Departamento de Matemática
e Aplicações

15 Fev 2010
a

Exame de recurso de Cálculo A

Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso: ______________

GRUPO I (12 valores) **Apresente apenas o resultado.**

1. O valor real de x que satisfaz a equação $\arccos(2x) = \frac{\pi}{6}$ é: ______________________

2. Sendo $f(x) = \arccos(2\sqrt{x})$, a expressão de $f'(x)$ é : ______________________

3. Decomponha a fracção $\dfrac{1}{(x^2+4)(x^2-4)}$ em fracções elementares, sem calcular as constantes.

____

4. Determine $P\left(\dfrac{4}{x.\ln^2 x} + \dfrac{3x}{9+x^2}\right)$: ______________________

5. Determine $P(t.e^{2t})$: ______________________

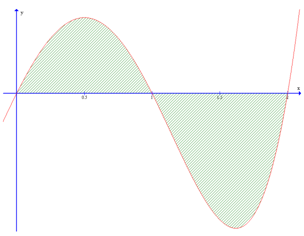
6. Escreva a equação, em coordenadas polares, que caracteriza o arco da curva $(x+1)^2+y^2 = 1 \wedge y \geq 0 \wedge y+x \leq 0$.

____

7. Considere o integral $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{\sqrt{9+u^2}}{u} du$. Escreva o integral obtido depois de aplicar a substituição $u = 3\,\mathrm{tg}\, t$, de modo que a função integranda esteja escrita em termos das funções $\sin t$ e $\cos t$.

____

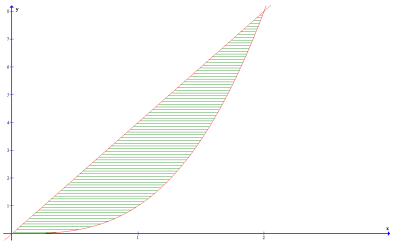
8. Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$ e que $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = -1$, determine o valor da área sombreada na figura.



- $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9. Considere a região plana limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 4x$.

   (a) Escreva a expressão na forma mais simples, usando integrais, que permite calcular o volume do sólido obtido pela rotação dessa área em torno do eixo OX.



   (b) Escreva a expressão na forma mais simples, usando integrais, que permite calcular o perímetro da região indicada.

   ____

10. A soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{3-n}$ é: ____

11. Escreva a série $-10 + \frac{15}{4} - \frac{20}{9} + \frac{25}{16} - \cdots$ utilizando o símbolo de somatório______________________

GRUPO II (8 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad x \leq \pi \\ \sin^2 x & \text{se} \quad x > \pi \end{cases}$

   Determine $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)dx$.

2. Considere a função $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{\ln t}{\sqrt{t^2+2}} dt$, definida para $x > 0$. Determine g' e o intervalo real onde a função g é crescente.

3. Considere a região plana definida da forma $y \leq -x^2 + 5 \wedge y \geq (x-1)^2$.

   (a) Faça o esboço da região plana indicada.

   (b) Determine a área da região indicada.

4. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$ e se possível, indique o seu valor.

5. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$.