

**Exame de Cálculo**

Duração: 120 min.

Nome: \_\_\_\_\_ Nr.: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

**Apresente todos os cálculos efectuados.**1. Considere a função  $f(x) = 7\pi - 15 \arccos(\frac{x}{3} + 2)$ .

- (a) Calcule o seu domínio e contradomínio.
- (b) Caracterize a função inversa.

2. Considere a função  $f(x) = \ln(x + 1)$ .

- (a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{f(x)}$ .
- (b) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2, centrado em  $x = 0$  para a função  $f(x)$ .
- (c) Utilize a alínea anterior para calcular uma aproximação ao valor de  $\ln(1.1)$ .

3. Considere o segmento de parábola  $y = 4x - x^2$  entre  $A(0, 0)$  e  $B(3, 3)$ .

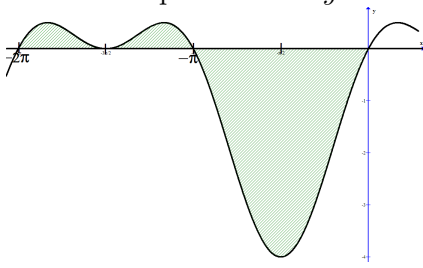
- (a) Determine o valor intermédio  $c$  a que se refere o Teorema de Lagrange no intervalo indicado.
- (b) Escreva uma equação tangente ao gráfico da parábola e paralela à corda  $[AB]$  (caso não tenha encontrado o valor de  $c$  atribua-lhe o valor de 1).

Calcule as primitivas das seguintes funções:

- (a)  $\frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- (b)  $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ .

4. Calcule o valor do integral  $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ . Sugestão: utilize a substituição  $\sqrt{x} = t$ .

5. Escreva o integral (ou a soma de integrais) que permite calcular a área da região sombreada  $(-2\pi$  a  $0)$ , limitada pelas curvas  $y = 2 \sin x - 2 \sin^2 x$  e  $y = 0$ .



6. Considere o arco da curva de equação  $y = 2 \sin x - 2 \sin^2 x$  (exercício anterior), entre os pontos  $A = (0, 0)$  e  $B = (-\pi, 0)$ . Escreva o integral (ou a soma de integrais) que permite calcular o comprimento deste arco de curva.

7. Considere a região  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 6 \wedge y \geq x^2 \wedge x \geq 0\}$ .

- Faça o esboço da região  $R$ .
- Indique o integral (ou a soma de integrais) que lhe permite calcular o valor da área da referida região.
- Indique o integral (ou a soma de integrais) que lhe permite calcular o valor do volume gerado quando a referida região roda em torno de  $y = 0$ .
- Indique o integral (ou a soma de integrais) que lhe permite calcular o valor do volume gerado quando a referida região roda em torno de  $y = 6$ .

8. Calcule o valor da constante  $A > 0$  de modo que o integral  $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  tenha o valor de 8 unidades.

9. Analise a natureza das seguintes séries e calcule a sua soma, se possível:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(4n)}{18}$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{e^n}$ .