Departamento de Matemática e Aplicações // 2015

Duração: 90 minutos

1º Teste de Cálculo EE

Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente - cada resposta correta vale 0.6 val.

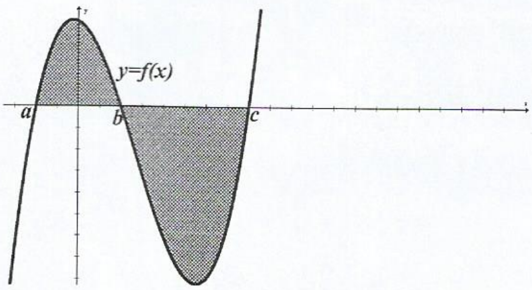
1. Qual dos seguintes integrais é impróprio?

☐ $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt$; ☒ $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\sin t}\,dt$; ☐ $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan t\,dt$; ☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,dt$.

2. Qual dos seguintes integrais impróprios é convergente?

☐ $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t}\,dt$; ☐ $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2}\,dt$; ☒ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$; ☐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

3. Qual dos seguintes integrais permite calcular a área sombreada?



☐ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$; ☐ $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$; ☒ $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\,dx$; ☐ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

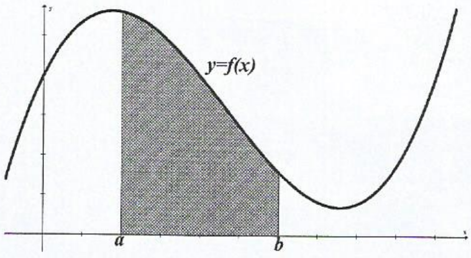
4. Qual das seguintes séries numéricas é divergente?

☒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(-5)^n}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^4}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 7.6^{-n+1}$.

5. Qual das seguintes expressões representa a série $-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{6}{27}+\frac{8}{81}-\cdots$?

☒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)}{3^n}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2^n)}{3^{n+1}}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)}{3^{n+1}}$; ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^n)}{3^n}$.

6. Considere a região plana sombreada na figura e considere $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Qual das seguintes expressões representa a área da região sombreada?



☐ $F(a)$; ☐ $F(b)$; ☒ $F(b)-F(a)$; ☐ $f(a).f(b)$.

7. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ Seja f uma função integrável num intervalo real limitado I, então f é contínua em I.

☒ Seja f uma função derivável num intervalo real limitado I, então f é integrável em I.

☐ Seja f uma função integrável num intervalo real limitado I, então f é derivável em I.

☐ Seja f uma função limitada num intervalo real limitado I, então f é integrável em I.

8. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ Se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

☒ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

☐ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

☐ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

9. Indique qual das desigualdades é verdadeira:

$\int_{-1}^{0} \arcsin x \, dx > 0$ ☐; $\int_{-1}^{0} \arccos x \, dx < 0$ ☐; $\int_{-1}^{0} \arcsin x^2 \, dx > 0$ ☒; $\int_{0}^{1} \arccos x^2 \, dx < 0$ ☐;

GRUPO II

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

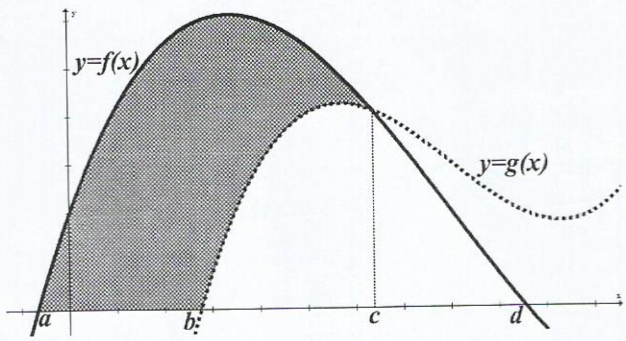
1. (1.6 val.) Aplique uma substituição conveniente no integral $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{3x} - 2e^{2x} + 1} dx$ e escreva o integral resultante simplificando a função integranda. (Sug.: veja a substituição aconselhável no ponto 2. do formulário *Primitivação por substituição*). $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$

$$\int_1^e \frac{y}{y^3 - 2y^2 + 1} \cdot \frac{1}{y} dy = \int_1^e \frac{dy}{y^3 - 2y^2 + 1}.$$

2. (0.5 val.) Qual o valor de $\int_4^1 (5 - f(x))dx$, sabendo que $\int_1^6 f(x)dx = 3$ e $\int_4^6 f(x)dx = 7$.

$$\int_4^1 5 \cdot dx - \int_4^1 f(x)dx = 5(1-4) + \int_1^4 f(x)dx = -15 - 4 = -19$$

3. Considere a região sombreada na figura seguinte.



(a) (1.0 val.) Escreva a expressão, usando integrais e os dados da figura, que permite determinar a área da região sombreada.

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c g(x)dx$$

(b) (0.7 val.) Escreva a expressão que permite calcular o comprimento da curva que delimita a região sombreada.

$$L = b - a + \int_b^e \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx + \int_a^e \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

4. (0.8 val.) Escreva a expressão da soma parcial S_n da série $-\frac{3}{7} + \frac{3}{7^2} - \frac{3}{7^3} + \cdots$.

$$S_n = -\frac{3}{7}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{7}\right)} = -\frac{3}{8}\left[1-\left(-\frac{1}{7}\right)^n\right]$$

GRUPO III

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. (2 val.) Determine a função $f(x)$ limitada no intervalo de integração e a constante real k tal que $\int_k^x f(t)\,dt = x^2 e^x \ln x$.

• Para determinar o valor de k: $\int_k^k f(t) = k^2 e^k \ln k \Leftrightarrow 0 = k^2 e^k \ln k$

$k = 0 \vee \ln k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1.$

• Para determinar $f(x)$:

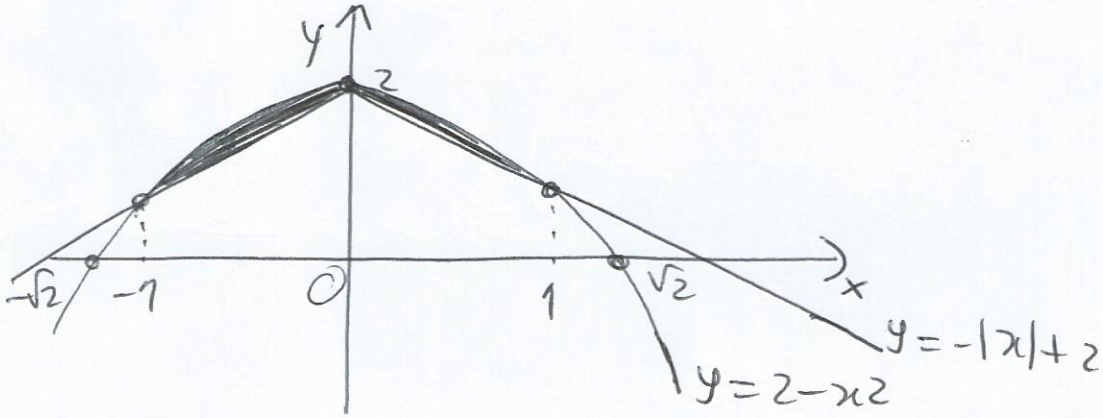
$$\left(\int_k^x f(t)\,dt\right)' = 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x \cdot e^x$$

$$f(x) = x \cdot e^x (2\ln x + x \ln x + 1)$$

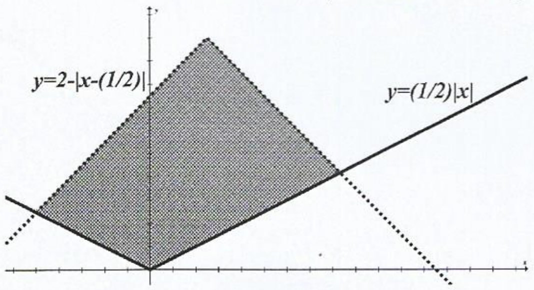
• k tem que ser $k=1$, pois se $k=0$, f não seria limitada no intervalo de integração

2. Considere a região plana definida por $A = \{y < 2 - x^2 \wedge y > -|x| + 2\}$.

(a) (1.5 val.) Esboce a região plana num referencial cartesiano.



(b) (2.5 val.) Calcule a área da região plana da alínea anterior. **Nota: se não respondeu à alínea anterior**, considere a região sombreada na figura abaixo.



$$\int_{-1}^{1} \left(2-x^2-(2-|x|)\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(-x^2+|x|\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(-x-x^2)\,dx + \int_0^1 (x-x^2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \overset{3}{=} 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3. (2 val.) Mostre que $0 < \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin t^2 \, dt < \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, sem calcular o integral.

Como $-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, tem-se que $0 \leq t^2 \leq \frac{\pi}{4}$.

Assim, como sen é uma função crescente, $\operatorname{sen} 0 \leq \operatorname{sen} t^2 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ (⇔

$0 \leq \operatorname{sen} t^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \operatorname{sen} t^2 dt \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)$

$\ldots \leq \sqrt{\frac{2\pi}{2}}$.

4. Responda **apenas a uma** das perguntas seguintes.

(a) (1 val.) Calcule o valor da constante $A > 1$ tal que o integral $\int_A^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$ tenha o valor de 9.

(b) (2 val.) Calcule a soma da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n+2)}$.

a) $\int_A^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_A^M \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_A^M = \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{1}{M-1} + \frac{1}{A-1}\right]$

$= \frac{1}{A-1}$. Pretende-se que $\frac{1}{A-1} = 9 \Leftrightarrow A-1 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow A = $

b) Como $\frac{2}{(n-1)(n+2)} = \frac{A}{(n-1)} - \frac{B}{(n+2)}$ com $A = \frac{2}{3}$ e $B = 2/3$, tem-se

que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2/3}{n-1} - \frac{2/3}{n+2}\right)$ é uma série de Mengoli com $a_n = \frac{2/3}{n-1}$ e $k = 3$

Assim, $S = a_2 + a_3 + a_4 - 3 \lim a_n$

$= \frac{2/3}{1} + \frac{2/3}{2} + \frac{2/3}{3} - 3 \lim \frac{2/3}{n-1} =$

$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{11}{9}$.