Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

outubro/novembro de 2016

2.1 Funções Primitivas (de uma função real de uma variável real)

Definição

Primitivas fundamentais

Regras de primitivação
- Primitivação por decomposição
- Primitivação imediata
- Primitivação por partes

Primitivação de frações simples

Primitivação de funções racionais

Até agora...

- Dada uma função derivável
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
definida num intervalo I, sabemos determinar uma função
$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que
$$\boxed{g(x) = f'(x), \quad \forall x \in I}$$

Problema

- Dada uma função f (real de uma varivel real) definida num intervalo I, determinar uma função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável e tal que
$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I}$$

- Este problema é dito o da primitivação da função f no intervalo I.

Definição de primitiva

- [Função primitiva] Uma função derivável $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se função primitiva de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para qualquer $x \in I$,

$$F'(x) = f(x)$$

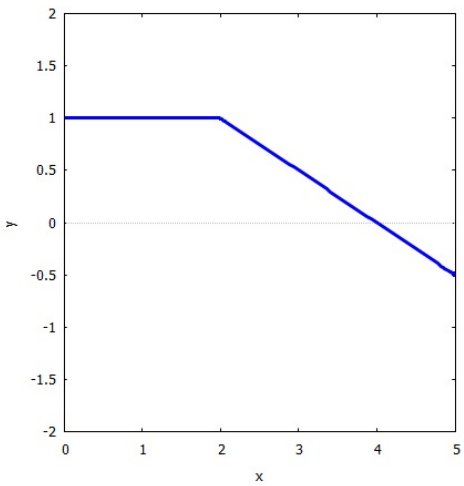
- Neste caso
  - Diz-se que f é primitivável em I
  - F diz-se uma (função) primitiva ou antiderivada de f em I;

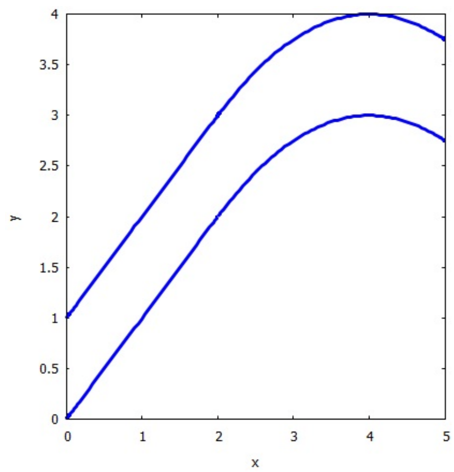
E, por conseguinte,

F é uma primitiva de f sse f é a derivada de F

Exemplo

1. Esboço gráfico de f e de duas possíveis funções primitivas F:





Exemplos

1. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;
2. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Mas

nem todas as funções admitem primitiva!

Por exemplo,

3. a função definida por
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$

(porque não é a derivada de de nenhuma função).

Consequências da definição

- Se F é uma primitiva de f no intervalo I então qualquer função definida por
$$F(x) + \mathcal{C}, \quad \forall x \in I$$
e com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária,

também é uma função primitiva de f.

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$

- Não existem outras primitivas de f para além das que se representam na forma
$$F(x) + \mathcal{C}, \ \ \forall x \in I$$
e com F uma função primitiva conhecida de f, em I, e $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária.

Denotar-se-á

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{K}, \qquad \mathcal{K} \in \mathbb{R}$$

- $\int$ representa um “S” alongado
- dx é o símbolo que especifica a variável independente
- $\int f(x)\,dx$ designa-se por integral indefinido da função f.

Recordar...

Função	Derivada
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$a\,x$	a
x^k	kx^{k-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$

com $a, k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 1.$

Primitivas fundamentais

Função	Primitivas
e^x	$e^x + \mathcal{K}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{K}$
$-\operatorname{sen} x$	$\cos x + \mathcal{K}$
a	$ax + \mathcal{K}$
kx^{k-1}	$x^k + \mathcal{K}$
$\frac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + \mathcal{K}$

com $a, k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 1.$

Exemplos

1. $\int 1\, dx =$

2. $\int 2x\, dx =$

3. $\int e^x\, dx =$

4. $\int \operatorname{sen} x\, dx =$

5. $\int \frac{1}{x}\, dx =$

Regras de primitivação

- [Primitivação por decomposição]

Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha\,, \beta\, \in \mathbb{R}$ constantes. Então

$$\int [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\, dx = \alpha\, \int f(x)\, dx + \beta\, \int g(x)\, dx.$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x + 2\cos x\, dx$

2. $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\, dx$

3. $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 2)^2\, dx$

- [Primitivação imediata]

  Sejam as funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis e tais que a função composta está também definida.
  Nestas condições tem-se que

$$\int g'(f(x))\, f'(x)\, dx = \int [g(f(x))]'\, dx = g(f(x)) + \mathcal{K}$$

Nota

- Recordar a derivada da função composta

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

Exemplos

1. $\int (2x + 10)^{20}\, dx$

2. $\int x^4(x^5 + 10)^9\, dx$

3. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

4. $\int \operatorname{sen}(2x)\, dx$

- [Primitivação por partes]

  Considerem-se as funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis.
  Então

  $$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Nota

Como o produto de funções é comutativo, na primitivação por partes

- escolhe-se para f' a função da qual se conhece a primitiva
- escolhe-se para g a função que, por derivação, simplifica a expressão

Exemplos

1. $\int x \cos x \, dx$

2. $\int e^x \cos x \, dx$

3. $\int \ln x \, dx$

Primitivação de frações simples[1]

- Frações simples são funções que se representam por frações da forma

$$\frac{1}{(x-\alpha)^n} \qquad \text{e} \qquad \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$$

com $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$

- Consideram-se 6 casos

  - Caso 1: $\dfrac{1}{x-\alpha}$
  - Caso 2: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$
  - Caso 3: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}$
  - Caso 4: $\dfrac{1}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$
  - Caso 5: $\dfrac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta}$
  - Caso 6: $\dfrac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$

[1] Apontamentos disponíveis em `http://hdl.handle.net/1822/13816`

Caso 1: $\dfrac{1}{x-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + \mathcal{K}, \qquad \mathcal{K} \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \int (x-\alpha)^{-n}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} + \mathcal{K}, \qquad \mathcal{K} \in \mathbb{R}$$

Caso 3: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

$[\operatorname{arctg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}dx = \int \frac{1}{\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1\right]}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)+\mathcal{K}, \quad \mathcal{K} \in \mathbb{R}.$$

Casos 4, 5, 6:...

Exemplo

1. $\displaystyle\int \frac{3}{x-2}\,dx$ (Caso 1)

2. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^5}\,dx$ (Caso 2)

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx$ (Caso 3 com $\alpha = 1$ e $\beta = 4$)

Primitivação de funções racionais

- A primitivação das funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}\,, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : D(x) \neq 0\}\,,$$

onde P e D são dois polinómios, reduz-se à primitivação de

- polinómios e/ou
- frações simples

A determinação de $\displaystyle\int \frac{P(x)}{D(x)}\,dx$, P, D polinómios, $D \neq 0$, divide-se nas seguintes etapas:

1. Escrever $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ usando a divisão de polinómios
2. Calcular os zeros de D e decompor D em fatores irredutíveis
3. Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples
4. Determinar as primitivas das frações simples
5. Adicionar a primitiva de Q e as primitivas das frações simples: como resultado obtêm-se as primitivas de $\frac{P(x)}{D(x)}$

Exemplo

- Calcular $\displaystyle\int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$

Sejam

$$P(x) = 7x - 1, \qquad D(x) = (x+1)(x+2)(x-3) \qquad \text{e} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$$

1. Como $\mathrm{grau}P < \mathrm{grau}D$ não é necessário fazer a divisão de polinómios
2. Os zeros de $D(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$ são

   $x = -1$, real de multiplicidade 1
   $x = -2$, real de multiplicidade 1
   $x = 3$, real de multiplicidade 1

3. A fração f decompõe-se numa soma de três frações simples, cada uma delas associada a cada um dos zeros:

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

onde A, B, C são constantes reais a determinar
Da equação anterior, reduzindo ao mesmo denominador, resulta que

$$\begin{aligned} 7x-1 &= A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A2B+3C)x + (-6A-3B+2C) \end{aligned}$$

donde, pela igualdade de polinómios,

$$A+B+C=0, \qquad -A2B+3C=7, \qquad -6A-3B+2C=-1$$

e, resolvendo o sistema de equações anterior,

$$A=2, \qquad B=-3, \qquad C=1$$

Pode-se, agora, escrever

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-3}{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

4. Primitivando cada uma das frações simples anteriores

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x+1}\,dx &= 2\ln|x+1| + \mathcal{K}_1 \\ \int \frac{-3}{x+2}\,dx &= -3\ln|x+2| + \mathcal{K}_2 \\ \int \frac{1}{x-3}\,dx &= \ln|x-3| + \mathcal{K}_3 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \in \mathbb{R}$

5. Assim, a primitiva pedida é

$$\int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x+1| + \mathcal{K}_1 - 3\ln|x+2| + \mathcal{K}_2 + \ln|x-3| + \mathcal{K}_3$$

$$= 2\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + \ln|x-3| + \mathcal{K}, \qquad \mathcal{K} \in \mathbb{R}$$

Observação

- Porquê o sinal de módulo nas primitivas anteriores?
  - Temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{x+1}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\\
&\frac{-3}{x+2}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\\
&\frac{1}{x-3}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}
\end{aligned}
$$

  - Por exemplo, na primeira função se $x < -1$, $(x+1) < 0$ logo $\ln(x+1)$ não está definido!
  - Assim, usando o módulo há a certeza de o argumento da função logaritmo ser positivo