Duração: 90 minutos

1º Teste de Cálculo EE

Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso:

(5,4 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente.

1. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} -\pi + b\arcsin x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x + a & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, derivável em $]-1, 1[$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ $a = -\pi$ e b qualquer. ☒ $a = -\pi$ e $b = 1$. ☐ $a = 1$ e b qualquer.

☐ $a = 1$ e $b = -\pi$. ☐ $a = -\pi$ e $b = -\pi$. ☐ $a = 1$ e $b = 1$.

2. Seja f uma função real de variável real tal que f não é derivável em $x = a$ mas é derivável em $D_f \setminus \{a\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ f não é contínua em $x = a$. ☒ Nada se pode afirmar sobre a continuidade de f em $x = a$.

☐ f é contínua em $x = a$. ☐ As derivadas laterais existem mas $f'(a^+) \neq f'(a^-)$.

☐ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. ☐ Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

3. Sobre qual das funções seguintes se pode afirmar que existe um ponto c do intervalo $]-1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$?

☐ $f(x) = |x|$. ☐ $f(x) = \frac{2}{x}$. ☐ $f(x) = (x-2)^2$.

☒ $f(x) = \arctan(x^2)$. ☐ $f(x) = \sqrt[3]{x}$. ☐ $f(x) = |x-1|$.

4. Qual das funções seguintes tem máximo e mínimo no intervalo indicado?

☐ $f(x) = \arctan x$ em $\mathbb{R}$. ☐ $f(x) = \arcsin x$ em $]-1, 1]$. ☐ $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$ em $[-1, 3]$.

☒ $f(x) = \frac{1}{x-2}$ em $[-1, 0]$. ☐ $f(x) = \frac{e^x}{x}$ em $]-1, 1]$. ☐ $f(x) = \ln(x-1)$ em $[-1, 3]$.

5. Seja $g : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. O que se pode dizer sobre o número de zeros da função g, sabendo que $g(-2) = -5$, $g(-1) = 3$, $g(0) = 7$ e $g(1) = -6$ e que a sua derivada g' admite só um zero?

☒ g tem exatamente dois zeros. ☐ g tem, exatamente, um zero.

☐ g tem, no máximo, três zeros. ☐ g tem, exatamente, três zeros.

☐ g não tem zeros. ☐ g tem quatro zeros.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $x = a$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(a)$. ☒ $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. ☐ $\lim\limits_{x \to a} f(x-a) = f(a)$.

☐ $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f'(a)$. ☐ $\lim\limits_{h \to 0} f(x-h) = f(a)$. ☐ $\lim\limits_{x \to a} f(x+a) = f(a)$.

7. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que

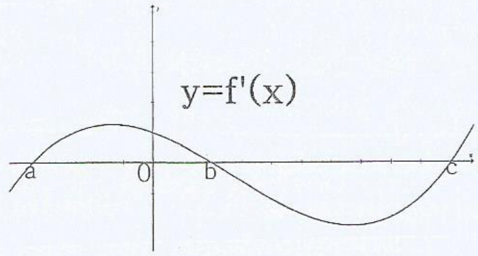
- $g(2) = 3$ e $g'(2) = -5$
- $f(3) = 4$ e $f'(3) = 6$.

A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(g(x))$ no ponto de abcissa $x = 2$ é:

☐ $y - 4 = 6(x-2)$. ☒ $y - 4 = -30(x-2)$. ☐ $y - 3 = 6(x-2)$.

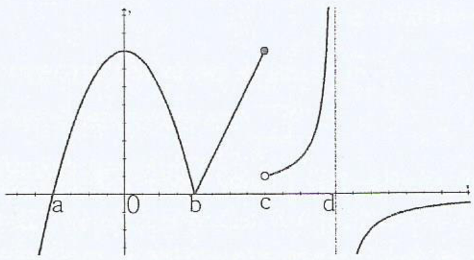
☐ $y - 3 = -5(x-2)$. ☐ $y - 3 = -30(x-4)$. ☐ $y - 4 = -30(x-3)$.

8. Considere representado na figura abaixo o gráfico da derivada f' de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



- [ ] f é positiva em $]a, b[$ e negativa em $]b, c[$.
- [x] f é crescente em $]a, b[$ e decrescente em $]b, c[$.
- [ ] f é decrescente em $]a, b[$ e crescente em $]b, c[$.
- [ ] $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.
- [ ] f é crescente em $]a, 0[$ e decrescente em $]0, b[$.
- [ ] f é decrescente em $]a, 0[$ e crescente em $]0, b[$.

9. Considere representado na figura abaixo o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



- [ ] f é diferenciável em $x = a$, $x = 0$, $x = b$, $x = c$ e $x = d$.
- [ ] f é diferenciável em $x = a$, $x = 0$ e $x = b$.
- [x] As derivadas laterais, $f'(b^+)$, $f'(b^-)$ existem mas $f'(b^+) \neq f'(b^-)$.
- [ ] As derivadas laterais, $f'(c^+)$, $f'(c^-)$ existem mas $f'(c^+) \neq f'(c^-)$.
- [ ] As derivadas laterais, $f'(a^+)$, $f'(a^-)$ existem mas $f'(a^+) \neq f'(a^-)$.
- [ ] As derivadas laterais, $f'(d^+)$, $f'(d^-)$ existem mas $f'(d^+) \neq f'(d^-)$.

GRUPO II (3 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Determine a derivada das funções seguintes:

(a) $f(x) = \frac{\ln(3+\arctan(x^2))}{\cos x}$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \cos x + (1+x^4)(3+\operatorname{arctan} x^2)\operatorname{sen} x \cdot \ln(3+\operatorname{arctan} x^2)}{(1+x^4)(3+\operatorname{arctan} x^2) \cdot \cos^2 x}$$

(b) $f(x) = h(\arcsin(\sqrt{x})) - h(2e^{3x})$, sabendo que h é uma função derivável em $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \cdot h'(\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})) - 6e^{3x} \cdot h'(2e^{3x})$$

(11,6 valores)

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Determine $\cos(\arctan \frac{1}{5})$. $= \cos y$ onde $y = \arctan \frac{1}{5} \Leftrightarrow \tan y = \frac{1}{5}$

e $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\wedge \tan y > 0 \Rightarrow y \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Usando a fórmula $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, vem que

$1 + \frac{1}{25} = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow \cos y = \pm \frac{5}{\sqrt{26}}$. Como $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos y = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

2. Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$. $= \infty^0$.

$x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}} = e^{\frac{\ln x}{x-1}}$. Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}$.

Aplica-se a Regra de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Logo $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$.

3. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} \arctan(\sin x) + 1 & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0 \\ b + \ln(x+1) & \text{se} \quad 0 < x < 2\pi \end{cases}$ onde b é uma constante real.

(a) Sabendo que f é contínua no seu domínio, determine a constante b.

Se f é contínua em $]-\pi, 2\pi[$, também é contínua em $x = 0$.

Então $f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

$f(0) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (\arctan(\operatorname{sen} x) + 1) = 1$. Logo, se f é contínua em $x=0$,

e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (b + \ln(x+1)) = b$ $\qquad b = 1$.

(b) Determine o domínio da diferenciabilidade de f. Nota: se não conseguiu determinar a constante b na alínea anterior, faça $b = 1$.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } 0 < x < 2\pi \end{cases}$

No intervalo $]-\pi, 0[$, f' está bem definida, logo f é aí diferenciável.

No intervalo $]0, 2\pi[$, f' está bem definida, logo f é aí diferenciável.

Só falta estudar em $x = 0$. Como f é contínua em $]-\pi, 2\pi[$ e f é diferenciável em $]-\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$, pode usar-se o corolário do T. de Lagrange para determinar $f'(0)$:

$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{1+x} = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 1$

Daqui, vem que $f'(0) = 1$.

Logo, f é diferenciável em $]-\pi, 2\pi[$

(c) Determine, caso existam, os extremos de f e estude a monotonia da função f.

$$f'(x)=0 \wedge -\pi < x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}=0 \wedge -\pi < x \leq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x)=0 \wedge 0<x<2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{1+x}=0 \wedge 0<x<2\pi \Leftrightarrow f' \text{ n̄ se anula nesse intervalo.}$$

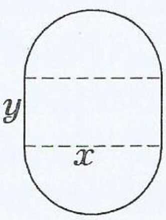
	$-\pi$		$-\pi/2$		0		2π
$\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$		$-$	0	$+$	$+$		
$\frac{1}{1+x}$						$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

f é decrescente $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

f é crescente $\Leftrightarrow$
$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ é mínimo.

4. Pretende-se construir uma janela que, no meio, tem o formato de um rectângulo e no topo e na base tem a forma de semi-circunferência. Se se pretender um perímetro de 50 metros para a janela, quais as dimensões da janela, $x \geq 0, y \geq 0$, de modo a maximizar a sua área, para que entre mais luz?



$P = 2y + x\pi$

$y = \frac{P}{2} - \frac{\pi x}{2}$

$y = 25 - \frac{\pi x}{2}$

$A = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$A = x\left(25 - \frac{\pi x}{2}\right) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 25x - \frac{\pi x^2}{4}$

$A'(x) = \frac{1}{2}\left[50 - \pi x\right]$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - \pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{\pi}$

	0		$\frac{50}{\pi}$	
A'	$+$	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$	$\nearrow$	$A\left(\frac{50}{\pi}\right)$	$\searrow$

$A\left(\frac{50}{\pi}\right)$ é máximo.

$x = \frac{50}{\pi} \Rightarrow y = 0$

Dimensões são $x = \frac{50}{\pi}$ e $y = 0$.

5. Considere duas funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = g(x)$.

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. h é uma função contínua pois é a soma de duas funções contínuas.

$h(a) = f(a) - g(a) < 0$

$h(b) = f(b) - g(b) > 0$

Então, pelo T. de Bolzano, existe $x \in]a, b[$ tal que $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.