Tópicos

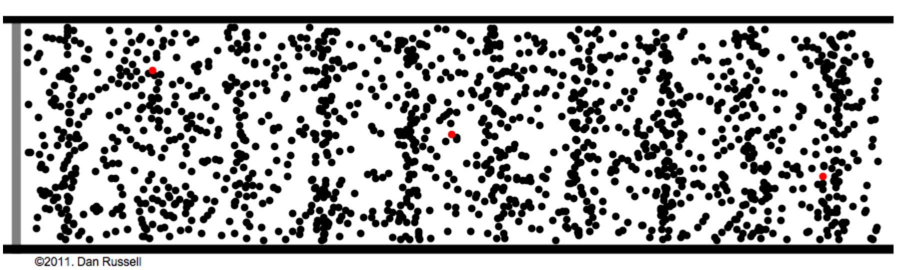
Oscilações harmónicas simples,
Energia associada às oscilações

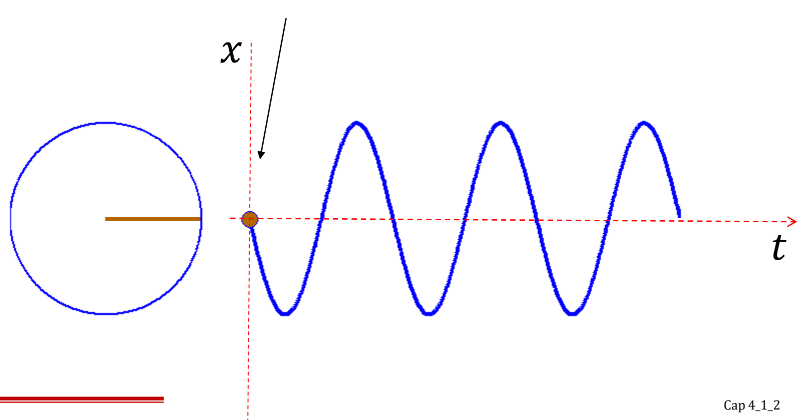
➢ Objetivos de aprendizagem

- Entender o modelo do movimento harmónico simples.
- Identificar as grandezas associadas aos movimentos harmónicos e fazer previsões sobre a relação entre as mesmas
- Calcular posição, velocidade e aceleração de um movimento harmónico
- Analisar do ponto de vista energético o movimento harmónico
- Comparar o movimento harmónico simples com o movimento circular
- Analisar o movimento pendular com exemplo de um movimento harmónico

Estudo recomendado:

- R. Resnick, D. Halliday, "Fundamentos de Física", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro (2011) **(cap 15)**





Questão inicial

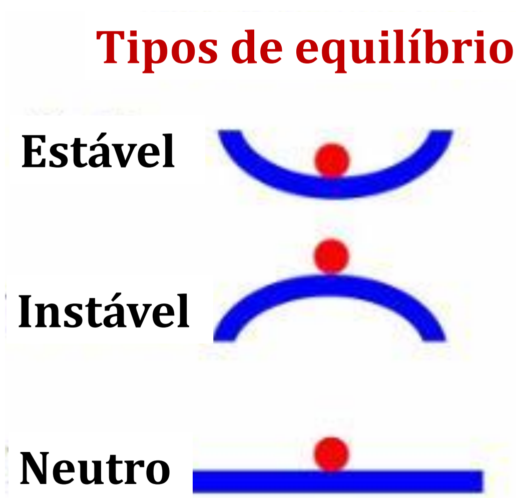
A regularidade no movimento de um pêndulo foi estudada por Galileu Galilei no século XVI. A invenção do relógio de pêndulo é atribuída a Christiaan Huygens em 1656. A fabricação começou em 1657 por artesãos holandeses e teve rápida difusão.

Para que um relógio de pêndulo seja um medidor de tempo o que é necessário?

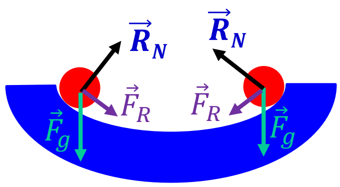
Galileu Galilei foi o primeiro a observer o movimento oscilatório do pêndulo com espírito científico.
Tinha cerca de 20 anos e a pintura representa Galileu a observar a oscilação do candeeiro pendurado no teto da catedral, que o terá motivado a estudar este movimento.

Como não havia relógios de pusso, usou as próprias pulsações como instrumento de medida de tempo.

Equilíbrio ($\vec{F}_R = \vec{0}$)

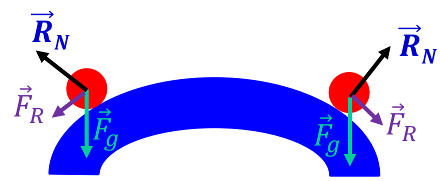


Forças restauradoras



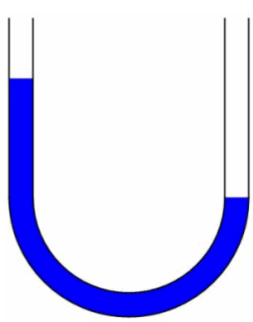
$\vec{F}_R$ levam o corpo para a posição de equilíbrio

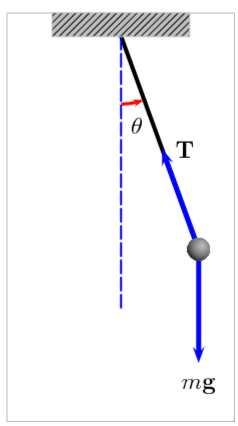
Forças dequilibradoras



$\vec{F}_R$ afastam o corpo da posição de equilíbrio

Alguns exemplos onde estão presentes forças restauradoras



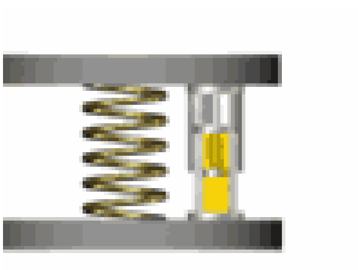


Movimento Oscilatório

Sempre que um sistema com forças restauradoras sofre uma perturbação da sua posição de equilíbrio estável, ocorre um movimento de oscilação.

Um objeto que sofre movimentos periódicos tem sempre uma posição de equilíbrio estável.

Neste capítulo (parte 1), vamos concentrar-nos em dois exemplos simples de sistemas que podem ser submetidos movimentos periódicas: sistemas de massa-mola e pêndulos.



https://phet.colorado.edu/en/simulation/masses-and-springs-basics

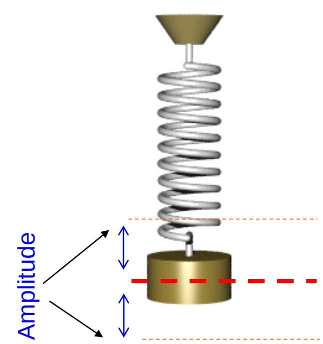
Grandezas nos movimentos periódicos

- Amplitude, x_m; y_m; z_m; θ_m;– deslocamento máximo (linear ou angular) em relação à posição de equilíbrio.
- Período, T – tempo necessário para completar uma oscilação (s)
- Frequência , f – número de oscilações por unidade de tempo (Hz, s^{-1})

$$f = \frac{1}{T}$$

- Frequência angular, ω - taxa de variação angular (rad s^{-1})

$$\omega = 2\pi f$$

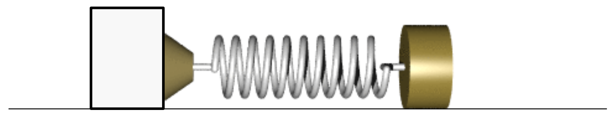


Nos movimentos oscilatórios, não confundir frequência angular com velocidade angular.

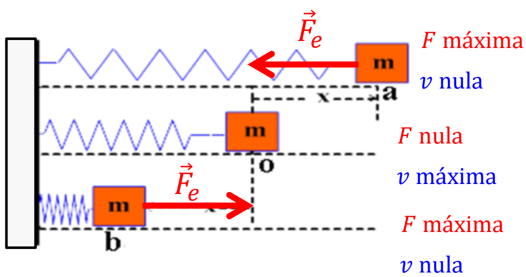
Movimento harmónico simples (MHS):

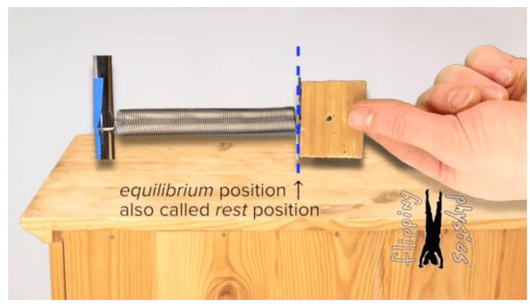
Ocorre sempre que a força restauradora do equilíbrio é diretamente proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio ⇒ movimento repete-se em intervalos de tempo iguais

Caso 1: sistema massa-mola (sem atrito)

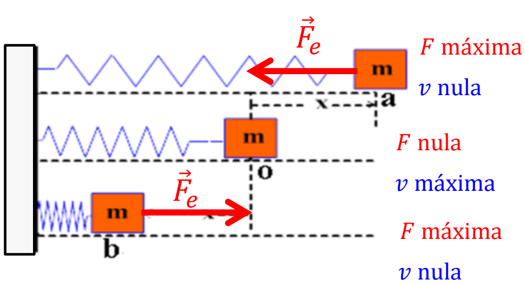


A força restauradora é a força elástica: $$F_e = -kx = ma$$





$$F_e = -kx = ma \Leftrightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

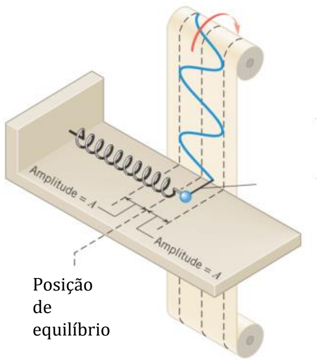


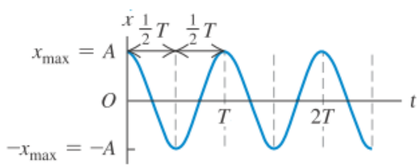
$$a + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Equação diferencial do movimento

Que soluções são possíveis?

Gráfico posição-tempo do MHS





O gráfico do deslocamento *versus* tempo é uma curva sinusoidal

Que soluções são possíveis?

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

ω^2

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$ ou $$x = x_m \sin(\omega t + \phi)$$

x_m – Amplitude (elongação máxima)

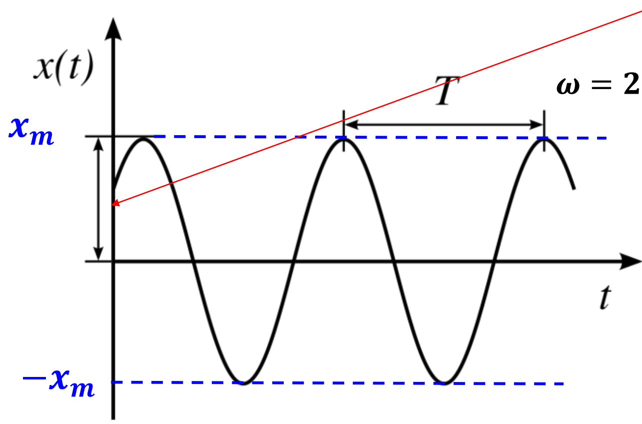
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - frequência angular

$(\omega t + \phi)$ - ângulo de fase (rad)

ϕ – fase inicial (ou contante de fase)

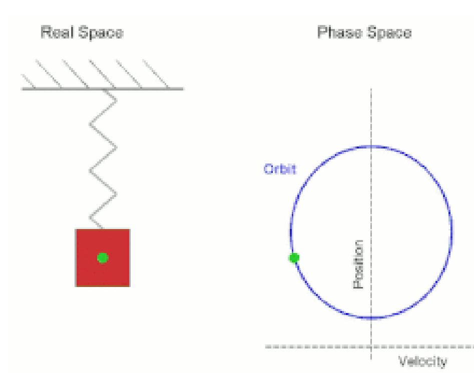
Cap 4 – Oscilações e Ondas(parte 1)

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$



$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

O ângulo de fase e a fase inicial ϕ



Qual o significado da fase inicial ϕ ?

Dá informação sobre as condições do movimento no instante $t = 0$

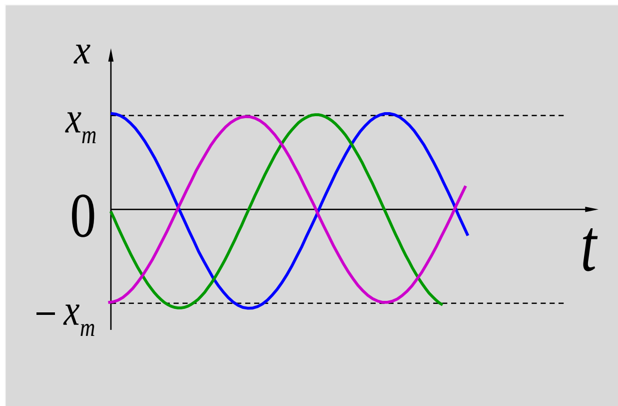
$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi)$$

$\boldsymbol{\phi = 0}$

$\boldsymbol{\phi = \frac{\pi}{2}}$

$\boldsymbol{\phi = \pi}$

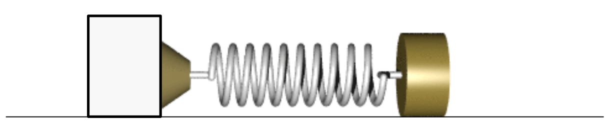


$\boldsymbol{\phi = \frac{\pi}{2}}$

$\boldsymbol{\phi = \pi}$

$\boldsymbol{\phi = \frac{3\pi}{2}}$

Exemplo 1

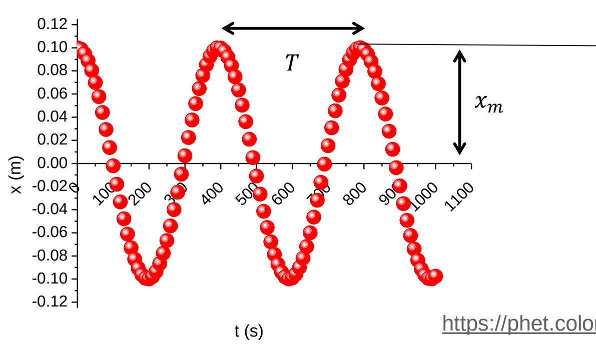


Supondo:
k = 986 N/m
m = 1 kg

Se puxarmos o corpo 10 cm para a direita e o largarmos (sem atrito):

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$

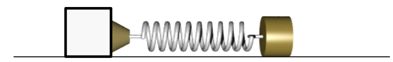
$$x(t) = 0.1 \cos(31.4t + 0) \ \ (\mathrm{SI})$$



https://phet.colorado.edu/en/simulation/masses-and-springs

Velocidade da massa em função do tempo

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

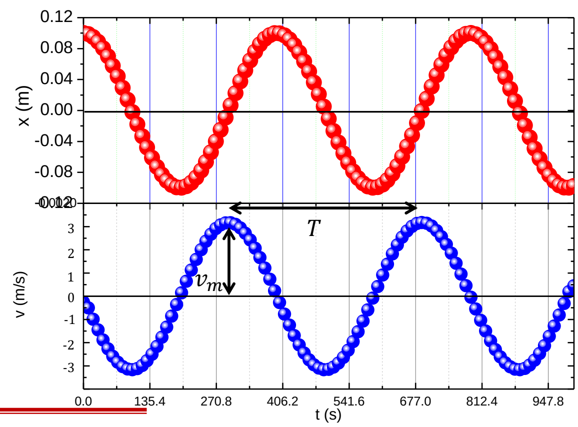
$$\boxed{v(t) = -\underbrace{\omega x_m}_{v_m} \sin(\omega t + \phi)}$$

Amplitude da velocidade

$$x(t) = 0.1 \cos(31.4t) \ \mathrm{m}$$

$$v(t) = -3.14 \sin(31.4t) \ \mathrm{m/s}$$

$$v_m = 3.14 \ \mathrm{m/s}$$



Aceleração da massa em função do tempo

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\boxed{v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)}$$

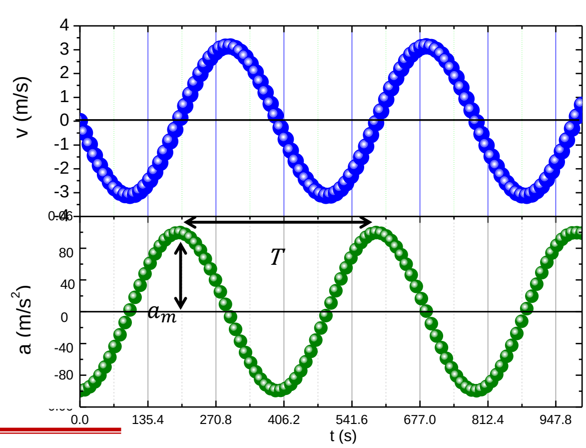
$$\boxed{a(t) = -\underbrace{\omega^2 x_m}_{a_m} \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)}$$

Amplitude da aceleração

$$v(t) = -3.14 \sin(31.4t) \ \mathrm{m/s}$$

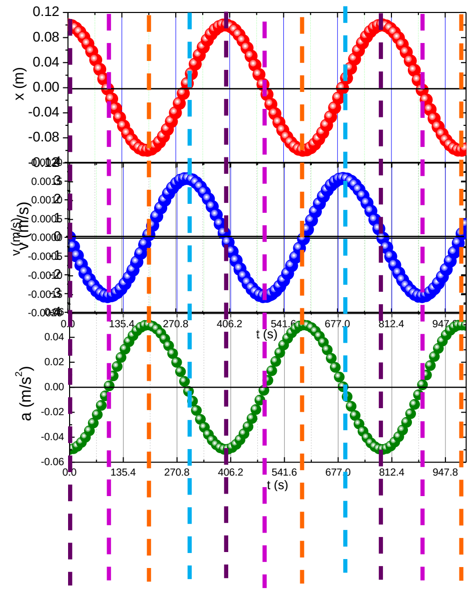
$$a(t) = -98.6 \cos(31.4t) \quad \mathrm{m}/s^2$$

$$a_m = 98.6 \ \mathrm{m}/s^2$$



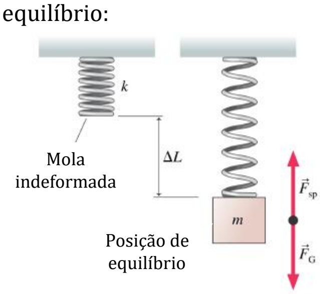
Comparação da variação da posição, da velocidade e da aceleração com o tempo:

- Quando a elongação é máxima positiva (amplitude positiva), a velocidade é nula e a aceleração é máxima, com sentido negativo.
- Quando a elongação é nula, mas a massa se move com sentido negativo, a velocidade é máxima, com sentido negativo, e a aceleração é nula.
- Quando a elongação é máxima negativa (amplitude negativa), a velocidade é nula e a aceleração é máxima mas com sentido positivo.
- Quando a elongação é nula, mas a massa se move com sentido positivo, a velocidade é máxima, com sentido positivo, e a aceleração é nula.



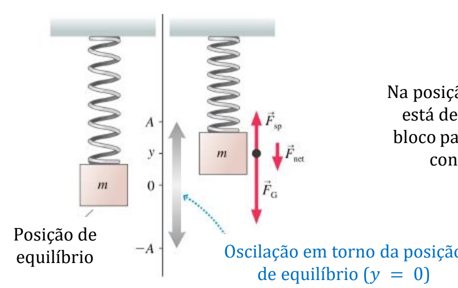
Análise do movimento oscilatório do sistema massa-mola na direção vertical, sem atrito

No equilíbrio:



$$k\Delta L - mg = 0$$

$$\Delta L = \frac{mg}{k}$$



Na posição de equilíbrio a mola está deformada. Movendo o bloco para a posição y, a mola continua deformada.

$$k(\Delta L - y) - mg = ma$$

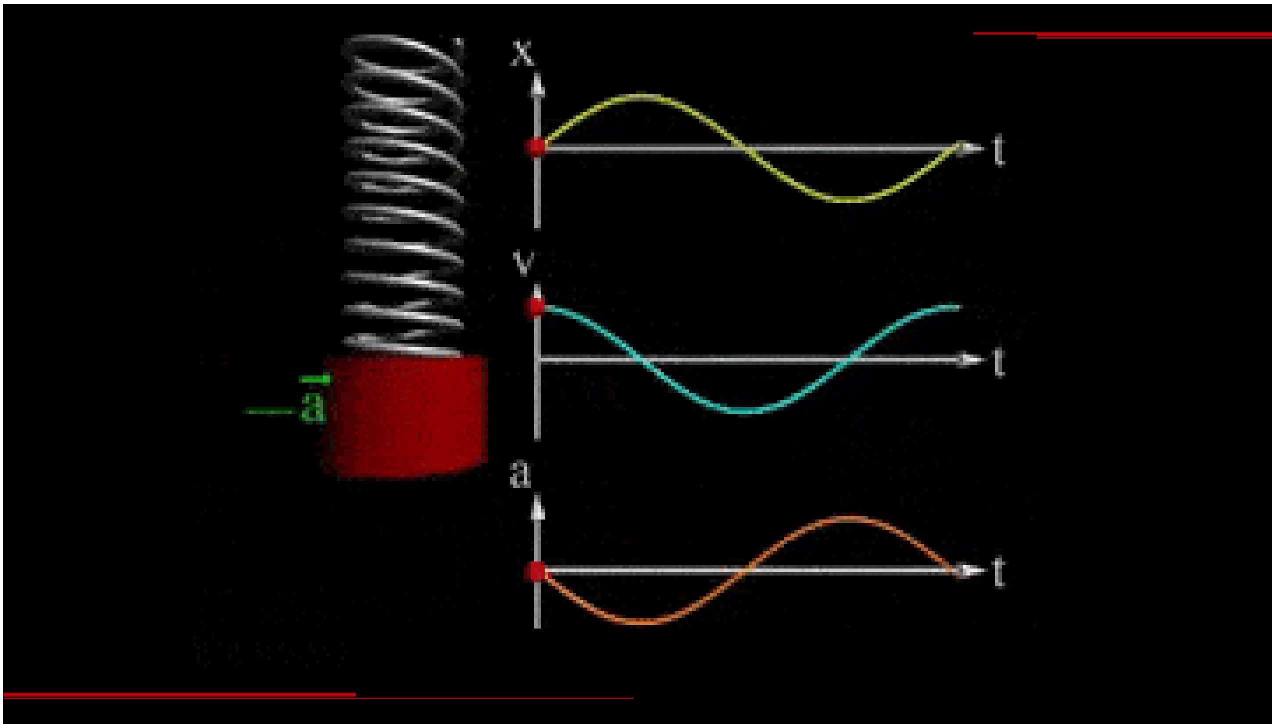
$$k\Delta L - ky - mg = ma \quad \Leftrightarrow k\frac{mg}{k} - ky - mg = ma$$

$$-ky = ma \quad \Leftrightarrow -ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

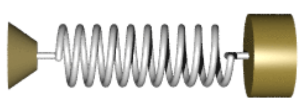
Solução da equação diferencial

$$y = y_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{ou} \qquad y = y_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)$$



Checkpoint 4.1.1:

A função:



$x(t) = 0.06\cos(4\pi t + \pi)$ (SI)

dá-nos o MHS de uma partícula de massa 2 kg, que está acoplada a uma mola.

A) Identifique ou determine: a amplitude, a frequência angular, a frequência, o período, a fase inicial.

B) Determine a velocidade e a aceleração em qualquer instante.

C) Qual a posição, velocidade e aceleração iniciais

D) Determine para o instante $t = \frac{3T}{2}$, a fase, a posição; a velocidade; a aceleração;.

E) Determine a constante da mola.

Checkpoint 4.1.2:

Um objecto com 2 kg está associado a uma mola de constante 196 N/m. O objecto é mantido a 5 cm da posição de equilíbrio e depois é largado (t = 0). Calcule:

A) A frequência angular, a frequência e o período do movimento.

B) Escreva as equações $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

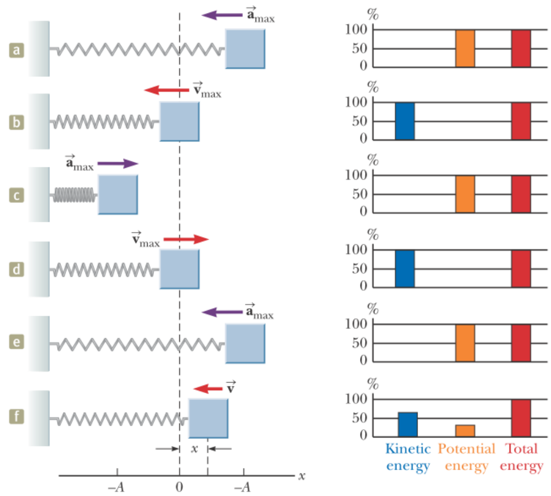
Checkpoint 4.1.3:

Um objecto, associado a uma mola, oscila horizontalmente com uma frequência angular de 8 rad/s. No instante inicial, o objecto na posição $x_0 = 4$ cm e tem uma velocidade de $v_0 = -25$ cm/s.

a)Calcule a amplitude e a fase inicial do movimento.

b) Calcule escreva a equação das posições.

Energia no MHS



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

A = amplitude $= x_m$

Energia no MHS

$E_{cin} + E_{pot}$ =constante

Energia Cinética: $$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-\omega x_m \sin(\omega t + \phi))^2$$

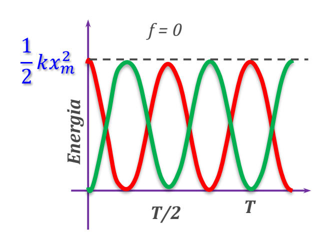
$$E_C = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

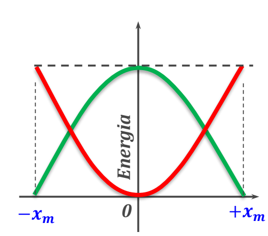
+

Energia Potencial elástica: $$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(x_m \cos(\omega t + \phi))^2$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Energia Mecânica: $$\boxed{E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}kx_m^2}$$





Checkpoint 4.1.4:

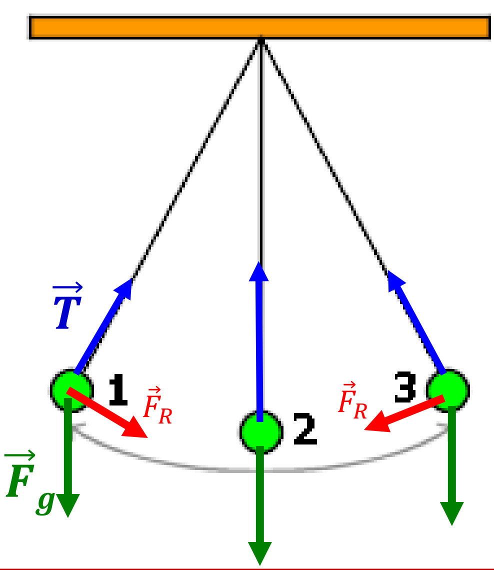
Um objeto com 1kg de massa associado a uma mola, oscila com uma amplitude de 4 cm e um período de 2s. Calcule:

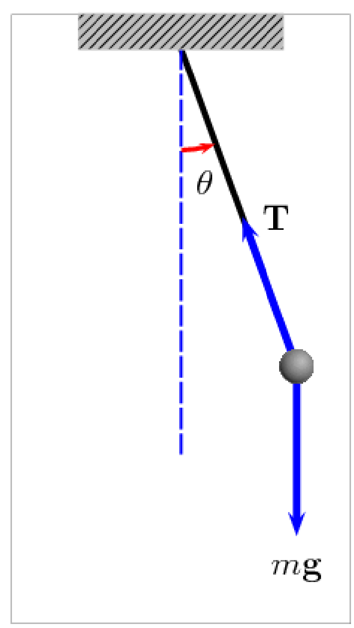
a) A energia total do sistema

b) A velocidade máxima do objeto

c) Em que posição a velocidade é metade do valor máximo?

Caso 2: pêndulo gravítico simples (sem atrito)





$$F_g \text{sen}\theta = ma_t \quad \Leftrightarrow -mg\text{sen}\theta = ma_t$$

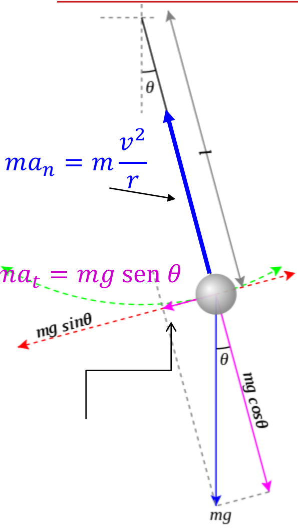
$$-g\text{sen}\theta = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Para ângulos pequenos: $\text{sen}\theta \approx \theta$

Angle in Degrees	Angle in Radians	Sine of Angle	Percent Difference
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

$$F_n = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

$$F_t = ma_t = mg \text{ sen } \theta$$



$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\theta \qquad \text{e:} \quad s = L\theta \;\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

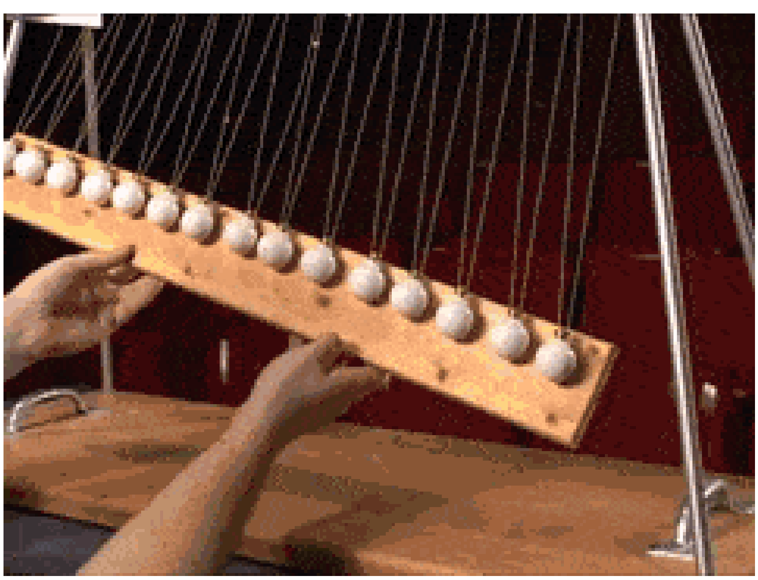
$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{L}}^{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Ver e experimentar a simulação:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/pendulum-lab



As equações do movimento de oscilação do pêndulo gravítico simples

Posição angular

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

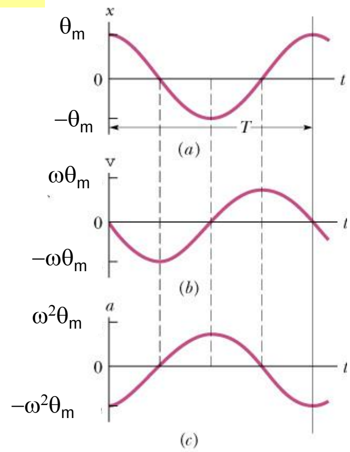
Distinguir os ângulos θ e ϕ

Velocidade angular

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\omega\, \theta_m \sin\,(\omega t + \phi)$$

Aceleração angular

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\omega^2\, \theta_m \cos\,(\omega t + \phi)$$



Atenção: Nestas equações $\dfrac{d\theta(t)}{dt} \neq \omega$

Velocidade angular do movimento (varia com t)

Frequência angular do movimento (é constante para o movimento)

Checkpoint 4.1.5:

Christian Huygens (1629–1695) foi um dos maiores relojoeiros da história. Huygens sugeriu que a unidade de comprimento de um sistema internacional poderia ser definida pelo comprimento de um pêndulo simples que tivesse o período de 1 s.

a) Qual deveria ser o comprimento do pêndulo na Terra ?
b) Qual seria o período do pêndulo se fosse levado para a Lua (g_{Lua} = 1/6 g_{Terra})?
c) Se Huygens tivesse nascido noutro planeta, qual deveria ser a aceleração da gravidade desse planeta de modo que o pêndulo imaginado por Huygens tivesse o mesmo comprimento que o nosso metro?

Informação adicional (não sai para avaliação)

Quando a amplitude das oscilações dum pêndulo são grandes, o movimento continua a ser periódico, mas deixa de ser harmónico simples. O período apresenta uma dependência da amplitude (apesar de ser pequena).

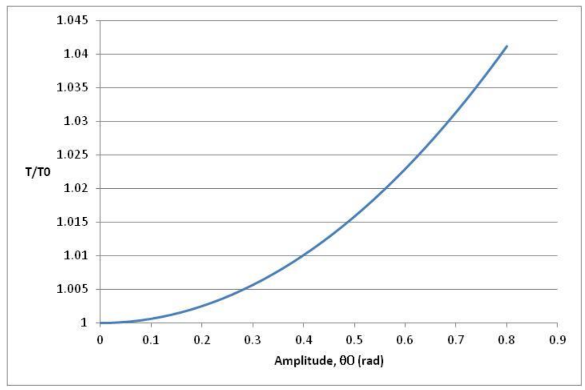
Para uma amplitude θ_0:

$$T = T_0\left[1+\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right]$$

Em que:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Período natural de oscilação (baixas amplitudes)



Relembre os objetivos de aprendizagem…..

- Entender o modelo do movimento harmónico simples.
- Identificar as grandezas associadas aos movimentos harmónicos e fazer previsões sobre a relação entre as mesmas
- Calcular posição, velocidade e aceleração de um movimento harmónico
- Analisar do ponto de vista energético o movimento harmónico
- Comparar o movimento harmónico simples com o movimento circular
- Analisar o movimento pendular com exemplo de um movimento harmónico

… certifique-se que foram atingidos.