Capítulo 5 – Momento linear e colisões

5.1. Momento linear ou quantidade de movimento

5.2. Impulso de uma força

5.3. Conservação do momento linear

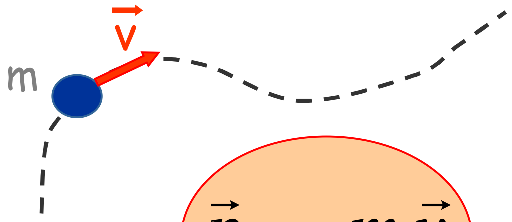
5.4. Colisão inelástica a uma dimensão

5.5. Colisão elástica a uma dimensão

5.6. Colisões a duas dimensões

5.7. Sistemas de massa variável

5.1 Momento linear ou Quantidade de movimento



$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

quantidade de movimento

ou

momento linear

Esta é uma grandeza física muito importante pois combina os dois elementos que caracterizam o estado dinâmico da partícula: a sua massa e a sua velocidade.

Unidade S.I. (kg.m /s)

A 2ª lei de Newton pode escrever-se em função da quantidade de movimento:

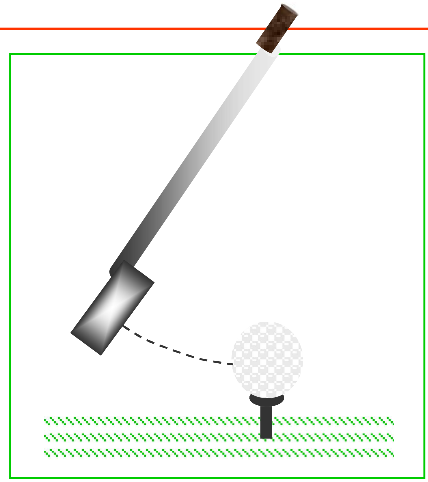
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Massa constante

Se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante}$

Se $\vec{F} \neq 0 \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}\,dt$

5.2 Impulso de uma força



Um taco bate numa bola de golfe:

Durante a colisão:

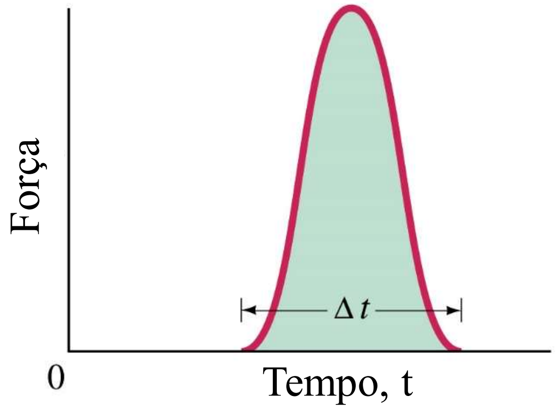
- o taco exerce uma força na bola: $\vec{F}_{t \to b}$

- a bola exerce um força no taco: $\vec{F}_{b \to t}$

Pela 3ª lei de Newton (ação-reação):

$$\vec{F}_{t \to b} = -\vec{F}_{b \to t}$$

Antes do contacto, ambas as forças são nulas, aumentam em módulo até atingir um valor máximo e depois diminuem e voltam a ser nulas quando o taco e a bola se separam.



Durante a colisão: $\vec{F}_{t \to b} = m_b \cdot \dfrac{d\vec{v}_b}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_{t \to b} \cdot dt = m_b \cdot d\vec{v}_b$ (bola)

$$\vec{F}_{b \to t} = m_t \cdot \frac{d\vec{v}_t}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_{b \to t} \cdot dt = m_t \cdot d\vec{v}_t \qquad \text{(taco)}$$

Estas equações são válidas para todos os intervalos de tempo dt, durante o tempo em que a bola e o taco estão em contacto.

Integrando as expressões durante todo o tempo de contacto:

Sobre a bola:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{t\to b}\cdot dt = \int_{v_i}^{v_f} m_b \cdot d\vec{v}_b \Leftrightarrow \boxed{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{t\to b}\cdot dt} = m_b v_b^f - m_b v_b^i$$

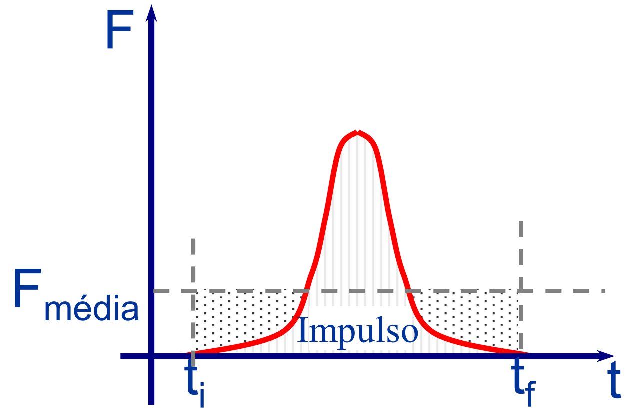
Impulso da força $F_{t\to b}$

Sobre o taco :

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{b\to t}\cdot dt = m_t v_t^f - m_t v_t^i$$

quantidade de movimento

Variação típica da força durante a colisão.



O valor médio da força exercida em cada um dos corpos (bola, taco) pode ser calculado:

$$\overline{\vec{F}}_{med} = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt}{t_f - t_i} \Leftrightarrow \overline{\vec{F}}_{med} = \frac{\text{Impulso}}{\Delta t} \qquad \vec{I} = \vec{F}_{média} \times \Delta t \quad \text{ou} \quad \vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt$$

Impulso de uma força = produto da força média pelo intervalo de tempo durante o qual atua.

Unidade S.I. Newton.segundo: (N.s)

Teorema Impulso-quantidade de movimento

Então voltando ao exemplo do taco e da bola:

Sobre a bola:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{t\to b} \cdot dt = m_b v_b^f - m_b v_b^i$$

$$\vec{I}_{bola} = \vec{p}_{fb} - \vec{p}_{ib} = \Delta\vec{p}_{bola}$$

Analogamente, sobre o taco:

$$\vec{I}_{taco} = \vec{p}_{ft} - \vec{p}_{it} = \Delta\vec{p}_{taco}$$

como $\vec{F}_{t\to b} = -\vec{F}_{b\to t}$

$$\boxed{I_{taco} = -I_{bola} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_{taco} = -\Delta p_{bola} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_{total}=0}$$

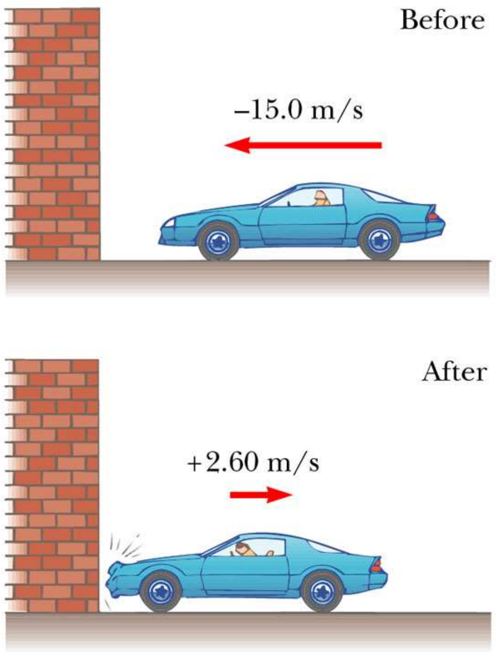
Ex. 5.1. Num teste de colisão, uma carro com uma massa de 1500 kg colide com uma parede e recua, como mostrado na figura. As velocidades antes e depois da colisão são v_i= -15 m/s e v_f = 2.6 m/s, respetivamente. Se a colisão ocorrer durante 0.15 s, calcule:

a) o impulso recebido pelo carro devido à colisão

b) O módulo e direção da força média exercida sobre o carro.

$$p_i = mv_i = (1.5\times10^3\ \mathrm{kg})(-15\ \mathrm{m/s}) = -2.25\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$p_f = mv_f = (1.5\times10^3\ \mathrm{kg})(+2.6\ \mathrm{m/s}) = +0.39\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$



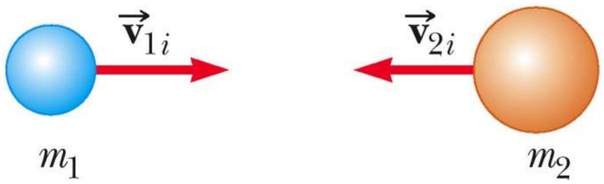
$$\begin{aligned} I &= p_f - p_i = mv_f - mv_i \\ &= 0.39\times10^4 - (-2.25\times10^4) \\ &= 2.64\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m/s} \end{aligned}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2.64\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m/s}}{0.15\mathrm{s}} = 1.76\times10^5\ \mathrm{N}$$

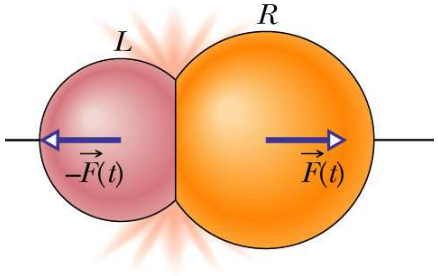
5.3 Conservação do momento linear

Num sistema isolado e fechado, o momento linear total do sistema mantém-se constante no tempo. As forças de contacto que atuam sobre os corpos são iguais em módulo e de sentidos opostos. A resultante das forças externas que atuam no sistema é nula, o momento linear conserva-se:

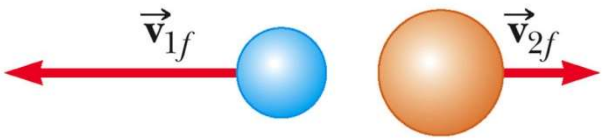
antes da colisão



durante



depois da colisão



- A partir do teorema do impulso

$$\vec{F}_{21}\Delta t = m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i}$$

$$\vec{F}_{12}\Delta t = m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i}$$

- Como

$$\vec{F}_{21}\Delta t = -\vec{F}_{12}\Delta t$$

- Então

$$m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = -(m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i})$$

- ou

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}} = \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{f}}$$

5.4 Colisão inelástica a uma dimensão

Colisões inelásticas: Conservação do momento linear, mas a energia cinética não é conservada.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Neste grupo são chamadas **perfeitamente inelásticas**, as colisões em que os objetos **seguem juntos depois da colisão**

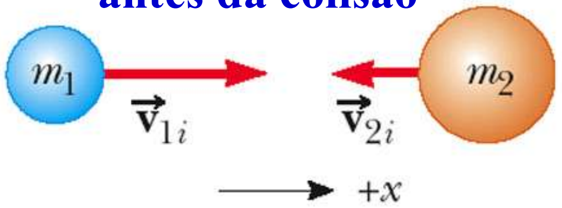
Colisão perfeitamente inelástica:

objetos seguem juntos depois da colisão

$$\boxed{\mathrm{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f}}$$

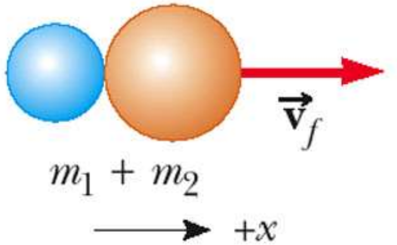
$$\boxed{v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

antes da colisão



(a)

depois da colisão



(b)

5.5 Colisão elástica a uma dimensão

Uma colisão é elástica quando a energia cinética é conservada

- Conservação do momento linear

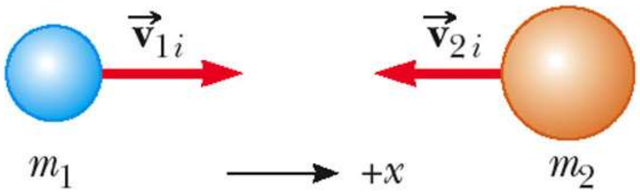
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Conservação da energia cinética

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

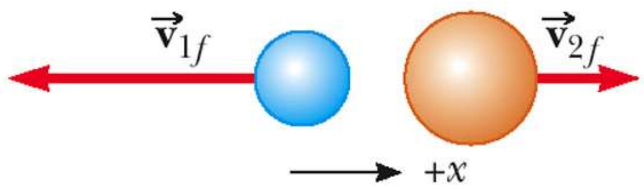
- Momento é uma grandeza vetorial, enquanto a energia cinética é uma grandeza escalar

antes da colisão



(a)

depois da colisão



(b)

Colisão elástica a uma dimensão

- No caso de uma dimensão pode ser utilizada uma equação mais simples no lugar da equação da energia cinética:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \Leftrightarrow m_1(v_{1i}^2-v_{1f}^2)=m_2(v_{2f}^2-v_{2i}^2)$$

$$\Leftrightarrow m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}+v_{1f})=m_2(v_{2f}-v_{2i})(v_{2f}+v_{2i}) \quad (1)$$

Considerando a equação da conservação do momento:

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \Leftrightarrow m_1(v_{1i}-v_{1f})=m_2(v_{2f}-v_{2i}) \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2) $\boxed{v_{1i}+v_{1f}=v_{2f}+v_{2i}}$ Conservação da energia cinética para colisões a uma dimensão

$\boxed{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}}$ Conservação do momento linear

Ex. 5.2 - Um astronauta com uma massa de 80 kg, atira uma ferramenta com uma massa de 0,75 kg com uma velocidade de 24 m/s relativamente ao astronauta. Calcule a velocidade de recuo do astronauta.

$$p_i = p_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 = 80\ \text{kg}, \quad m_2 = 0.75\ \text{kg},$$
$$v_{1i} = v_{2i} = 0,$$
$$v_{2f} = 24\ \text{m/s}, \quad v_{1f} = ?$$

$$0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} = -\frac{0.75\ \text{kg}}{80\ \text{kg}} (24\ \text{m/s}) = -0.225\ \text{m/s}$$

Ex. 5.3 - Um astronauta ($m_{astronauta}$=60 kg) está em repouso no espaço a reparar um satélite. Tem uma dúvida e pede um livro de instruções. Um colega que tinha ficado na nave atira-lhe o livro (m_{livro}=3 kg) com uma velocidade de 4 m/s.

a) Que sucede ao astronauta quando agarra o livro?

b) Que quantidade de energia foi perdida?

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 = 60\,\text{kg}, \quad m_2 = 3\,\text{kg},$$
$$v_{1i} = 0, \quad v_{2i} = 4\,\text{m/s},$$
$$v_{2f} = v_{1f} = v_f = ?$$

$0 + 3*4 = (60 + 3)v_f$

$v_f = 12/63 = 0{,}19$ m/s

Ex. 5.4 - Um carro com uma massa de 1575 kg tem uma velocidade de 20 m/s, quando embate num barril de sinalização que tem uma massa de 45 kg, que estava em repouso. Sabendo que após a colisão, o carro fica com uma velocidade de 18.9 m/s, calcule a velocidade do barril depois da colisão.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\mathrm{m_1 = 1575\,kg, \quad m_2 = 45\,kg,}$$
$$\mathrm{v_{1i} = 20\,m/s, \quad v_{2i} = 0,}$$
$$\mathrm{v_{1f} = 18{,}9\,m/s, \quad v_{2f} = ?}$$

$$1575\mathrm{x}20 + 0 = 1575\mathrm{x}18.9 + 45\mathrm{v_{2f}}$$

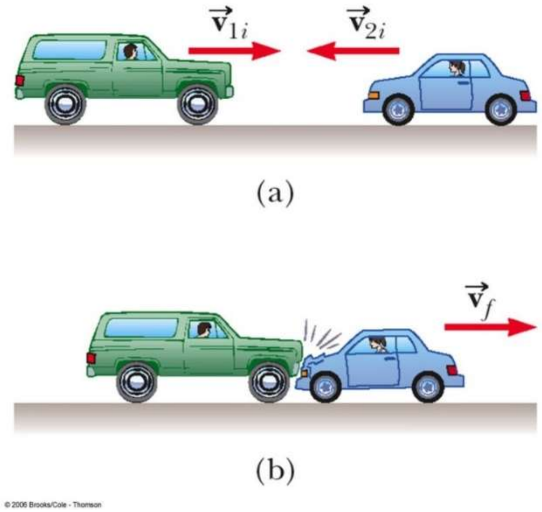
$$\mathrm{v_{2f} = 38{,}9\,m/s}$$

Ex. 5.5 - Um carro com uma massa de 1800 kg vem de Este com uma velocidade 15 m/s, enquanto outro carro com uma massa de 900 kg vem de oeste a -15 m/s. Os carros colidem e seguem juntos. Calcule:

a) a velocidade dos carros depois da colisão.

b) A variação da quantidade de movimento de cada carro

c) A variação da energia cinética do sistema de constituído pelos dois carros.



a) $p_i = p_f$ $\qquad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad \boxed{v_f = +5.00 m/s}$$

b)

$$\Delta v_1 = v_f - v_{1i} = -10.0 m/s \qquad m_1 \Delta v_1 = m_1 (v_f - v_{1i}) = -1.8 \times 10^4 kg \cdot m/s$$

$$\Delta v_2 = v_f - v_{2i} = +20.0 m/s \qquad m_2 \Delta v_2 = m_2 (v_f - v_{2i}) = +1.8 \times 10^4 kg \cdot m/s$$

$$m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0$$

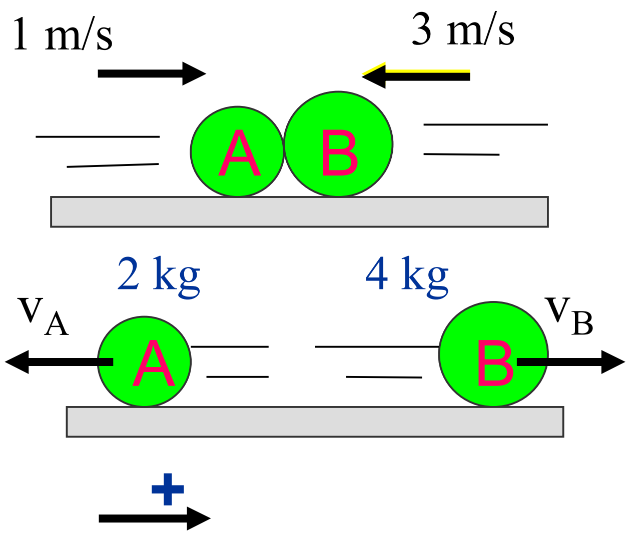
c)

$$\mathrm{E_{ci}} = \frac{1}{2} \mathrm{m_1 v_{1i}^2} + \frac{1}{2} \mathrm{m_2 v_{2i}^2} = 3.04 \times 10^5 \mathrm{J}$$

$$\mathrm{E_{cf}} = \frac{1}{2} \mathrm{m_1 v_{1f}^2} + \frac{1}{2} \mathrm{m_2 v_{2f}^2} = 0.34 \times 10^5 \mathrm{J}$$

$$\boxed{\Delta \mathrm{E_c} = \mathrm{E_{cf}} - \mathrm{E_{ci}} = -2.70 \times 10^5 \mathrm{J}}$$

Ex. 5.6 – Uma bola de 2 kg que se movimenta para a direita com uma velocidade de 1 m/s atinge uma bola de 4 kg que se movimenta para a esquerda com 3 m/s. Calcule as velocidades de cada uma das bolas depois da colisão, sabendo que ocorreu uma colisão elástica.



Colisão elástica a uma dimensão

$$v_{Ai} + v_{Af} = v_{Bf} + v_{Bi}$$

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

$$1 + v_{Af} = v_{Bf} - 3$$

$$2x1 + 4x(-3) = 2v_{Af} + 4v_{Bf}$$

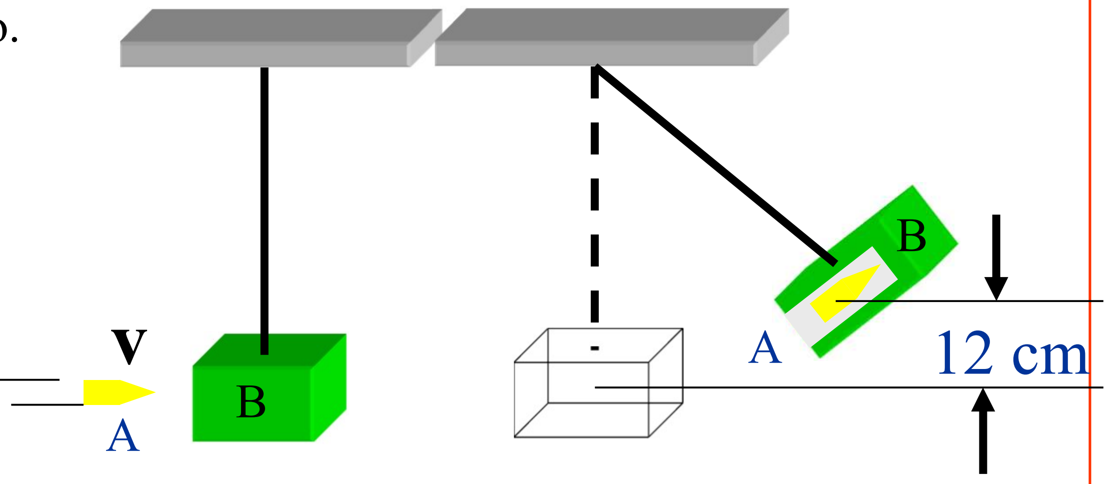
$$v_{Af} = -3{,}67\ m/s$$

$$v_{Bf} = -0{,}333\ m/s$$

Ex. 5.7 - Uma bala (m_A= 50 g) colide com um corpo (m_B= 2 kg) pendurado por um fio. Os corpos seguem juntos depois da colisão e atingem uma altura de 12 cm. Calcule a velocidade da bala antes da colisão.

após a colisão, há conservação da energia mecânica: $\boxed{E_{ci} = E_{pf}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2_{conjunto} = (m_A + m_B)gh}$$



$v^2_{conjunto} = \quad 2gh \quad = \quad 2(9.8)(0.12)$

Depois da colisão: $v_{conjunto} = 1.53$ m/s

$$\boxed{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f}$$

$m_A v_A + 0 = (m_A + m_B)v_{conjunto}$

$(0.05 \text{ kg})\, v_A = (2.05 \text{ kg})\, (1.53 \text{ m/s})$

$v_A = 62.9$ m/s

Ex. 5.8 - Uma bola de bilhar (1), com uma velocidade de 3 m/s, colide elasticamente com outra bola de bilhar (2), que estava em repouso. Depois da colisão, a bola (2) movimenta-se na mesma direção e sentido com que se movimentava a primeira. Sabendo que as duas bolas têm a mesma massa, calcule a velocidade das duas bolas após a colisão.

Colisão elástica a uma dimensão

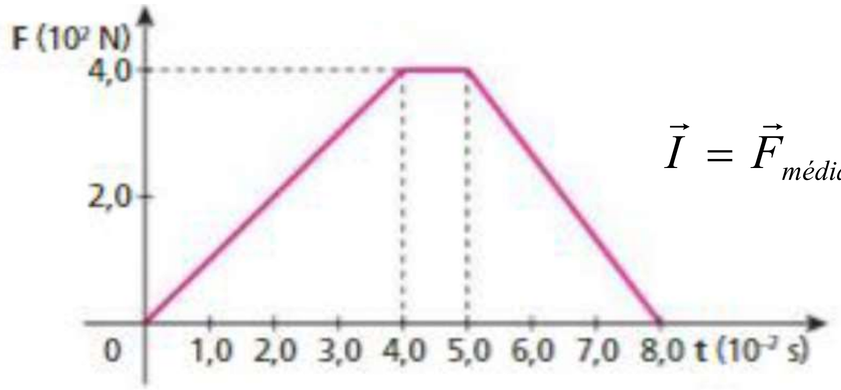
$$\boxed{v_{Ai} + v_{Af} = v_{Bf} + v_{Bi}}$$

$$\boxed{m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}$$

$$\begin{cases} 3 + v_{1f} = v_{2f} + 0 \\ m*3 + m*0 = mv_{1f} + mv_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 + v_{1f} = v_{2f} \\ 3 = v_{1f} + (3 + v_{1f}) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2f} = 3 \text{ m/s} \\ v_{1f} = 0 \end{cases}$$

Ex. 5.9 - Ao cobrar uma falta, um jogador de futebol chuta uma bola de massa igual a 450 g. No lance, o seu pé comunica à bola uma força resultante de direção constante, cuja intensidade varia com o tempo, conforme o seguinte gráfico:



$$I = \Delta p$$

$$\vec{I} = \vec{F}_{média} \times \Delta t \quad \text{ou} \quad \vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$

Sabendo que em t = 0 s, a bola estava em repouso, calcule:

a) O módulo do momento linear no instante $t = 8\text{x}10^{-2}$ s.

b) O trabalho realizado pela força que o pé do jogador exerce na bola.

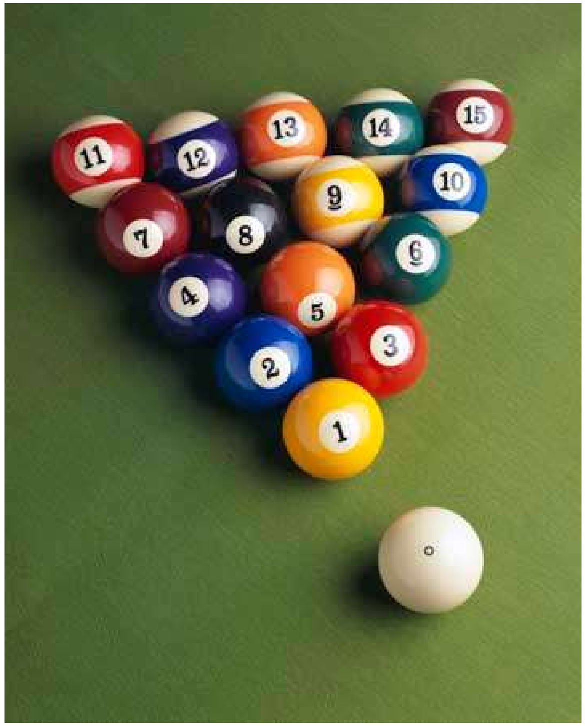
a) I = área no gráfico F-t = 400*0,04/2 + 400*(0,05-0,04) + 400*(0,08-0,05)/2 = 18 N.s

$\Delta p = I = 18$ kg.m/s

b) $W = \Delta Ec$ $\quad$ $Ec=(1/2)mv^2 = p^2/2m$ $\quad$ $pf - pi = I$

$W = 18^2/(2*0{,}45) = 360$ J

5.6 Colisões a duas dimensões



antes

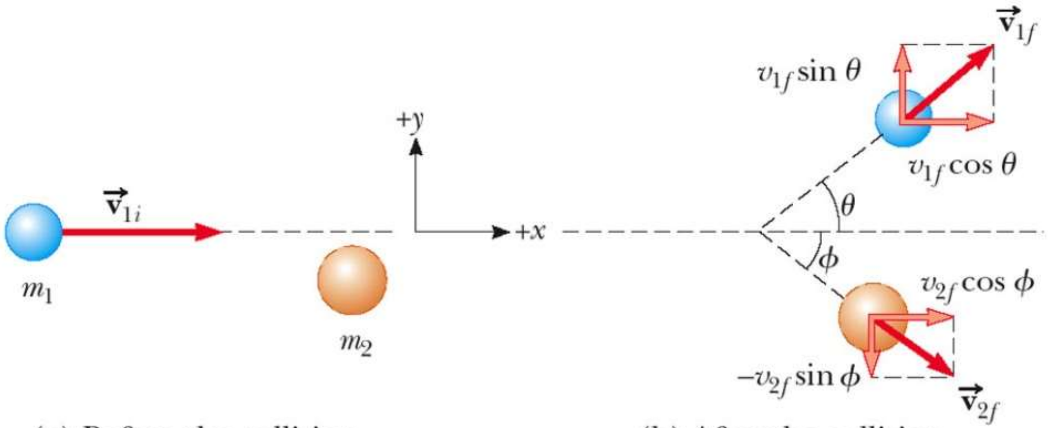
depois

Conservação do momento a duas dimensões

Numa colisão de 2 objetos a 2 dimensões, o princípio da conservação do momento implica que o momento linear total do sistema em cada uma das direções é conservado. É necessário aplicar a conservação do momento separadamente para cada direção, decompondo a velocidade de cada objeto segundo as direções do sistema de coordenadas utilizado:

$$\vec{P}_{\text{antes da colisão}} = \vec{P}_{\text{depois da colisão}} \Leftrightarrow \begin{cases} (P_x)_{\text{antes}} = (P_x)_{\text{depois}} \\ (P_y)_{\text{antes}} = (P_y)_{\text{depois}} \end{cases}$$

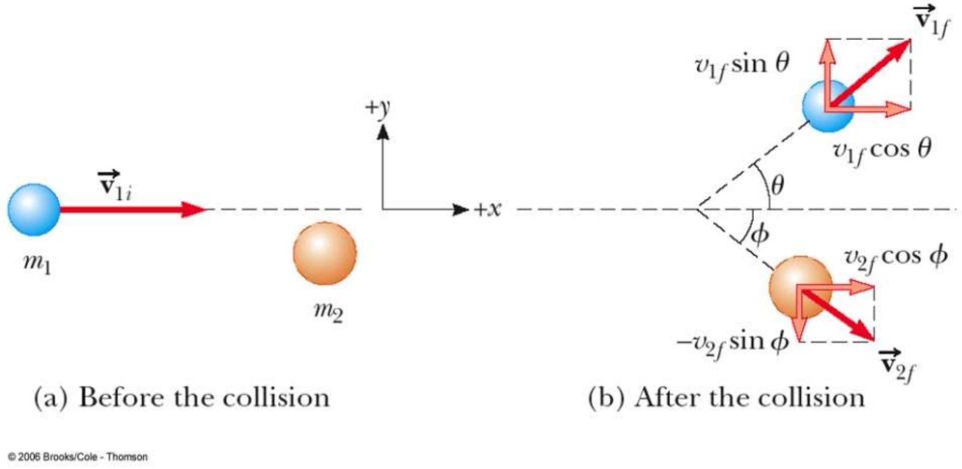
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \end{cases}$$



(a) Before the collision (b) After the collision

Colisão elástica a duas dimensões

- Se a colisão for elástica, deve-se utilizar a equação da conservação da energia cinética



$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

A equação mais simples só pode ser utilizada para as colisões a uma dimensão

$$\cancel{v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}}$$

Colisões a duas dimensões (exemplo)

- decompondo a velocidade de cada objeto segundo as direções do sistema de coordenadas utilizado

$$\begin{cases} (P_x)_{antes} = (P_x)_{depois} \\ (P_y)_{antes} = (P_y)_{depois} \end{cases}$$

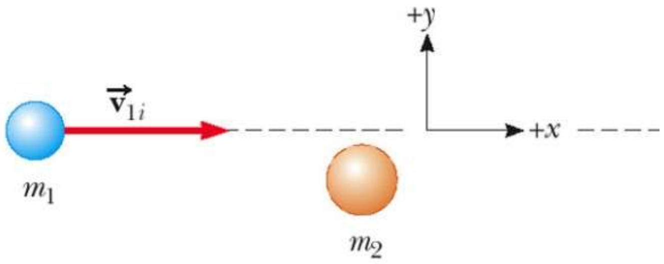
$$m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 + 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$$

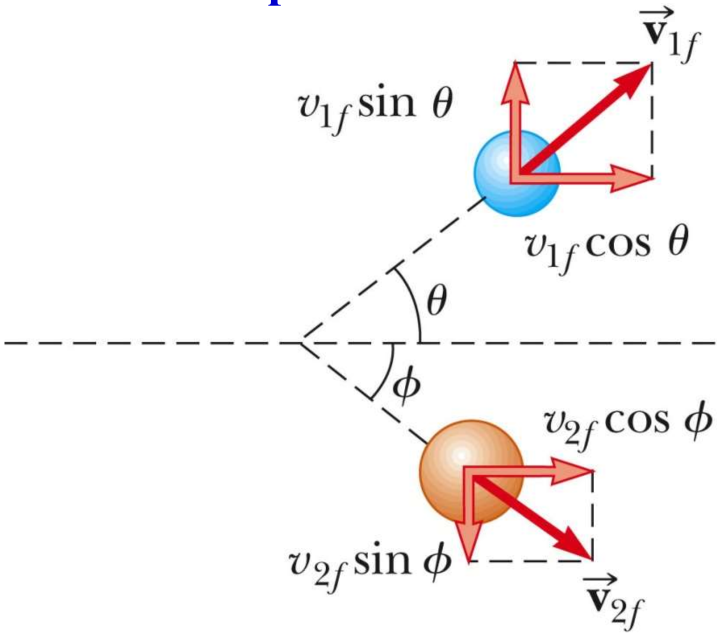
- Se a colisão for elástica

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

antes da colisão



depois da colisão



Ex. 5.10 - Um carro, com uma massa de 1500 kg, viaja para Este com velocidade de 25 m/s e colide, num cruzamento, com outro carro, com uma massa de 2500 kg, que viaja para Norte com uma velocidade de 20 m/s. Calcule o módulo e direção da velocidade dos carros depois da colisão, considerando que ocorreu uma colisão perfeitamente inelástica e que o atrito entre os veículos e a estrada pode ser desprezado.

$$\begin{cases}(P_x)_{antes} = (P_x)_{depois}\\ (P_y)_{antes} = (P_y)_{depois}\end{cases}$$

$$m_1 = 1500\text{ kg},\ \ m_2 = 2500\text{ kg}$$

$$v_{1ix} = 25\text{ m/s},\quad v_{2iy} = 20\text{ m/s},\ \ v_f = ?\quad \theta = ?$$

$$\sum p_{xi} = m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1ix} = 3.75\times10^4\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

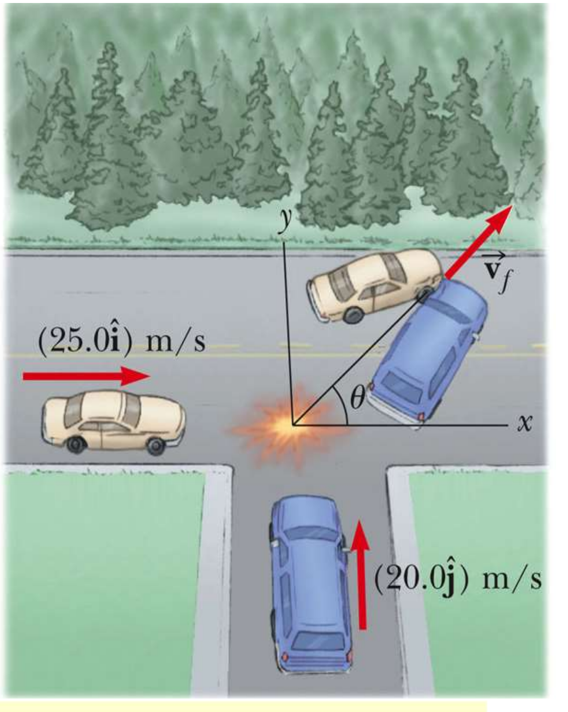
$$\sum p_{xf} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} = (m_1 + m_2) v_f \cos\theta$$

$$3.75\times10^4 = (4000) v_f \cos\theta$$

$$\sum p_{yi} = m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_2 v_{2iy} = 5\times10^4\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\sum p_{yf} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} = (m_1 + m_2) v_f \sin\theta$$

$$5\times10^4 = (4\times10^3) v_f \sin\theta$$



$$\tan\theta = \frac{5\times10^4}{3.75\times10^4} = 1.33$$

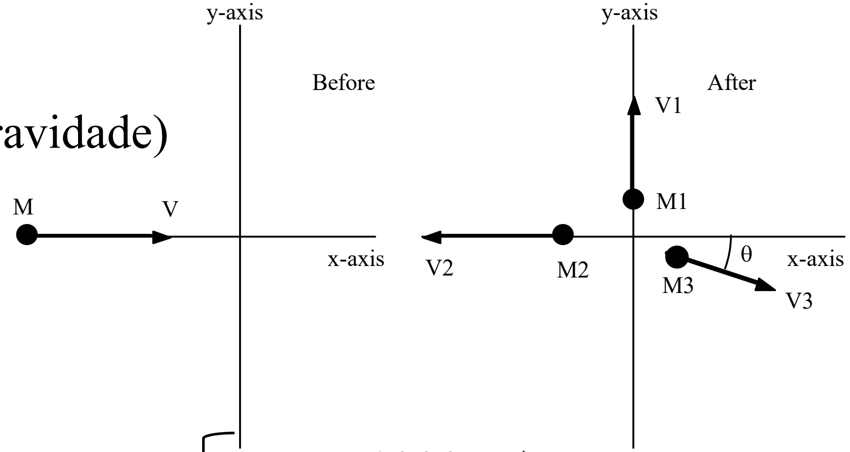
$$\theta = \tan^{-1}(1.33) = 53.1^\circ$$

$$v_f = \frac{5\times10^4}{(4\times10^3)\sin 53.1^\circ} = 15.6\,\text{m/s}$$

Ex. 5.11 - Um corpo de 20 kg tem uma velocidade de 200 m/s no sentido do x positivo, quando ocorre uma explosão interna, e parte-se em três pedaços. Um deles, com uma massa de 10 kg, move-se segundo o y positivo com uma velocidade de 100 m/s. Um segundo pedaço, com uma massa de 4 kg, move-se segundo o x negativo com uma velocidade de 500 m/s. Calcule:

a) A velocidade do terceiro pedaço (6 kg);

b) A energia libertada na explosão (ignore a gravidade)



$$\begin{cases} (P_x)_{antes} = (P_x)_{depois} \\ (P_y)_{antes} = (P_y)_{depois} \end{cases}$$

a)

$$\begin{cases} 20*200 = 10*0 + 4*(-500) + 6*v_{3x} \\ 20*0 = 10*100 + 4*0 + 6*v_{3y} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{3x} = 1000 \text{ m/s} \\ v_{3y} = -166{,}67 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$v_3 = 1013{,}8 \text{ m/s} \qquad \text{tg } \theta = -166{,}67/1000 \qquad \theta = -9{,}5^o$$

b) $E_{lib} = \Delta Ec = Ecf - Eci$

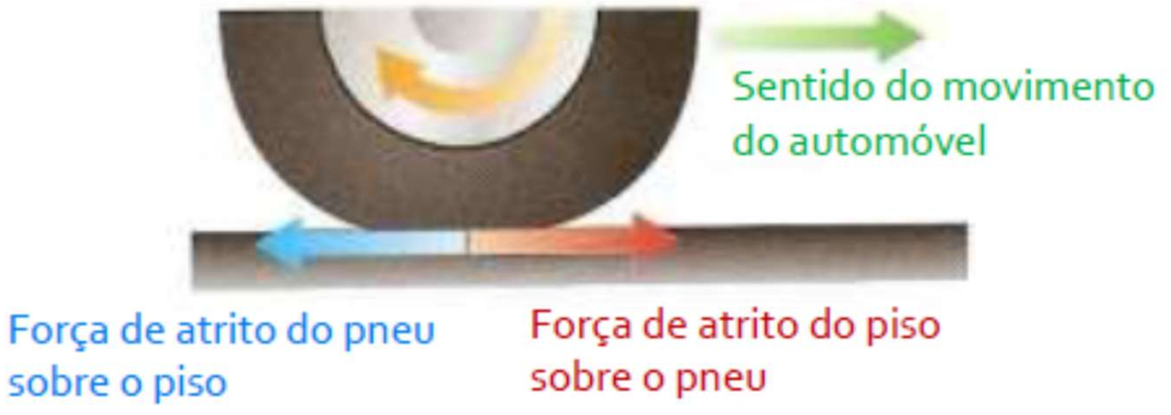
$Eci = (1/2)20*200^2 = 4x10^5$ J

$Ecf = (1/2)10*100^2 + (1/2)4*500^2 + (1/2)6*1013{,}8^2 = 3{,}63x10^6$ J

$E_{lib} = 2{,}93x10^6$ J

5.7 Sistemas com massa variável

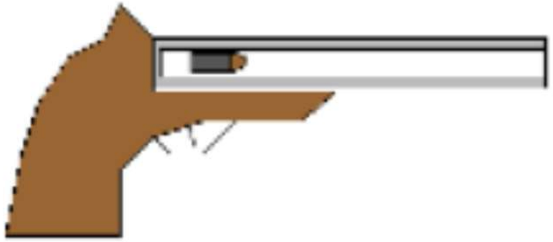
A força de atrito da estrada sobre o pneu do automóvel propulsiona o carro



No espaço, as naves não têm um piso para que a força de atrito as possa propulsionar

A quantidade de movimento da arma altera-se após o disparo

$$\vec{p}_{bala,0} + \vec{p}_{arma,0} = 0$$



$$\vec{p}_{bala,F} + \vec{p}_{arma,F} = 0$$

$m\,\vec{v}_{arma,F}$ $\qquad$ $m\,\vec{v}_{bala,F}$

Sistemas com massa variável

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

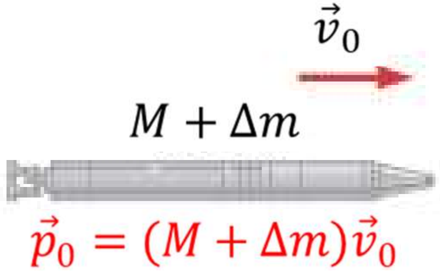
Se a massa não variar, o primeiro termo desaparece e obtemos a forma já conhecida da 2ª lei de Newton:

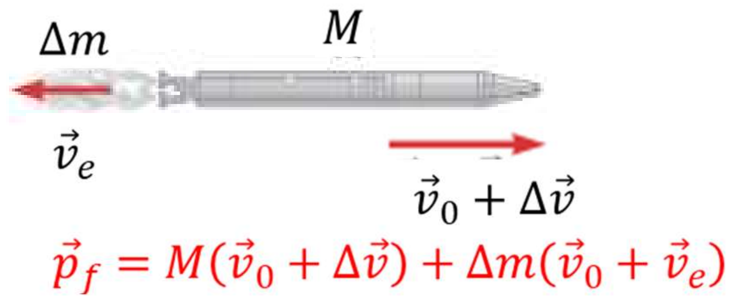
$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Nos casos em que a massa varia (por exemplo foguetes que queimam grande quantidade de combustível) tem de se usar a expressão completa e nesse caso a forma correta da 2ª lei de Newton é:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Caso dos foguetões no espaço





M – Massa do foguetão
Δm – massa do combustível + comburente que após a combustão dá origem aos gases de escape
$\vec{v}_0$ - Velocidade inicial do conjunto relativamente à Terra
$\Delta\vec{v}$ - aumento de velocidade do foguetão relativamente à Terra
$\vec{v}_e$ - velocidade dos gases de escape relativamente ao foguetão

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$(M + \Delta m)v_0 = M(v_0 + \Delta v) + \Delta m(v_0 - v_e)$$

$$\mathrm{Mv_0 + \Delta m v_0 = Mv_0 + M\Delta v + \Delta m v_0 - \Delta m v_e}$$

$$0 = M\Delta v - \Delta m v_e \Rightarrow M\Delta v = \Delta m v_e$$

$M\Delta v = \Delta m v_e$

Quando $\Delta t \to 0$ e atendendo a que dm = -dM, porque a massa do gás de escape corresponde à variação da massa do conjunto inicial, que é negativa

$$M dv = -dM v_e$$

Dividindo por dt:

$$M\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dM}{dt}$$

$$dv = -\frac{dM}{M}v_e \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = -v_e\int_{M_0}^{M_f}\frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_0 = -v_e \ln\frac{M_f}{M_0}$$

$$\boxed{v_f - v_0 = v_e \ln\frac{M_0}{M_f}}$$

Obtém-se a **força propulsora** (***thrust*** em inglês) que é a força que os gases de escape exercem no foguetão:

$$\boxed{F_{propulsora} = M\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dM}{dt}}$$

Para uma grande variação da velocidade do foguetão:
-a velocidade dos gases de escape deve ser a maior possível;
- A razão das massas deve ser a maior possível.

Que é proporcional à velocidade dos gases de escape e à **taxa com que massa varia** (***burn rate*** em inglês)

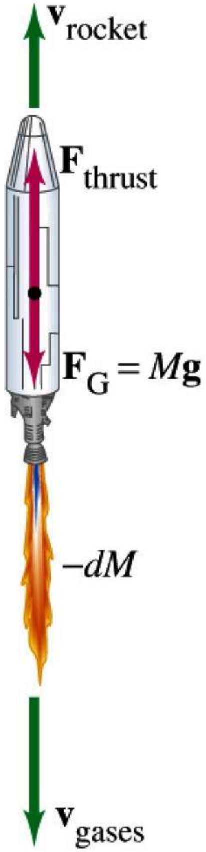
Ex. 5.12 - Os foguetões Saturno V (das missões Apollo) tinham uma massa de 2.85×10^6 kg em condições de lançamento. A carga útil dos foguetões era somente 27% da massa em condições de partida. Os motores consumiam combustível à taxa de 13.84×10^3 kg/s e a força propulsora era de 34×10^6 N. Calcule:

a) A velocidade dos gases de escape

b) A duração da combustão (tempo que os motores levam a consumir o combustível)

c) A aceleração inicial no lançamento

d) A aceleração no final do combustível



a) $v_e = 2456{,}6$ m/s

b) $M_{comb} = 2.85 \times 10^6$ kg x 0,73 = 2.08×10^6 kg $\qquad \Delta t = 150{,}3$ s

c) $F_R = F_{prop} - F_g \qquad a_i = 2{,}13 \text{ m/s}^2$

d) $a_f = 34.4 \text{ m/s}^2$

Considerando que $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$$v_f - v_0 = v_e \ln \frac{M_0}{M_f}$$

$$F_{propulsora} = M \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dM}{dt}$$

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

5.13 - Num incêndio, um bombeiro tem de exercer uma força de 600 N para manter a agulheta que envia 3600 L/min de água para apagar o fogo. Calcule a velocidade da água à saída da agulheta.

$v_e = 10$ m/s

$$F_{propulsora} = M\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dM}{dt}$$

5.14 - Considere um míssil com uma massa total 1×10^5 kg. Qual poderá ser a massa da parte que não é combustível, se o míssil tiver de ter uma velocidade final de 8 km/s, e que os gases são expelidos com uma velocidade 2.2×10^3 m/s.

$M_f = 2.63\times10^3$ kg

$$v_f - v_0 = v_e \ln\frac{M_0}{M_f}$$