo o que está em cima da mesa.

Suponha que um jogador **aposta 1000 euros na cor negra**. Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão do ganho por parte do jogador.



		0	00
1-18 Even	-1st 12-	1 2 3	4 5 6
		7 8 9	10 11 12
		13 14 15	16 17 18
19-36 Odd	-2nd 12-	19 20 21	22 23 24
		25 26 27	28 29 30
	-3rd 12-	31 32 33	34 35 36
		2 to 1	2 to 1

Valor esperado e variância

Exemplo 2

Seja X a variável aleatória que representa o resultado desta experiência (o ganho do jogador quando aposta numa das cores), então as probabilidades são:

- | X | $f(X)$ |
|-------|---|
| -1000 | 20/38 (o jogador perde e a banca ganha) |
| 1000 | 18/38 (o jogador ganha e a banca perde) |
- $\mu = E(X) = \sum_x x f(x) = -1000 \times 20/38 + 1000 \times 18/38 = -55$ euros, i.e., o ganho médio do jogador é -55 euros
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (-1000)^2 \times 20/38 + 1000^2 \times 18/38 = 1000000$
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1000000 - (-55)^2 = 996975$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 998.49$ euros, i.e., o desvio padrão do ganho do jogador é 998.49 euros

Valor esperado e variância

Exemplo 2

No jogo da roleta existe também a possibilidade de **apostar num de três grupos de 12 números dispostos em 3 colunas na mesa:**

- se **sair um dos números da coluna em que apostou**, o jogador **recebe um prémio igual ao dobro do montante apostado**;
- se **sair uma das casas verdes**, o jogador **perde o dinheiro apostado** pois a banca recolhe tudo o que está em cima da mesa.

Suponha que um jogador **aposta 1000 euros na primeira coluna**. Calcule para este tipo de aposta o valor esperado, a variância e o desvio padrão do ganho por parte do jogador.



		0		00	
1-18	-1st 12- Even	1	2	3	
		4	5	6	
<div><div></div><div></div></div>	-2nd 12- Odd	7	8	9	
		10	11	12	
<div><div></div><div></div></div>	-3rd 12- 19-36	13	14	15	
		16	17	18	
<div><div></div><div></div></div>		19	20	21	
		22	23	24	
<div><div></div><div></div></div>		25	26	27	
		28	29	30	
<div><div></div><div></div></div>		31	32	33	
		34	35	36	
		2 to 1	2 to 1	2 to 1	

Valor esperado e variância

Exemplo 2

Seja Y a variável aleatória que representa o resultado desta experiência (o ganho do jogador quando aposta numa das colunas), então as probabilidades são:

- | Y | $f(Y)$ |
|-------|---|
| -1000 | 26/38 (o jogador perde e a banca ganha) |
| 2000 | 12/38 (o jogador ganha e a banca perde) |
- $\mu = E(Y) = \sum_y yf(y) = -1000 \times 26/38 + 2000 \times 12/38 = -55$ euros, i.e., o ganho médio do jogador é -55 euros
 - $\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$
 - $E(Y^2) = \sum_y y^2 f(y) = (-1000)^2 \times 26/38 + 2000^2 \times 12/38 = 1947368$
 - $\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1947368 - (-55)^2 = 1944343$
 - $\sigma = \sqrt{V(Y)} = 1394.40$ euros, i.e., o desvio padrão do ganho do jogador é 1394.40 euros

O que será melhor apostar numa cor ou numa coluna?

- cor: $\mu = -55$ euros e $\sigma = 998.49$ euros
- coluna: $\mu = -55$ euros e $\sigma = 1394.40$ euros

Valor esperado

Média de X (μ)

Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ a sua função densidade de probabilidade, o valor esperado da variável aleatória X , representado por μ ou $E(X)$, é dado por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Propriedades

O valor esperado $E(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $E(kX) = kE(X)$ com k constante
2. $E(k) = k$ com k constante
3. $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ sendo $g(X)$ uma qualquer função da variável aleatória X

Variância

Variância de X (σ^2)

Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ a sua função densidade de probabilidade, a variância da variável aleatória X , representada por σ^2 ou $V(X)$, é dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \\ &= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

Propriedades

A variância $V(X)$ tem as seguintes propriedades:

1. $V(kX) = k^2 V(X)$ com k constante
2. $V(k) = 0$ com k constante

Valor esperado e variância

Exemplo 3

Considere a seguinte função densidade de probabilidade para a variável aleatória X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1) & 2 < x < 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ e o desvio padrão.

- $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^4 x \frac{1}{8}(x+1)dx = \frac{1}{8} \int_2^4 (x^2 + x)dx = \frac{1}{8} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \frac{1}{8} \left(\frac{64}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{37}{12} = 3.083$
- $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_2^4 x^2 \frac{1}{8}(x+1)dx = \frac{1}{8} \int_2^4 (x^3 + x^2)dx = \frac{1}{8} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{1}{8} \left(64 + \frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{59}{6}$
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{59}{6} - \left(\frac{37}{12} \right)^2 = \frac{47}{144} = 0.326$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 0.571$