Departamento de Matemática e Aplicações 20 /10/ 2014

Duração: 90 minutos

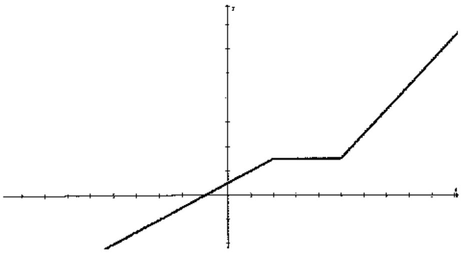
# 1º Teste de Cálculo EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

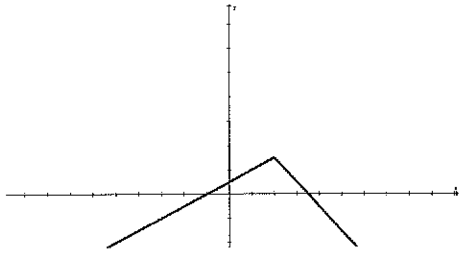
## GRUPO I

**Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente.**

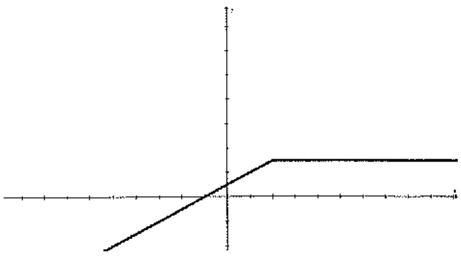
1. Qual das seguintes funções representadas graficamente é estritamente crescente em $\mathbb{R}_0^+$?



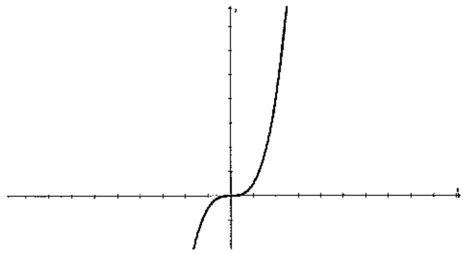
☐



☐

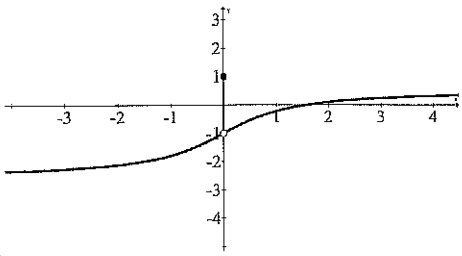


☐

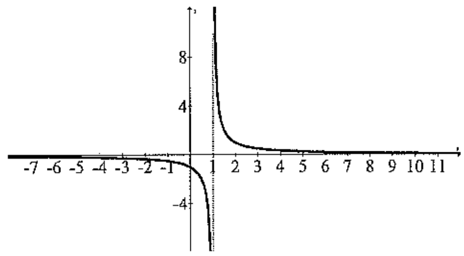


☒

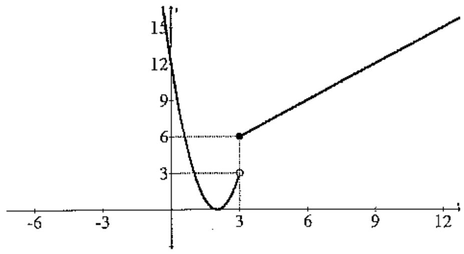
2. Qual das seguintes funções representadas graficamente é limitada?



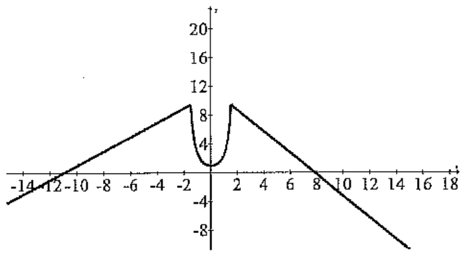

☒




☐

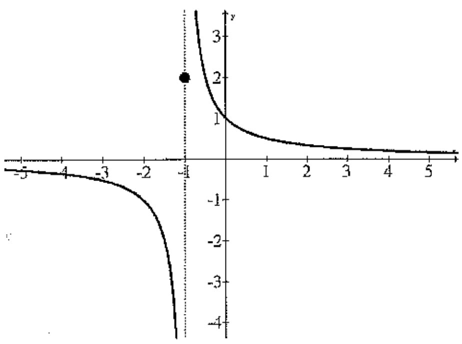



☐

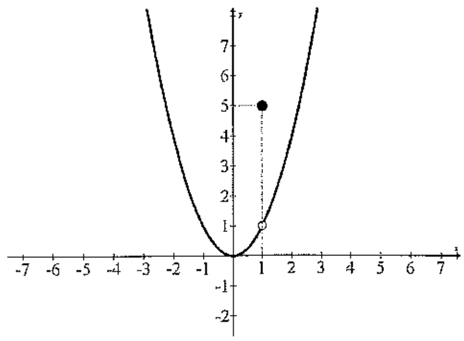



☐

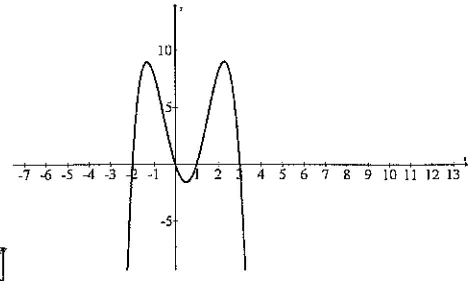
3. Qual das seguintes funções representadas graficamente é majorada?



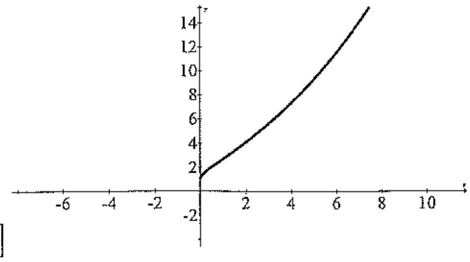

☐




☐




☒




☐

4. Qual das funções seguintes é par?

☐ $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$. ; $f(-x) = \frac{\ln x^2}{-x}$

☐ $f(x) = \frac{|x|}{1+x}$ ; $f(-x) = \frac{|x|}{1-x}$

☐ $f(x) = \cos x + \sin x$ ; $f(-x) = \cos(-x) + \text{sen}(-x) = \cos x - \text{sen}\, x$

☒ $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ; $f(-x) = |x|$

5. Seja $f$ uma função diferenciável num ponto do seu domínio $x_0$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

☒ $f$ não é contínua em $x_0$.

☐ Tem-se $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$.

☐ $f$ é contínua em $x_0$.

☐ Existe $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Se $f$ é diferenciável em $x_0$ então $f$ é contínua em $x_0$.

## GRUPO II

**Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.**

1. Indique o domínio da função real de variável real $f(x) = \ln x . \arccos x$.

R.: $D_f = D_{\ln x} \cap D_{\text{arccos}\, x} = ]0, +\infty[ \cap [-1, 1] = ]0, 1]$

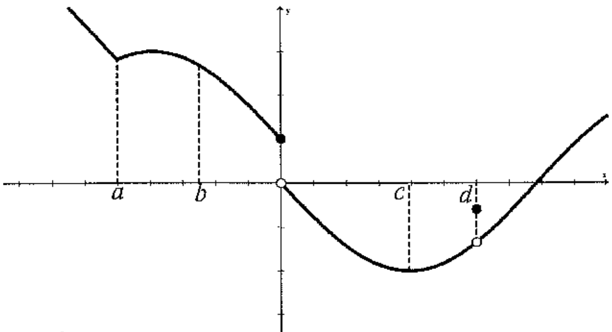
2. Determine a derivada das funções seguintes:

(a) $f(x) = \ln(\arcsin(x^2))$. R.: $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4} \cdot \text{arcsen}\, x^2}$

(b) $f(x) = h(\sin x) - h(x^3)$, sabendo que $h$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$. R.:

$f'(x) = \cos x \cdot h'(\text{sen}\, x) - 3x^2 \cdot h'(x^3)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada graficamente na figura seguinte




Indique os pontos onde $f$ não é derivável, especificando se existem as derivadas laterais e indicando o seu sinal.

- $f$ não é derivável em $x = a$, $x = 0$ e $x = d$
- $f'(a^-) < 0$ e $f'(a^+) > 0$
- $f'(0^-) < 0$ e $f'(0^+)$ não existe.
- $f'(d^-)$ e $f'(d^+)$ não existem.

## GRUPO III

**Apresente todos os cálculos efetuados.**

1. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \arctan x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \cos x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

(a) Determine $f(\sin \frac{3\pi}{2})$ e $f(\arcsin \frac{1}{3})$.

- $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow f\left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = f(-1) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctan}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.
- $0 < \operatorname{arcsen} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right) = \cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right) = \cos y$

onde $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 y + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{8}{9}$

$\cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, pois $y \in 1^{o}Q$. Assim $f\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(b) Estude a continuidade da função $f$.

- Para $x < 0$, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctan} x$ contínua em $]-\infty, 0[$, pois é a soma de uma constante e trigonométrica inversa cujo domínio é $\mathbb{R}$.
- Para $x > 0$, $f(x) = \cos x$ é contínua em $]0, +\infty[$ pois $\cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- Para $x = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctan} x\right) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$

$f$ é descontínua em $x = 0$.
$f$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Indique o contradomínio de $f$ e diga, justificando, se a função admite máximo e/ou mínimo.

- Para $x \leq 0$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctan} x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctan} x \leq \frac{\pi}{4}$
- Para $x > 0$ $-1 \leq \cos x \leq 1$. Assim $CD_f = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup [-1, 1] =$

$= [-1, 1]$.

$f$ tem máximo 1 quando $x = 2k\pi, k > 0$.
$f$ tem mínimo $-1$ quando $x = \pi + 2k\pi, k \geq 0$.

(d) Determine, caso existam, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctan} x\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \cos x \rightarrow$ Este limite não existe porque $\cos x$ é uma função periódica.

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ x^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

(a) Verifique se existe $f'(0)$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} h \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

porque $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ é uma função limitada.

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$$

Assim $f'(0) = 0$.

(b) Determine a função $f'$ no seu domínio. Onde é que $f$ é diferenciável?

~~Já~~ Na alínea anterior, mostrou-se que $f$ é diferenciável em $x=0$. Só falta ver no resto do domínio de $f$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

3. Considere a equação em $\mathbb{R}$, $x + \tan x = 0$. Mostre que esta equação, tem apenas uma solução no intervalo $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$, usando o teorema de Bolzano e o teorema de Rolle.

- Seja $f(x) = x + \tan x$. $f$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ não contém nenhum dos pontos de descontinuidade de $f$. Logo $f$ é contínua em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

$\cancel{f'(x) = 1 + 1}$

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$ e $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} < 0$

Pelo T. de Bolzano $f$ tem um zero no intervalo $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

- $f'(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow f$ é diferenciável no intervalo dado.
- Se $f$ tivesse dois zeros em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$, pelo T. de Rolle, $f'$ teria um zero (entre eles), mas $f'(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} > 0$, $\forall x \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

Logo $f$ não tem mais que um zero em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.