Tópicos

Oscilações harmónicas amortecidas e forçadas.
Energia associada às oscilações;

Objetivos de aprendizagem

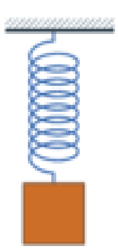
- Entender o modelo do movimento harmónico amortecido e forçado.
- Identificar as grandezas associadas aos movimentos harmónicos e fazer previsões sobre a relação entre as mesmas
- Calcular posição, velocidade e aceleração de um movimento harmónico
- Analisar do ponto de vista energético o movimento harmónico
- Resolver problemas em oscilações simples, com amortecimento e forçadas.

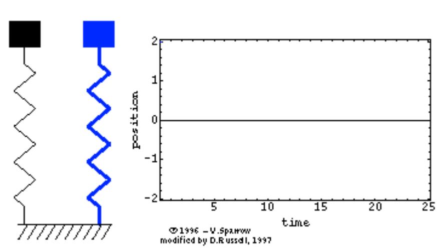
Estudo recomendado:

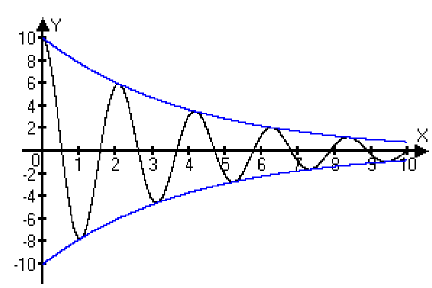
- R. Resnick, D. Halliday, "Fundamentos de Física", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro (2011) **(cap 15)**

Movimento Oscilatório Amortecido (MHA)

No mundo real os sistemas massa-mola ou pêndulos estão sujeitos a forças dissipativas (oscilam num fluido). Se o amortecimento for pequeno, o sistema oscila com uma amplitude que diminui com o tempo.

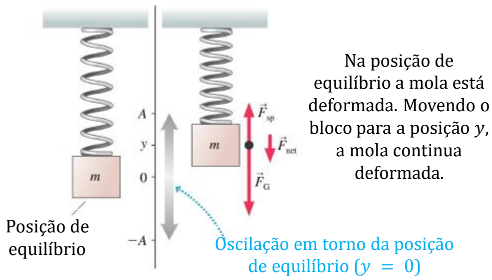






Análise do movimento oscilatório do sistema massa-mola na direção vertical, com atrito

Situação sem atrito:



$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

Equação diferencial do movimento

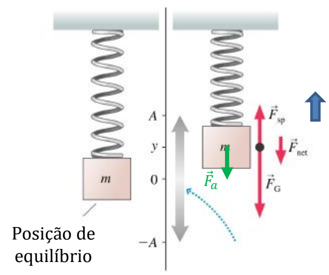
Solução da equação diferencial

$$y = y_m \cos(\omega t + \phi)$$

ou

$$y = y_m \sin(\omega t + \phi)$$

Situação com atrito:



$$F_a = -bv$$

$$k(\Delta L - y) - bv - mg = ma$$

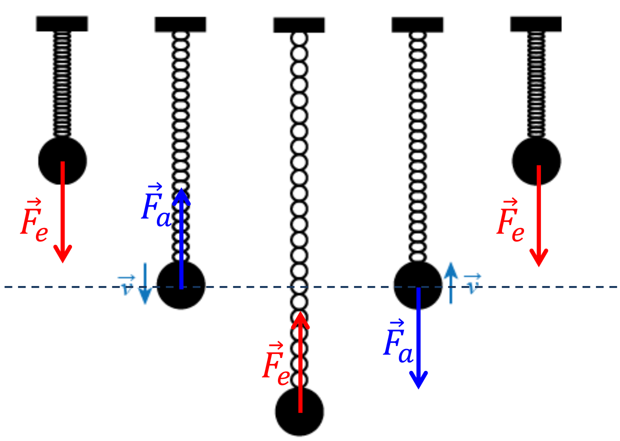
$$k\frac{mg}{k} - ky - bv - mg = ma$$

$$-ky - bv = ma \quad \Leftrightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

Equação diferencial do movimento

Solução da equação diferencial?



Equação diferencial do movimento

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

Fator relacionado com o amortecimento

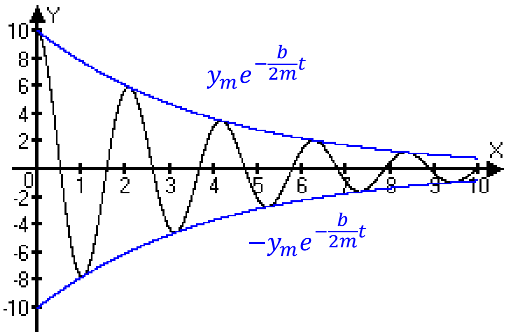
Frequência natural (ou de ressonância) de oscilação (sem amortecimento)

Quando a força de atrito (ou de amortecimento) é pequena relativamente à força restauradora, a solução da equação diferencial é:

$$y(t) = y_m e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Frequência angular da oscilação amortecida



$$y(t) = y_m e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \phi)$$

Frequência angular da oscilação amortecida $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

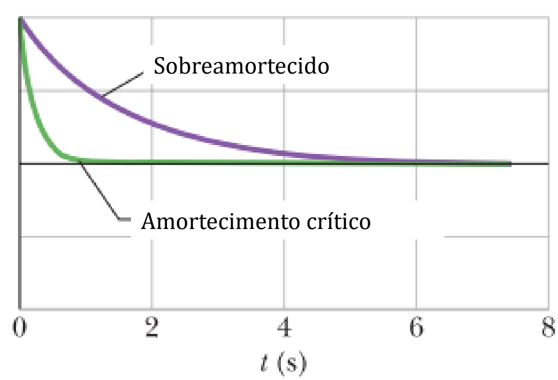
Havendo atrito ($b \neq 0$), há amortecimento das oscilações e: $\omega' < \omega_0 \quad \Leftrightarrow T' > T_0$

Tipos de amortecimento

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Amortecimento fraco

$$\frac{b}{2m} \ll 1 \Rightarrow \omega' \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Amortecimento crítico

$$b = 2m\omega_0 = b_C \Rightarrow \omega' = 0$$

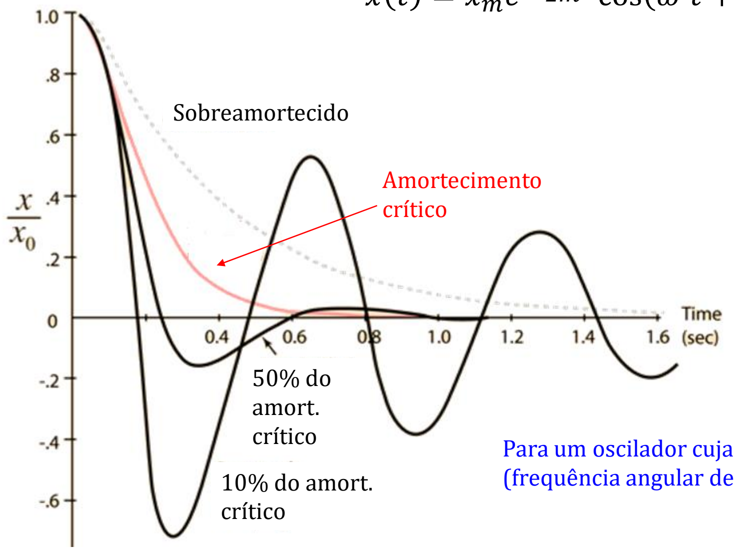
O sistema não oscila, mas retoma a sua posição de equilíbrio

Sobreamortecido

$$b > b_C$$

O sistema não oscila, mas retoma a sua posição de equilíbrio, mais lentamente

$$x(t) = x_m e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \phi)$$



Para um oscilador cuja frequência angular natural (frequência angular de ressonância) é: $\omega_0 = 10$ rad/s

Energia no MHA

Já se viu que a energia total de um oscilador é proporcional ao quadrado da amplitude. No caso do movimento oscilatório não amortecido:

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

No caso do movimento oscilatório amortecido a amplitude diminui exponencialmente com o tempo

$$x(t) = x_m e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \phi)$$

A energia total é dada por: $E = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-\frac{b}{m}t}$ Considerando: $E_0 = \frac{1}{2}kx_m^2$

$$E = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

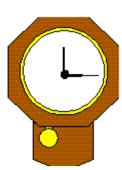
Checkpoint 4.2.1

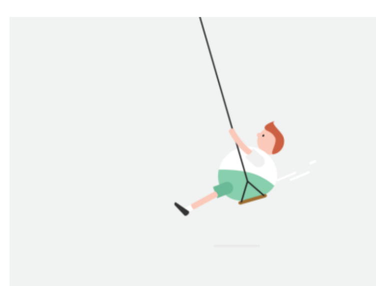
Um bloco de 10.6 kg de massa encontra-se acoplado a uma mola de constante elástica 2.05×10^{4} Nm^{-1}. O coeficiente de amortecimento, associado à resistência do ar, é igual a 3.00 N s m^{-1}.

a) Determine a frequência da oscilação amortecida;
b) Qual a percentagem com que a amplitude de oscilação decresce em cada ciclo?
c) Quanto tempo é necessário para que 5% da energia inicial seja dissipada.

Movimento Oscilatório Forçado (MHF)

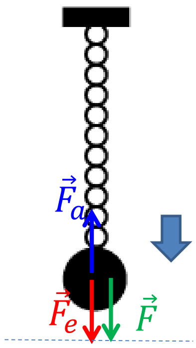
Para que um oscilador real (com amortecimento) mantenha a sua amplitude é necessário que seja fornecida energia do exterior. Para que isso aconteça tem de existir uma força exterior, que atue periodicamente.





Se ao oscilador com amortecimento fraco, se aplicar uma força que varia sinusoidalmente com o tempo

$$ma = -ky - bv + F_0 \cos \omega_f t \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega_f t$$



Equação diferencial do movimento

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos \omega_f t}$$

Solução da equação diferencial?

$$y(t) = y_m \cos(\omega_f t - \alpha)$$

$$y_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_f^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{\frac{b}{m}\omega_f}$$

$F = F_0 \cos \omega_f t$

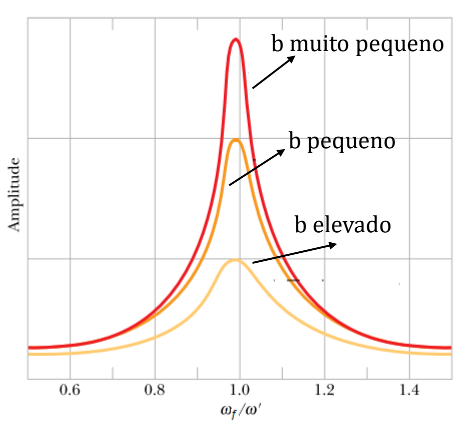
A amplitude depende da frequência natural do oscilador (ω_0), mas também da frequência da força exterior (ω_f).

A diferença de fase (α) aparece porque a força exterior sinusoidal e a resposta do oscilador não estão necessariamente sincronizados no tempo

Ressonância

Quando: $\omega_f = \omega_0$ ⟶ a amplitude de oscilação é máxima⟶ Ressonância

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_f^2}}$$



A ressonância nos sistemas mecânicos pode ser destrutiva

- Uma ponte, ou qualquer estrutura, é capaz de vibrar com certas frequências naturais. Se a marcha regular de um pelotão de soldados for próxima de umas das frequências naturais de vibração da ponte, esta poderá romper por atingir uma amplitude de vibração muito alta. Por este motivo os soldados são orientados a não terem uma marcha constante ao atravessar uma ponte.

Albert Bridge, Londres
(https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Bridge,_London

Checkpoint 4.2.2

Um corpo de $m = 1.5\ kg$ está a oscilar, preso a uma mola com $k = 600\ N/m$ e perde 3 % de energia em cada ciclo , devido ao atrito. O sistema massa-mola está sujeito a uma força exterior, sinusoidal, cujo valor máximo é $F_0 = 0.5\ N$.

a) Qual a frequência angular de ressonância?
b)Qual a amplitude em situação de ressonância?
c) Qual a amplitude se a frequência angular da força exterior for 19 rad/s?

Relembre os objetivos de aprendizagem…..

- Entender o modelo do movimento harmónico amortecido e forçado.
- Identificar as grandezas associadas aos movimentos harmónicos e fazer previsões sobre a relação entre as mesmas
- Calcular posição, velocidade e aceleração de um movimento harmónico
- Analisar do ponto de vista energético o movimento harmónico
- Resolver problemas em oscilações simples, com amortecimento e forçadas.

… certifique-se que foram atingidos.