Capítulo 2 – Cinemática da partícula material

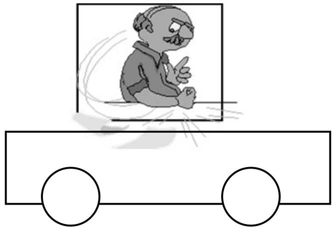
Introdução

O repouso e o movimento de um corpo são conceitos relativos:

- corpo está em movimento se a sua posição relativa a outro objeto varia com o tempo
- corpo está em repouso se a sua posição relativa a outro objeto não varia com o tempo.

A

B

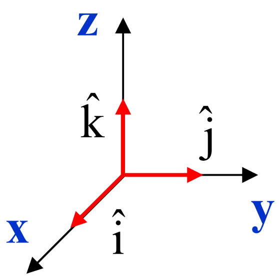


O observador A verifica que o carro se afasta dele.

O observador B verifica que o observador A se afasta dele.

Assim, o primeiro problema que se põe no estudo de um movimento é o da escolha de uma referência.

Tomamos habitualmente como referência a origem de um sistema de três eixos ortogonais - que constitui um referencial.



O lugar geométrico dos pontos do espaço que vão sendo sucessivamente ocupados pela partícula designa-se por trajetória.

Com base na trajetória podemos classificar os movimentos possíveis da partícula como:

Movimentos
- **retilíneos**
- **curvilíneos**
  - **no plano**
  - **no espaço**

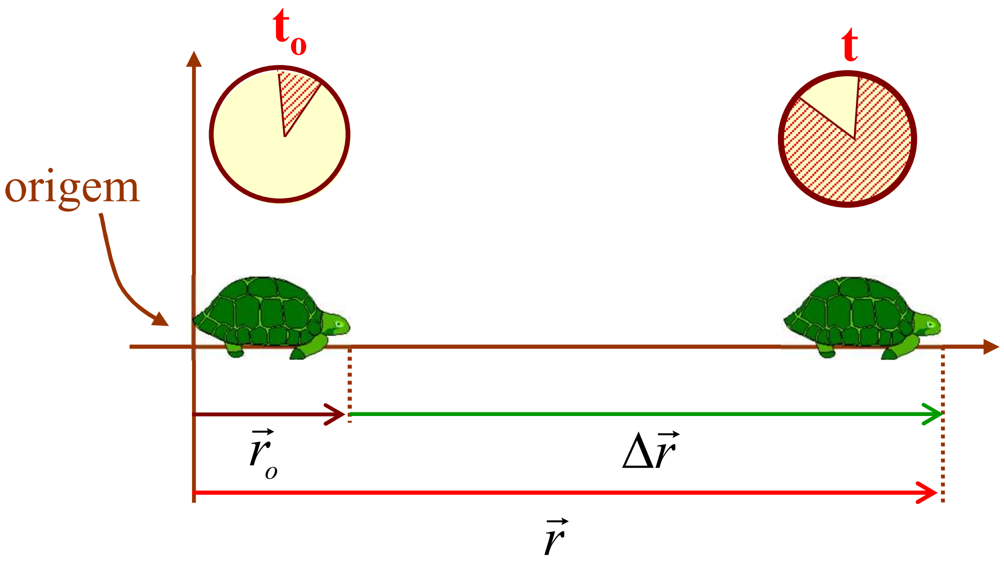
Movimentos retilíneos

Vetor posição; Deslocamento

O estudo do movimento retilíneo simplifica-se, se fizermos coincidir um dos eixos do referencial com a direção do movimento.

A posição da partícula é, em cada instante, caracterizada pelo vetor posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$$



O **vetor deslocamento** traduz a mudança de posição de um objeto.

É caracterizado por:

direção	- da reta suporte do vetor
sentido	- aponta da posição inicial para a posição final
módulo	- menor distância entre a posição inicial e final

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

unidade SI: metro (m)

Velocidade média

Velocidade média da partícula define-se, no intervalo de tempo [t_1, t_2], como o quociente do deslocamento pelo tempo que o levou a percorrer:

$$v_{média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}} \Leftrightarrow \vec{v}_{média} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{i}$$

unidade SI: (m/s)

Admitindo que $t_2 > t_1$ teremos

se $v_{med} > 0 \Rightarrow x(t_2) > x(t_1)$	o movimento tem o sentido positivo do eixo Ox.
se $v_{med} < 0 \Rightarrow x(t_2) < x(t_1)$	o movimento tem o sentido negativo do eixo Ox.

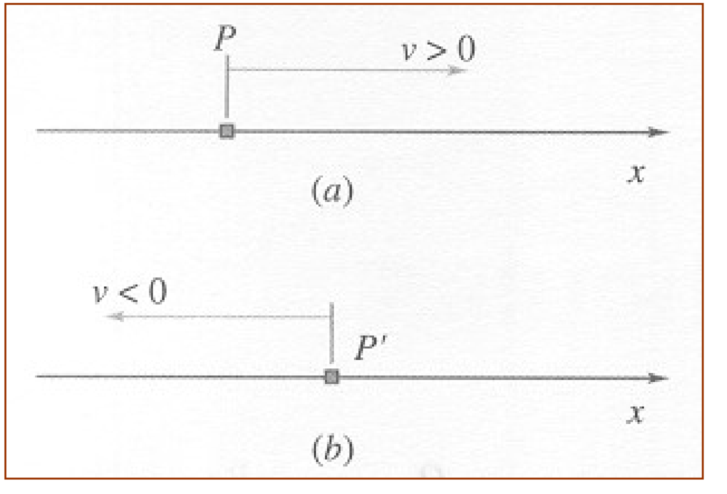
Velocidade instantânea

A velocidade média, devido a ser um valor médio, não contém informação detalhada sobre a mudança de posição.

Quanto menores forem os intervalos de tempo considerados, mais detalhada é a informação sobre a velocidade.

A velocidade instantânea, ***v***, indica a velocidade, a direção e o sentido do movimento de um objeto em cada instante. É igual ao valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo se torna muito pequeno. Isto é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)\hat{i} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i}$$



Aceleração média e instantânea

Universidade do Minho

Aceleração: taxa de alteração da velocidade instantânea.

Aceleração média num dado intervalo de tempo, $[t_1, t_2]$:

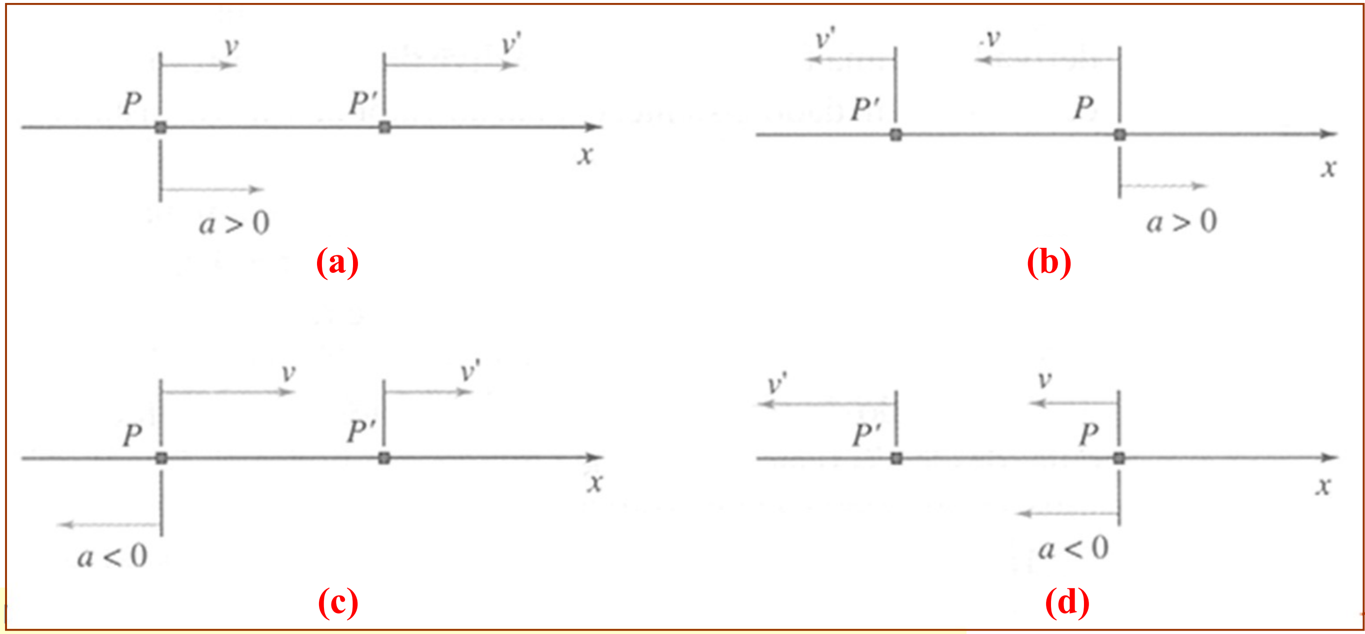
$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Aceleração instantânea é o valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo tende para zero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Supondo novamente que $t_2 > t_1$, teremos:

- Se $a > 0 \Rightarrow v(t_2) > v(t_1)$:
  - Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas, isto significa que a velocidade aumenta, isto é, o movimento é acelerado. (a)
  - Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas, $v(t_2) > v(t_1)$ significa que o valor absoluto (a grandeza ou módulo) da velocidade em t_2 é menor do que em t_1 e o movimento é retardado. (b)
- Se $a < 0 \Rightarrow v(t_2) < v(t_1)$:
  - Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas a velocidade está a decrescer e o movimento é portanto retardado. (c)
  - Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas e a velocidade (em grandeza ou módulo) está a aumentar e o movimento será acelerado. (d)



- Um movimento em que existe aceleração diz-se **variado**.
- Se a aceleração é constante dir-se-á **uniformemente variado (acelerado ou retardado)**.
- No caso particular de ser a = 0 isto significa que a velocidade não varia e o movimento diz-se então **uniforme**.

Resumo: movimento retilíneo

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$ **Equação de movimento**

$\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i}$ **Velocidade**

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{i}$ **Aceleração**

O deslocamento, entre dois instantes, t_1 e t_2, é dado pela diferença das posições nestes dois instantes:

$$\Delta\vec{r} = \left[x(t_2) - x(t_1)\right]\hat{i}$$

Deslocamento

E que pode ser bastante diferente do espaço percorrido, pois a partícula pode inverter o sentido do movimento. Assim, para determinar o espaço percorrido temos que determinar os instantes em que a velocidade se anula, $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$, e somar os espaços percorridos para todos os intervalos:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \left| x(t_i) - x(t_{i-1}) \right|$$

Espaço percorrido

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

Caso se desconheça a velocidade, conhecendo a aceleração, a relação anterior pode ser integrada. Para isso é necessário o conhecimento de um valor da velocidade (v_0 por exemplo) para um dado instante, t_0. Temos então:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \quad \Longrightarrow \quad v - v_0 = \int_{0}^{t} adt$$

Caso a aceleração seja constante o integral anterior reduz-se à seguinte equação:

$$v(t) = v_0 + at$$

A variação temporal da velocidade é uma reta, onde v_0 é a ordenada na origem (t=0) e a aceleração é o declive.

Do mesmo modo a equação do movimento pode ser obtida por integração, uma vez conhecida a lei das velocidades. Tem-se:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

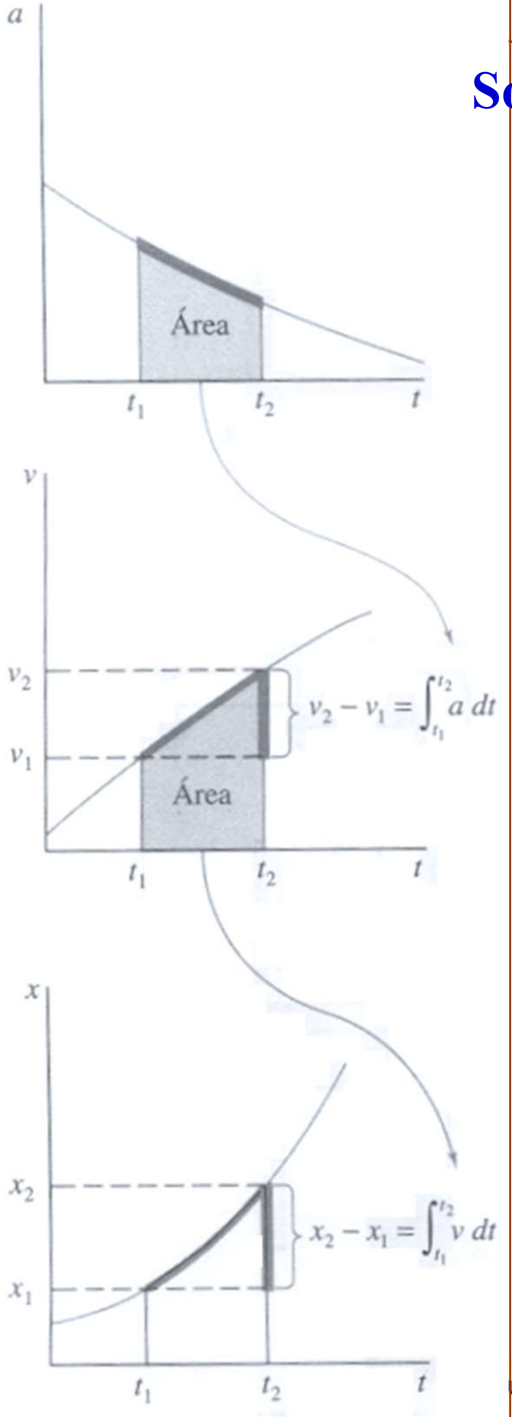
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} vdt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \int_{0}^{t} vdt$$

Da página anterior temos que **$v(t)=v_0+at$**, caso a aceleração seja constante.
Então ao substituirmos esta expressão no integral anterior temos:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2}$$

Equação de movimento

A variação temporal da posição é parabólica, onde x_0 é a ordenada na origem (t=0)
A velocidade é uma reta tangente em cada instante da curva de x(t).



Solução gráfica de problemas de movimento retilíneo

Se for dada a aceleração de um corpo em função do tempo, a=f(t), é possível determinar a sua velocidade em função do tempo.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dv = a\,dt$$

integrando os dois membros, e considerando que entre t_1 e t_2 a velocidade varia de v_1 até v_2:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \quad \Leftrightarrow \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

Esta expressão indica que a área medida sob a curva **a-t** entre os instantes t_1 e t_2 é igual à variação da velocidade durante o mesmo intervalo de tempo.

Considerando a expressão:

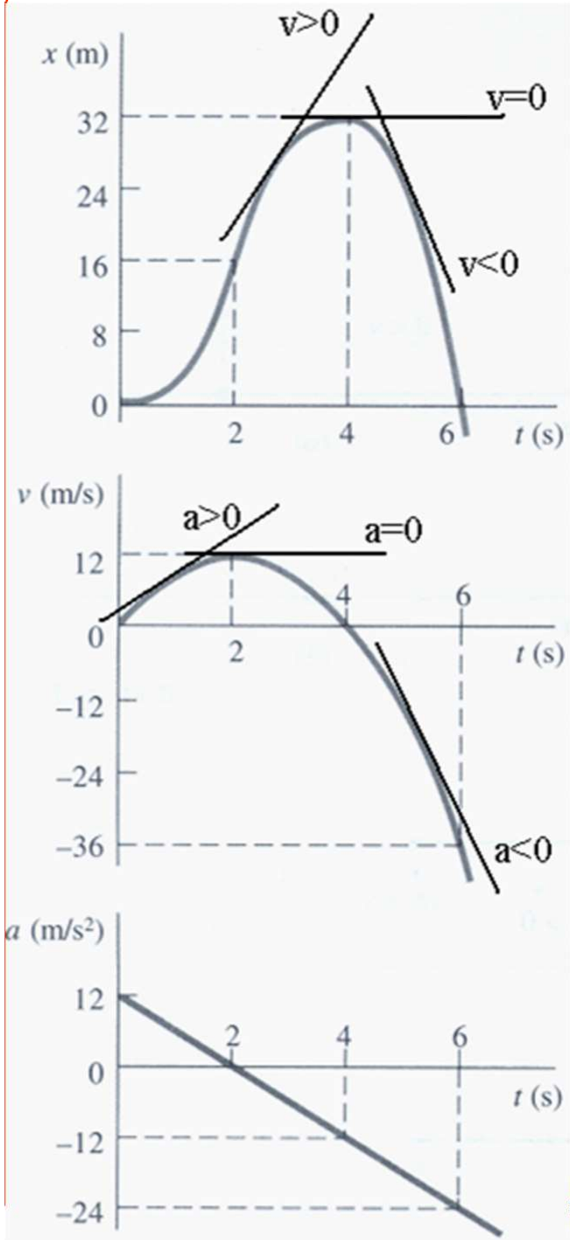
$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dx = v\,dt$$

integrando os dois membros, e considerando que no intervalo de tempo entre t_1 e t_2 a posição varia de x_1 até x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

Esta expressão indica que a área medida sob a curva **v-t** entre os instantes t_1 e t_2 é igual à variação da posição durante o mesmo intervalo de tempo.

Exemplo 1: Considere uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta e cuja posição é definida pela equação: $x(t)=6t^2 - t^3$



- A velocidade em função do tempo pode ser obtida por:

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=12\,t-3\,t^2$$

- A velocidade também pode ser obtida pela tangente em cada ponto no gráfico da posição em função do tempo.
- A aceleração em função do tempo pode ser obtida por:

$$a=\frac{dv}{dt}=12-6\,t$$ (não é constante!!)

- A aceleração também pode ser obtida pela tangente em cada ponto no gráfico da velocidade em função do tempo.

Caracterização do movimento da partícula:

entre t=0 e t=2s
aceleração positiva, velocidade aumenta;
t=2s
aceleração nula;
entre t=2s e t=4s
velocidade diminui, aceleração negativa;
t=4s
velocidade nula, posição atinge valor máximo;
entre t=4s e t=6s
velocidade diminui, a partícula volta para trás;

Exemplo 2:

Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha reta com a velocidade indicada na figura. Sabendo que a partícula parte da posição x_0=40 m (em t=0s), calcule:

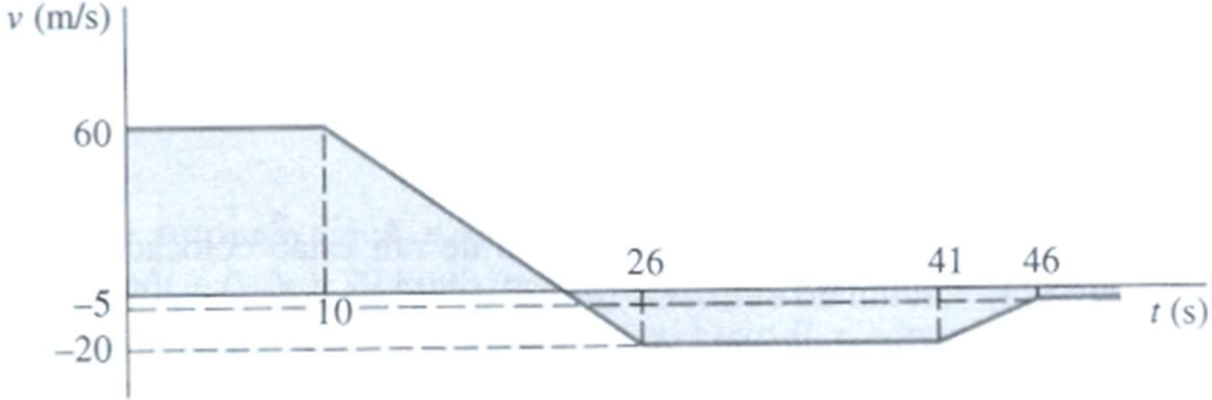
a) o instante t, quando a velocidade é zero.

b) a posição da partícula para t = 26 s,

c) a distância percorrida pela partícula no intervalo [0; 26] s.

d) a velocidade média da partícula no intervalo [10; 26] s.

e) a velocidade instantânea para t = 20 s.



a) $a = -5\ m/s^2$; $v = v_0 + a.(t-t_0)$; $t = 22$ s;

b) $\Delta x = 920$ m ; $x = x_0 + \Delta x = 960$ m;

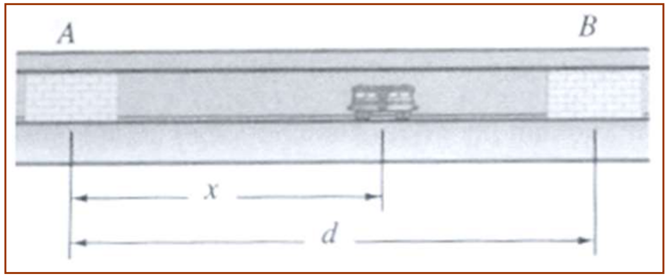
c) $S = \Delta x_{[0;\,10]} + \Delta x_{[10;\,22]} + |\Delta x_{[22;\,26]}| = 600 + 360 + 40 = 1000$ m;

d) $v_m = \Delta x/\Delta t$; $v_m = 320/16 = 20$ m/s;

e) $v = v_0 + a.(t-t_0)$; utilizando $v_0 = 60$ m/s e t_0=10 s; $v = 10$ m/s.

Exemplo 3:

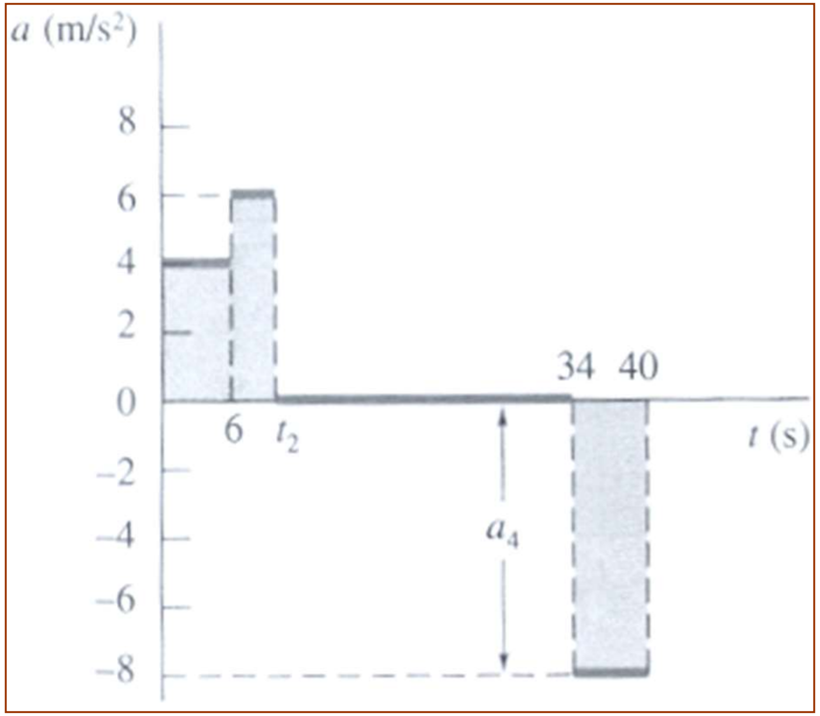
Uma carruagem de metro parte da estação A, ganhando velocidade a uma razão de 4 m/s^2 durante 6 s, e depois a uma razão de 6 m/s^2 até que alcança a velocidade de 48 m/s. A carruagem mantêm a velocidade até se aproximar da estação B, sendo então aplicados os travões, o que provoca uma desaceleração constante que conduz à paragem em 6 s. O tempo total gasto no percurso entre A e B é de 40 s. Desenhe as curvas a-t, v-t, e x-t e determine a distância entre as estações A e B.



Curva aceleração - tempo

variação em v = área sob a curva **a-t**

$0 < t < 6$	$v_6 - 0 = (6\text{ s})(4\text{ m/s}^2) = 24\text{ m/s}$
$6 < t < t_2$	$48\text{ m/s} - 24\text{ m/s} = (t_2 - 6)(6\text{ m/s}^2)$
	$\mathbf{t_2 = 10\text{ s}}$
$t_2 < t < 34$	aceleração nula
$34 < t < 40$	$0 - 48\text{ m/s} = (6\text{ s})\, a_4$
	$\mathbf{a_4 = -8\text{ m/s}^2}$



$$v = v_0 + at$$

Curva velocidade - tempo

A aceleração é constante, pelo que a curva v-t é construída com segmentos de recta que ligam os pontos onde a velocidade é conhecida.

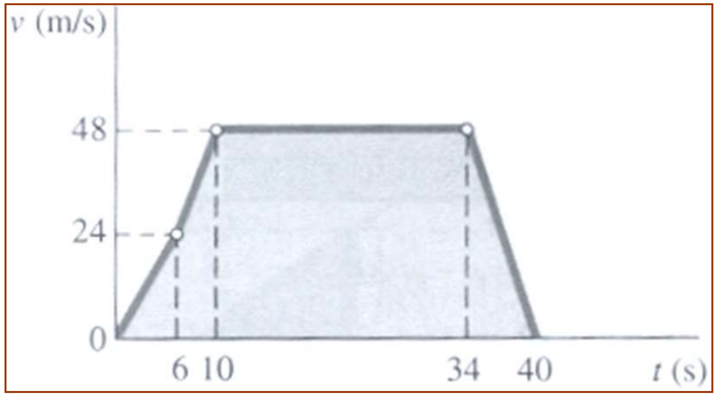
variação em x = área sob a curva **v-t**

$0 < t < 6$ $\quad x_6 - 0 = 0{,}5(6\cdot 24) = 72$ m

$6 < t < 10$ $\quad x_{10} - x_6 = 24\cdot 4 + 0{,}5\cdot 6\cdot 4^2 = 144$ m

$10 < t < 34$ $\quad x_{34} - x_{10} = 48\cdot 24 = 1152$ m

$34 < t < 40$ $\quad x_{40} - x_{34} = 48\cdot 6 - 0{,}5\cdot 8\cdot 6^2 = 144$ m



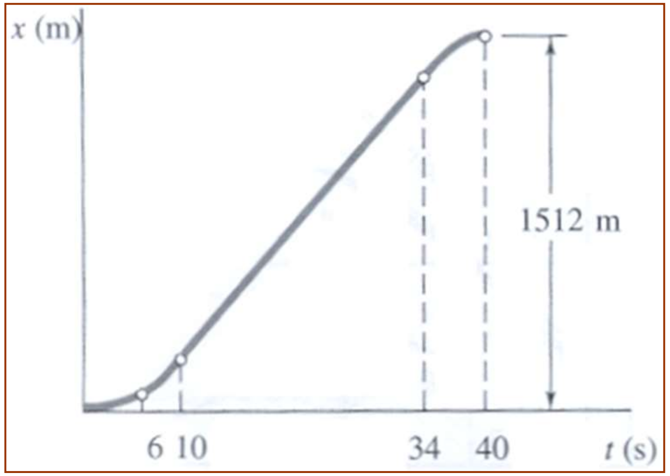
$d = x_{40} - 0 = 1512$ m

$$\acute{A}rea_{triângulo} = \frac{1}{2} base \times altura; \acute{A}rea_{rectângulo} = base \times altura$$

ou $$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Curva posição - tempo

Entre $10 < t < 34$ tem-se um segmento de reta dado que o movimento é uniforme (v = constante)

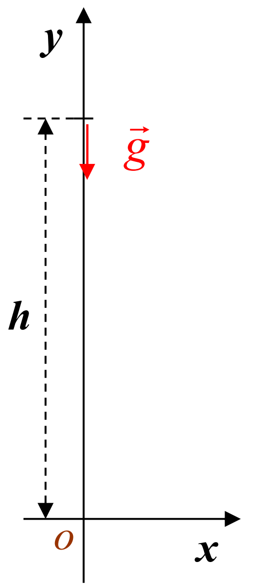


Nos outros intervalos os pontos determinados devem ser ligados por arcos de parábola dado o movimento ser uniformemente variado.

Movimento de queda livre

É um movimento retilíneo com uma aceleração constante, igual à aceleração da gravidade, g, dirigida de cima para baixo. Seja h a altura da qual a partícula cai. O sentido do movimento é descendente. Escolhamos o eixo Oy com a direção do movimento. A escolha da origem do eixo e do seu sentido positivo é arbitrária. Considerando o sistema de coordenadas indicado na figura:

$$\vec{a} = -\vec{g}; \rightarrow g = 9,8 m/s^2$$



Partícula libertada da altura $h \Rightarrow$ $t = 0,\ v_0 = 0$

a=constante

$$v_y = v_{0y} + a_y t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_y = -g.t}$$

Conhecendo a velocidade, podemos obter a equação de movimento em y:

a=constante $\Rightarrow$ $$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = h - \tfrac{1}{2}\, g.t^2}$$

Exemplo 4: Um homem atira o chapéu ao ar, de uma altura de 2 m, duas vezes: da primeira com uma velocidade inicial de 5.1 m/s e da segunda com uma velocidade inicial de 14.7 m/s. ($g=9,8\ m/s^2$)

a) Quanto tempo demora o chapéu a atingir a altura máxima. Qual o valor dessa altura máxima?

$$v_y = v_{0y} + a_y t \Rightarrow 0 = v_0 - gt \Rightarrow t_{h\max} = \frac{v_0}{g}$$

$$t_{h\max} = 0{,}52\ s \quad e \quad t_{h\max} = 1{,}5\ s$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y_{\max} = 2 + v_{0y}t_{h\max} - 4{,}9t_{h\max}^{\ 2}$$

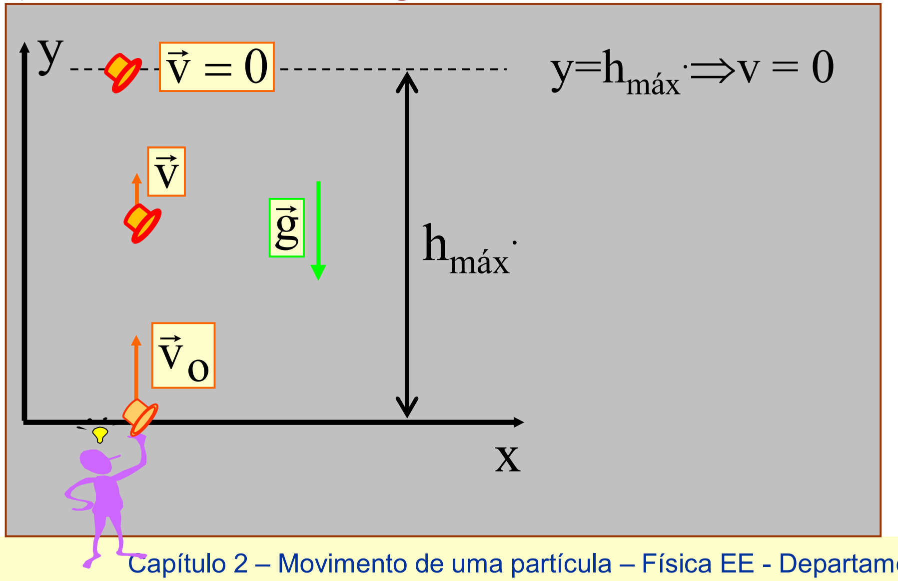
$$y_{\max} = 3{,}33\ m \quad e \quad y_{\max} = 13{,}03\ m$$

b) Quanto tempo fica o chapéu no ar?

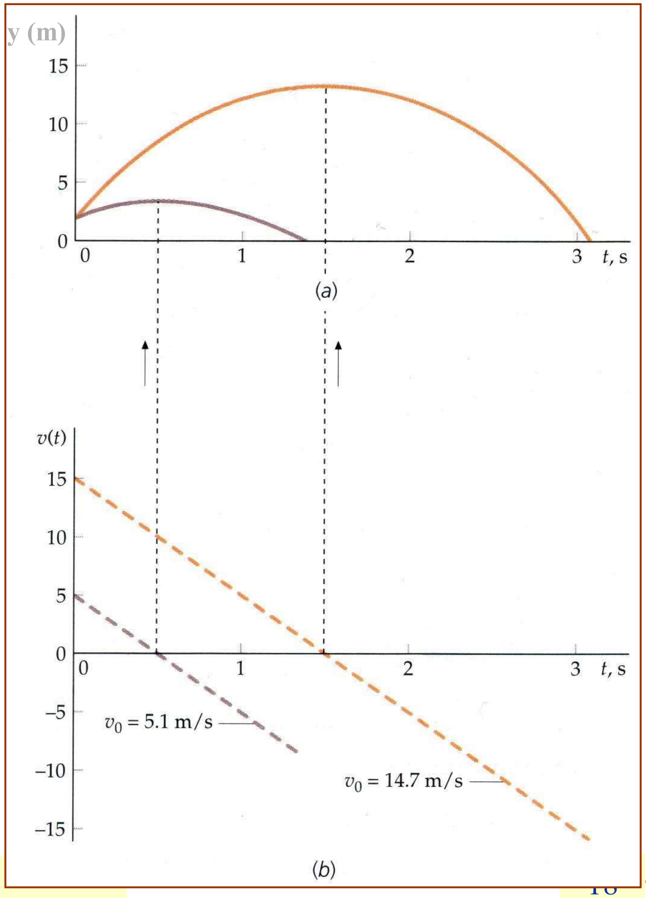
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow 0 = 2 + v_{0y}t - 4{,}9t^2$$

t= 1,34 s
t= 3,13 s

c) Faça uma análise gráfica do movimento.



Análise gráfica do movimento



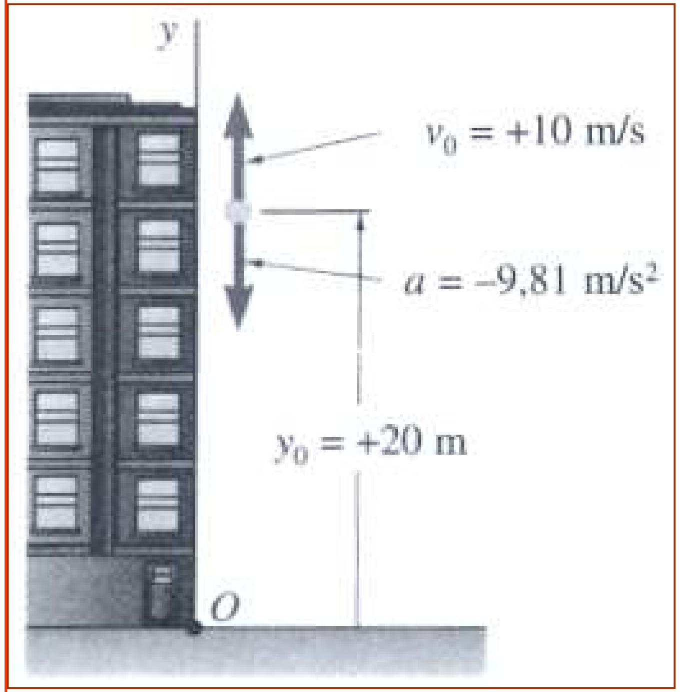
Exemplo 5:

Uma bola é arremessada com uma velocidade de 10 m/s dirigida verticalmente para cima, a partir de uma janela localizada 20 m acima do solo. Sabendo que a aceleração da bola é a da gravidade - constante e igual a 9,8 m/s^2 para baixo, determine:

a) a velocidade v e a altura y da bola em qualquer instante,

b) a altura máxima atingida pela bola e o correspondente valor de t

c) o instante em que a bola toca o solo e a correspondente velocidade. Trace os gráficos v-t e y-t.



a) a velocidade v e a altura y da bola em qualquer instante

$a = -g = -9{,}8\ m/s^2 \Rightarrow$ constante

$v = v_0 - 9{,}8t$

Sabendo que $v_0 = 10$ m/s $\Rightarrow$ $\mathbf{v = 10 - 9{,}8t}$

Sabendo que $y_0 = 20$ m e que:

$y = y_0 + 10t - (1/2)9{,}8t^2 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 20 + 10t - 4{,}9t^2}$

equação do movimento

Exemplo 5 (cont.):

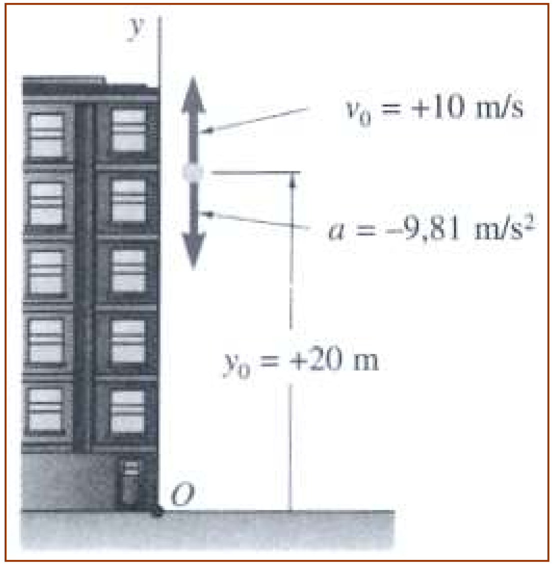
b) a altura máxima atingida pela bola e o correspondente valor de t:

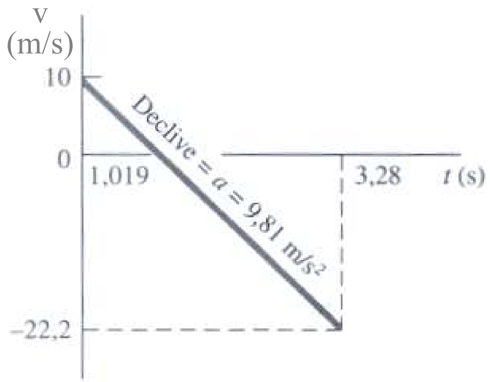
a bola atinge a altura máxima quando v=0:

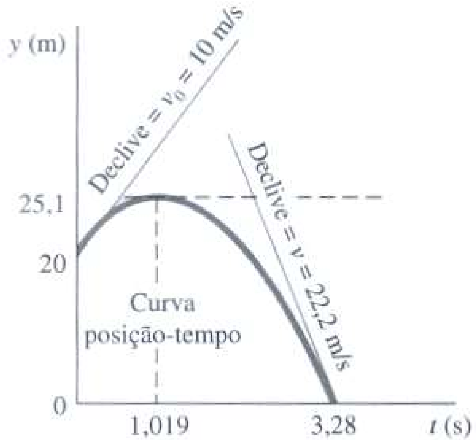
$0 = 10 - 9{,}8\,t \;\Rightarrow\;$ **$t = 1{,}02$ s**

considerando a expressão da altura em função do tempo:

$y=20 + 10(1{,}02) - 4{,}9(1{,}02)^2 \;\Rightarrow\;$ **$y = 25{,}1$ m**







c) o instante em que a bola toca o solo e a correspondente velocidade

a posição do solo é y=0:

$0 = 20 + 10t - 4{,}9t^2$

$t = \cancel{-1{,}24}$ s ou **$t = 3{,}28$ s**

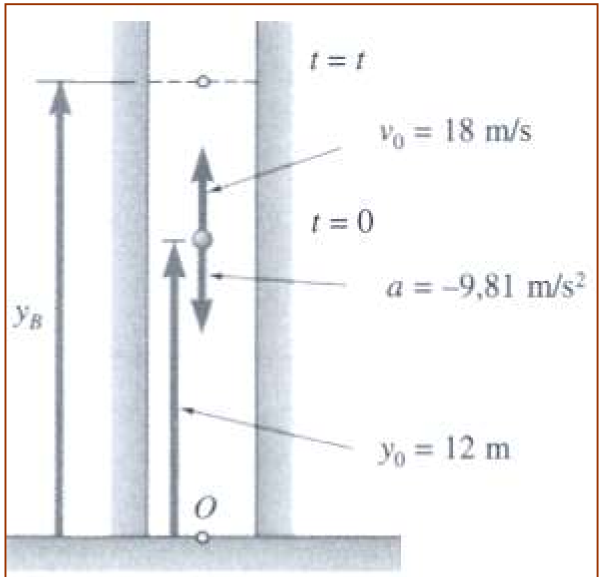
$v = 10 - 9{,}8(3{,}28) \;\Rightarrow\;$ **$v=-22{,}2$ m/s (para baixo)**

Exemplo 6:

Uma bola é arremessada verticalmente para cima, com uma velocidade inicial de 18 m/s, a partir do nível de 12 m do poço de um elevador. No mesmo instante, uma plataforma elevatória passa pelo nível dos 5 m, com uma velocidade constante de 2 m/s. Determine:

a) quando e onde a bola atingirá o elevador.

b) a velocidade da bola relativamente ao elevador, quando a bola o atinge.



a) quando e onde a bola atingirá o elevador

movimento da bola

A bola movimenta-se com uma aceleração constante

$$a = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

$$y_{0\,bola} = 12 \text{ m} \qquad v_{0\,bola} = 18 \text{ m/s}$$

as equações correspondentes para a posição e velocidade em função do tempo são:

$$v_{bola} = v_0 + a\,t \qquad v_{bola} = 18 - 9{,}8\,t$$

$$y_{bola} = y_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad y_{bola} = 12 + 18\,t - 4{,}9\,t^2$$

movimento do elevador

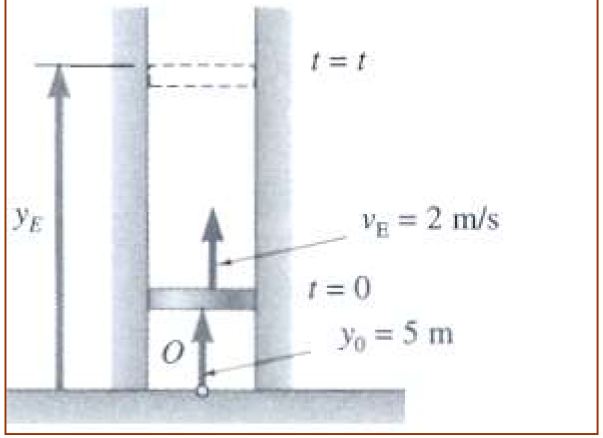
O elevador movimenta-se com uma velocidade constante (a=0)

$$v_{elev} = 2 \text{ m/s}$$

$$y_{0elev} = 5 \text{ m}$$

a equação correspondente para a posição do elevador em função do tempo é:

$$y_{elev} = y_{0\,elev} + v_{elev}\,t \qquad y_{elev} = 5 + 2\,t$$



Exemplo 6 (cont.):

quando a bola atinge o elevador

$$y_{elev} = y_{bola}$$

$$5 + 2\,t = 12 + 18\,t - 4{,}9\,t^2$$

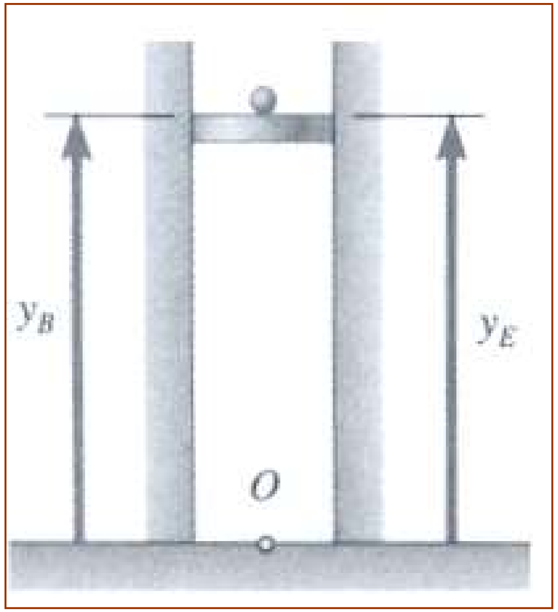
$\cancel{t = -0{,}39\ s}$ e $\mathbf{t = 3{,}65\ s}$

só a solução positiva tem sentido físico.

a posição em que ocorre a colisão:

$$y_{elev} = 5 + 2\,(3{,}65)$$

$$\mathbf{y_{elev} = y_{bola} = 12{,}3\ m}$$



b) a velocidade da bola relativamente ao elevador, quando a bola o atinge

a velocidade da bola relativa ao elevador no instante t = 3,65 s:

$$v_{bola/elev} = v_{bola} - v_{elev} = (18 - 9{,}8\,t) - 2 = 16 - 9{,}8(3{,}65)$$

$$\mathbf{v_{bola/elev} = -19{,}81\ m/s}$$

Exemplo 7

Um corpo move-se ao longo do eixo X, segundo a equação: $x = t^3 - 5t^2 + 5$, (x em metros, t em segundos). Calcule:

a) a velocidade e a aceleração num instante qualquer, *t*.

b) a posição, a velocidade e a aceleração para t = 2 s.

c) a velocidade média e a aceleração média entre t = 1 s e t = 2 s.

a) $$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t \quad \text{(m/s)} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 10 \quad (\text{m/s}^2)$$

b) t = 2 s

x= 8 - 5x4 +5 = -7 m

v= 3x4 - 10x2 = -8 m/s

a= 6x2 - 10 = 2 m/s^2

c) t = 1 s

x= 1 - 5x1 +5 = 1 m

v= 3x1 - 10x1 = -7 m/s

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-7-1}{2-1} = -8\ m/s$$

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8-(-7)}{2-1} = -1\ m/s^2$$

Exemplo 8

A aceleração de uma partícula é definida pela expressão: a = At-1, em que A é uma constante. No instante t = 0, a partícula parte da posição x = 2 m com v = 0. Sabendo que em t = 1 s, v = 1 m/s, determine:

a) o valor da constante A

b) a posição para t = 2 s

aceleração não é constante!

a) $$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt \Rightarrow v - v_0 = \int_0^t (At-1)dt \Rightarrow v = -t + A\frac{t^2}{2}$$

$t = 1$ s $$1 = -1 + A\frac{1^2}{2} \Rightarrow A = 4\ m/s^3 \Rightarrow v = -t + 2t^2$$

b)

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t \left(-t + 2t^2\right)dt \Rightarrow x = 2 - \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3}$$

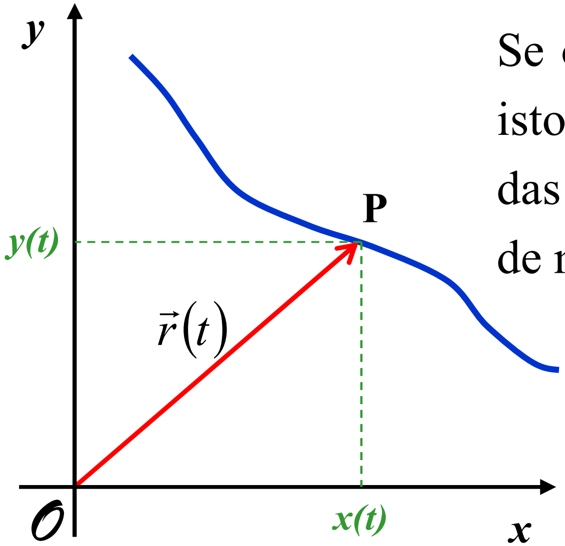
$t = 2$ s $$x = 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2x2^3}{3} = \frac{16}{3}\ m$$

Movimento curvilíneo no plano

Coordenadas cartesianas

A posição de uma partícula que se move numa trajetória plana fica definida se for conhecido, em cada instante, o seu vetor posição

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

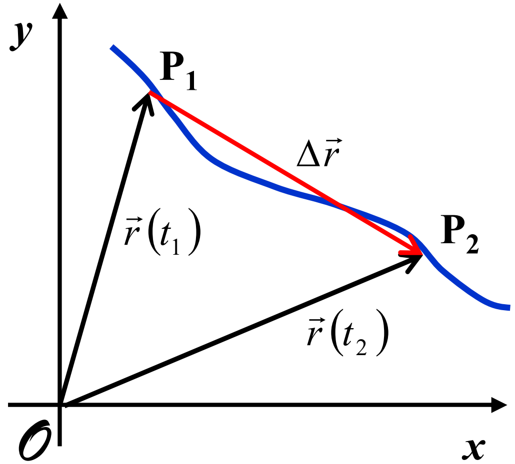


Se o plano xOy é coincidente com o plano do movimento isto corresponde a conhecer as leis de variação no tempo das suas coordenadas cartesianas, e temos duas equações de movimento

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Velocidade média:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Universidade do Minho

Velocidade instantânea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}}$$

Aceleração média:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

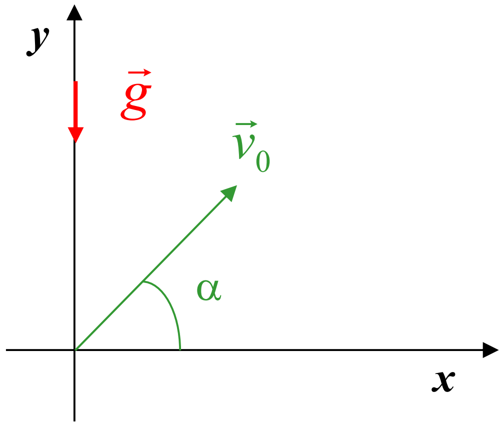
Aceleração instantânea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}}$$

Movimento de projéteis

O **movimento de projéteis** constitui um bom exemplo de um **movimento plano**. Normalmente é conhecida a sua velocidade inicial (de grandeza v_0) e direção, fazendo um ângulo α com a horizontal, para além da aceleração (g). Temos assim:



$$\begin{cases} a_x = 0 & \text{(desprezando o atrito do ar)} \\ a_y = -g & \text{(gravidade)} \quad \textbf{Constante !} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

A partir da figura vemos que as componentes da velocidade inicial são:

$$v_{0x} = v_0 . \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 . \text{sen}\alpha$$

Velocidade em qualquer instante **t** da trajetória:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha & \text{(constante!!)} \\ v_y = v_0 \text{sen}\alpha - gt \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha \,\hat{i} + (v_0 \text{sen}\alpha - gt)\hat{j}$$

Para se obter as **leis do movimento**, como **a aceleração é constante**:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \dfrac{1}{2} a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y} t + \dfrac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

E obtemos:

$$a_x = 0 \; ; \; a_y = -g$$

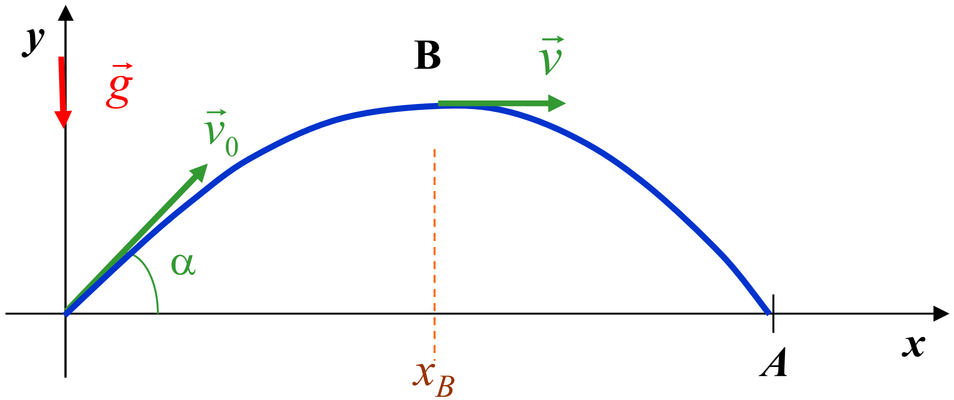
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos\alpha \, t \\ y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}}$$

Leis do movimento

Eliminando ***t*** nas equações anteriores e considerando x_0 e y_0 nulos (origem), por exemplo, obtemos a **equação cartesiana da trajetória**.

$$\boxed{t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}} \Rightarrow \boxed{y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2}$$

Equação de uma parábola



O vértice desta parábola é o ponto B **(altura máxima)**.

$$x_B = \frac{v_0^2 sen\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{2g}$$

Posição do máximo

Na altura máxima, a componente vertical da velocidade anula-se, isto é,

$$v_y(B) = v_0 . sen\alpha - g.t_{hmax} = 0$$

Nesse ponto a velocidade é horizontal, tangente à trajetória. Desta forma, o tempo, t_{hmax}, que a partícula demora a atingir o ponto mais alto da sua trajetória é dado por:

$$t_{h\,max} = \frac{v_0 sen\alpha}{g}$$

A *distância máxima percorrida na horizontal* (**alcance**) é $x_{max} = x_A$. Para a calcular basta notar que, para $x = x_A$, temos $y_A = 0$, isto é

$$y_A = v_0 sen\alpha\, t_A - \frac{1}{2} g t_A^2 = 0$$

em que t_A, o tempo que o projétil está no ar, é o ***tempo de voo*** e é a solução não nula desta equação. Temos

$$t_A\left(v_0 sen\alpha - \frac{1}{2} g t_A\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_A = 0 \\ t_A = \dfrac{2 v_0 sen\alpha}{g} \end{cases} \qquad t_A = 2t_B$$

Obtemos assim:

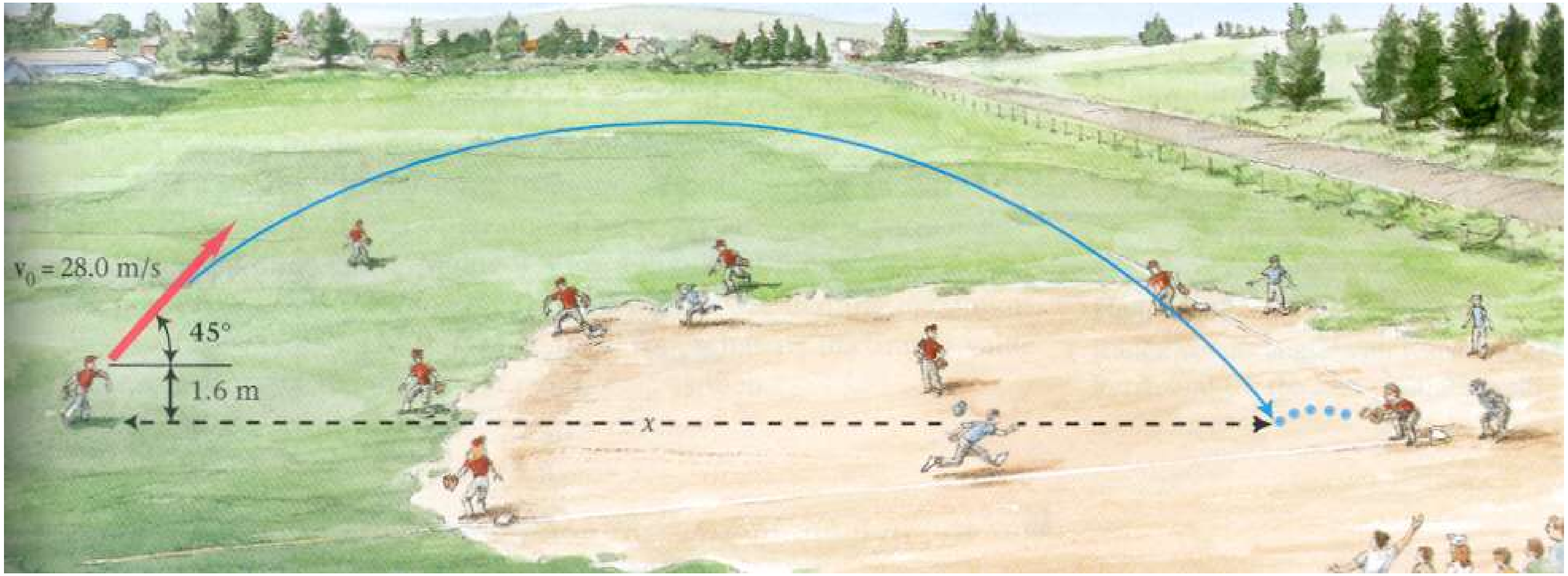
$$\boxed{x_{max} = x_A = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 sen\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sen(2\alpha)}{g}}$$

As grandezas h_{max}, x_{max} e t_A são importantes no estudo de projéteis. Note-se no entanto que as expressões aqui deduzidas para estas grandezas **só são válidas para as condições iniciais consideradas**, isto é, quando temos $x_0 = y_0 = 0$.

Exemplo 9:

Num jogo de basebol um jogador lança a bola conforme a figura em baixo. Determine:

a) o alcance da bola



b) a altura máxima que a bola atinge, e a velocidade nessa posição

c) a velocidade da bola quando toca no chão.

Exemplo 9 (resolução):

a) Alcance?

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos\alpha \; t \\ y = y_0 + v_0 sen\alpha t - (1/2) g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 + 28 \cos 45^o \; t \\ y = 1.6 + 28 sen 45^o t - 4.9 t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 19.8 \; t \\ y = 1.6 + 19.8 t - 4.9 t^2 \end{cases}$$

$$0 = 1.6 + 19.8t - 4.9t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 4.12 \text{ s}$$

x= 82.6 m

b) Altura máxima?

Na altura máxima v_y=0

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{(constante!!)} \\ v_y = v_0 sen\alpha - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 28 \cos 45^o \\ v_y = 28 sen 45 - 9.8t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 19.8 \\ v_y = 19.8 - 9.8t \end{cases}$$

$$0 = 19.8 - 9.8t \quad \Rightarrow \quad 2.02 \; s$$

$$\vec{v}(t) = 19.8\hat{i} + (19.8 - 9.8t)\hat{j}$$

$$y_{max} = 1.6 + 19.8(2.02) - 4.9(2.02)^2 \quad \Rightarrow \quad y_{max} = 21.6 \text{ m}$$

c) Velocidade quando a bola bate no chão?

$$\vec{v}(t) = 19.8\hat{i} + (19.8 - 9.8t)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t = 4.1s) = 19.8\hat{i} - 20.4\hat{j} \quad (m/s)$$

$$v_{t=4.1s} = 28.4 \; m/s$$

$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-20.4}{19.8} \quad \Rightarrow \quad \theta = -45.8^o$$

Velocidade na altura máxima?

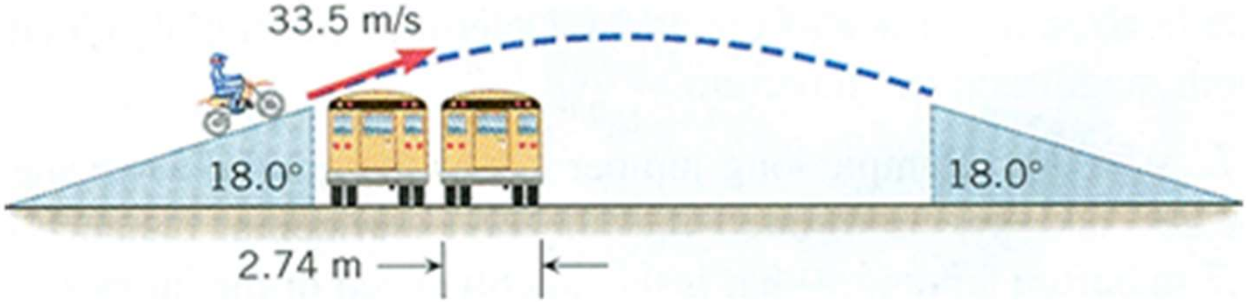
$$\vec{v}_{h\max} = 19.8\hat{i} \quad (m/s)$$

Exemplo 10:

Um motociclista está a tentar saltar sobre o maior número possível de autocarros (ver figura). A rampa de salto tem uma inclinação de 18º e a rampa de receção é idêntica. Os autocarros estão estacionados lado a lado, e cada um tem uma largura de 2,74 m. O motociclista deixa a rampa com uma velocidade de 33,5 m/s. Calcule:

a) a velocidade do motociclista após o primeiro autocarro.

b) o maior número de autocarros sobre os quais o motociclista consegue saltar.



$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 33{,}5\cos 18^{o} \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 33{,}5 \operatorname{sen} 18^{o} - 9{,}8t \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = 31{,}86\hat{i} + (10{,}35 - 9{,}8t)\hat{j} \quad (m/s)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t = 31{,}86\,t \\ y = y_0 + v_0 sen\alpha t - (1/2)gt^2 = 10{,}35t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

a)

$$2{,}74 = 31{,}86\,t$$
$$t = 0.086\,s$$

$$\begin{cases} v_x = 31{,}86\ m/s \\ v_y = 9{,}51\ m/s \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = 31{,}86\hat{i} + 9{,}51\hat{j} \quad (m/s)$$

b)

$$0 = 10{,}35t - 4{,}9t^2$$
$$t = 2{,}11\,s$$

$$x = 31{,}86\,t$$
$$x = 67{,}3\ m$$

$$N = 67{,}3/2{,}74 = 24{,}6$$
$$N = 24\ \text{autocarros}$$

Exemplo 11:

Uma bola de borracha é atirada de encontro a uma parede (ver figura). Quando bate na parede a componente vertical da bola mantém-se e a componente horizontal mantém o módulo, mas inverte o sentido. Determine:

a) a altura em que a bola bate na parede

b) a velocidade com que a bola bate na parede,

c) a distância da parede onde irá cair a bola e a sua velocidade.

a)
$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = 4 - 10t \\ y = y_0 + v_{0y}t - (1/2)gt^2 = 2 + 10t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

A bola atinge a parede quando x=0

$$0 = 4 - 10t \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}4\ \text{s}$$

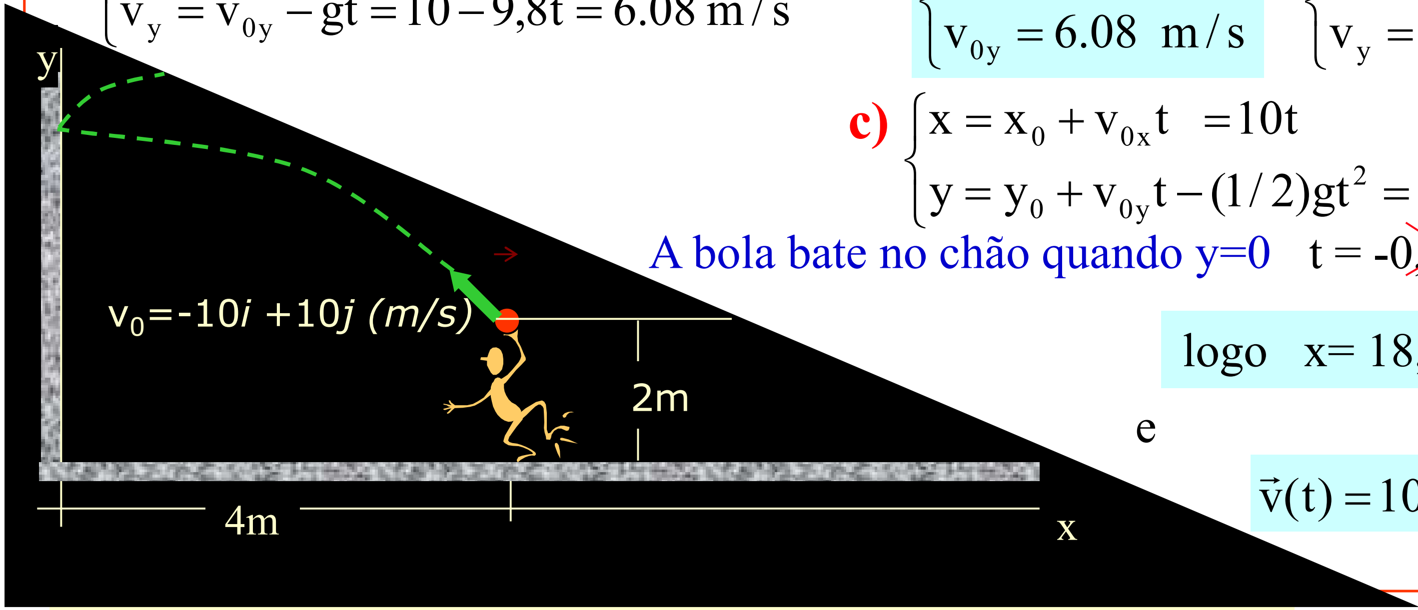
logo y= 5,22 m

b) Velocidade quando bate na parede

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = -10\ \text{m/s} \\ v_y = v_{0y} - gt = 10 - 9{,}8t = 6.08\ \text{m/s} \end{cases}$$

Depois de bater na parede (inverte em x)

$$\begin{cases} v_{0x} = 10\ \text{m/s} \\ v_{0y} = 6.08\ \text{m/s} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} = 10 \\ v_y = v_{0y} - gt = 6{,}08 - 9{,}8t \end{cases}$$



c)
$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = 10t \\ y = y_0 + v_{0y}t - (1/2)gt^2 = 5.22 + 6.08t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

A bola bate no chão quando y=0 $\quad t = -\cancel{0{,}58}\ \text{s}$ ou $\mathbf{t = 1{,}825\ s}$

logo x= 18,25 m

e

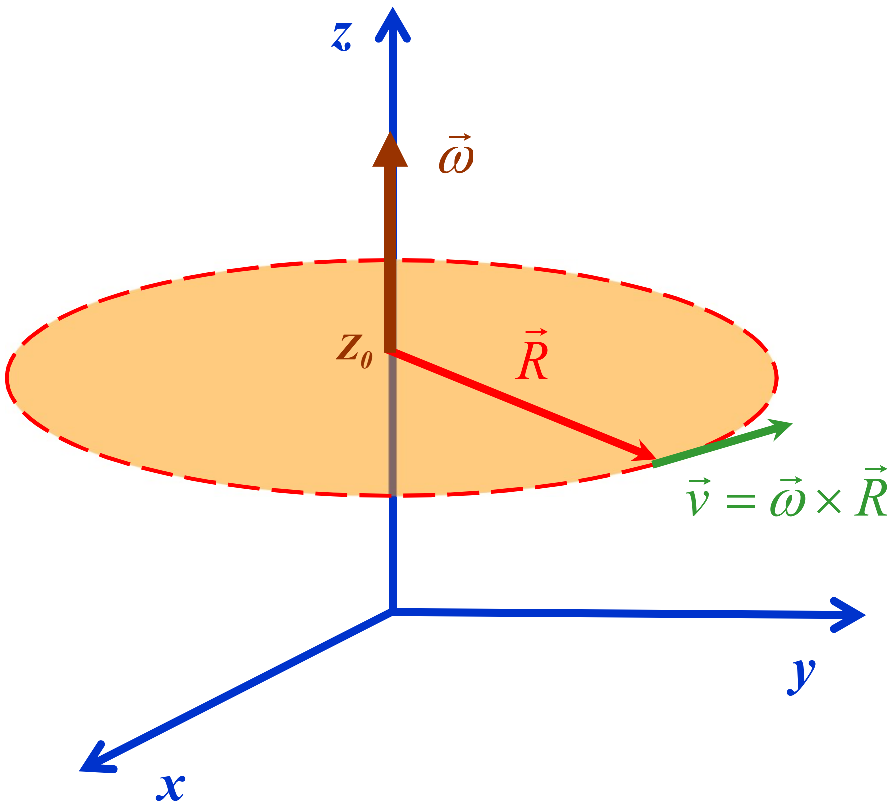
$$\vec{v}(t) = 10\hat{i} - 11{,}8\hat{j} \quad (\text{m/s})$$

Movimento Circular

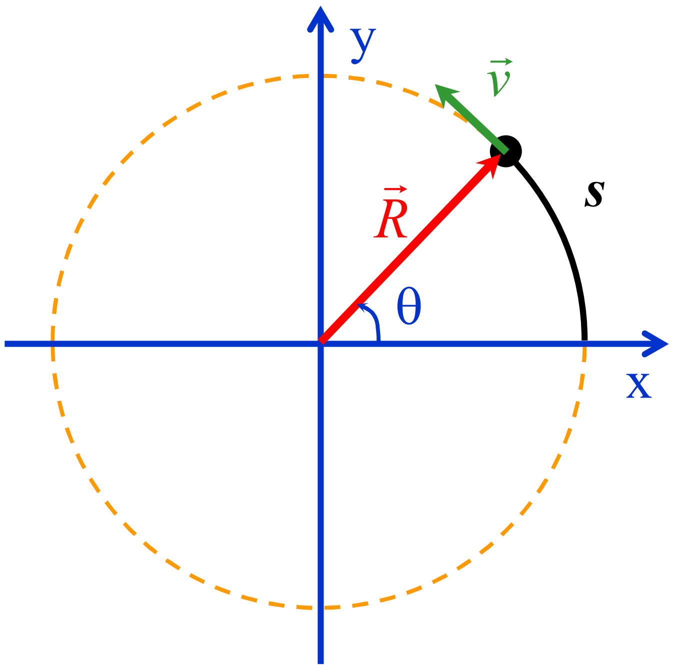
É útil em certas situações definir um vetor velocidade angular, $\vec{\omega}$, como sendo um vetor com a direção do eixo de rotação, a grandeza ***dθ/dt*** e o sentido tal que se verifique

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$v = \omega R$$



O **arco** **s**, percorrido pela partícula, está relacionado com o ângulo θ por: $\boldsymbol{s = R \cdot \theta}$



Assim, e dado que ***ds=R·dθ*** a velocidade vem simplesmente:

$$\vec{v} = v.\hat{u}_T = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_T$$

uma vez que neste caso o raio, R, é constante. A grandeza

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

é designada por **velocidade angular**, e é igual à taxa de variação do ângulo. Temos assim:

$$\vec{v} = v.\hat{u}_T = \omega R\hat{u}_T \Rightarrow v = \omega R$$

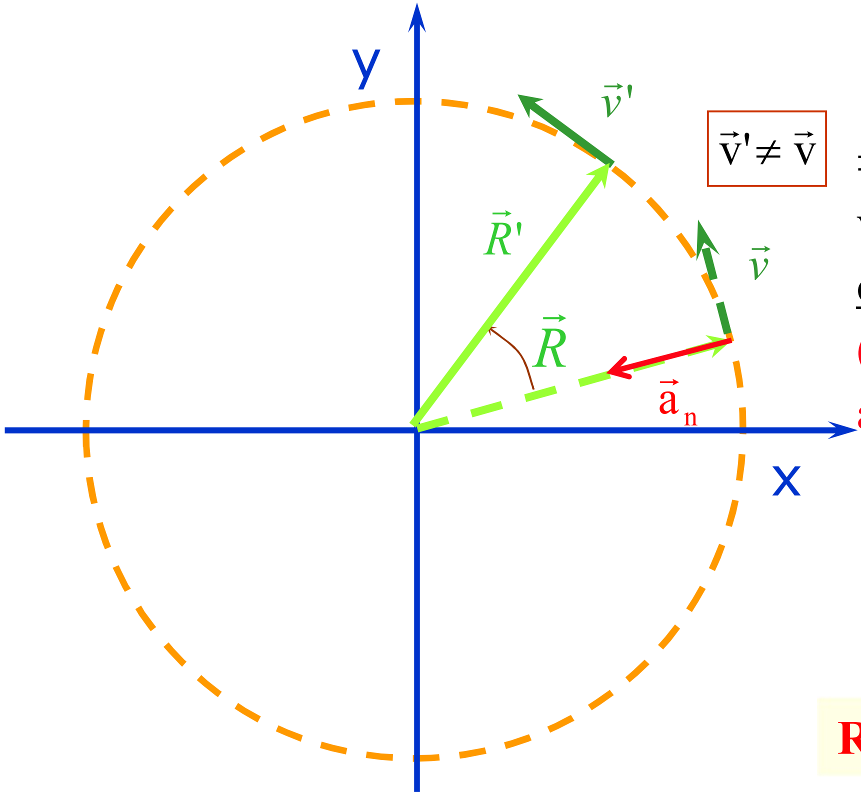
Movimento Circular Uniforme

Podemos neste caso obter também a variação temporal do ângulo. **Se ω é constante** e sabendo que:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Obtemos assim para o caso do **movimento circular uniforme (α=0)**:

$$\theta = \theta_o + \omega(t - t_o)$$



$\vec{v}' \neq \vec{v}$

⇒ Existe **aceleração normal** dado que o vetor velocidade varia de direção em cada instante, contudo o módulo da velocidade é constante! ($v' = v$ e $a_t = 0$) A aceleração total é igual à aceleração normal.

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad |\vec{a}| = \omega^2 R$$

⇓

Radial, aponta para o centro da trajetória.

Se o movimento se faz com **velocidade angular constante** (**ω = dθ/dt = *constante*$\Rightarrow$ *α=0***) diz-se então **uniforme**. Neste caso, o intervalo de tempo necessário para a partícula efetuar uma volta completa designa-se por **período do movimento**, ***T***, e corresponde a uma rotação de **θ = 2π rad**. A sua relação com ω determina-se facilmente já que:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \text{Se } \Delta\theta = 2\pi, \text{ então } \Delta t = T \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

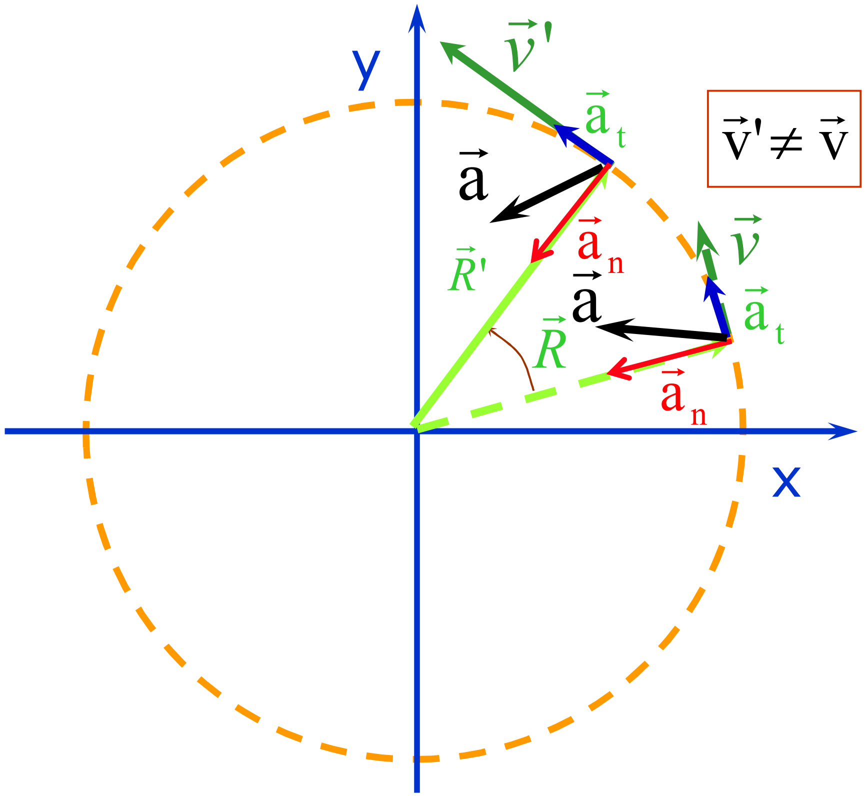
Isto é: $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ **Período do movimento**

A **frequência do movimento**, **f**, é o número de voltas por unidade de tempo, e é o inverso do período:

$$f = 1/T \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

Movimento Circular variado

Se ω não é constante, a aceleração angular e a aceleração tangencial, já não são nulas.



⇒ O módulo da velocidade já não é constante ($v' \neq v$), pelo que para além da **aceleração normal (a_n)**, existe uma **aceleração tangencial (a_t)**, e a aceleração total **(a)**, em cada instante, é igual à soma vetorial das duas.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Aceleração total aponta sempre para dentro da concavidade.

Movimento circular não uniforme

Existe aceleração angular **($\alpha \neq 0$)**

Caso geral $\rightarrow$ α é diferente de zero e variável no tempo:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \qquad \omega - \omega_o = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \qquad \theta - \theta_o = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

Se α é constante:

$$\omega - \omega_o = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

$$\theta - \theta_o = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt = \int_{t_0}^{t} (\omega_o + \alpha t) \, dt$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

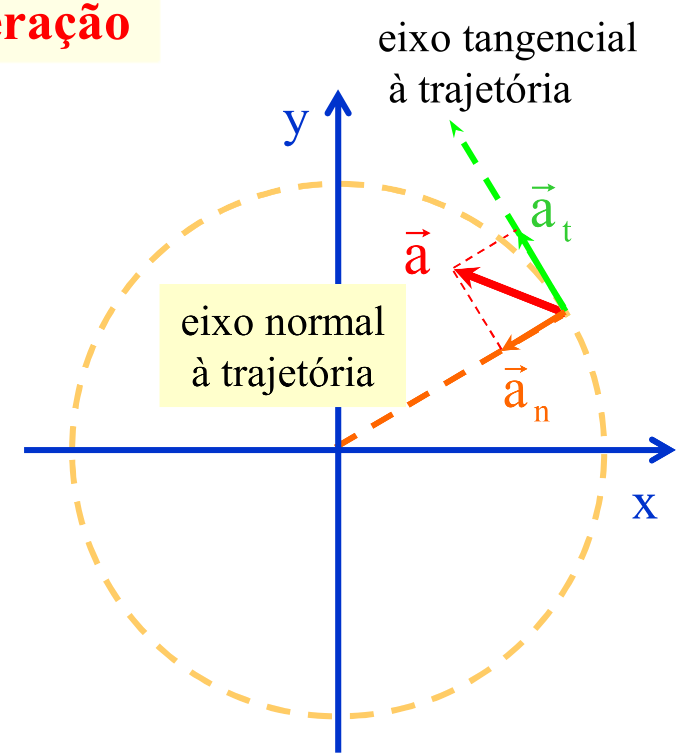
Componentes normal e tangencial da aceleração

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\mathrm{a_t} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{a_t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{R}\alpha$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_t = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n + \alpha R\hat{u}_t$$



- a **componente tangencial**, $a_t = dv/dt$, que está ligada à variação do módulo da velocidade.
- a **componente normal**, $a_n = v^2/R$, que está ligada à variação da direção do vetor velocidade.

Componentes normal e tangencial da aceleração

- Como a velocidade é tangente à trajetória, logo:

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

- a **componente tangencial da aceleração** pode ser calculada:

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{u}_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}$$

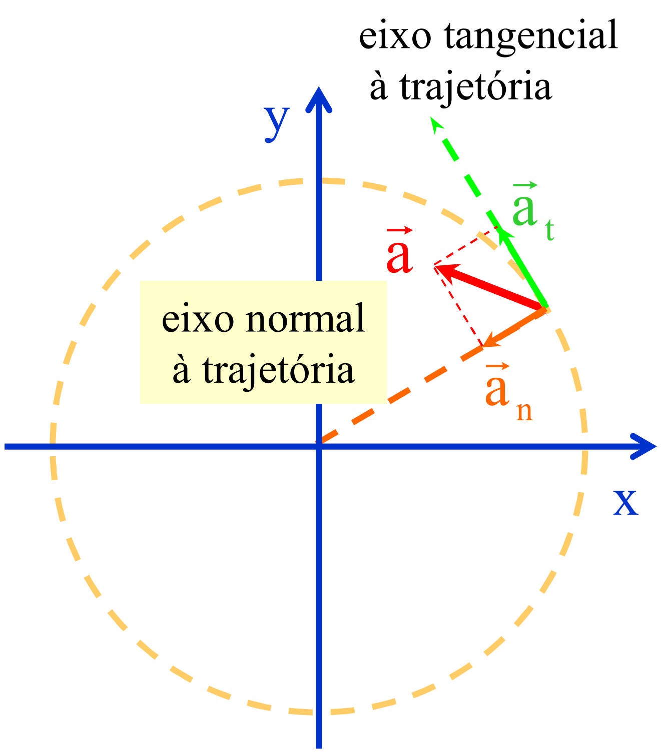
(projeção da aceleração segundo a direção da velocidade – tangente à trajetória)

- a **componente normal da aceleração** pode ser calculada:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^{\,2}}$$

- e o versor da normal à trajetória:

$$\hat{u}_n = \frac{\vec{a}_n}{a_n}$$



Exemplo 12:

O secador de uma máquina de lavar roupa, reduz a velocidade uniformemente de 900 rpm para 300 rpm, fazendo 50 rotações nesse intervalo. Determine a aceleração angular e o tempo gasto nessas 50 rotações.

A aceleração angular é constante pelo que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

$$\omega_0 = 900 \text{ rpm} = 900.\frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 30\,\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = 300 \text{ rpm} = 300.\frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 10\,\pi \text{ rad/s}$$

1 rot. = 2 π rad

da primeira expressão:

$$t = \frac{\varpi - \varpi_0}{\alpha} = \frac{10\pi - 30\pi}{\alpha} = -\frac{20\pi}{\alpha}$$

substituindo na segunda expressão, onde exprimimos o deslocamento angular (θ) em radianos:

$$50\,(2\pi) = 30\,\pi\left(-\frac{20\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(-\frac{20\pi}{\alpha}\right)^2$$

$$100\,\pi = \frac{-400\pi^2}{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha = -4\,\pi \text{ rad/s}^2}$$

e

$$t = -\frac{20\pi}{-4\pi} \Leftrightarrow \mathbf{t = 5\ s}$$

Exemplo 13:

Um carro tem rodas de 30 cm de raio. Ele parte do repouso e acelera uniformemente até uma velocidade de 15 m/s, em 8 s. Determine a aceleração angular das suas rodas e o número de rotações efetuadas nesse intervalo de tempo.

$$v = \omega R \qquad \Leftrightarrow \qquad \varpi = \frac{15\ \mathrm{m/s}}{0{,}3\ \mathrm{m}} = 50\ \mathrm{rad/s}$$

A aceleração angular é constante pelo que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t \qquad \alpha = \frac{\varpi - \varpi_0}{t} = \frac{50\ \mathrm{rad/s} - 0}{8\mathrm{s}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 6{,}25\ \mathrm{rad/s^2}}$$

O deslocamento angular é dado por:

$$\Delta\theta = \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \qquad \Delta\theta = 0 + \frac{1}{2}(6{,}25\ \mathrm{rad/s^2})(8\mathrm{s})^2 = 200\ \mathrm{rad}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{200}{2\pi} \qquad \mathbf{n = 31{,}8\ rot}$$

Exemplo 14:

Uma partícula descreve uma trajetória circular de raio 2 m e parte do repouso e com uma velocidade em que o seu módulo varia de acordo com v= t^2-2, durante 5 s. Determine:

a) aceleração angular em função do tempo

b) o número de rotações efetuadas nesse intervalo de tempo.

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \omega R$$

a)

$$\omega(t) = \frac{v}{R} = \frac{t^2 - 2}{2} = \frac{t^2}{2} - 1$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = t \quad (\text{rad/s}^2)$$

b)

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \theta - \theta_o = \int_0^t \omega \, dt \qquad \theta_0 = 0$$

$$\theta = \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - 1 \right) dt = \frac{t^3}{6} - t$$

t= 5 s

$$\theta = \frac{5^3}{6} - 5 = 15.83 \text{ rad}$$

$$n = \frac{15.83}{2\pi} = 2.52 \text{ rot}$$

Exemplo 15:

Um ventilador gira a uma razão de 900 rpm. Determine:

a) a velocidade angular de qualquer ponto numa das pás do ventilador

b) a velocidade linear da ponta da pá se a distância do centro à ponta é de 20 cm.

c) a aceleração normal num ponto da ponta da pá.

d) o espaço percorrido por um ponto na extremidade da pá durante 10 s.

e) o período de rotação

a)

$$\omega = 900 \text{ rpm} = 900.\frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \mathbf{30\ \pi\ rad/s}$$

b)

$$v = \omega R \Leftrightarrow v = (30\ \pi \text{ rad/s})(0{,}2 \text{ m})$$

$$\mathbf{v = 18{,}8\ m/s}$$

c)

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow a_n = \frac{(18{,}8 \text{ m/s})^2}{0{,}2 \text{ m}}$$

$$\mathbf{a_n = 1767{,}2\ m/s^2}$$

d)

ω = constante

o deslocamento angular do ponto considerado é dado por:

$$\theta = \omega\, t = (30\ \pi \text{ rad/s})\ (10 \text{ s}) \Leftrightarrow \theta = 943{,}8 \text{ rad}$$

o espaço percorrido será então:

$$s = \theta\, R \Leftrightarrow s = (943{,}8 \text{ rad})(0{,}2 \text{ m})$$

$$\mathbf{s = 188{,}8\ m}$$

e)

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\varpi} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{30\ \pi \text{ rad/s}}$$

$$\mathbf{T = 0{,}067\ s}$$