Departamento de Matemática e Aplicações 09/02/ 2015

Duração: 120 minutos

Exame de recurso de Cálculo EE

Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso:

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Determine as primitivas das funções seguintes:

   (a) $\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

   (b) $\dfrac{\ln(3x)}{x^5}$

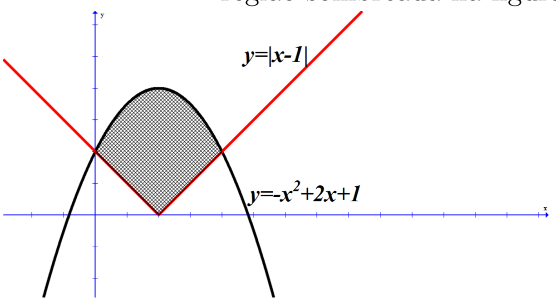
   (c) $\dfrac{5}{(x^2+1)(x-3)}$

2. Calcule o integral $\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$. **Sug:** Utilize a substituição $x = 2\,\mathrm{tg}\, t$.

3. Considere a região plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 + \frac{1}{2} \wedge y \geq 2|x| - \frac{1}{2}\}$.

   (a) Esboce a região plana D num referencial cartesiano.

   (b) Calcule a área da região plana D. **Nota: se não respondeu à alínea anterior**, considere a região sombreada na figura abaixo.



(c) Escreva a expressão simplificada, usando integrais, que permite calcular o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região D em torno da reta $y = -1$. **Nota: se não respondeu à alínea a)**, considere a região sombreada na figura acima.

(d) Escreva a expressão simplificada-, usando integrais, que permite calcular o comprimento dos arcos de curva que delimitam a região D. **Nota: se não respondeu à alínea a)**, considere a região sombreada na figura acima.

4. Considere a função real de variável real f, definida por $f(x) = \begin{cases} \arcsin(1-x) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -2 - \frac{\pi}{2} + c(x-3)^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ onde c é uma constante real.

(a) Determine a constante c de modo que f seja contínua em $x = 2$.

(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = 2$.

5. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} e^{t^2} dt$.

(a) Escreva o polinómio de Taylor de grau 2 da função f, na vizinhança do ponto $x = 1$.

(b) Use a alínea anterior para determinar um valor aproximado de $f(1,01)$.

6. Considere a função real $F(x) = (x+1)\int_{-1}^{x} f(t)dt$, onde f é uma função real de variável real positiva e contínua em $\mathbb{R}$.

   (a) Determine $F(1)$, sabendo que $\int_{1}^{2} f(t)dt = 1$ e $\int_{-1}^{2} f(t)dt = 6$.

   (b) Mostre que $F(x) \geq 0$, para todo o número real x.

7. Estude a natureza das séries numéricas seguintes e, nos casos em que é possível, determinar a soma da série.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2.\,6^{-n+1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$.