1. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$

3. $f(x) = \arctan x$

4. $f(x) = \arctan x$

5. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\arccos x}$

7. 4º gráfico

8. $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

10. a) $f(x) < 5 \Leftrightarrow |x-2| + |x+1| < 5 \Leftrightarrow$

$|x-2| < 5 - |x+1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2 < 5-|x+1| \;\wedge\; x-2 > |x+1|-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+1| < 7-x \;\wedge\; |x+1| < x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x+1 < 7-x \ \wedge \ x+1 > x-7 \quad \wedge \quad x+1 < x+3 \ \wedge \ x+1 > -x-3$

$\Leftrightarrow \quad 2x < 6 \quad \wedge \ \underbrace{0x > -8 \quad \wedge \quad 0x < 2}_{\text{Condições universais}} \quad \wedge \ 2x > -4 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x < 3 \ \wedge \ x > -2 \qquad\qquad A = \left]-2, 3\right[$

b) Para $x \in A$, tem-se que $0 < f(x) < 5$, logo para $x \in A$, f é uma função limitada.

11. $f(x) = |\text{arctan } x|$

a) $D_f = \mathbb{R}$.

Sabemos que contradomínio da função $g(x) = \text{arctan } x$ é $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Então $0 \leq |\text{arctan } x| < \frac{\pi}{2}$

Como $f(x)$ é uma função contínua e estritamente crescente, tem-se que contradomínio de f é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow |\text{arctan } x| \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$\text{arctan } x \leq 1 \quad \wedge \quad \text{arctan } x \geq -1$

Como tan é uma função crescente em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que

$x \leq \tan 1 \quad \wedge \quad x \geq \tan(-1)$

$x \in \left[-\tan 1, \tan 1\right]$

13. a) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$.

13. b) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = D_f$

c) $f(x) = \dfrac{d}{dx}|x|$

Tem-se $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

e $\dfrac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, pois $\dfrac{d}{dx}|x|$ não existe em $x = 0$.

f é contínua em $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

14. $f(x) = \arcsin\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

f é contínua no seu domínio

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x - \frac{x^2}{2} \leq 1 \} = [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$

então f é contínua em $[1, 2] \subset D_f$.

Tem-se que $f(1) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

e $f(2) = \arcsin 0 = 0$.

Tem-se também $0 < \frac{1}{4} < \frac{\pi}{6}$.

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in]1,2[$ tal que

$f(c) = \frac{1}{4}$.

15. Considere-se a função

$g(x) = f(x) - x - 1$

se f é contínua, então g é contínua pois consiste na soma de uma função contínua (f) com uma função polinomial.

$g(-1) = f(-1) + 1 - 1 = f(-1) = \frac{\pi}{4}$

$g(1) = f(1) - 1 - 1 = f(1) - 2 = \frac{\pi}{4} - 2$

Como $g(-1) > 0$ e $g(1) < 0$, pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in]-1,1[: g(c) = 0$, isto é

existe $c \in]-1,1[: f(c) - c - 1 = 0$

$f(c) - c = 1$.

16. a) $\frac{df}{dx}(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1.$

b) $\frac{dg}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 + 3(x_0+h) - x_0^2 - 3x_0}{h} =$

16.b) $$\frac{dg}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 + \cancel{3x_0} + 3h - \cancel{x_0^2} - \cancel{3x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0+h+3)}{\cancel{h}} = 2x_0 + 3$$

16 c) $$\frac{dh}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x_0+h) - h(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - \cancel{x_0^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{\cancel{h}} = 3x_0^2 \;//$$

17.a) $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \qquad D_f =]-\infty, 1[$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot x}{1-x} = \frac{2(1-x) + x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$D_{f'} =]-\infty, 1[= D_f$$

b) $$f(x) = \frac{\cos(2x)}{x} \qquad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$f'(x) = \frac{-2\,\mathrm{sen}(2x) \cdot x - \cos(2x)}{x^2} \qquad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = D_f.$$

c) $$h(x) = e^{2f(x)} - g(x)$$

Considera-se que f e g são diferenciáveis no seu domínio D_f e D_g, respectivamente.

c) $h(x) = e^{2f(x)} - g(x)$

$$D_h = D_f \cap D_g$$

$$h'(x) = 2f'(x)\, e^{2f(x)} - g'(x)$$

$$D_{h'} = D_{f'} \cap D_{g'}.$$

d) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ $\qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x > 0\}$

$$=]2k\pi, (1+2k)\pi[\;, k \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x) = (\ln(\operatorname{sen} x))' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$

$$D_{f'} =]2k\pi, (1+2k)\pi[\;, k \in \mathbb{Z}.$$
$$= D_f$$

e) $f(x) = e^{\cos x^2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}.$

$$f'(x) = \left(e^{\cos x^2}\right)' = -2x \cdot \operatorname{sen} x^2 \; e^{\cos x^2} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} = D_f$$

f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctan}(\operatorname{senh}(\frac{x}{2}))}{\sqrt{x}}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \sqrt{x} + \operatorname{arctan}\left(\operatorname{senh}\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot x + \operatorname{arctan}\left(\operatorname{senh}\frac{x}{2}\right) \cdot \left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\right)}{2\,x\sqrt{x}\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$D_{f'} = D_f = \mathbb{R}_+.$$

17.g) $f(x) = \dfrac{\text{arcsen}\, x}{1+\text{sh}\, x^2}$

Como $\text{sh}\, x^2 \geq 0$ então $1+\text{sh}\, x^2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

logo $D_f = [-1,1]$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{(1+\text{sh}\, x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\,\text{ch}\, x^2 . \text{arcsen}\, x}{1+\text{sh}\, x^2}$$

$$= \frac{1+\text{sh}\, x^2 - 2x\,\text{ch}\, x^2 \left(\sqrt{1-x^2}\right) . \text{arcsen}\, x}{(1+\text{sh}\, x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$D_{f'} = [-1,1] = D_f$

h) $f(x) = \dfrac{\ln\left(3+\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{x}}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \wedge \ 3 + \text{ch}\, \frac{x}{2} > 0 \}$

Como $\text{ch}\, \frac{x}{2} > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$3 + \text{ch}\, \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Assim $D_f = \mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\frac{1}{2}\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} . \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} . \ln\left(3+\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x} =$$

$$= \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right) . x - \left[\ln\left(3+\text{ch}\, \frac{x}{2}\right)\right] . \left(3+\text{ch}\, \frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{x} . x \left(3+\text{ch}\, \frac{x}{2}\right)}$$

$D_{f'} = D_f = \mathbb{R}_+$

o o o

18\. a) $\frac{d}{dt}\left(\frac{3t}{\ln t}\right)\Big|_{e^2} = \left(\frac{3\ln t - \frac{1}{t}\cdot 3t}{\ln^2 t}\right)\Big|_{e^2} =$

$= \frac{3\ln e^2 - 3}{\ln^2 e^2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}.$

b) $\frac{d^3}{dx^3}(\text{sen}(kx)) = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d}{dx}(\text{sen}\, kx)\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left[k\cdot\cos kx\right] =$

$= k\cdot\frac{d^2}{dx^2}(\cos kx) = k\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\cos kx)\right) = k\frac{d}{dx}\left(-k\,\text{sen}\, kx\right) =$

$= -k^2\frac{d}{dx}(\text{sen}\, kx) = -k^2(k\cdot\cos kx) = -k^3\cdot\cos kx.$

c) $\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt[3]{a+k\,\text{sen}^2\theta}\right) = \frac{1}{3}(2k\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta)\cdot(a+k\,\text{sen}^2\theta)^{-2/3} =$

$= \frac{2k}{3}\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(a+k\,\text{sen}^2\theta)^2}}$

d) $\lim_{u\to 0}\frac{3u}{\tan 2u} = 3\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\text{sen}\, 2u}{\cos 2u}} =$

$= \frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{2u}{\text{sen}\, 2u}\cdot\cos(2u) = \frac{3}{2}\times 1\times 1 = \frac{3}{2}$

e) $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{a-k\cos^2 t}\right) = \frac{k\cdot\cos t\cdot\text{sen}\, t}{\sqrt{a-k\cos^2 t}}$

f) $\frac{d}{du}\left(u\ln(2u)\right) = \ln(2u) + \frac{2u}{2u} = \ln(2u)+1$ (9)

g) $\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{y}}{1+2y}\right)_{(1)} = \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(1+2y) - 2\sqrt{y}}{(1+2y)^2}\right)_{(1)} =$

$= \frac{\frac{1+2}{2}-2}{(1+2)^2} = -\frac{1}{18}$

h) $\frac{d}{dx}\left(\tan^3 x^4\right) = 3 \times 4x^3 \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot \tan^2 x^4 =$

$= 12x^3 \frac{\operatorname{sen}^2 x^4}{\cos^4 x^4}$

19) $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{2+e^{1/h}} - 0}{h} =$

(Se f é contínua em $x=0$
f está definida em $x=0$ por $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2+e^{1/x}} = 0$)

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(2+e^{1/h})} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{2+e^{1/h}} = \frac{1}{2}$

Como $f'(0^+) = 0 \neq \frac{1}{2} = f'(0^-)$

não existe $f'(0)$.

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, também se podia usar um corolário do T. de Lagrange.

21. O eixo Ox tem por equação $y=0$.

A recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto (x_0,y_0) é $\Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

com $y_0 = f(x_0)$

Intersecção das duas rectas:

$$\begin{cases} y=0 \\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{se } f'(x_0) \neq 0$$

Isto é

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{se } f'(x_0) \neq 0.$$

$$\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$$

Se $f'(x_0)=0$, a recta tangente é horizontal $(y = f(x_0))$ e esta recta ou não intersecta o eixo Ox, se $f(x_0) \neq 0$, ou coincide com o eixo Ox se $f(x_0)=0$.

23. Usando a regra da derivada do produto:

$$(\operatorname{sen}^2 y \cdot \cos^2 y)' = (2 \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos y)\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y\,(-2 \operatorname{sen} y \cos y)$$

$$= 2 \operatorname{sen} y \cos y\,(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y)$$

$$= \operatorname{sen}(2y) \cdot \cos(2y).$$

23. Escrevendo $\operatorname{sen}^2 y \cdot \cos^2 y$ como $f(2y)$:

$$\operatorname{sen}^2 y \cdot \cos^2 y = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}(2y)\right)^2 .$$

Assim, $(\operatorname{sen}^2 y \cdot \cos^2 y)' = \frac{1}{4}\left[\left(\operatorname{sen}(2y)\right)^2\right]' = \frac{1}{4}\, 2 \cdot \operatorname{sen}(2y) \cdot \left(\operatorname{sen}(2y)\right)' =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2y) \cdot 2\cos(2y) = \operatorname{sen}(2y) \cdot \cos(2y).$$

26. Tem-se que

$$x = \operatorname{arctan} y \iff y = \tan x \quad , x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pela fórmula da derivada da função inversa, tem-se

$$(\operatorname{arctan} y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} .$$

Da fórmula trigonométrica $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ e substituindo $y = \tan x$, tem-se $1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Assim

$$(\operatorname{arctan} y)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+y^2} .$$

27. $\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} =$

$= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$

Assim, $f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

28. a) $\lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1+h}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{h}$ (*)

Considerando $f(x)=\sqrt[3]{x}$, tem-se $f(1+h)=\sqrt[3]{1+h}$ e $f(1)=1$.

Assim, a expressão (*) pode escrever-se

$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -f'(1)$

Como $f(x)=\sqrt[3]{x}$, tem-se $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ e $f'(1)=\frac{1}{3}$.

Logo $\lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1+h}}{h} = -f'(1) = -\frac{1}{3}$ //

b) Considerando $f(x)=e^x$, tem-se

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$.

Como $f(x)=e^x$, tem-se $f'(x)=e^x$ e $f'(0)=e^0=1$.

Logo $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = f'(0)=1$.

c) Considere-se $f(x) = (1+3x)^5$.

Então $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^5 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Como $f(x) = (1+3x)^5$, tem-se $f'(x) = 15(1+3x)^4$ e
$f'(0) = 15$.

Logo $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^5 - 1}{x} = f'(0) = 15$.

d) Considere-se $f(x) = \sqrt{\cos x}$

Então $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$.

Como $f(x) = \sqrt{\cos x}$, tem-se $f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}$ e $f'(0) = 0$.

Daí, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} = f'(0) = 0$.

29. $f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 \cdot \operatorname{arctg} h}{h} = \lim_{h\to 0^-} h \cdot \operatorname{arctg} h = 0$

$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\cos(h^2) - 1) - 0}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\cos(h^2) - 1)}{h} = \frac{0}{0}$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\cos(h^2)-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h.\operatorname{sen} h^2 . \cos(\cos(h^2)-1)}{1} =$$

$= -2\times 0 . \operatorname{sen} 0 . \cos 0 = 0.$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, tem-se

$f'(0) = 0.$

b) $D_{f'(x)} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x.\operatorname{arctan} x + \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{se } x<0 \\ -2x.\operatorname{sen} x^2 . \cos(\cos(x^2)-1) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

pois $(x^2 \operatorname{arctan} x)' = 2x.\operatorname{arctan} x + \dfrac{x^2}{1+x^2}$

e $\left(\operatorname{sen}(\cos(x^2)-1)\right)' = -2x.\operatorname{sen} x^2 . \cos(\cos(x^2)-1)$.

30. $g'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)-0}{h}$

É necessário usar sub-limites:

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{Q}}} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

e

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} \frac{g(h)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} \frac{0}{h} = 0$$

Então $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 0 = g'(0)$

31\. a) f é contínua para $x>0$ e f é contínua para $x<0$ pois nesses subconjuntos reais, f é definida por polinómios.

Em $x=0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

e $f(0)=1$.

Logo f é contínua em $x=0$ se $b=1$ e $a\in\mathbb{R}$.

f é contínua em $\mathbb{R}$ se $b=1$ e $a\in\mathbb{R}$.

b) f é diferenciável para $x>0$ e $x<0$, pois nesses intervalos f é definida por polinómios.

Se f é diferenciável em $\mathbb{R}$ então f é contínua em $\mathbb{R}$, logo $b=1$ pela alínea anterior.

Analise-se a diferenciabilidade de f em $x=0$:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah+1-1}{h} = a$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-h+h^2-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h-1)}{h} = -1.$$

Se f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então $a=-1$ e $b=1$.

<u>Nota</u>: Também se podia ter usado um corolário do T. de Lagrange.

32. Para $x>0$ e $x<0$, f é diferenciável pois está definida por polinómios.

Se f é diferenciável em $\mathbb{R}$, f é contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua em $x=0$, isto é

$$f(0)=1=\lim_{x\to 0} f(x).$$

Tem-se que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=b$.

Logo $b=1$.

Se f é diferenciável em $x=0$, tem-se

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah+1-1}{h}=a$$

e $$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^4+h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-} h^3+1=1.$$

Assim, como f é diferenciável, tem-se

$$a=b=1.$$

<u>Nota</u>: Também se podia ter usado um corolário do T. de Lagrange.

33. $$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+3h+1-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}}=3$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h+4-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3(h+1)}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3}{h}(h+1) = -\infty$$

Não existe $f'(0)$, pois $f'(0^-) = -\infty$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x<0 \\ 2x+3 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pois aí, f é diferenciável.

Em $x=0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x+4 = 4$$

e $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+3x+1 = 1$$

Não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, logo f n̄ é contínua em $x=0$.

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

34. a) $$g'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h+5-5}{h} = 3.$$

$$g'(0^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{5-5}{h} = 0$$

Como $g'(0^+) = g'(0^-)$, não existe $g'(0)$.

b)

$$g'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois é aí diferenciável.

Em $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (3x + 5) = 5 \quad \text{e} \quad g(0) = 5.$$

Assim, g é contínua em $x = 0$ e g é contínua em $\mathbb{R}$.

35. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

a) $f(3) = 5$ e $f(2) = 5$

$$T.M.V_{[2,3]} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{5 - 5}{3 - 2} = 0.$$

A taxa de variação média de f é zero no intervalo $[2,3]$.

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+h)^2+1}{2+h-1} - 5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+1-5(h+1)}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h+4+1-5h-5}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h-1)}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h-1}{h+1} = -1.$$

c) A função linear é aquela cuja representação geométrica é a recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(2, f(2)) = (2,5)$:

$$L(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 5 - 1(x-2)$$

$$L(x) = 5-(x-2) = 7-x$$

d) $L(2{,}01) = 5-(2{,}01-2) \doteq 5-0{,}01 = 4{,}99$.

36.

$$f(x) = \begin{cases} x e^{1-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ -x e^{1-x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{1-x^2} = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x e^{1-x^2}).$$

b)
$$f'(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x > 0 \\ -e^{1-x^2} + 2x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Em $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h e^{1-h^2} - 0}{h} = -e.$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h e^{1-h^2}}{h} = e$$

Como $f'(0^-) = -e \neq e = f'(0^+)$.

f n é diferenciável em $x=0$.

Nota: Também se podia ter usado um corolário do T. de Lagrange.

f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) $f'(0^-) = -e$, $f'(0^+) = e$, pela alínea anterior.

d) Estudar a monotonia de f, estudando o sinal da função derivada

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x>0 \\ -e^{1-x^2} + 2x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Assim, para $x>0$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(1-2x^2)>0 \Leftrightarrow 1-2x^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Intersectando com o intervalo $x>0$, tem-se que

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \lor x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Intersectando com o intervalo em questão, tem-se.

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para $x<0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(2x^2-1)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

No intervalo $x<0$, tem-se $x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f'(x)>0$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e no intervalo considerado $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$.

Conclusão:

f é crescente em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

f é decrescente em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$.

37. Como f é diferenciável em I, pelo T. de Rolle, tem-se que existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0)=0$ e
$x_1 \in]b,c[$ tal que $f'(x_1)=0$.

Como f'' existe em I, significa que f' é diferenciável em I e podemos aplicar o T. de Rolle à função f' no intervalo $]x_0,x_1[$, isto é, existe $p \in]x_0,x_1[$ tal que

$f''(p)=0$.

Como $]x_0,x_1[\subset]a,c[$, tem-se que $p \in]a,c[$.

38. a) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctan}(3x)$

$D_f = \mathbb{R}$.

b) • f é o produto das funções contínuas $h(x) = x$ e $g(x) = \operatorname{arctan}(3x)$. E a função g é contínua pois é a composição da função $\operatorname{arctan} x$ com a função $i(x) = 3x$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

c) $f(-x) = (-x) \cdot \operatorname{arctan}(-3x)$

Como arctan é uma função ímpar isto é, $\operatorname{arctan}(-x) = -\operatorname{arctan} x$, tem-se

$$f(-x) = -x(-\operatorname{arctan}(3x)) = x \cdot \operatorname{arctan}(3x) = f(x).$$

d) $f(0) = 0$, por isso, para mostrar que f tem um mínimo absoluto em $x = 0$, basta mostrar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \cdot \operatorname{arctan}(3x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge \operatorname{arctan}(3x) \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \operatorname{arctan}(3x) \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge 3x \geq \tan 0) \vee (x \leq 0 \wedge 3x \leq \tan 0)$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \vee x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

39.

(23)

f é contínua em $x=1$ se

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Tem-se $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = a$

e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$

Para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$, tem que $a = \frac{\pi}{2}$ e nesse caso,

$$f(1) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 1} f(x).$$

b) $f\left(\frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Como $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right) < \pi$ então

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{4}{\pi} \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right) < \frac{4}{\pi} \cdot \pi \iff 2 < \frac{4}{\pi} \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right) < 4$$

Para calcular $f\left(\frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$, usa-se a expressão de f para $x \geq 1$.

Assim,

$$f\left(\frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \operatorname{arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right).$$

Representando $z = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$, tem-se

$\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z . \cos z$, sabendo que $\cos z = -\frac{4}{5}$.

Utilizando a f.f.t.: $\operatorname{sen}^2 z + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} z = \pm \frac{3}{5}$.

Como $\frac{\pi}{2} < z < \pi$, então $\operatorname{sen} z = \frac{3}{5}$.

Assim,

$$f\left(\frac{4}{\pi}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$
$$= -\frac{12\pi}{25}.$$

$f\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)$. Como $-1 < \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) < 1$, utiliza-se a expressão de f para $-1 < x < 1$.

$$f\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right) = \arcsen\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

, pois pretende-se saber $\arcsen y = x$ onde $y = \cos\frac{5\pi}{12}$, isto é

$y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$.

c) $D_f = \mathbb{R}$.

Para $x > 1$, f é contínua pois está definida por uma função trigonométrica, contínua em $\mathbb{R}$

Para $-1 < x < 1$, f é contínua pois está definida por uma f. trigonométrica inversa contínua em $[-1,1]$.

Para $x < -1$, f é contínua pois está definida por uma f. constante.

Em $x = 1$, f é contínua pela alínea a).

Em $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 0 = 0.$$

Como não existe $\lim_{x \to -1} f(x)$, f não é contínua em $x = -1$.

Logo f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

d) Para $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

Como f é contínua ~~e~~ limitada, tem-se que

$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \leq 1 \iff -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) \leq \frac{\pi}{2} \iff$

$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

Para $-1<x<1$ $\quad , f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Para $x \leq -1$ $\quad , f(x)=0.$

Tem-se $\quad CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Admite máximo quando

$$f(x)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow x = 1+4k, \ k \in \mathbb{Z}_+^0.$$

Admite mínimo quando.

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -1+4k, \ k \in \mathbb{Z}_+$$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ não existe.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0.$$

40. a) $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1-2}{0^+} = -\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) $f'(x) = \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, para todo $x \in]-1,1[.$

Como a desigualdade é estrita, temos que f é estritamente crescente em $]-1,1[$.

Assim, como f é contínua nesse intervalo, o contradomínio de f é $\left] \lim_{x \to -1^+} f(x), \lim_{x \to 1^-} f(x) \right[= \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

f não é minorada mas f é majorada por $y = -\frac{1}{2}$.

No entanto, $y = -\frac{1}{2}$ não é máximo da função, pois f é estritamente crescente e $x = 1$ não pertence ao domínio de f.

41. $f'(x) = 4\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - 6 \cos x \cdot \text{sen}\,x = -2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x =$

$= -\text{sen}(2x)$

Para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 2x \in]0, \pi[$, a função sen é sempre positiva, isto é, $\text{sen}(2x) > 0$, para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$f'(x) = -\text{sen}(2x) < 0 \quad , \text{para } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Logo f é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \quad , k = 0, 1$

$x = \frac{k\pi}{2} \;, k = 0,1 \quad \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$.

$f(0) = 3$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

E como $f(x)$ é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que o seu máximo absoluto é $f(0) = 3$ e o seu mínimo absoluto é $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

c) f é contínua em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f(0)=3$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

Como $2<\frac{15}{7}<3$, pelo T. de Bolzano, existe

$c\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[: f(c)=\frac{15}{7}$.

d) Pretende-se determinar o ponto $(x,f(x))$ tal que o o declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto é $m=-1$.

Isto é equivalente a determinar x tal que $f'(x)=-1$.

$f'(x)=-1 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}(2x)=-1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x)=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k=0$

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

O ponto é $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{2}$

O ponto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{2}\right)$.

42. Para $x<0$, $f'(x)=\frac{2-x}{(1-x)^2}$ $\Rightarrow f'(a)=\frac{2-a}{(1-a)^2}$

Para $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow f'(b)=\frac{1}{1+b^2}$

Equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))=\left(a,\frac{a}{1-a}\right)$ é $y=\frac{a}{1-a}+\frac{2-a}{(1-a)^2}(x-a)$

Eq. da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(b,f(b))=$
$=(b,\operatorname{arctg} b)$ é

$$y=\operatorname{arctg} b+\frac{1}{1+b^2}(x-b).$$

b) $f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{arctan} h}{h} = \frac{0}{0}$

Utilizando a regra de L'Hôpital:

$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h^2} = 1.$

$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{1-h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$, tem-se $f'(0) = 1$.

c)
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Tem-se que f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Se houvesse extremos locais, pelo T. de Fermat, existiria $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$.

Mas verifica-se que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo não existem extremos locais.

43.a) Se f é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=-1$ e $x=1$, temos que

$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen}(1-x^2) = \ln(2-c) \Leftrightarrow$

$0 = \ln(2-c) \Leftrightarrow 1 = 2-c \Leftrightarrow c = 1$ //

b) $f'(x) = \left(\operatorname{arcsen}(1-x^2)\right)'$ na vizinhança de $x=0$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} \quad , \forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $]-1,1[\setminus \{0\}$, então, por um corolário do T. de Lagrange, temos que

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} = -\sqrt{2}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2}.$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, f não é diferenciável em $x=0$.

c) Para $x \in]0,1[$, tem-se $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} < 0$

e para $x \in]-1,0[$, tem-se $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} > 0$

Por outro lado, $\left(\ln(2x^2-1)\right)' = \frac{4x}{2x^2-1}$,

pelo que, para $x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$

e para $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Assim,

f é estritamente decrescente em $]-\infty,-1[$ e $]0,1[$ e estritamente crescente em $]-1,0[$ e $]1,+\infty[$.

Como f é contínua em $x=-1$, $x=0$ e $x=1$,

f tem mínimos em $x=-1$ e $x=1$ e tem máximo em $x=0$.

44. a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-\text{arctan}(\text{sen}\,h)}{h^2} - 0}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h - \text{arctan}(\text{sen}\,h)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \frac{\cos h}{1+\text{sen}^2 h}}{3h^2} =$

↳ Regra de L'Hôpital.

$= \lim_{h\to 0} \frac{1+\text{sen}^2 h - \cos h}{3h^2(1+\text{sen}^2 h)}$

Aplicando de novo a Regra de L'Hôpital.

$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \text{sen}\,h \cdot \cos h + \text{sen}\,h}{6h(1+\text{sen}^2 h) + 3h^2(2\,\text{sen}\,h \cdot \cos h)} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(2h) + \text{sen}\,h}{3h(2 + 2\,\text{sen}^2 h + h \cdot \text{sen}(2h))}$

Aplicando de novo a Regra de L'Hôpital,

$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \cos(2h) + \cos h}{3(2 + 2\,\text{sen}^2 h + h\,\text{sen}(2h)) + 3h(4\,\text{sen}\,h \cdot \cos h + \text{sen}(2h) + 2h\cos(2h))}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Nota: Podia ser usado um Corolário do T. de Lagrange.

b) A recta tangente ao gráfico de $f \circ g$ no ponto de abcissa $x=2$ tem equação

$y - f(g(2)) = m(x-2)$ onde $m = (f(g(2)))'$

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$.

Assim $(f \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2))$

$= g'(2)\, f'(0) = -6 \times \frac{1}{2} = -3$

A equação da recta é

$$y - 0 = -3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x+6$$

45. Para $x < -1$, $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ é contínua pois está definida pela composição de uma função exponencial por uma racional cujo denominador não se anula.

Para $x > -1$, $f(x) = \ln(x+2)$ é contínua para $x > -2$, logo é contínua no intervalo considerado.

Para $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln(x+2) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = 0.$$

e $f(-1) = \ln(-1+2) = \ln 1 = 0$.

Assim f é contínua em $x = -1$.

E f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) $$f'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{h-1+1}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{h}}}{h} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h}}{e^{-1/h}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usando a Regra de L'Hôpital:

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{1}{\cancel{h^2}}}{\frac{1}{\cancel{h^2}} e^{-1/h}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{e^{-1/h}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$f'(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(-1+h+2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h+1)}{h} = \frac{0}{0}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital,

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h+1} = 1$$

Como $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$ então $\bar{n}$ existe $f'(-1)$ e f não é diferenciável em $x=-1$. **Nota:** Podia ter sido usado um corol. do T. de Lagrange.

c) $$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2}\, e^{\frac{1}{x+1}} & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Para $x < -1$, tem-se que $f'(x) < 0$. Nesse intervalo, f é estritamente decrescente.

Para $x > -1$, $f'(x) > 0$. Nesse intervalo, f é estritamente crescente

Como f é contínua em $x=-1$, temos que f admite mínimo em $x=-1$, $f(-1) = \ln 1 = 0$.

d) A recta tangente ao gráfico de $f \circ g$ no ponto de abcissa $x=3$ tem equação

$$y - f(g(3)) = m(x-3) \qquad \text{onde } m = \left(f(g(3))\right)'$$

$f(g(3)) = f(1) = \ln 3$

Tem-se $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Assim $(f \circ g)'(3) = g'(3) \cdot f'(g(3))$

$$= g'(3) \cdot f'(1)$$

$$= -f'(1) = -\frac{1}{3}$$

A equação da recta é

$$y - \ln 3 = -\frac{1}{3}(x-3)$$

46. f é contínua em $x=1$ se

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \operatorname{arctan} 1 = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \alpha \cdot \operatorname{arctan} x = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \end{cases}$$

Com $\alpha \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{\pi}$ //

b) $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4/\pi}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Como f é contínua em $x=1$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, pode usar-se o corolário do T. de Lagrange.

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4/\pi}{1+x^2} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1$$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, tem-se que não existe $f'(1)$.

c) Para $x>1$, $f'(x)>0$, logo f é aí estritamente crescente

Para $x<1$, $f'(x)>0$, logo f é estritamente crescente.

d) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, e é crescente em $\mathbb{R}$, então contradomínio de f é

$$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]0, 2\right[$$

pois $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = e^{-\infty} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x = \frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 2.$$

47. $f'(x) = e^{x^2}$ logo f é diferenciável e contínua em $\mathbb{R}$.

Podemos aplicar o T. de Lagrange, isto é, existe $c \in]0,1[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow e^{c^2} = f(1) - 10 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = e^{c^2} + 10$$

Como para $c\in]0,1[$ se tem $e^0 < e^{c^2} < e^1$, tem-se

$$1+10 < f(1) = e^{c^2} + 10 < e+10$$

$$11 < f(1) < 10 + e$$

48. Como $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, f é diferenciável e contínua em $\mathbb{R}$.

Aplicando o T. de Lagrange à função f no intervalo $]1,2[$, tem-se que existe $c \in]1,2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} = f(2) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{1+c^2} - 1$$

Para $1 < c < 2$, tem-se $1 < c^2 < 4$ e

$$2 < 1+c^2 < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{1}{5} - 1 < \frac{1}{1+c^2} - 1 < \frac{1}{2} - 1 .$$

Logo

$$-\frac{4}{5} < f(2) < -\frac{1}{2} .$$

49. b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\ln(2x))}{\ln x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x^3} \cdot \operatorname{sen}(\ln(2x))$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x^3} = 0$ e $-1 \leq \operatorname{sen}(\ln(2x)) \leq 1$

tem-se que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x^3} \cdot \operatorname{sen}(\ln(2x)) = 0$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arcsen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cotg} x} = \frac{0}{0}$

Usando a Regra de L'Hôpital, tem-se

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = -1 .$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} = \infty^0$

Vamos ver se existe $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln (\ln x)^{\frac{1}{x}}}$.

seja $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x.\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln(\ln x)^{1/x}} = e^0 = 1$ //

g) $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = 0^0$

$$(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}$$

Estuda $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to0^+} \operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{sen} x) =$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando a Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \operatorname{sen} x = 0$$

e $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\ln(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}} = e^0 = 1$ //

49. j) $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{x/2} - 1\right)^{3x} = 0^0$

Estudar $\left(e^{x/2} - 1\right)^{3x} = e^{\ln\left(e^{x/2}-1\right)^{3x}}$

e o $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(e^{x/2} - 1\right)^{3x} = \lim_{x \to 0^+} 3x \cdot \ln\left(e^{x/2} - 1\right)$

$= \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\left(e^{x/2} - 1\right)}{\frac{1}{3x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(e^{x/2} - 1\right)}{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\frac{1}{2} e^{x/2}}{e^{x/2} - 1}}{-\dfrac{1}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} - \frac{3x^2 e^{x/2}}{2\left(e^{x/2} - 1\right)} = -\frac{3}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 e^{x/2}}{e^{x/2} - 1} = \frac{0}{0}$$

Aplicando a Regra de Cauchy,

$$= -\frac{3}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{2x e^{x/2} + \frac{x^2}{2} e^{x/2}}{\frac{1}{2} e^{x/2}} = -3 \lim_{x \to 0^+} \left(2x + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

e $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{x/2} - 1\right)^{3x} = e^0 = 1$.

49.l) $\lim_{x \to 0^+} (1-x)^{\frac{1}{\arcsen x}} = 0^\infty$

Fazendo $(1-x)^{\frac{1}{\arcsen x}} = e^{\ln (1-x)^{\frac{1}{\arcsen x}}}$

e estende-se

$$\lim_{x \to 0^+} \ln (1-x)^{\frac{1}{\arcsen x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\arcsen x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\arcsen x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = -1$$

e assim $\lim_{x \to 0^+} (1-x)^{\frac{1}{\arcsen x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ //

50. Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então pelo T. de Bolzano

$$\left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[\subset CD_f$$

isto é

$$]\alpha, \beta[\subset CD_f.$$

Como f é estritamente crescente, então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) < f(x) < \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha < f(x) < \beta \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim $CD_f \subset]\alpha, \beta[$.

Conclui-se que $]\alpha, \beta[= CD_f$.

Continuação de resolução de
ficha complementar sobre derivadas.

51. Sejam $x, y \in]-b, -a[$ e $x < y$.

Então $-x, -y \in]a, b[$ e $-y < -x$.

Como f é crescente em $]a,b[$, tem-se

$-y < -x \Rightarrow f(-y) < f(-x)$ (1)

E sabemos que f é par, logo $f(-y) = f(y)$ e
$f(-x) = f(x)$. (2)

Assim, de (1) e (2), tem-se

$x, y \in]-b, -a[$ e $x < y$ e $f(y) < f(x)$.

Logo f é decrescente no intervalo $]-b, -a[$.

52. Análoga à resolução de 63.

53. Seja f diferenciável em x_0, ponto do domínio de f.
Pretende-se mostrar que f é contínua em x_0,
isto é,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0.$$

Como $x \neq x_0$, podemos multiplicar e dividir por
$(x - x_0)$ a expressão $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right)$.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \to x_0} (x - x_0).$$

[illegible]. Como f é diferenciável em x_0, a expressão anterior é igual a

$$f'(x_0)\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\times 0=0.$$

Assim, mostra-se que $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0$.

56. Seja f ~~par~~ uma função par. Então

$$f(x)=f(-x).$$

A derivada desta igualdade é

$$f'(x)=-f'(-x).$$ Logo f' é uma função ímpar.

55. Análoga à resolução do ex. 46.

56. a) No instante inicial $t=0$, a massa é A_0

Pretende-se determinar o instante em que a massa é $\frac{A_0}{4}$, isto é

$$A_0 \exp(-Rt) = \frac{A_0}{4} \Leftrightarrow \exp(-Rt) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$-Rt = \ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow -Rt = -\ln 4 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 4}{R}$$

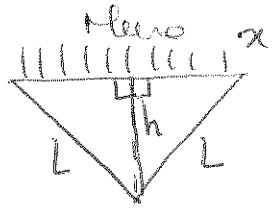
Demora $\frac{\ln 4}{R}$ unidades de tempo.

b) $A'(t) = -R\, A_0 \exp(-Rt)$

$$A'\left(\frac{\ln 4}{R}\right) = -R\, A_0 \exp\left(-\cancel{R} \cdot \frac{\ln 4}{\cancel{R}}\right) = -R\, A_0 \exp\left(\ln 4^{-1}\right) =$$

$$= -R\, A_0 \cdot 4^{-1} = \frac{-R\, A_0}{4}$$

37.



Área do triângulo é dada por $A_\Delta = \dfrac{x \times h}{2}$

onde h é um cateto de um triângulo rectângulo:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = L^2 \Leftrightarrow h^2 = L^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow h = \sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A_\Delta = \frac{x}{2}\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\left(-\frac{2x}{4}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(L^2 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2}\left[L^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right] = \frac{1}{2\sqrt{L^2 - \frac{x^2}{4}}}\left[L^2 - \frac{x^2}{2}\right]$$

Determinar pontos críticos de A

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow L^2 - \frac{x^2}{2} = 0 \ \wedge \ L^2 - \frac{x^2}{4} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{2}L \quad \wedge \ x \neq \pm 2L$$

$$x = \sqrt{2}L$$

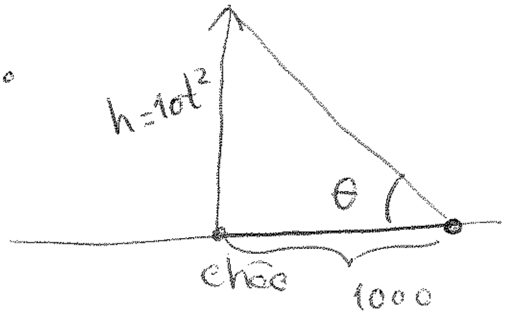
$$A'(x) > 0 \Leftrightarrow L^2 - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \left(L - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(L + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < x < \sqrt{2}L$$

$$A'(x) < 0 \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{2}L$$

significa que A é crescente para $0 < x < \sqrt{2}L$ e decrescente para $x > \sqrt{2}L$. Assim $A(\sqrt{2}L)$ é a área máxima e $x = \sqrt{2}L$ é o comprimento do muro.

58.



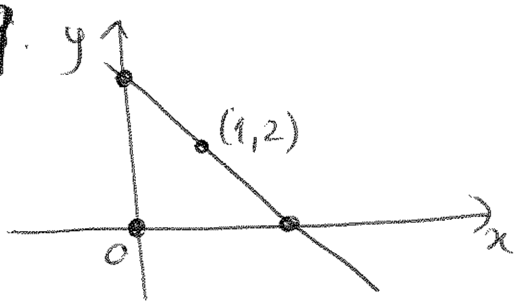
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{10t^2}{1000} = \frac{t^2}{100}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{t^2}{100}$$

$$\theta'(t) = \frac{\frac{2t}{100}}{1+\left(\frac{t^2}{100}\right)^2} = \frac{t}{50\left(1+\frac{t^4}{10000}\right)}$$

$$\theta'(10) = \frac{10}{50(1+1)} = \frac{1}{10}\ \text{Rad/seg}.$$

59.



A equação da reta é

$$y = 2 + m(x-1)$$
$$= 2 + mx - m$$
$$= mx + (2-m)$$

A reta passa no ponto de abcissa $x=0$ e $y = 2-m$
$(0, 2-m)$

e no ponto de ordenada $y=0 \Rightarrow$ $0 = mx + (2-m) \Leftrightarrow$
$mx = m-2$
$\left(\frac{m-2}{m}, 0\right)$ $x = \frac{m-2}{m}$, $m \neq 0$.

A área do triângulo $A_\Delta = \frac{(2-m)\times\frac{(m-2)}{m}}{2} = -\frac{(m-2)^2}{2m}$, $m<0$

$$A'(m) = \frac{-2(m-2)2m + 2(m-2)^2}{4m^2} = \frac{2(m-2)\left[-2m+m-2\right]}{4m^2} =$$

$$= \frac{2(m-2)(-m-2)}{4m^2} = -\frac{1}{2m}(m-2)(m+2) = -\frac{1}{2m}(m^2-4)$$

$A'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ e $m = -2$.

e $A''(-2) = \frac{1}{2} > 0$. Logo ~~em~~ $m=-2$ há um mínimo local.

Como $A(m) \to \infty$ quando $m \to 0$ e

quando $m \to -\infty$

$A(-2) = \dfrac{+(-4)^2}{+4} = 4$ é o valor mínimo absoluto.

e a reta é $y = -2x + 4$

60. $V(t) = \dfrac{(10-t)^2}{5}$ litros

a) $t = 0 \Rightarrow V(0) = \dfrac{100}{5} = 20$ litros

$t = 5 \Rightarrow V(5) = \dfrac{25}{5} = 5$ litros

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(5) - V(0)}{5 - 0} = \frac{5 - 20}{5} = \frac{-15}{5} = -3\ l/min.$$

b) $V'(t) = -\dfrac{2(10-t)}{5}$ $\qquad V'(5) = -\dfrac{2}{5} \times 5 = -2\ l/min.$