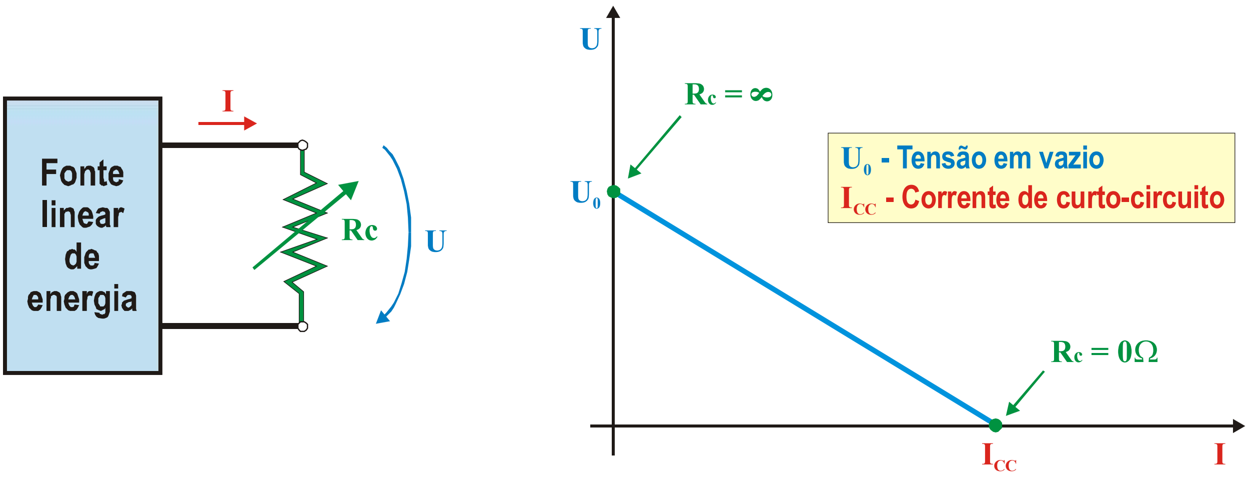
19. Fontes Lineares de Energia

Numa **fonte linear de energia**, a característica U=f(I) é uma recta.

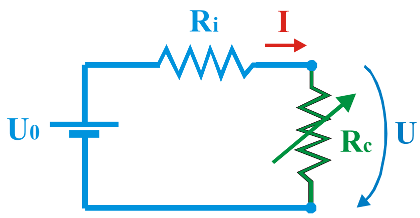
19.1 Tensão (U) Existente nos Terminais de uma Fonte Linear de Energia e Corrente (I) Debitada pela mesma Fonte quando esta Possui uma Carga Resistiva (R_C).



19.1.1 Análise Recorrendo ao Equivalente de Thévenin da Fonte Linear de Energia

- A característica **U=f(I)** corresponde à equação:

$$\boxed{U = U_0 - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$$



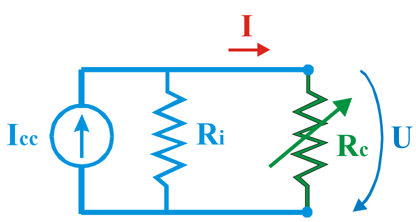
- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **U=f(R$_c$)** e **I=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I &= \frac{U_0}{R_i + R_C} \end{aligned}}$$

19.1.2 Análise Recorrendo ao Equivalente de Norton da Fonte Linear de Energia

- A característica **I=f(U)** corresponde à equação:

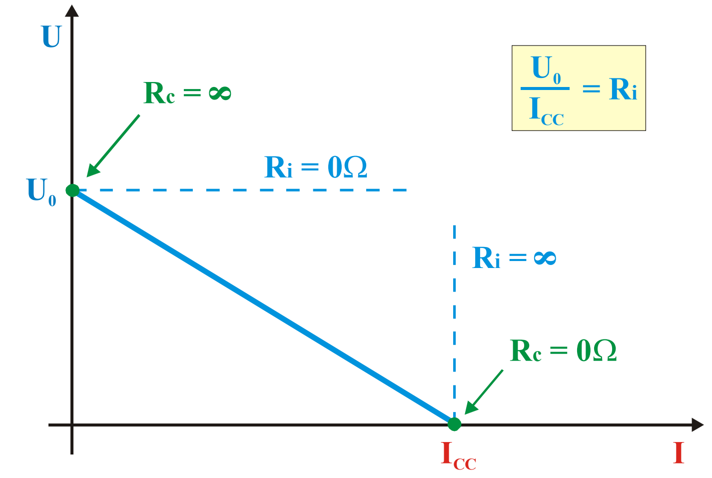
$$\boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{\frac{U_0}{I_{CC}}}} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{R_i}}$$



- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **I=f(R$_c$)** e **U=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U &= \frac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{aligned}}$$

19.2 Aproximação de uma Fonte Linear de Energia a uma Fonte Ideal de Tensão ou a uma Fonte Ideal de Corrente



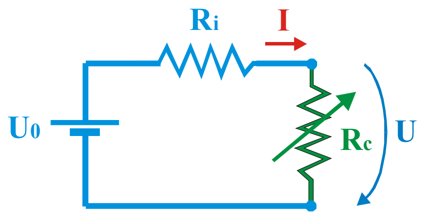
- Fonte ideal de tensão ($I_{CC} = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = 0\Omega}$$

- Fonte ideal de corrente ($U_0 = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = \infty}$$

- Fonte linear de energia com uma carga resistiva

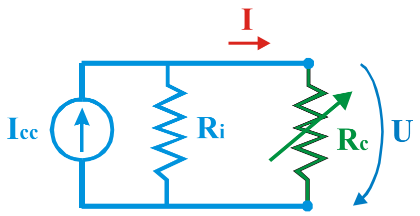


$$\boxed{\begin{array}{l} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{array}}$$

$$\boxed{R_c >> R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} U \approx U_0 \\ I \approx \dfrac{U_0}{R_C} \end{array}}$$

Se $R_C >> R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de tensão, uma vez que U varia pouco com R_C.

- Fonte linear de energia com uma carga resistiva



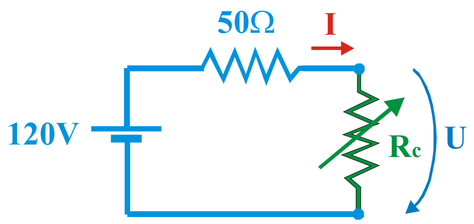
$$\boxed{\begin{array}{l} I = \dfrac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U = \dfrac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{array}}$$

$$\boxed{R_c << R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} I \approx I_{CC} \\ U \approx R_C I_{CC} \end{array}}$$

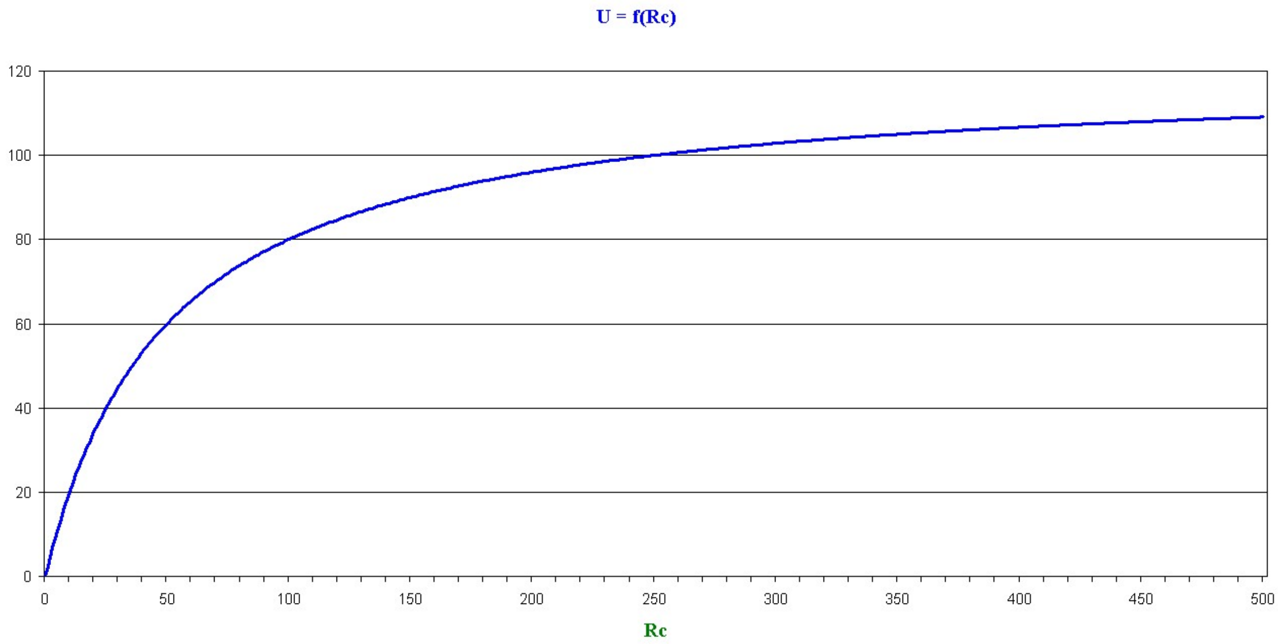
Se $R_C << R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de corrente, uma vez que I varia pouco com R_C.

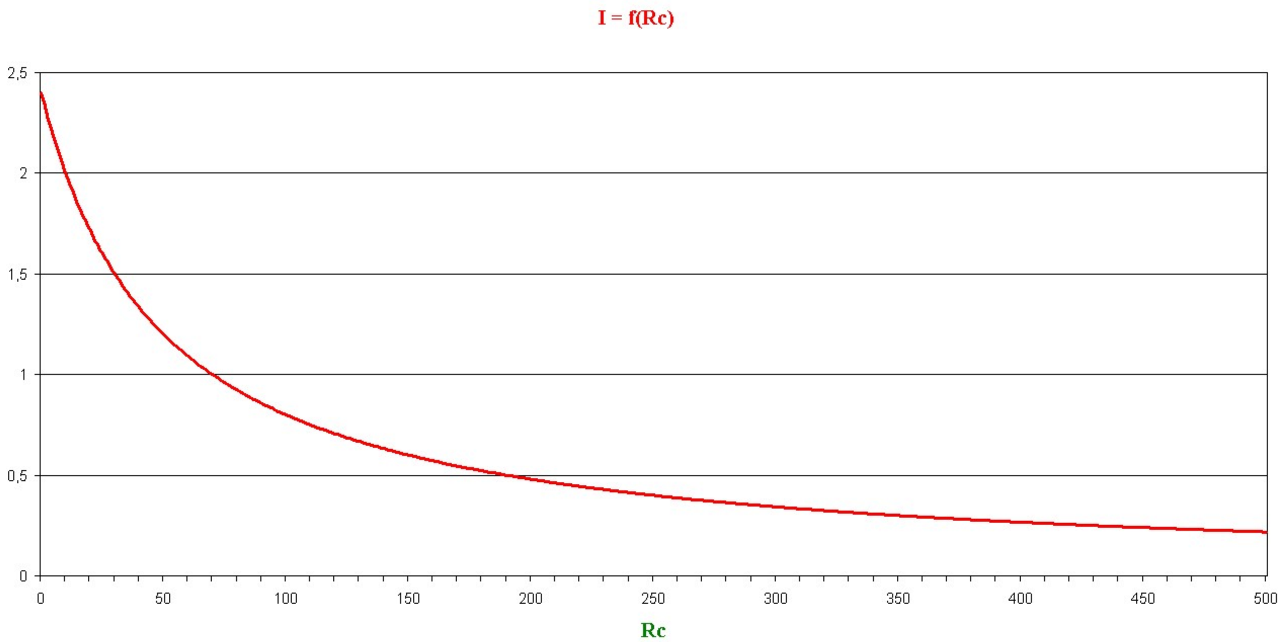
Exemplo:

$$\boxed{\begin{aligned} U_0 &= 120V \\ R_i &= 50\Omega \end{aligned}}$$



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50 + R_C} \cdot 120 \\ I = \dfrac{120}{50 + R_C} \end{cases}$$





$$\boxed{0{,}5\Omega \le R_C \le 5\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 0{,}5\Omega}$$

$$U_{0,5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{0{,}5}{50 + 0{,}5} \cdot 120 = 1{,}188\text{V}$$

$$I_{0,5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{50 + 0{,}5} = 2{,}376\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 5\Omega}$$

$$U_{5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{5}{50 + 5} \cdot 120 = 10{,}909\text{V}$$

$$I_{5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{50 + 5} = 2{,}182\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 0,5Ω para 5Ω:

$$\frac{U_{5\Omega} - U_{0,5\Omega}}{U_{0,5\Omega}} = \frac{10{,}909 - 1{,}188}{1{,}188} = 8{,}183 = 818{,}3\%$$

$$\frac{I_{5\Omega} - I_{0,5\Omega}}{I_{0,5\Omega}} = \frac{2{,}182 - 2{,}376}{2{,}376} = -0{,}082 = -8{,}2\%$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 5Ω para 0,5Ω:

$$\frac{U_{0,5\Omega} - U_{5\Omega}}{U_{5\Omega}} = \frac{1{,}188 - 10{,}909}{10{,}909} = -0{,}891 = -89{,}1\%$$

$$\frac{I_{0,5\Omega} - I_{5\Omega}}{I_{5\Omega}} = \frac{2{,}376 - 2{,}182}{2{,}182} = 0{,}089 = 8{,}9\%$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de corrente** do que de uma fonte ideal de tensão porque a variação relativa da corrente é menor.

$$\boxed{25\Omega \le R_C \le 100\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 25\Omega}$$

$$U_{25\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{25}{50 + 25} \cdot 120 = 40\text{V}$$

$$I_{25\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{25 + 50} = 1{,}6\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 100\Omega}$$

$$U_{100\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{100}{50 + 100} \cdot 120 = 80\text{V}$$

$$I_{100\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{50 + 100} = 0{,}8\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 25Ω para 100Ω:

$$\frac{U_{100\Omega} - U_{25\Omega}}{U_{25\Omega}} = \frac{80 - 40}{40} = 1{,}000 = 100{,}0\%$$

$$\frac{I_{100\Omega} - I_{25\Omega}}{I_{25\Omega}} = \frac{0{,}8 - 1{,}6}{1{,}6} = -0{,}500 = -50{,}0\%$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 100Ω para 25Ω:

$$\frac{U_{25\Omega} - U_{100\Omega}}{U_{100\Omega}} = \frac{40 - 80}{80} = -0{,}500 = -50{,}0\%$$

$$\frac{I_{25\Omega} - I_{100\Omega}}{I_{100\Omega}} = \frac{1{,}6 - 0{,}8}{0{,}8} = 1{,}000 = 100{,}0\%$$

- A fonte aproxima-se igualmente mal de uma fonte ideal de corrente e de uma fonte ideal de tensão.

$$\boxed{400\Omega \le R_C \le 500\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 400\Omega}$$

$$U_{400\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{400}{50 + 400} \cdot 120 = 106{,}667\text{V}$$

$$I_{400\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{50 + 400} = 0{,}267\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 500\Omega}$$

$$U_{500\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{500}{50 + 500} \cdot 120 = 109{,}091\text{V}$$

$$I_{500\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{120}{50 + 500} = 0{,}218\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 400Ω para 500Ω:

$$\frac{U_{500\Omega} - U_{400\Omega}}{U_{400\Omega}} = \frac{109{,}091 - 106{,}667}{106{,}667} = 0{,}023 = 2{,}3\%$$

$$\frac{I_{500\Omega} - I_{400\Omega}}{I_{400\Omega}} = \frac{0{,}218 - 0{,}267}{0{,}267} = -0{,}184 = -18{,}4\%$$

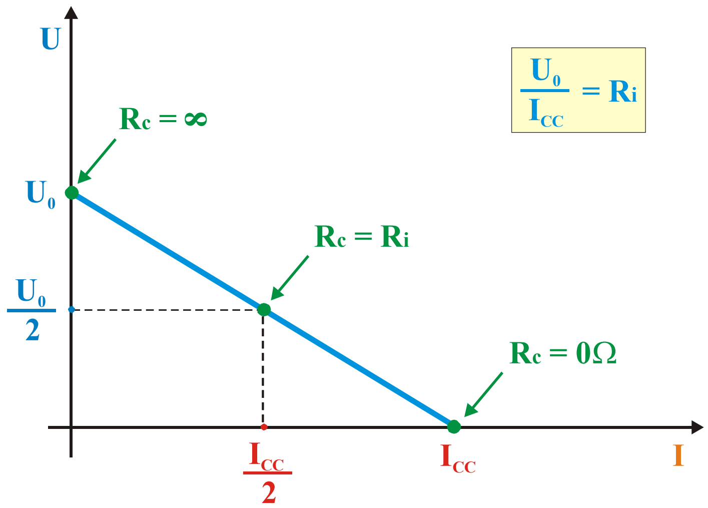
Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 500Ω para 400Ω:

$$\frac{U_{400\Omega} - U_{500\Omega}}{U_{500\Omega}} = \frac{106{,}667 - 109{,}091}{109{,}091} = -0{,}022 = -2{,}2\%$$

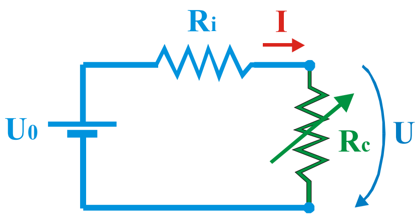
$$\frac{I_{400\Omega} - I_{500\Omega}}{I_{500\Omega}} = \frac{0{,}267 - 0{,}218}{0{,}218} = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de tensão** do que de uma fonte ideal de corrente porque a variação relativa da tensão é menor.

19.3 Potência Máxima ($P_{Máx}$) em Jogo numa Resistência (R_C) Alimentada por uma Fonte Linear de Energia



Usando o Equivalente de Thévenin (também se poderia usar o Equivalente de Norton...):



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{cases}$$

$$P = U \cdot I = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \cdot \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{R_C}{(R_i + R_C)^2} \cdot U_0^2$$

$$\frac{dP}{dR_C} = \frac{(R_i + R_C)^2 - 2 \cdot R_C \cdot (R_i + R_C)}{(R_i + R_C)^4} \cdot U_0^2 = \frac{R_i - R_C}{(R_i + R_C)^3} \cdot U_0^2$$

$$\frac{dP}{dR_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = R_i$$

$$R_C < R_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dR_c} > 0$$

$$R_C > R_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dR_c} < 0$$

Conclusão: a **potência em R_C é máxima** quando **$R_C = R_i$**

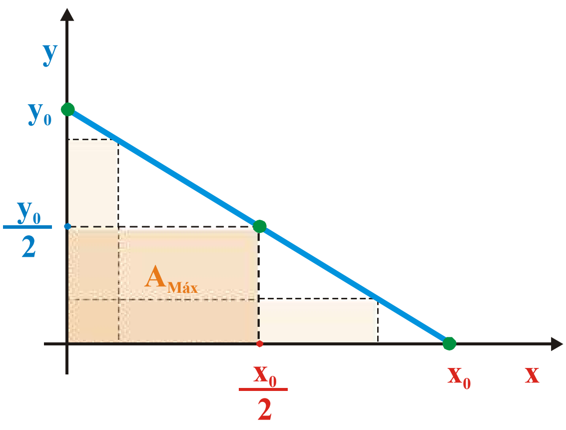
Se **$R_C = R_i$** então

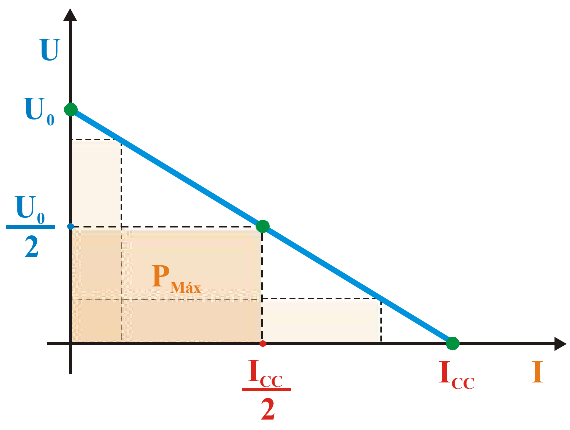
$$\begin{cases} U = \dfrac{R_i}{R_i + R_i} \cdot U_0 = \dfrac{U_0}{2} \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_i} = \dfrac{U_0}{2 \cdot R_i} = \dfrac{I_{CC}}{2} \\ P_{Máx} = U \cdot I = \dfrac{U_0}{2} \cdot \dfrac{I_{CC}}{2} = \dfrac{U_0 \cdot I_{CC}}{4} \end{cases}$$

Como $R_i = \dfrac{U_0}{I_{CC}}$ então

$$\boxed{P_{Máx} \frac{U_0 \cdot I_{CC}}{4} = \frac{R_i \cdot I_{CC}^2}{4} = \frac{U_0^2}{4R_i}}$$

Demonstração geométrica...





$$\begin{cases} A = x \cdot y \\ y = y_0 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x \end{cases} \Rightarrow A = y_0 \cdot x - \frac{y_0}{x_0} \cdot x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{y_0}{2}$$

$$x < \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x > 0$$

$$x > \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x < 0$$

Conclusão: o **valor máximo de A** ocorre no ponto de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}$$

O **valor máximo de A** é dado por

$$A_{Máx} = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{y_0}{2} = \frac{x_0 \cdot y_0}{4}$$

$$\begin{cases} P = U \cdot I \\ U = U_0 - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I \end{cases} \Rightarrow P = U_0 \cdot I - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I^2$$

$$\frac{dP}{dI} = 0$$

$$\Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{I_{CC}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{U_0}{2}$$

$$I < \frac{I_{CC}}{2} \quad \Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I > 0$$

$$I > \frac{I_{CC}}{2} \quad \Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I < 0$$

Conclusão: o **valor máximo de P** ocorre no ponto de coordenadas

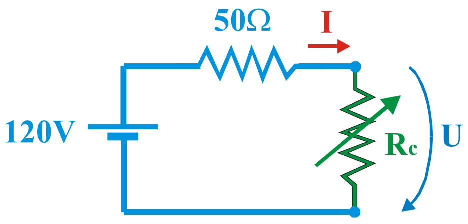
$$\begin{cases} I = \frac{I_{CC}}{2} \\ U = \frac{U_0}{2} \end{cases}$$

O **valor máximo de P** é dado por

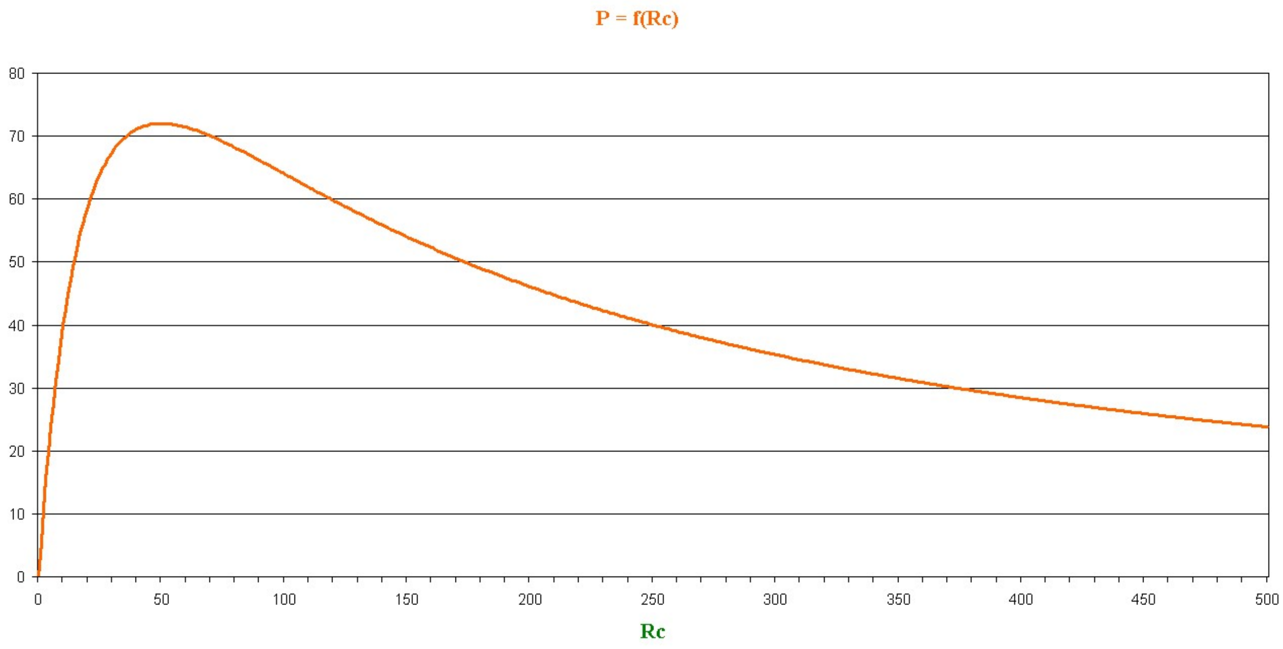
$$P_{Máx} = \frac{I_{CC}}{2} \cdot \frac{U_0}{2} = \frac{I_{CC} \cdot U_0}{4}$$

Exemplo:

$$\boxed{\begin{array}{l} U_0 = 120\text{V} \\ \\ R_i = 50\Omega \end{array}}$$

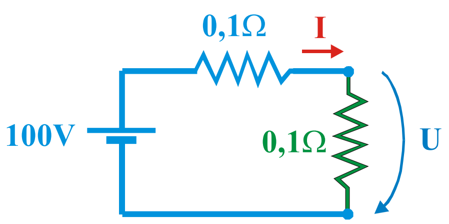


$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50 + R_C} \cdot 120 \\ \\ I = \dfrac{120}{50 + R_C} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{14400 \cdot R_C}{(50 + R_C)^2}$$



Nem sempre é desejável que seja máxima a potência em jogo numa carga resistiva!

Exemplo:



$$U = \frac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}1} \cdot 100 = 50\text{V} \quad (\text{apenas metade de } 100\text{V})$$

$$I = \frac{100}{0{,}1 + 0{,}1} = 500\text{A} \qquad (!...)$$