Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Electrónica Industrial

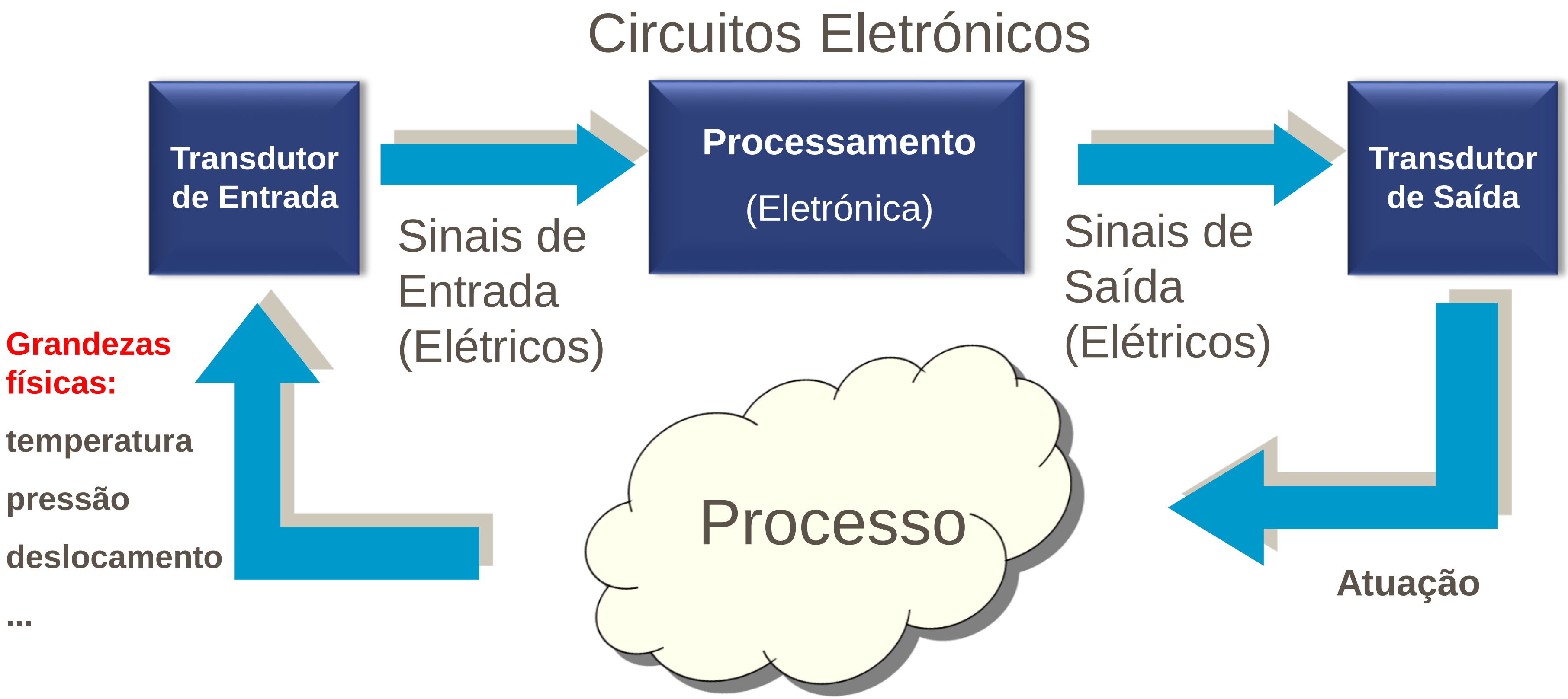
Instrumentação e Projeto de Circuitos

Representação de Sinais

LETI – Licenciatura em Engenharia de Telecomunicações e Informática

Sistemas Eletrónicos

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial



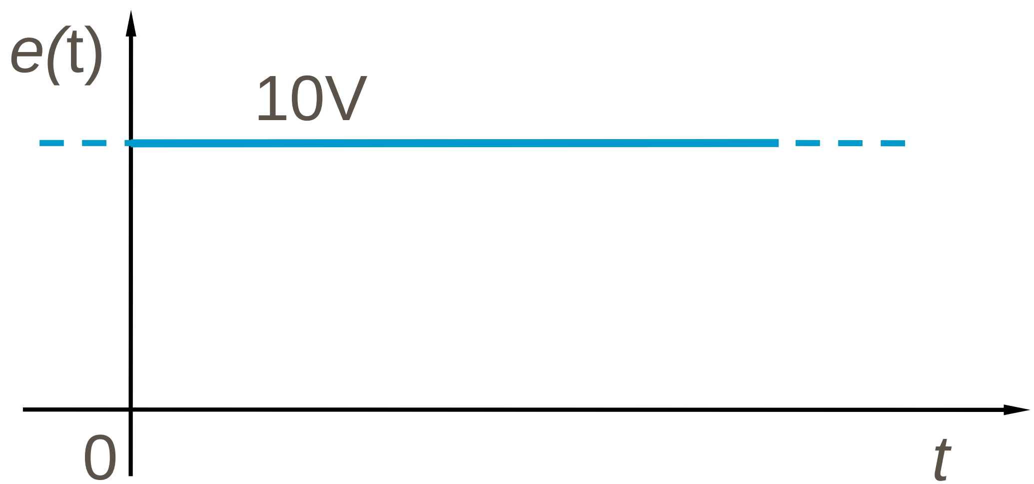
Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Representação matemática e gráfica**

  Os sinais elétricos são grandezas (elétricas) que apresentam uma determinada evolução ao longo do tempo (são função da variável tempo t)…

Exemplo de um sinal contínuo (constante):

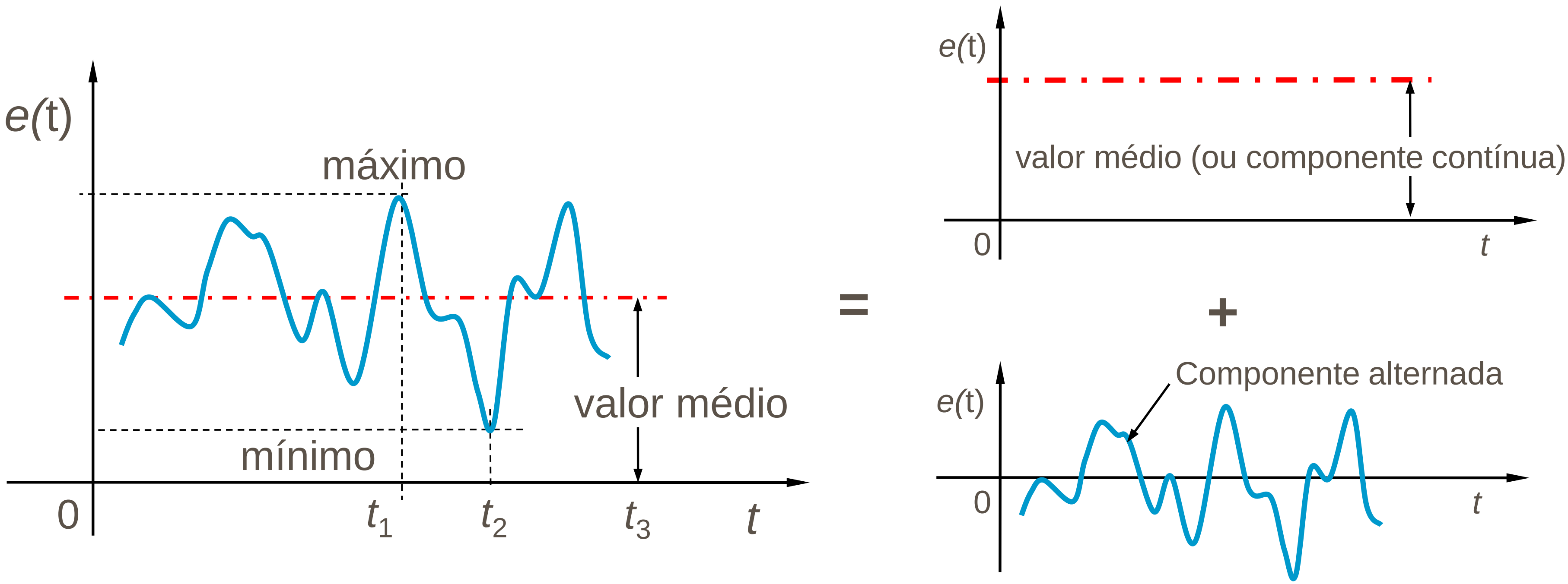


$$e(t) = 10\ \text{V}$$

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Representação matemática e gráfica



$$e(t) = componente\ contínua + componente\ alternada$$

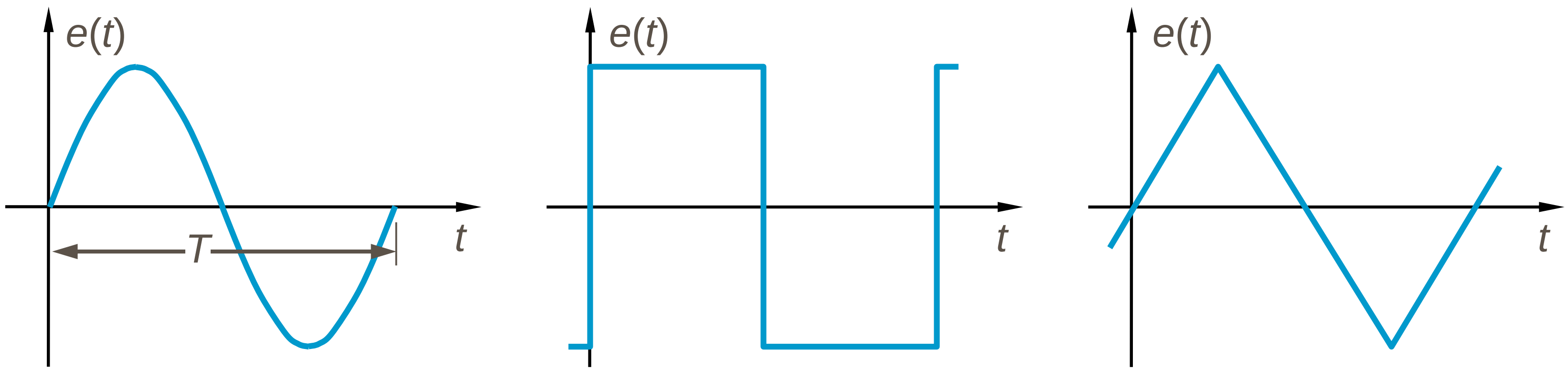
Sinal é variável em função de *t*

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Representação matemática e gráfica**
  - Sinais periódicos

$$e(t+T)=e(t)$$



Sinusoide   Onda quadrada   Onda triangular

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

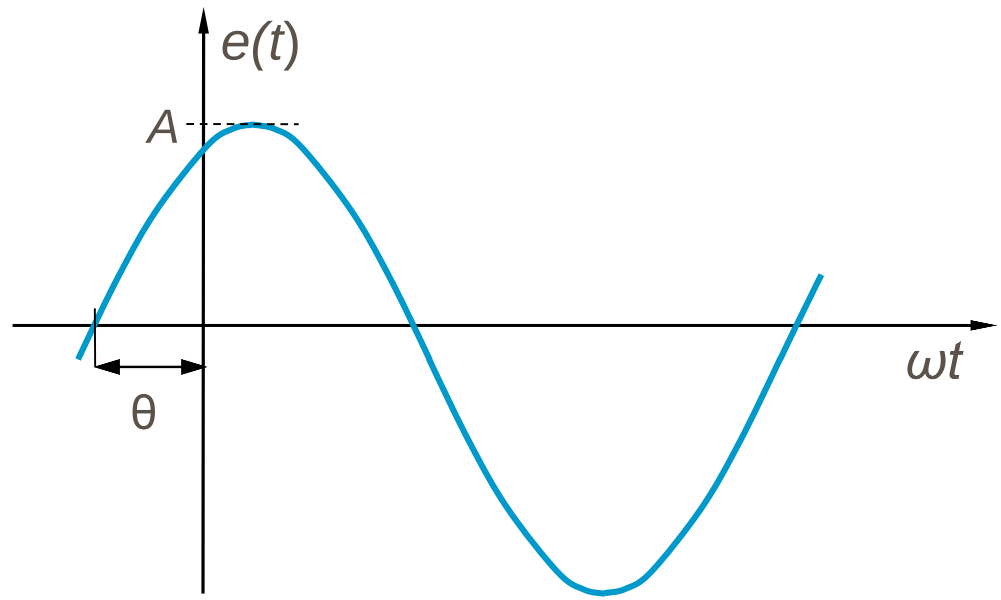
- **Representação matemática e gráfica**
  - Sinais sinusoidais

$$e(t) = A \cdot sen(\omega t + \theta)$$

$\omega = 2\pi f \rightarrow$ frequência angular

$A \rightarrow amplitude$

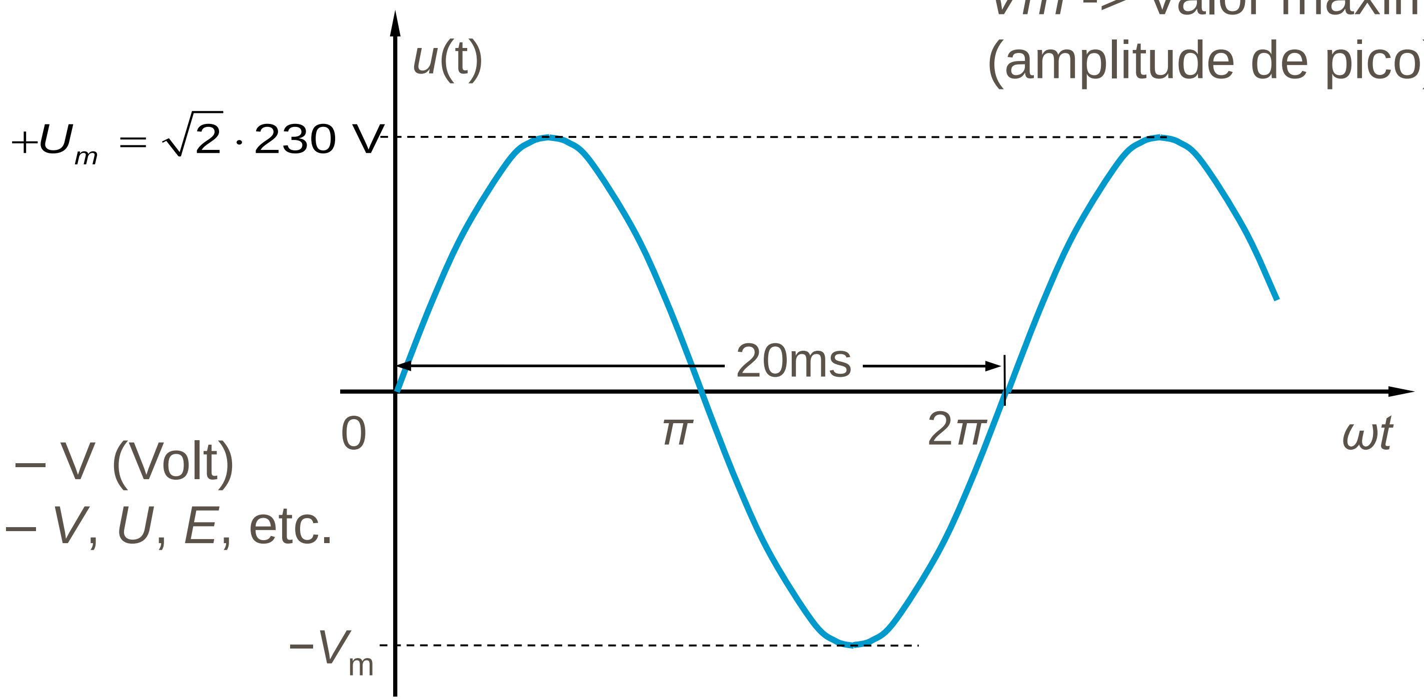
$\theta \rightarrow fase$



Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Representação matemática e gráfica**
  - Sinais sinusoidais

230 V -> Valor eficaz
Vm -> Valor máximo (amplitude de pico)

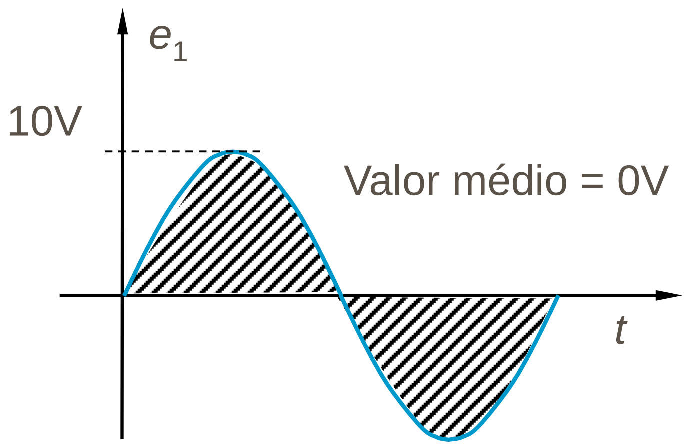


Tensão
- Unidade – V (Volt)
- Variável – *V*, *U*, *E*, etc.

Forma de onda da tensão na rede de energia elétrica

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

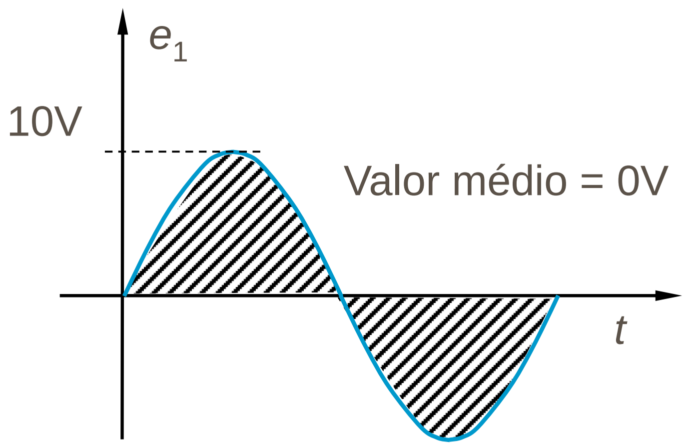
Valor médio



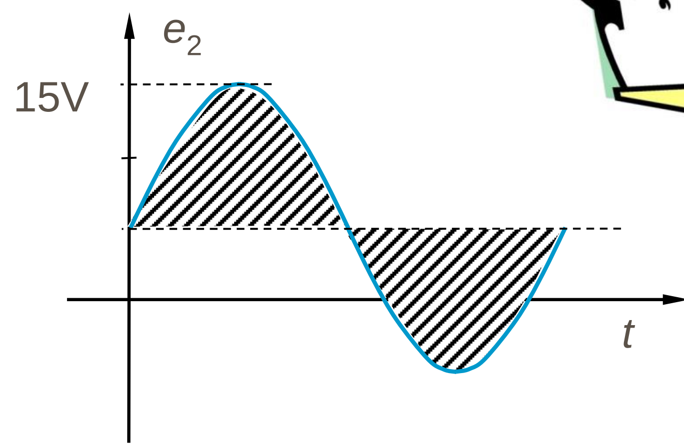
(a)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Valor médio**



(a)

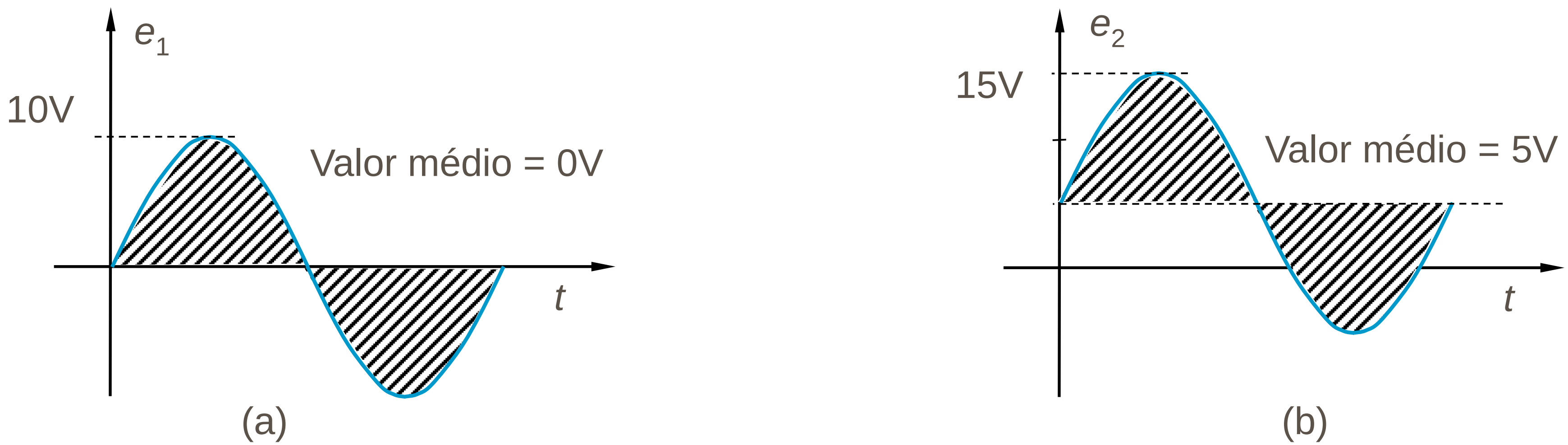


(b)

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

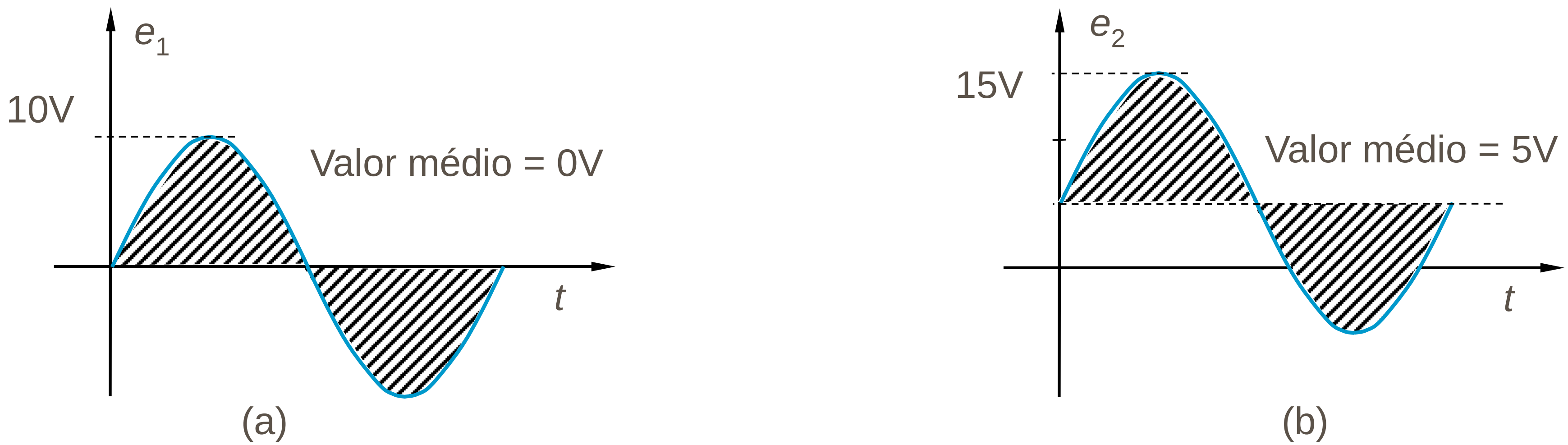
- **Valor médio**

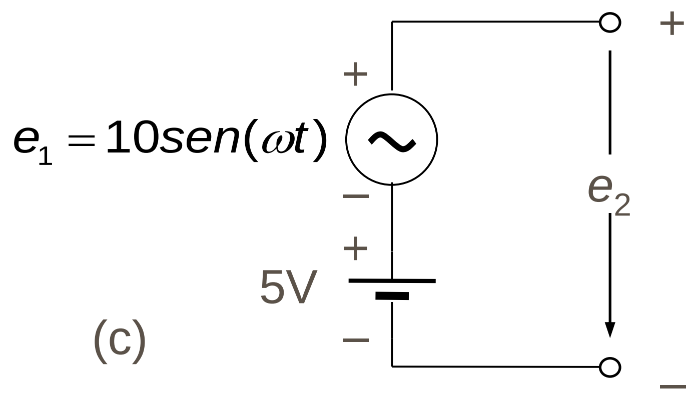


Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

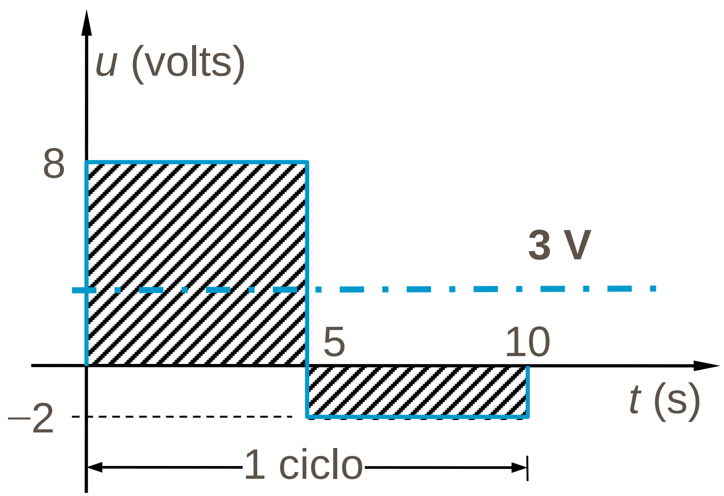
Valor médio



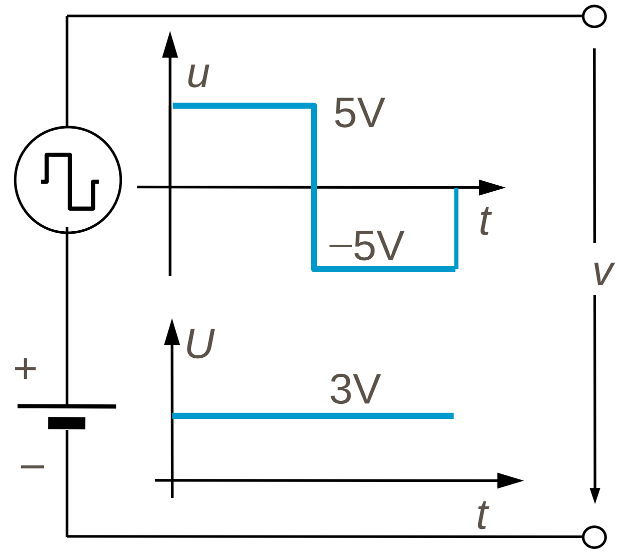


Representação de Sinais

Valor médio



(a)



(b)

$$G\,(valor\ \ médio) = \frac{área\,(soma\ \ algébrica)}{T\,(período)}$$

$$G = \frac{A_1 - A_2}{T} = \frac{(8\ \text{V})(5\ \text{s}) - (2V)(5\ \text{s})}{10\ \text{s}} = \frac{30}{10} = 3\ \text{V}$$

Representação de Sinais

Representação matemática e gráfica

- Valor Médio

$$G = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)\,dt$$

- Valor Eficaz

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)^2\,dt}$$

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Exemplo: valor eficaz da sinusóide**

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)^2\, dt}$$

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} A^2\, sen^2(wt)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\alpha} A^2\, sen^2(\varphi)\, d\varphi}$$

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\alpha} A^2\, sen^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{A^2}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(1-\cos(2\alpha)\right)d\alpha = \frac{A^2}{4\pi}\left[\alpha - \frac{1}{2}sen(2\alpha)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

$$\rightarrow E_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

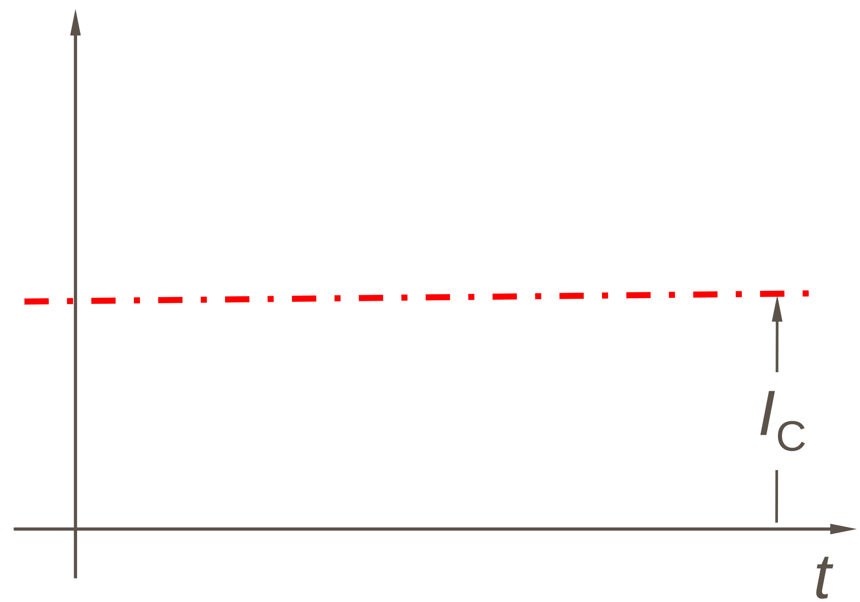
(comparar com slide 8)

Notação Adotada

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Quantidades em corrente contínua (*cc*):**

  Letras maiúsculas para a variável e para o índice (I_B, I_C, V_{CE})



Notação Adotada

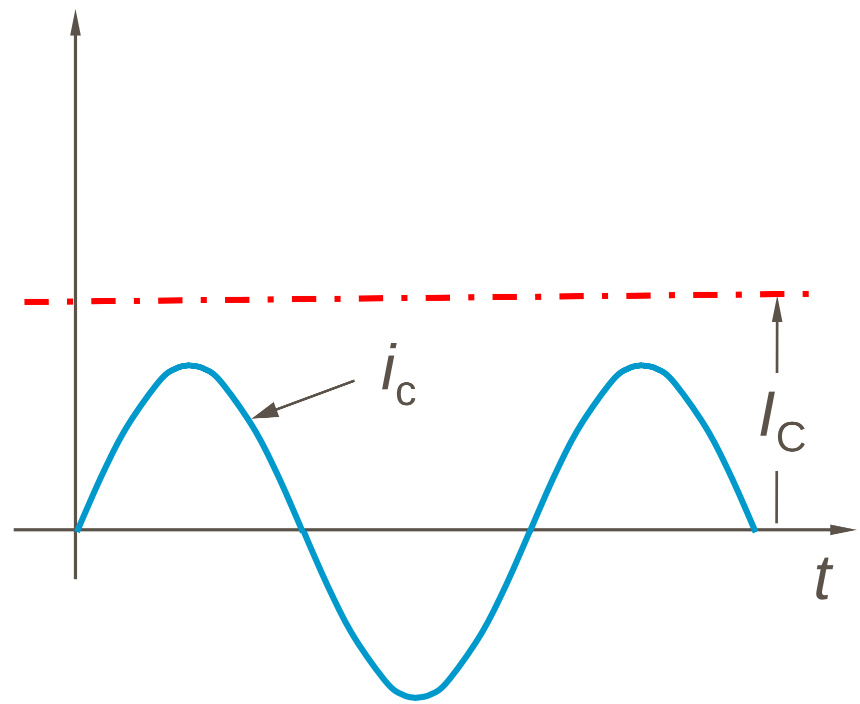
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Quantidades em corrente contínua (*cc*):**

  Letras maiúsculas para a variável e para o índice (I_B, I_C, V_{CE})

- **Quantidades em corrente alternada (*ca*):**

  Letras minúsculas para a variável e para o índice (i_b, i_c, v_{ce})



Notação Adotada

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Quantidades em corrente contínua (*cc*):**

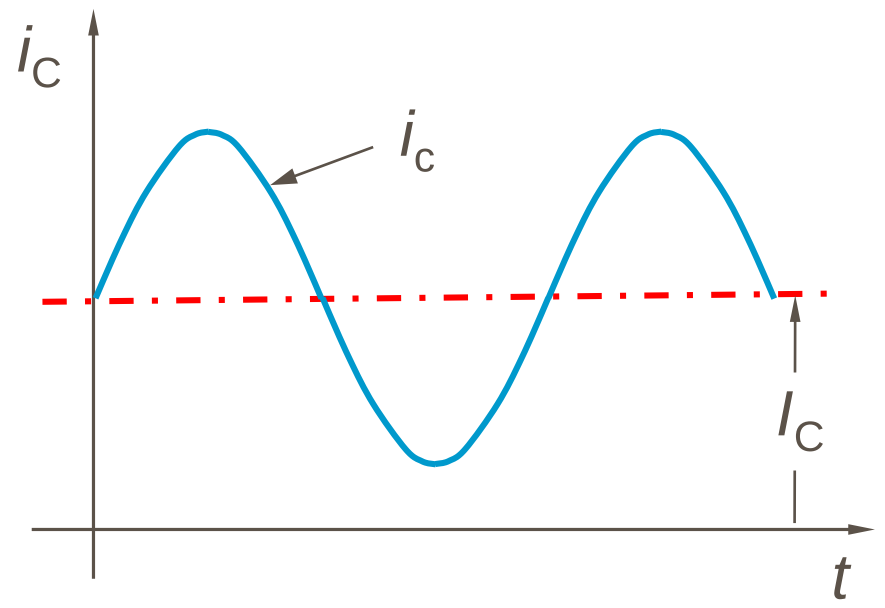
  Letras maiúsculas para a variável e para o índice (I_B, I_C, V_{CE})

- **Quantidades em corrente alternada (*ca*):**

  Letras minúsculas para a variável e para o índice (i_b, i_c, v_{ce})

- **Quantidades totais (*cc* + *ca*):**

  Letras minúsculas para a variável e maiúscula para o índice (i_B, i_C, v_{CE})



Variáveis -> Itálicos
Valores e unidades -> Sem itálicos

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Análise de *Fourier***
  - Série de *Fourier*

- De acordo com a teoria desenvolvida por *Joseph Fourier* (1768 – 1830), qualquer função periódica $f(t)$, de período T, pode ser representada por uma série infinita da forma ...

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Os coeficientes de *Fourier* a_0, ... a_n, e b_0, ... b_n, são dados por ...

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Representação de Sinais

Análise de *Fourier*

Série de *Fourier*

- Expressão alternativa:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \delta_n), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\delta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- A representação gráfica da amplitude (c_n) e da fase (δ_n) em função da frequência denomina-se espectro do sinal $f(t)$ (espectro de amplitudes e espectro de fases)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Análise de *Fourier*

- Série de *Fourier* – Exemplo (onda quadrada)

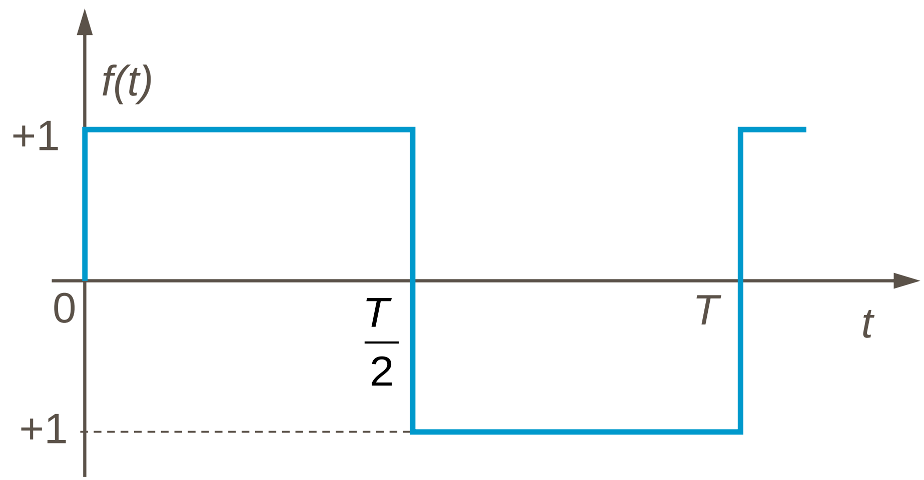
Como $f(t)$ é uma função impar (o mesmo acontecendo a $f(t)\cos(n\omega t)$):

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \mathrm{sen}(n\omega t)dt - \int_{T/2}^{T} \mathrm{sen}(n\omega t)dt\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$



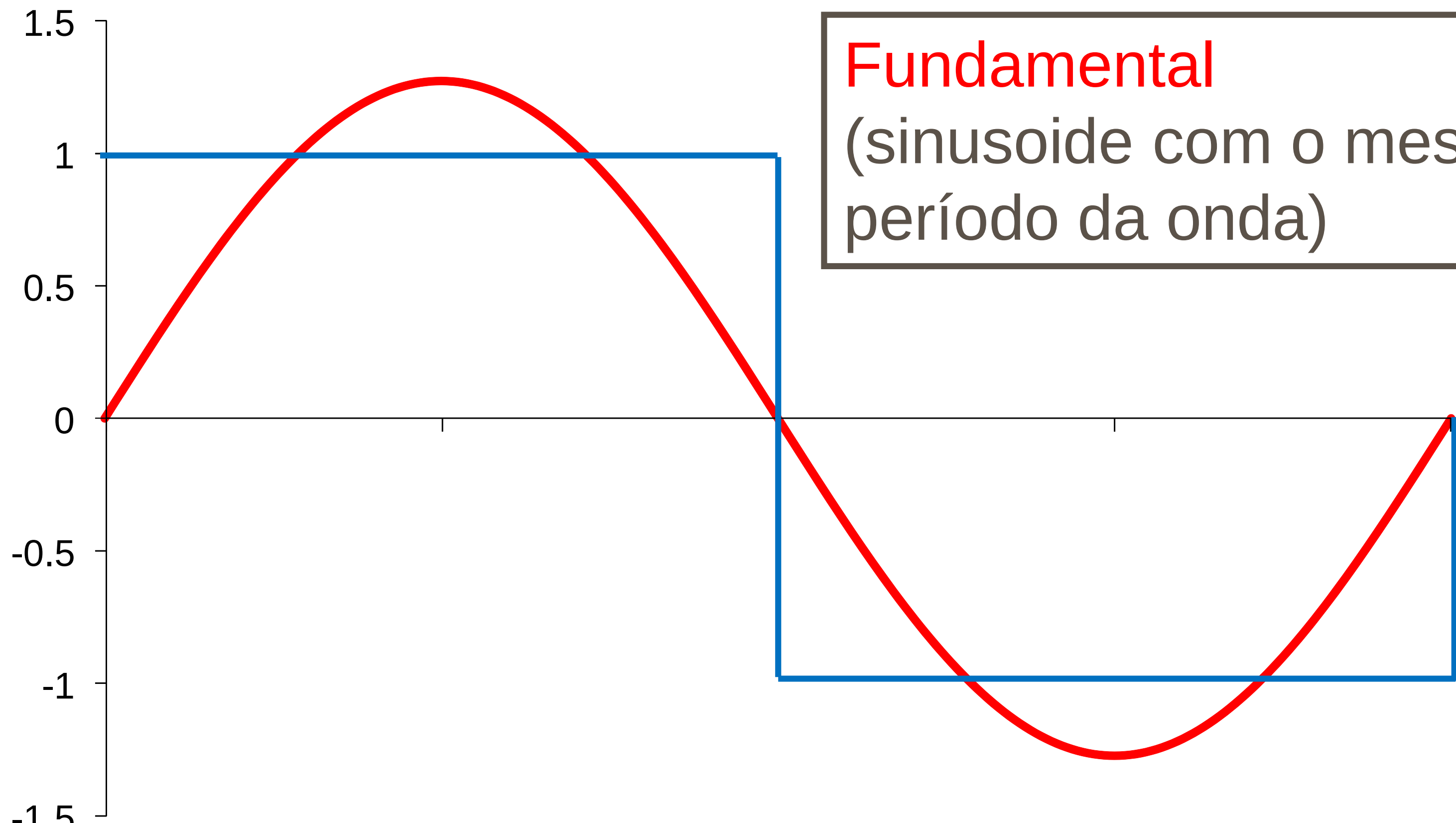
$$\rightarrow f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,\omega t + \frac{\mathrm{sen}3\omega t}{3} + \frac{\mathrm{sen}5\omega t}{5} + \ldots\right)$$

$$f(t) = \begin{cases} +1, & 0 \le t < T/2 \\ -1, & T/2 \le t < T \end{cases}$$

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Análise de Fourier

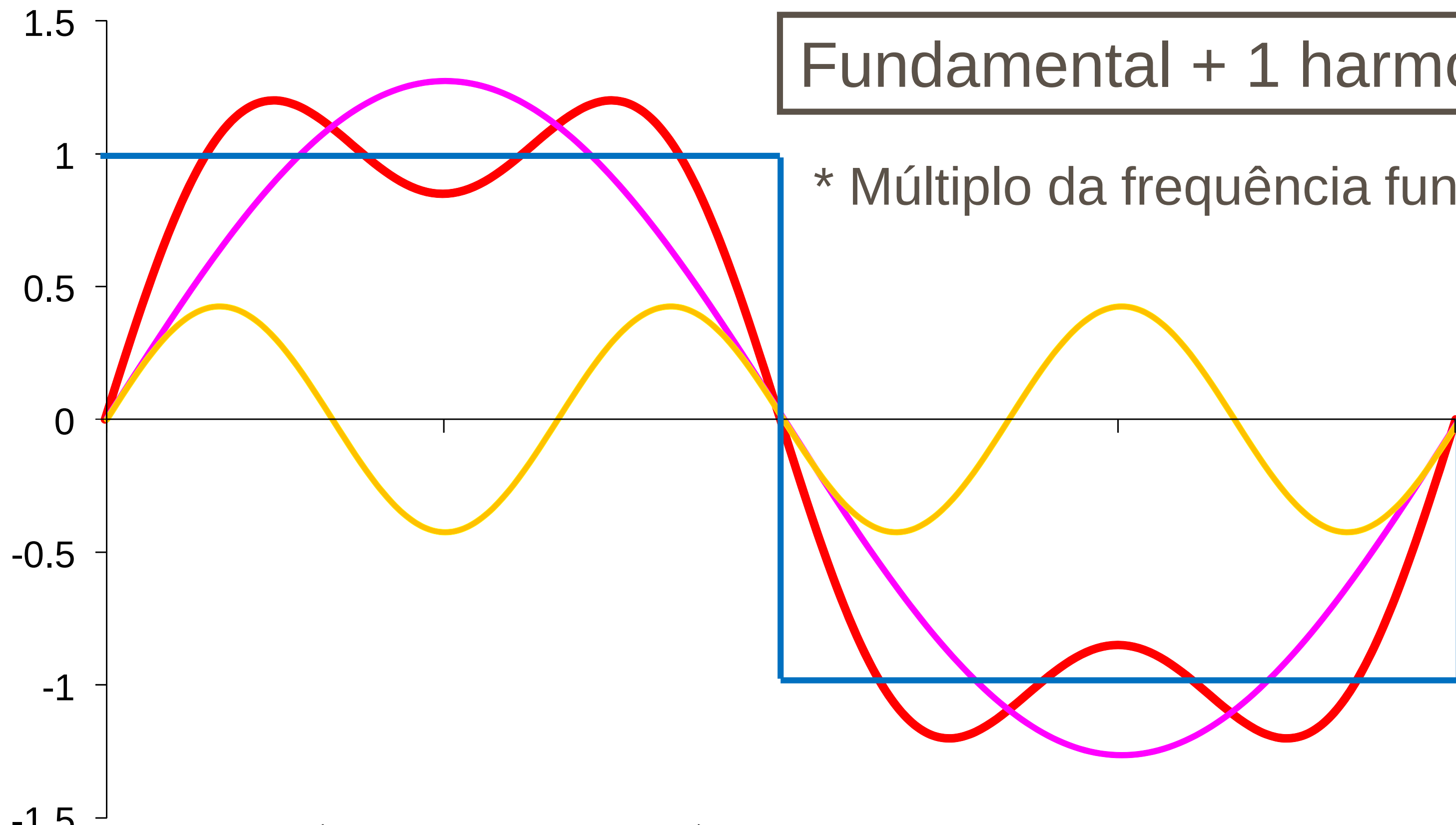


Fundamental (sinusoide com o mesmo período da onda)

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t\right)$$

Representação de Sinais

Análise de Fourier



Fundamental + 1 harmónico*

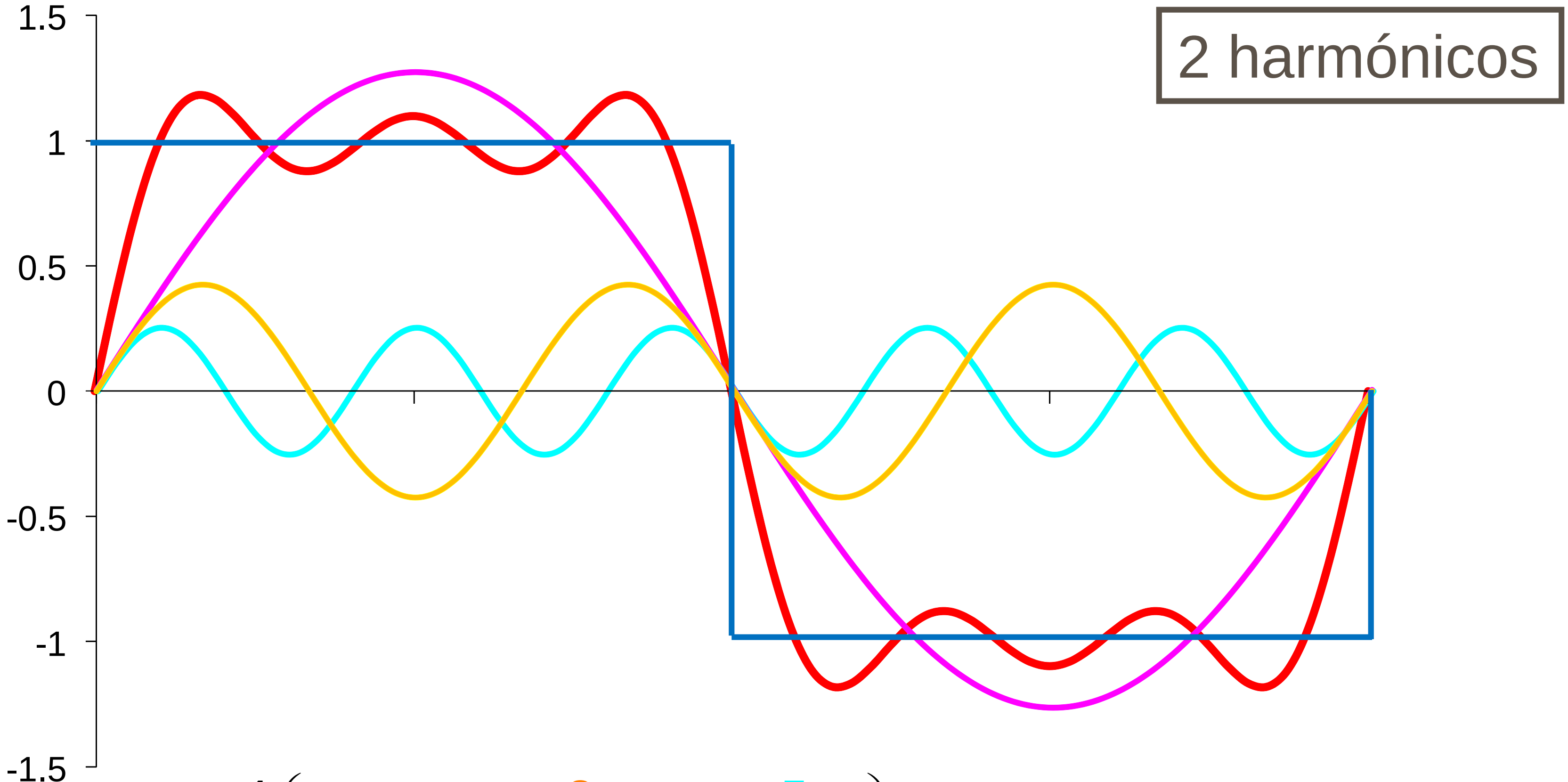
* Múltiplo da frequência fundamental

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{\operatorname{sen}3\omega t}{3}\right)$$

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Análise de Fourier

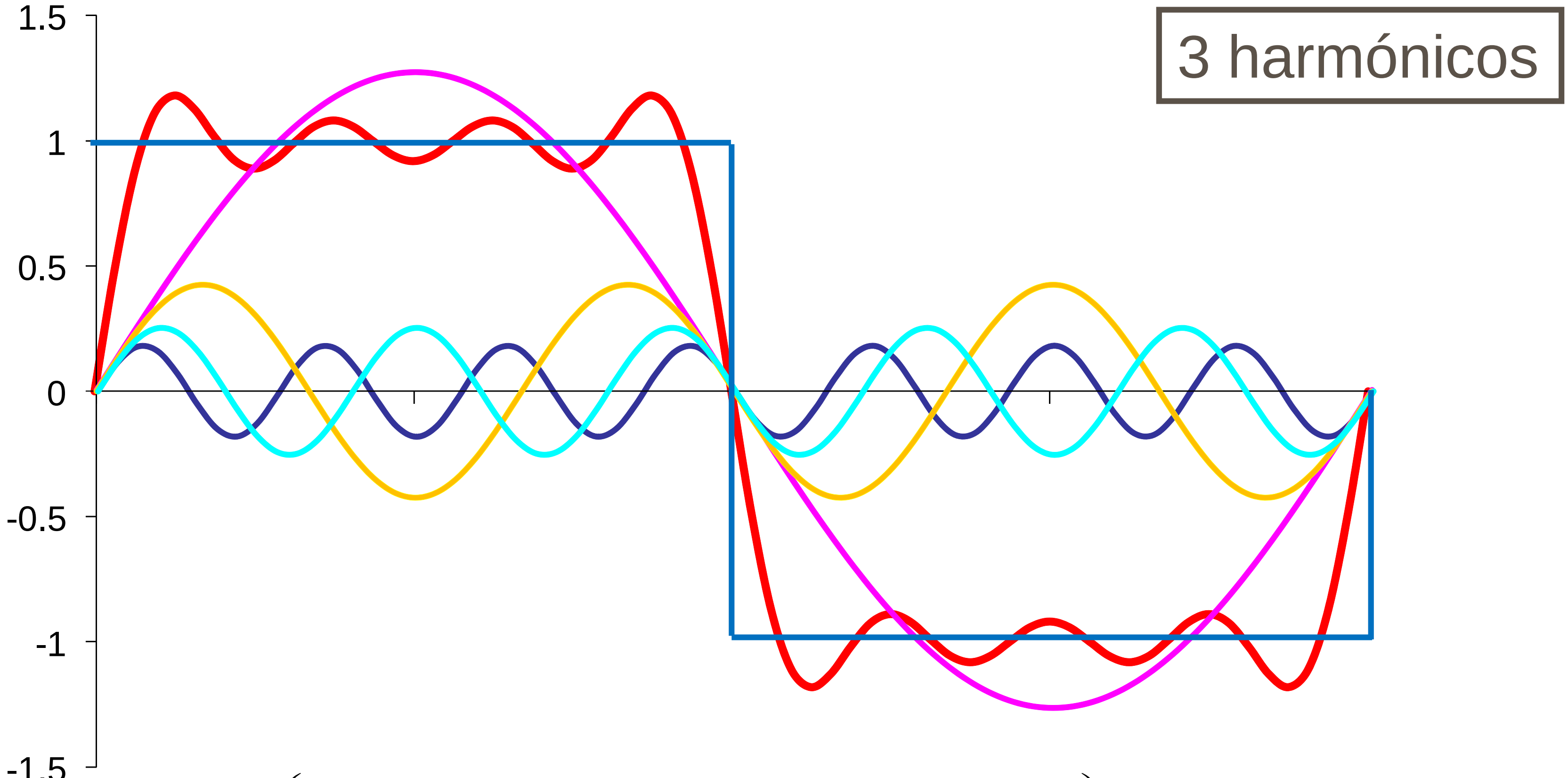


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\,\omega t + \frac{\text{sen}\,3\omega t}{3} + \frac{\text{sen}\,5\omega t}{5}\right)$$

Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

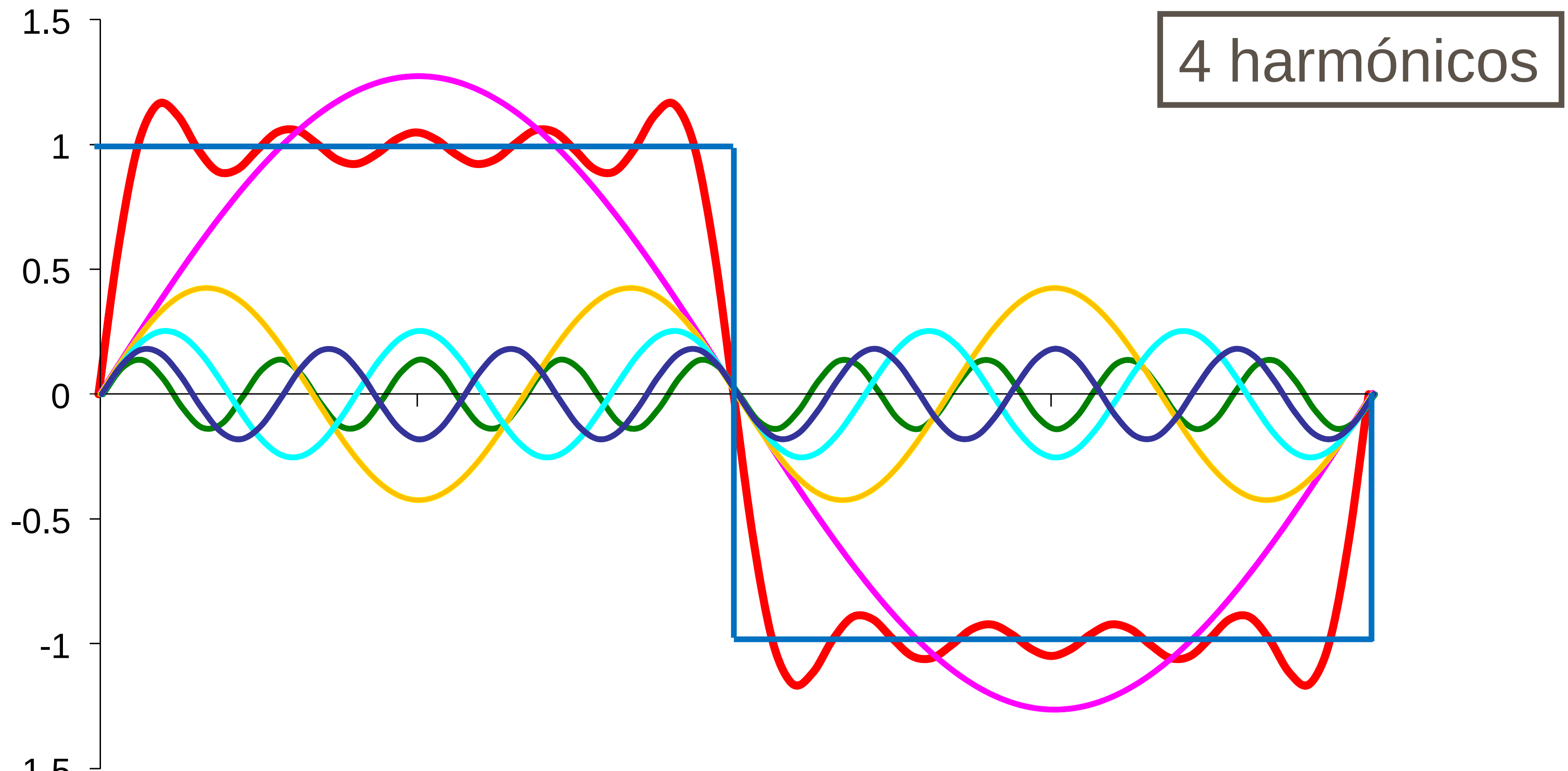
- **Análise de Fourier**



$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{\operatorname{sen}3\omega t}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\omega t}{5} + \frac{\operatorname{sen}7\omega t}{7}\right)$$

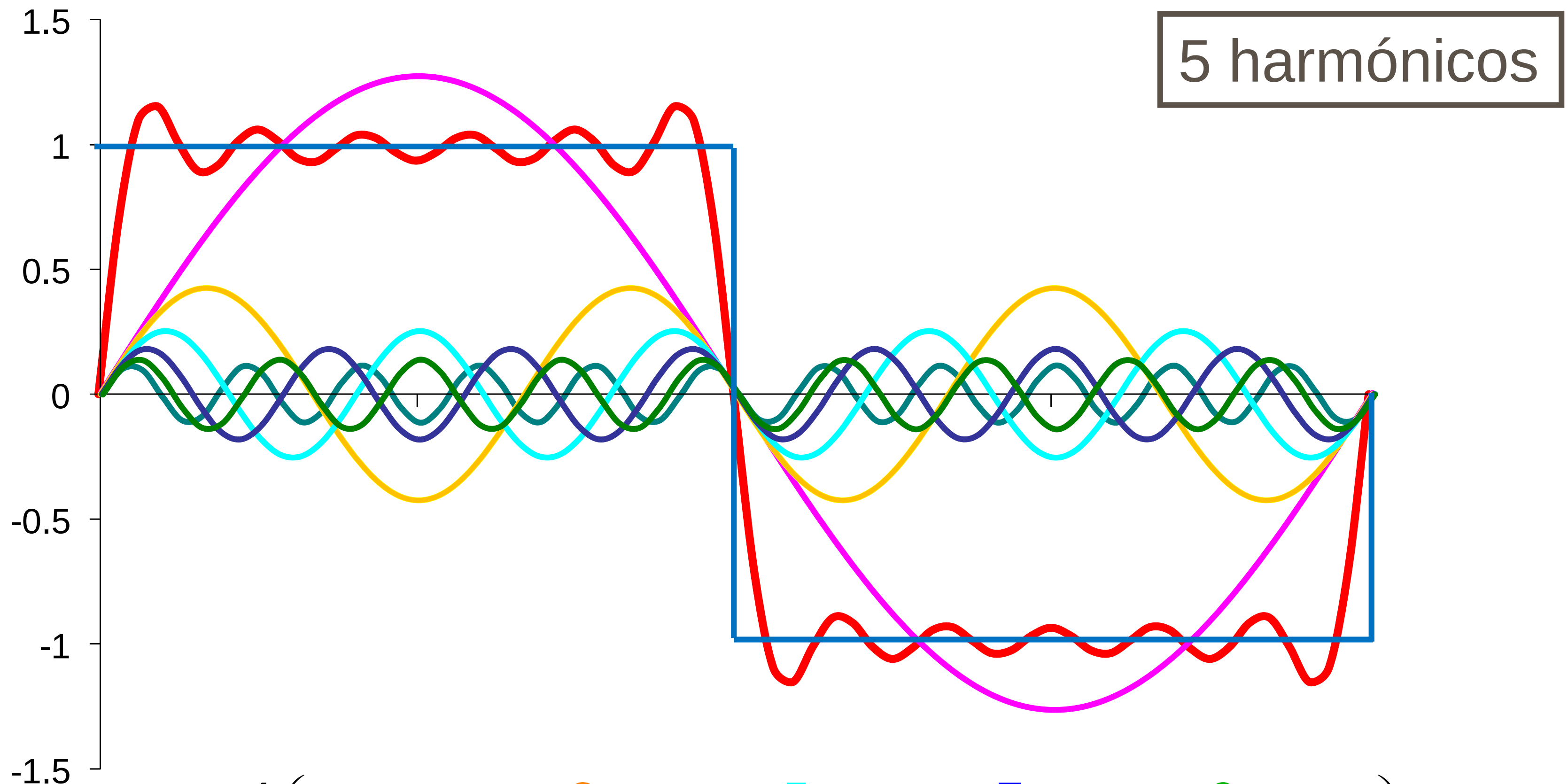
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Análise de Fourier



$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t+\frac{\operatorname{sen}3\omega t}{3}+\frac{\operatorname{sen}5\omega t}{5}+\frac{\operatorname{sen}7\omega t}{7}+\frac{\operatorname{sen}9\omega t}{9}\right)$$

■ Análise de Fourier

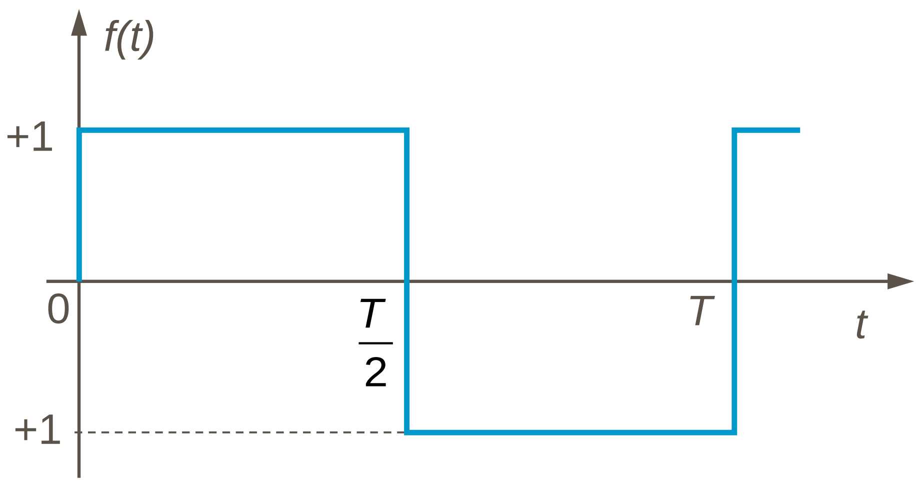


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{\operatorname{sen}3\omega t}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\omega t}{5} + \frac{\operatorname{sen}7\omega t}{7} + \frac{\operatorname{sen}9\omega t}{9} + \ldots\right)$$

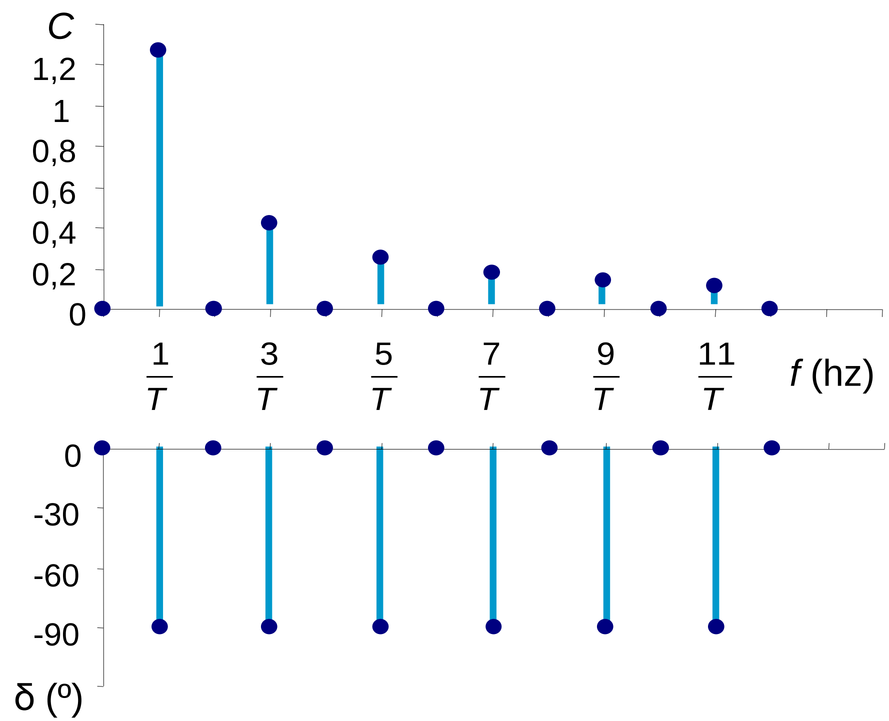
Representação de Sinais

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Análise de Fourier



Representação *f(t)* no domínio do tempo



$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n = \frac{4}{n\pi} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\delta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} -90^\circ & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0^\circ & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Representação *f(t)* no domínio da frequência: espectros de amplitudes (*C*) e de fases (δ)