Departamento de Matemática e Aplicações 27 /11/ 2014

Duração: 90 minutos

1º Teste de Cálculo EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente.

1. Em qual dos seguintes limites se pode aplicar a Regra de L'Hôpital?

- [ ] $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$.
- [ ] $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$
- [ ] $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x}$
- [x] $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

2. O polinómio de Taylor de 3ºgrau da função $f(x) = \ln x$ em torno do ponto $x = 1$ é:

- [ ] $P_{3,1}(x) = x - x^2 + 2x^3$.
- [x] $P_{3,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$.
- [ ] $P_{3,1}(x) = 1 + x - x^2 + 2x^3$.
- [ ] $P_{3,1}(x) = 1 + (x-1) - (x-1)^2 + 2(x-1)^3$.

3. Considere o gráfico da função $f(x) = e^{x^3}$ e a reta que passa nos pontos $A = (1, f(1))$ e $B = (3, f(3))$. A abcissa c, $1 < c < 3$, do ponto da curva onde a reta tangente é paralela à reta AB satisfaz a equação:

- [ ] $2e^{c^3} = e^{27} - e$.
- [x] $6c^2e^{c^3} = e^{27} - e$.
- [ ] $c^2e^{c^3} = 2$.
- [ ] $e^{c^3} = 2$.

4. Para qual das seguintes funções **não** é possível aplicar o Teorema de Lagrange?

- [ ] $f(x) = \tan x$ em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
- [ ] $f(x) = \arctan x$ em $[-1, 1]$.
- [x] $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $[-1, 1]$.
- [ ] $f(x) = \ln x$ em $[1, 2]$.

5. Sejam f e g duas funções deriváveis no seu domínio comum, tais que $f'(x) = 3g'(x)$. Qual a relação entre as funções f e g?

- [x] $f(x) = 3g(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $f(x) = 3x.g(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $Pf(x) = 3Pg(x)$.
- [ ] $f(x) = 3x + g(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

6. Sejam f e g duas funções deriváveis no seu domínio comum, tais que $f'(x) = g'(x)$ e tal que $f(3) = 2g(3)$. Qual a relação entre as funções f e g?

- [ ] $f(x) = g(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $f(x) = g(x) + f(3)$
- [ ] $f(x) = g(x)$.
- [x] $f(x) = g(x) + g(3)$.

7. Seja f uma função primitivável no seu domínio, tal que $F'(x) = f(x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [ ] $P(x.f(x)) = x.F(x)$.
- [ ] $P(x.f(x)) = \frac{x^2}{2}.F(x)$.
- [x] $P(x.f(x)) = x.F(x) - P(F(x))$.
- [ ] $P(x.f(x)) = F(x)$.

GRUPO II

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Determine as primitivas das funções apresentadas, considerando-as válidas no seu domínio.

(a) $P[\frac{3}{\sqrt[5]{3x-1}} + e^{5x-3} + \frac{\ln^3 x}{x}]$: $\frac{5}{4}(3x-1)^{4/5} + \frac{1}{5} e^{5x-3} + \ln^4 x + C$, $C \in \mathbb{R}$

(b) $P[(x^2+5)\cos x)]$: $(x^2+5)\,\text{sen}\,x - P(2x).\text{sen}\,x = (x^2+5)\,\text{sen}\,x - 2[-x\cos x + P\cos x$
$= (x^2+5)\,\text{sen}\,x + 2x.\cos x - 2\,\text{sen}\,x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) $P[\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}]$: $\text{arcsen}(e^x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

(d) $P[\sin^3 x \cos^8 x]$: $P\,\text{sen}\,x(\cos^8 x - \cos^{10} x) = -\frac{\cos^9 x}{9} + \frac{\cos^{11} x}{11} + C$, $C \in$

(e) $P[\frac{x-1}{x^2+2}]$: $\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

GRUPO III

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Primitive a função $\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$. **Nota**: Uma raíz do denominador é $x=1$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+1 & x^3-x^2+x-1 \\ \hline -x^4+x^3-x^2+x & x+1 \\ x^3-x^2+x+1 & \\ -x^3+x^2-x+1 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$$
$$= x+1+\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Leftrightarrow 2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Se $x=1 \Rightarrow 2 = A(2) \Leftrightarrow A=1$

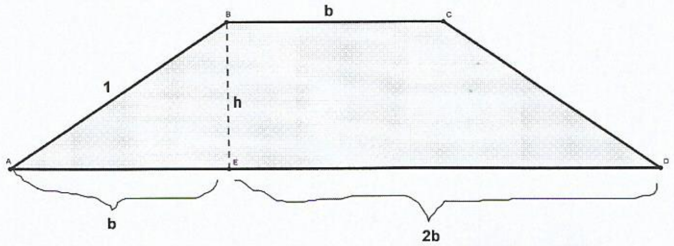
se $x=0 \Rightarrow 2 = 1\times 1 + C(-1) \Leftrightarrow C=-1$

se $x=-1 \Rightarrow 2 = 1(2)+(-B-1)(-2) \Leftrightarrow B=-1$

Então,

$$P\left(x+1+\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\right) = \frac{x^2}{2}+x+P\frac{1}{x-1}-P\frac{x}{x^2+1}-P\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arct}$$
$+ C$

2. Considere o trapézio da figura. Considerando os dados da figura, determine a base menor b de modo que a área do trapézio seja máxima. Indique também o valor dessa área. **Nota:** a área do trapézio é $A=\frac{B+b}{2}h$, onde B representa a base maior, b a base menor e h a altura do trapézio.



$$A = \frac{B+b}{2}.h = \frac{4b}{2}.h = 2b$$

Como $b^2+h^2=1 \Leftrightarrow h=\sqrt{1-b^2}$

Tem-se que $A = 2b\sqrt{1-b^2}$. A derivada $A'(b) = 2\left[\sqrt{1-b^2}+\frac{b(-2}{2\sqrt{1-}}\right.$

$$A'(b) = 2\left[\sqrt{1-b^2}-\frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}}\left[1-b^2-b^2\right] = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}}(1-2b^2)$$

Encontrar os zeros de $A'(b) \Leftrightarrow 1-2b^2=0 \Leftrightarrow b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

	0		$\sqrt{2}/2$		1
$A'(b)$	+	+	0	−	−
$A(b)$	0	↗	1	↘	0

A área é máxima quando $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e toma o valor de $A=1$.