Estatística aplicada

Lino Costa

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
lac@dps.uminho.pt

Ano letivo 2018/2019

Sumário

Conceitos de probabilidades

Espaços amostrais

Experiência
qualquer processo de observação ou medida

Resultado
resultado da experiência

Espaço amostral (S)
conjunto de todos os resultados possíveis duma experiência

- **Espaço amostral discreto** - conjunto de resultados finito (ou infinito contável)
- **Espaço amostral contínuo** - conjunto de resultados infinito e inumerável

Elemento ou ponto amostral
cada resultado do espaço amostral

Acontecimento (A) (ou evento)
subconjunto do espaço amostral de uma experiência aleatória

Espaços amostrais

Exemplo 1

Experiência

lançamento de uma moeda

Resultado

cara ou coroa

Espaço amostral discreto (S)

$S = \{C, c\}$

Elemento ou ponto amostral

C (cara); c (coroa)

Acontecimento (A)

$A = \{C\}$ (sair cara)

Espaços amostrais

Exemplo 2

Experiência
tempo de vida de uma lâmpada (em horas)

Resultado
tempo de vida (X)

Espaço amostral contínuo (S)
$S = \{x : x \geq 0\}$

Elemento ou ponto amostral
$x \in \{x : x \geq 0\}$

Acontecimento (A)
$A = \{x : x > 5000\}$ (tempo de vida superior a 5000 horas)

Operações com acontecimentos

União ($A \cup B$)

combina todos os resultados de A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos

Interseção ($A \cap B$)

inclui os resultados comuns a A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A e B

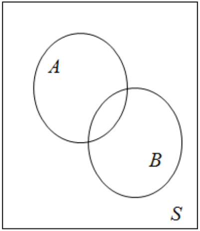
Complementar ($\bar{A}$)

contém todos os resultados que não estão em A, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A

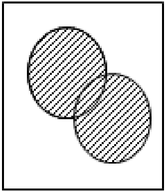
Postulados de Boole

1. para cada par de acontecimentos A e B no espaço amostral S, há um único evento $A \cup B$ e um único evento $A \cap B$ em S
2. Lei comutativa: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
3. Lei associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. Lei distributiva: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
5. Leis de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
6. $A \cap S = A$, $A \cup \emptyset = A$
7. $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = S$

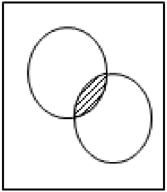
Diagramas de Venn



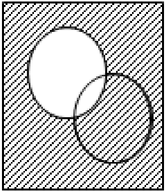
Um retângulo representa o espaço amostral S onde se podem representar acontecimentos individuais (e.g., A e B)



$A \cup B$

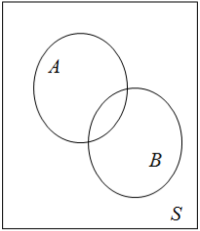


$A \cap B$

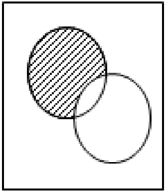


$\bar{A}$

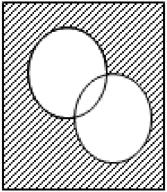
Diagramas de Venn



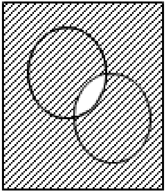
Um retângulo representa o espaço amostral S onde se podem representar acontecimentos individuais (e.g., A e B)



$A \cap \bar{B}$



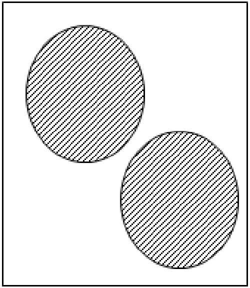
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

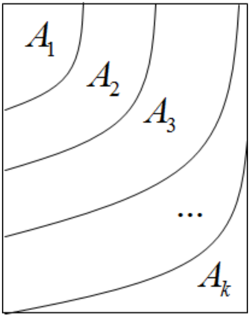
Acontecimentos mutuamente exclusivos

A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos se não têm resultados comuns, i.e., $A \cap B = \emptyset$



Partição do espaço amostral

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ acontecimentos mutuamente exclusivos constituem uma partição do espaço amostral S, se $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k = S$



Probabilidade de um acontecimento

Lei de Laplace

Se, numa experiência aleatória, o espaço amostral inclui N resultados com iguais probabilidades $\frac{1}{N}$ (resultados equiprováveis), dos quais um deve ocorrer e n são considerados favoráveis (ou "sucesso"), então a probabilidade de se obter "sucesso" (A) é dada por $\frac{n}{N}$, i.e.,

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

em que n é o número de casos favoráveis e N é o número de casos possíveis

Exemplo 3

Qual a probabilidade de tirar um ás de um baralho de cartas?

- a probabilidade de tirar cada uma das 52 cartas é igual a $\frac{1}{52}$
- $N = 52$ e $n = 4$
- $P(A) = \frac{4}{52}$

Probabilidade de um acontecimento

Lei dos grandes números

Para um grande número de repetições de uma experiência aleatória, a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade do acontecimento.

Exemplo 4

Lançou-se um dado 100 vezes, tendo-se registado 15 vezes o valor "6". Indique uma aproximação à probabilidade de sair "6".

- $P(A) \approx \frac{15}{100}$

Se o dado for equilibrado e lançado aleatoriamente (sair cada uma das faces do dado são acontecimentos equiprováveis), qual a probabilidade de sair "6"?

- $N = 6$ e $n = 1$
- $P(A) = \frac{1}{6}$

Probabilidade de um acontecimento

Propriedades

Para um qualquer acontecimento A de um espaço amostral S,

- $P(S) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, onde $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são acontecimentos mutuamente exclusivos
- $P(\emptyset) = 0$

Exemplo 5

Se uma moeda equilibrada é lançada duas vezes com faces H (coroa) e T (cara), qual a probabilidade de obter pelo menos uma coroa?

- $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $A = \{HH, HT, TH\}$
- $P(A) = P(HH) + P(HT) + P(TH) = \frac{3}{4}$

Probabilidade de um acontecimento

Exemplo 6

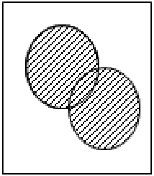
Um dado está viciado por forma que num lançamento a ocorrência de números ímpares seja duplamente mais provável do que números pares. Se o acontecimento A é definido como a ocorrência um número maior que 3 num único lançamento, calcule $P(A)$.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{4, 5, 6\}$
-

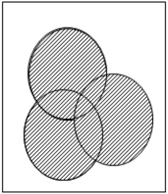
face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$2p$	p	$2p$	p	$2p$	p

- $P(S) = 1$ logo $2p + p + 2p + p + 2p + p = 9p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{9}$
- $P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Probabilidade da união de acontecimentos



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = &\ P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional $P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrência do acontecimento B dado que ocorreu o acontecimento A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ onde } P(A) > 0$$

Exemplo 7

Considere o dado viciado do Exemplo 6. Qual é a probabilidade de que o número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito?

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 4\}$ (quadrado perfeito)
-

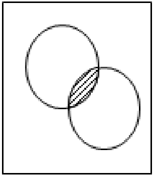
face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- $P(B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

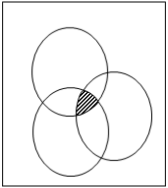
E qual a probabilidade que seja um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

- $A = \{4, 5, 6\}$ (maior do que 3) e $B \cap A = \{4\}$ (quadrado perfeito e maior do que 3)
- $P(B \cap A) = \frac{1}{9}$, $P(A) = \frac{4}{9}$ e $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$

Probabilidade da interseção de acontecimentos



$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$



$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Probabilidade da interseção de acontecimentos

Exemplo 8

Uma caixa contém 20 fusíveis dos quais 5 são defeituosos. Se 3 fusíveis são selecionados e removidos sucessivamente sem reposição, qual a probabilidade de que os 3 fusíveis sejam defeituosos?

- primeira extração: $P(D_1) = \frac{5}{20}$
- segunda extração: $P(D_2|D_1) = \frac{4}{19}$
- terceira extração: $P(D_3|D_1 \cap D_2) = \frac{3}{18}$
- $P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1)P(D_2|D_1)P(D_3|D_1 \cap D_2) = \frac{1}{114}$

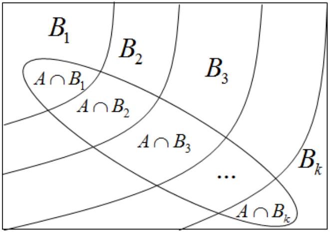
Probabilidade condicional

- **Regra da multiplicação**

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

- **Probabilidade total**

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$



Independência

Dois acontecimento são independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afecta a probabilidade de ocorrência do outro.

Independência de 2 acontecimentos

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Independência de k acontecimentos

Os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são independentes se e só se a probabilidade da interseção de quaisquer destes eventos igualar o produto das respetivas probabilidades

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \quad \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_k)$

Teorema de Bayes

Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ são mutuamente exclusivos e constituem uma partição do espaço amostral S, então para qualquer acontecimento A em S,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, k$$

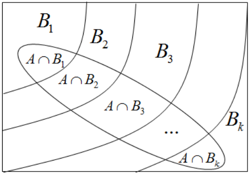
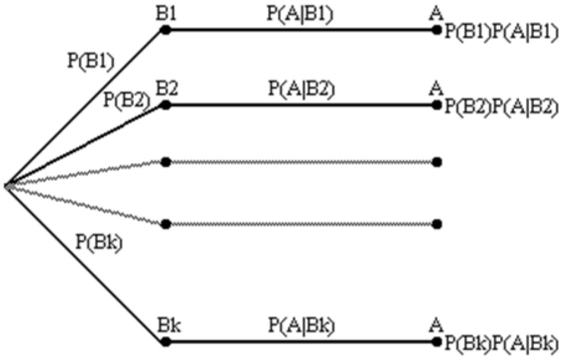


Diagrama em árvore

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, k$$



Teorema de Bayes

Exemplo 9

Considere 3 fábricas A, B e C, que produzem um determinado produto em lotes de 100, 200 e 300 peças, respetivamente. Um lote de cada fábrica é selecionado e as peças são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar peças defeituosas em cada uma das fábricas seja respetivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se uma peça ao acaso, calcule as seguintes probabilidades:

- ser defeituosa;
- ser da fábrica A, sabendo que a peça é defeituosa.

- $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$
- $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$
- $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$
- $P(D) = \frac{1}{6}\ \frac{10}{100} + \frac{2}{6}\ \frac{5}{100} + \frac{3}{6}\ \frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$
- $P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$
- $P(A|D) = \frac{\frac{1}{6}\ \frac{1}{10}}{\frac{1}{6}\ \frac{10}{100}+\frac{2}{6}\ \frac{5}{100}+\frac{3}{6}\ \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{600}} = \frac{10}{600}\ \frac{600}{23} = \frac{10}{23}$