21.3 Circuitos de 1ª Ordem

1. Uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (as incógnitas) em ordem a uma ou mais variáveis independentes designa-se **equação diferencial**.

2. Uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente designa-se **equação diferencial ordinária**.

3. A **ordem de uma equação diferencial** é a ordem máxima da(s) derivada(s) que nela figura(m).

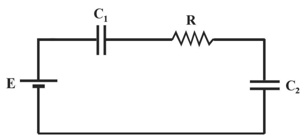
4. Uma **equação diferencial ordinária de 1ª ordem** possui apenas a 1ª derivada de uma ou mais variáveis dependentes relativamente a uma variável independente.

5. Um **circuito de 1ª ordem** implica a resolução de pelo menos uma equação diferencial de 1ª ordem para determinar as tensões e as correntes em todos os seus componentes, mas não implica a resolução de nenhuma equação diferencial de ordem superior a 1.

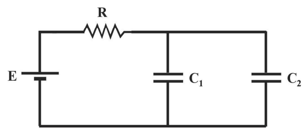
6. Um **circuito RC** é constituído por uma ou mais resistências e um ou mais condensadores, podendo também ter uma ou mais fontes de energia.

   - Um circuito RC com apenas um condensador é um circuito de 1ª ordem.

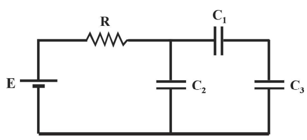
   - Um circuito RC com vários condensadores que podem ser substituidos por um único condensador sem alterar o funcionamento de nenhum dos restantes componentes é um circuito de 1ª ordem.



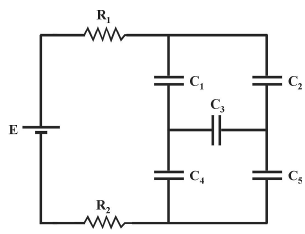
Circuito RC de 1ª ordem



Circuito RC de 1ª ordem

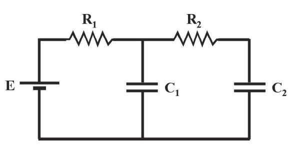


Circuito RC de 1ª ordem

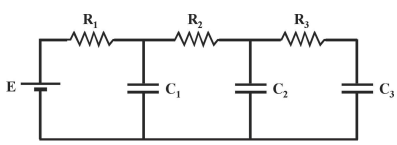


Circuito RC de 1ª ordem

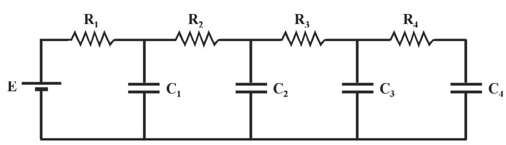
   - Um circuito RC com vários condensadores que não podem ser substituidos por um único condensador sem alterar o funcionamento de pelo menos algum dos restantes componentes é um circuito de ordem superior a 1.



Circuito RC de 2ª ordem



Circuito RC de 3ª ordem

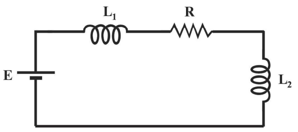


Circuito RC de 4ª ordem

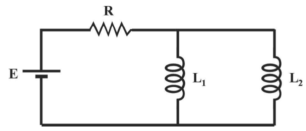
7. Um **circuito RL** é constituído por uma ou mais resistências e uma ou mais bobinas, podendo também ter uma ou mais fontes de energia.

- Um circuito RL com apenas uma bobina é um circuito de 1ª ordem.

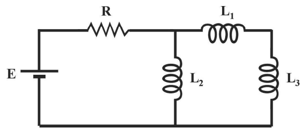
- Um circuito RL com várias bobinas que podem ser substituídas por uma única bobina sem alterar o funcionamento de nenhum dos restantes componentes é um circuito de 1ª ordem.



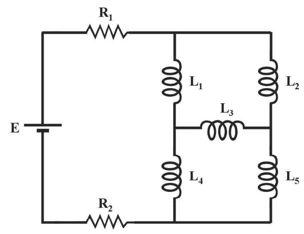
Circuito RL de 1ª ordem



Circuito RL de 1ª ordem

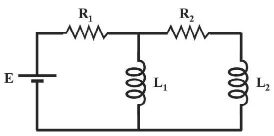


Circuito RL de 1ª ordem

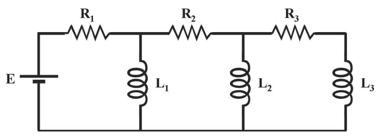


Circuito RL de 1ª ordem

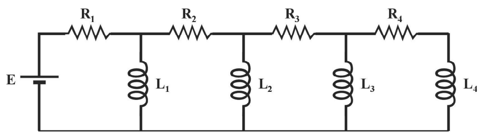
- Um circuito RL com várias bobinas que não podem ser substituídas por uma única bobina sem alterar o funcionamento de pelo menos algum dos restantes componentes é um circuito de ordem superior a 1.



Circuito RL de 2ª ordem



Circuito RL de 3ª ordem

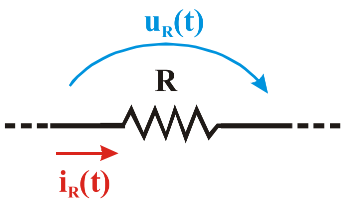


Circuito RL de 4ª ordem

21.4 Circuitos RC de 1ª Ordem

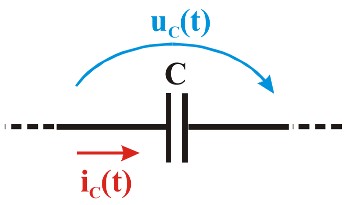
Serão analisados circuitos RC de 1ª ordem com apenas uma resistência e apenas um condensador ligados em série.

21.4.1 Ligação em Série de uma Resistência e um Condensador



Seja qual for o circuito onde uma resistência ideal se insere, a relação entre a tensão $\mathbf{u_R(t)}$ que existe entre os seus terminais e a corrente $\mathbf{i_R(t)}$ que a percorre – conhecida por Lei de Ohm – é sempre traduzida pela seguinte expressão (assumindo os sentidos positivos de $\mathbf{u_R(t)}$ e $\mathbf{i_R(t)}$ indicados na figura):

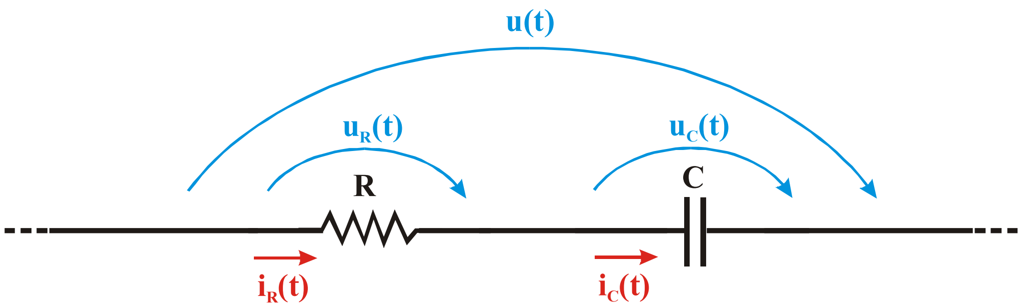
$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} \qquad \text{(Lei de Ohm)}$$



Seja qual for o circuito onde um condensador ideal se insere, a relação entre a tensão $\mathbf{u_C(t)}$ que existe entre os seus terminais e a corrente $\mathbf{i_C(t)}$ que o percorre é traduzida pela seguinte expressão (assumindo os sentidos positivos de $\mathbf{u_C(t)}$ e $\mathbf{i_C(t)}$ indicados na figura):

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}$$

$\frac{d[u_C(t)]}{dt}$ Derivada em ordem ao tempo da tensão entre os terminais do condensador (em V/s)



A corrente $\mathbf{i_R(t)}$ que passa na resistência e a corrente $\mathbf{i_C(t)}$ que passa no condensador são **a mesma corrente**, ou seja

$$i_R(t) = i_C(t)$$

$$\frac{u_R(t)}{R} = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}$$

A tensão $\mathbf{u(t)}$ aplicada ao conjunto dos dois componentes é igual à **soma** da tensão $\mathbf{u_R(t)}$ que existe entre os terminais da resistência com a tensão $\mathbf{u_C(t)}$ que existe entre os terminais do condensador, ou seja:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Assim sendo, é verdade que

$$u_R(t) = u(t) - u_C(t)$$

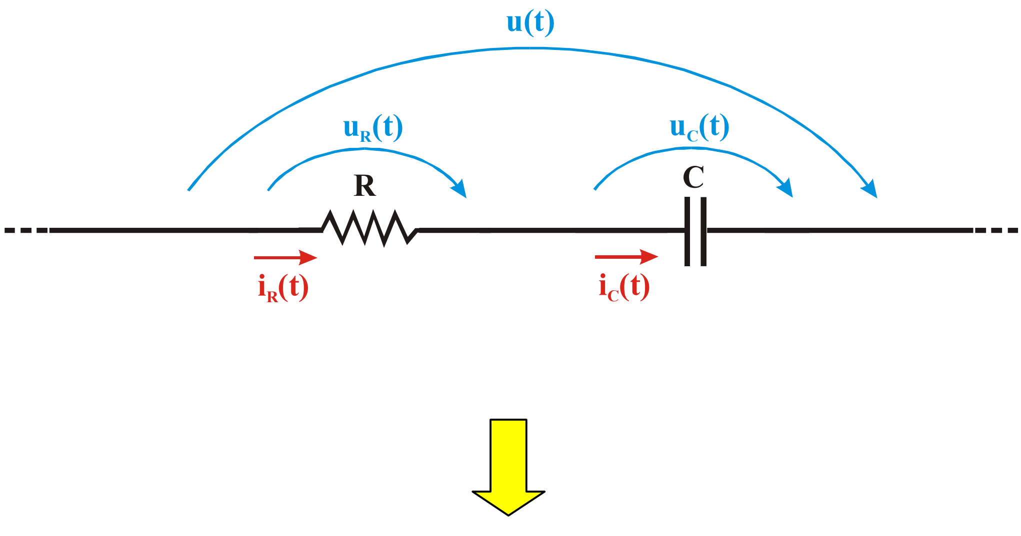
$$\frac{u(t) - u_C(t)}{R} = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}$$

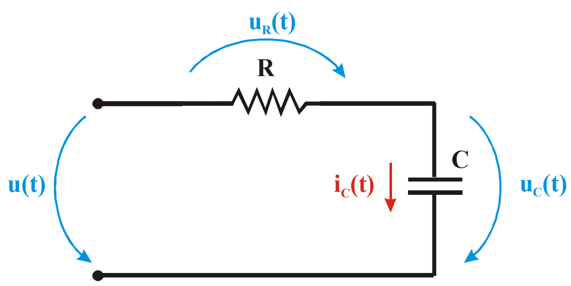
A última expressão pode reescrever-se desta forma

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

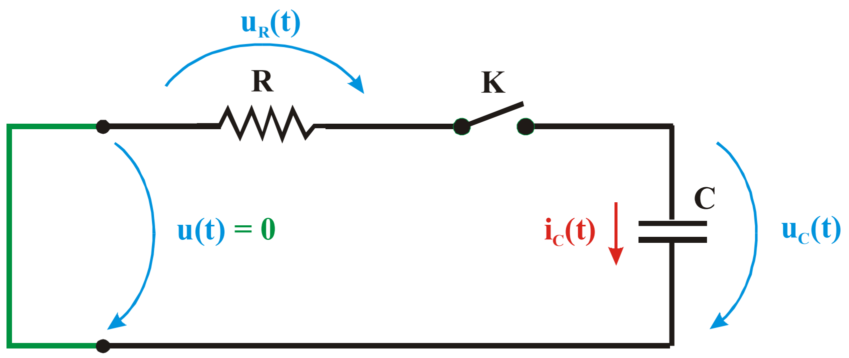
Para completar o circuito falta definir u(t). Nos pontos seguintes apresentam-se exemplos com diferentes u(t).

u(t) pode ser vista como a tensão de entrada do circuito RC. Para reforçar esta ideia pode redesenhar-se o esquema inicialmente proposto...





21.4.2 Resposta Natural do Circuito RC de 1ª Ordem



R pode ser a **Resistência de Thévenin** de um circuito passivo mais complexo.

Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está carregado com uma tensão U_0 no instante $t = 0$, ou seja, $u_C(0) = U_0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = 0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que $u(t) = 0$.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq 0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$$

A solução desta equação é a seguinte:

$$u_C(t) = \underbrace{U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

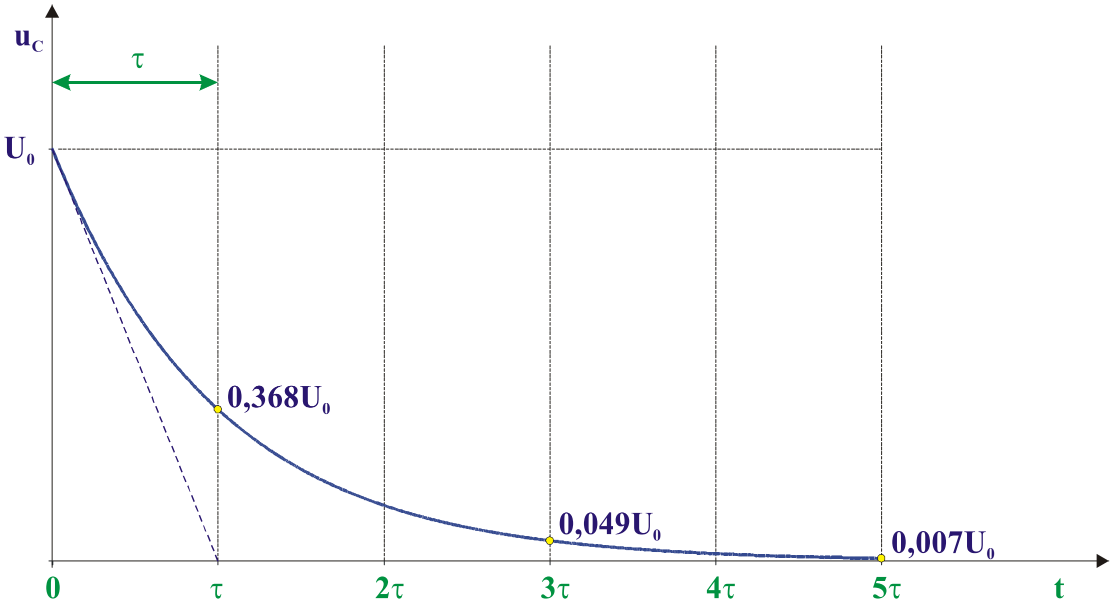
Para $t \geq 0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{0 - u_C(t)}{R} = \underbrace{-\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

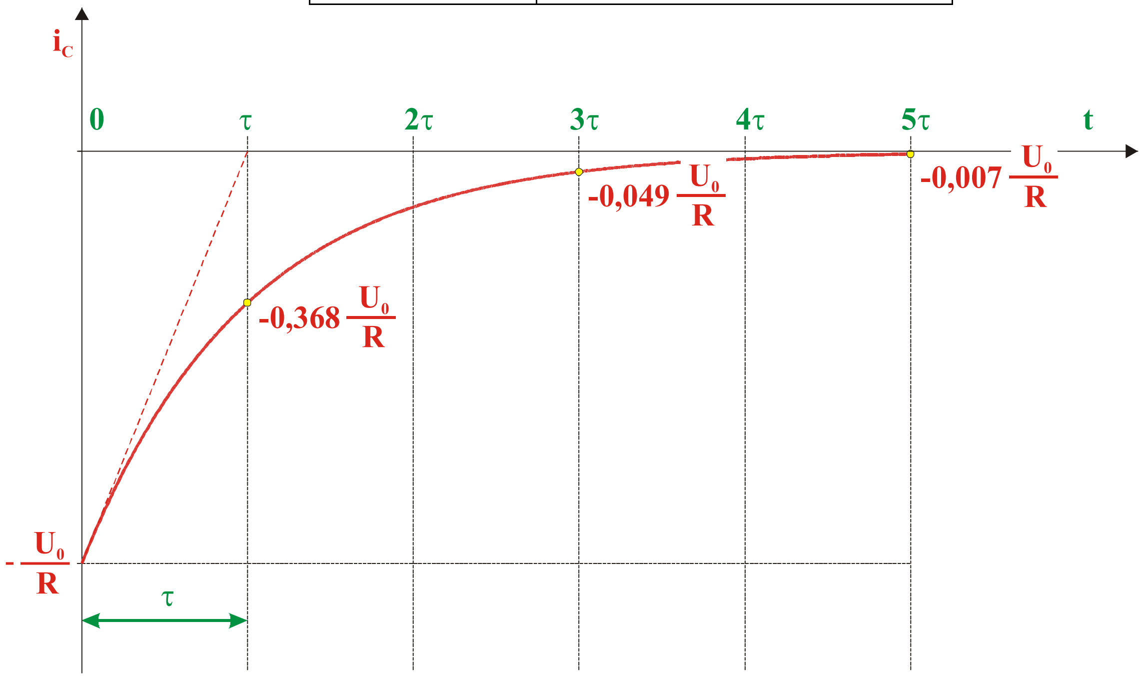
Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(0) = U_0 \\ i_C(0) = -\dfrac{U_0}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = 0 \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente carregado com uma tensão de valor U_o atingir 36,8% de U_o

Resposta Natural do Circuito RC de 1ª Ordem:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

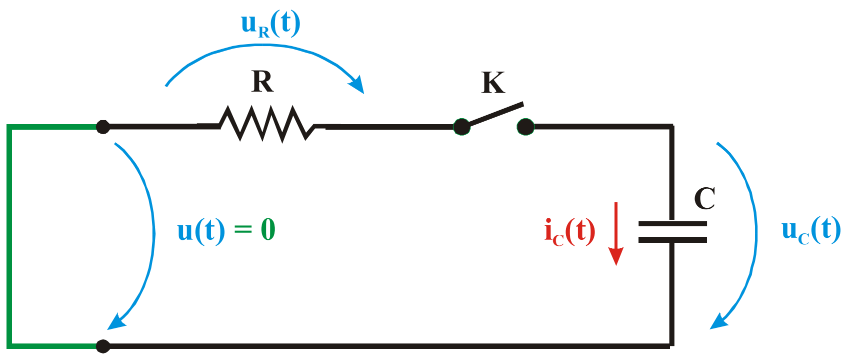


$t = \tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-1} = 0{,}368 \cdot U_0$
$t = 3\tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-3} = 0{,}049 \cdot U_0$
$t = 5\tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-5} = 0{,}007 \cdot U_0$



$t = \tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-1} = -0{,}368 \cdot \frac{U_0}{R}$
$t = 3\tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-3} = -0{,}049 \cdot \frac{U_0}{R}$
$t = 5\tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-5} = -0{,}007 \cdot \frac{U_0}{R}$

Se o interruptor K for fechado num instante $t = t_0$ em vez de ser fechado no instante $t = 0$...



Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está carregado com uma tensão U_0 no instante $t = t_0$, ou seja, $u_C(t_0) = U_0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = t_0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que $u(t) = 0$.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq t_0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$$

A solução desta equação é a seguinte:

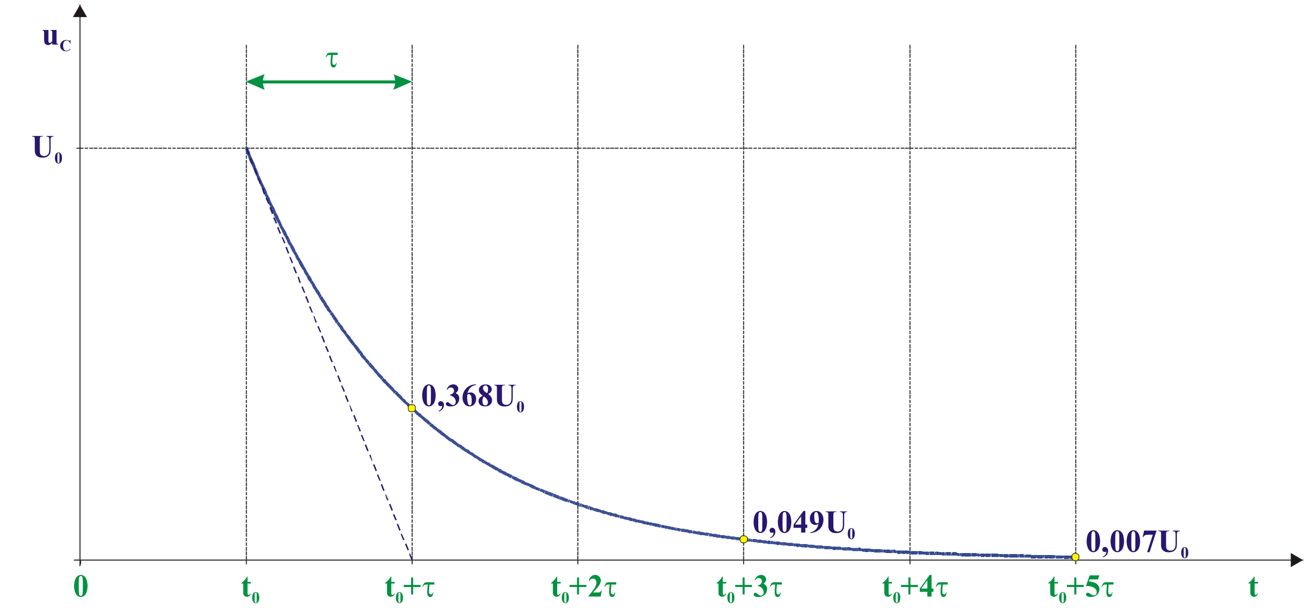
$$u_C(t) = \underbrace{U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

Para $t \geq t_0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

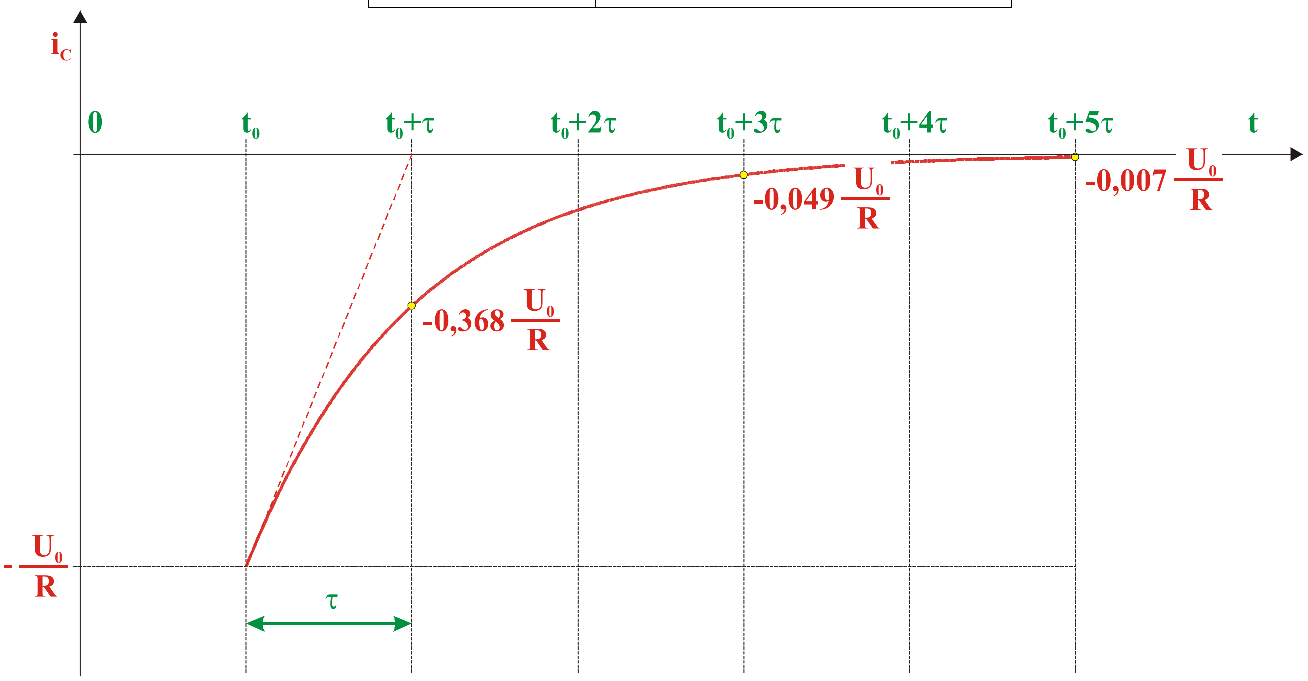
$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{0 - u_C(t)}{R} = \underbrace{-\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(t_0) = U_0 \\ i_C(t_0) = -\dfrac{U_0}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = 0 \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente carregado com uma tensão de valor U_o atingir 36,8% de U_o

Resposta Natural do Circuito RC de 1ª Ordem: $$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$ $$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

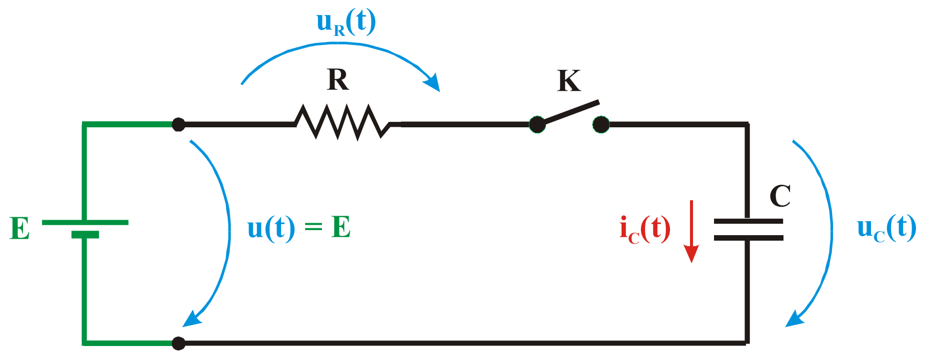


$t - t_0 = \tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-1} = 0{,}368 \cdot U_0$
$t - t_0 = 3\tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-3} = 0{,}049 \cdot U_0$
$t - t_0 = 5\tau$	$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-5} = 0{,}007 \cdot U_0$



$t - t_0 = \tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-1} = -0{,}368 \cdot \frac{U_0}{R}$
$t - t_0 = 3\tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-3} = -0{,}049 \cdot \frac{U_0}{R}$
$t - t_0 = 5\tau$	$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-5} = -0{,}007 \cdot \frac{U_0}{R}$

21.4.3 Resposta Forçada do Circuito RC de 1ª Ordem



E e **R** podem ser a **Tensão de Thévenin** e a **Resistência de Thévenin** de um circuito mais complexo.

Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está completamente descarregado no instante $t = 0$, ou seja, $u_C(0) = 0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = 0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que $u(t) = E$.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq 0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual E, R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

A solução desta equação é a seguinte:

$$u_C(t) = \underbrace{E}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Permanente}}} \underbrace{- E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Transitório}}}$$

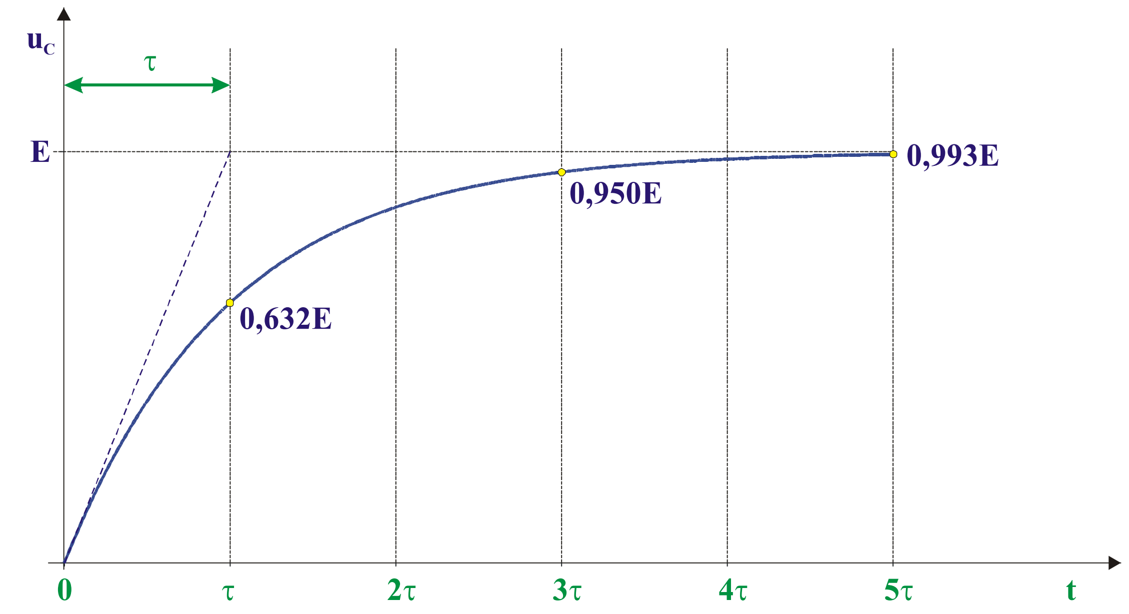
Para $t \geq 0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{E - u_C(t)}{R} = \underbrace{\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Transitório}}}$$

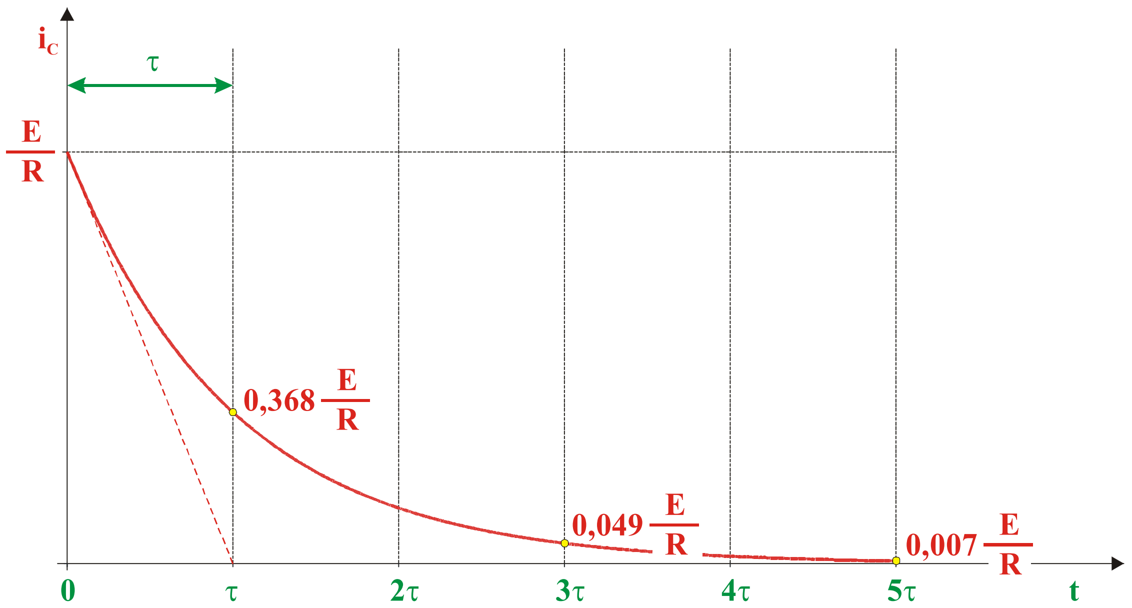
Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ i_C(0) = \dfrac{E}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = E \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente descarregado atingir 63,2% do seu valor final E

Resposta Forçada do Circuito RC de 1ª Ordem:

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ i_C(t) &= \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}}$$

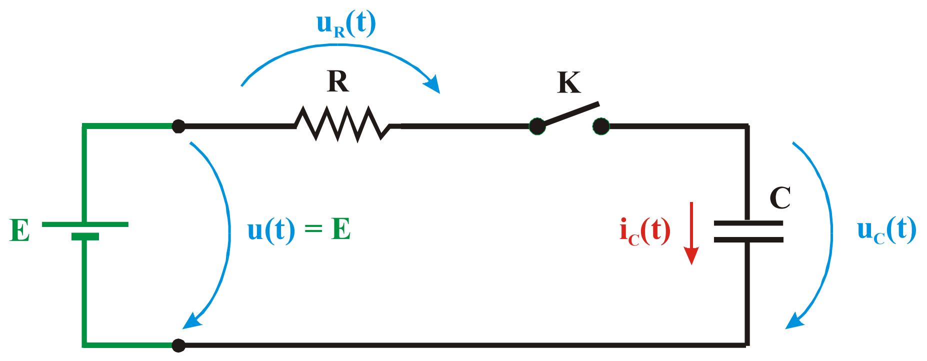


$t = \tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-1} = 0{,}632 \cdot E$
$t = 3\tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-3} = 0{,}950 \cdot E$
$t = 5\tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-5} = 0{,}993 \cdot E$



$t = \tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-1} = 0{,}368 \cdot \frac{E}{R}$
$t = 3\tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-3} = 0{,}049 \cdot \frac{E}{R}$
$t = 5\tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-5} = 0{,}007 \cdot \frac{E}{R}$

Se o interruptor K for fechado num instante $t = t_0$ em vez de ser fechado no instante $t = 0$ ...



Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está completamente descarregado no instante $t = t_0$, ou seja, $u_C(t_0) = 0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = t_0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que u(t) = E.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq t_0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual E, R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

A solução desta equação é a seguinte:

$$u_C(t) = \underbrace{E}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Permanente}}} \underbrace{- E \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

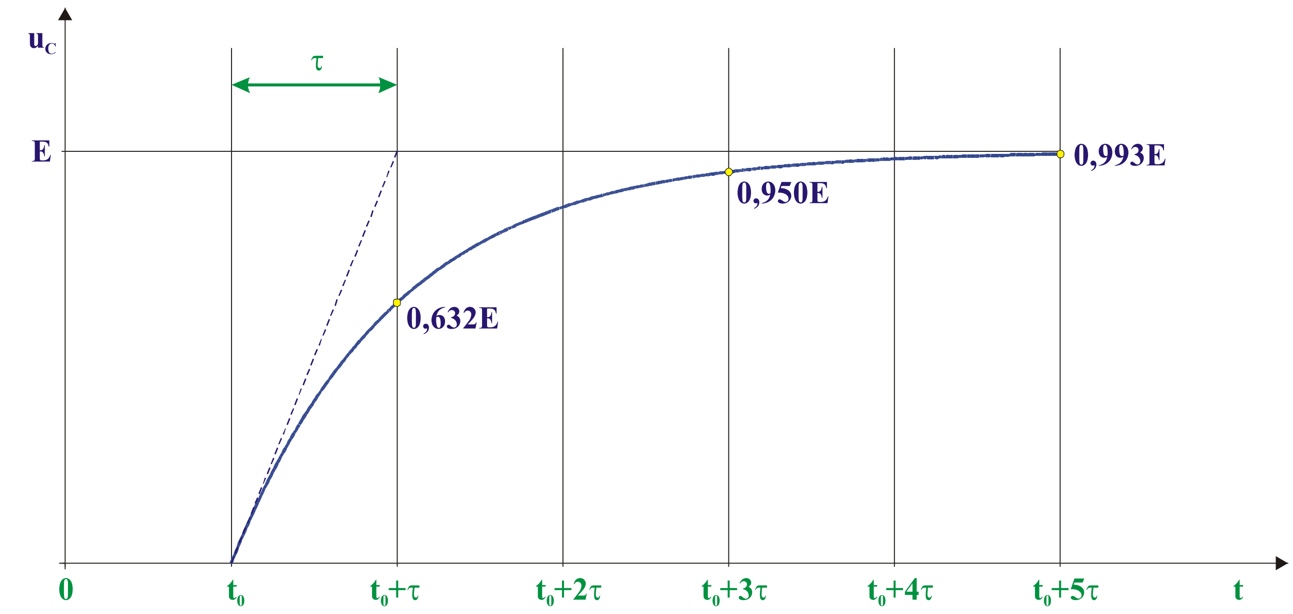
Para $t \geq t_0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{E - u_C(t)}{R} = \underbrace{\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}}_{\substack{\text{Estado} \\ \text{Transitório}}}$$

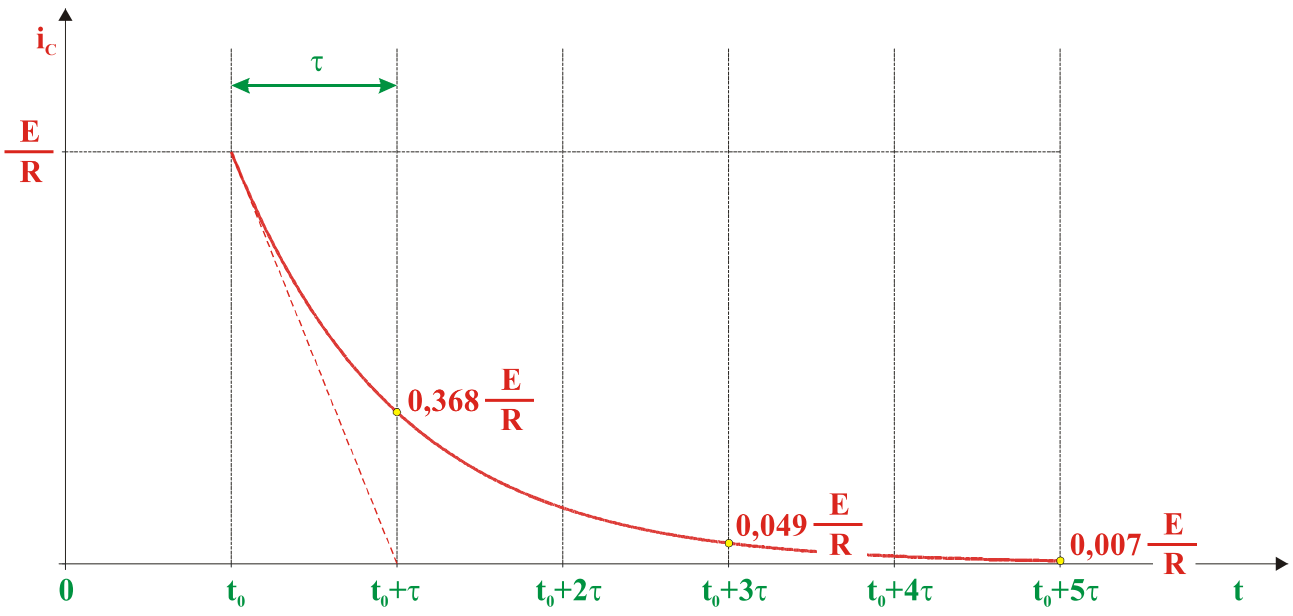
Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(t_0) = 0 \\ i_C(t_0) = \dfrac{E}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = E \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente descarregado atingir 63,2% do seu valor final E

Resposta Forçada do Circuito RC de 1ª Ordem:

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$
$$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

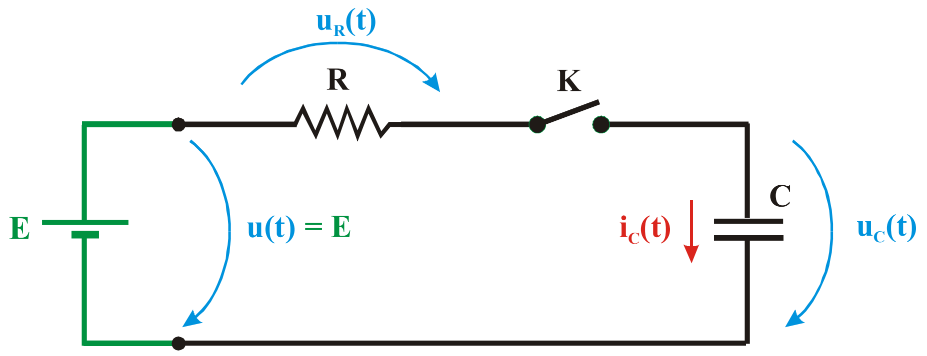


$t - t_0 = \tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-1} = 0{,}632 \cdot E$
$t - t_0 = 3\tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-3} = 0{,}950 \cdot E$
$t - t_0 = 5\tau$	$u_C(t) = E - E \cdot e^{-5} = 0{,}993 \cdot E$



$t - t_0 = \tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-1} = 0{,}368 \cdot \frac{E}{R}$
$t - t_0 = 3\tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-3} = 0{,}049 \cdot \frac{E}{R}$
$t - t_0 = 5\tau$	$i_C(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-5} = 0{,}007 \cdot \frac{E}{R}$

21.4.4 Resposta Total do Circuito RC de 1ª Ordem



E e **R** podem ser a **Tensão de Thévenin** e a **Resistência de Thévenin** de um circuito mais complexo.

Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está carregado com uma tensão U_0 no instante $t = 0$, ou seja, $u_C(0) = U_0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = 0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que $u(t) = E$.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq 0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual E, R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

A solução desta equação é a seguinte:

$$u_C(t) = \overbrace{\boxed{\underbrace{E}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Permanente}}} \quad \underbrace{- E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}}^{\text{Resposta Forçada}} \underbrace{+ \overbrace{\boxed{U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}^{\text{Resposta Natural}}}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Transitório}}}$$

Para $t \geq 0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

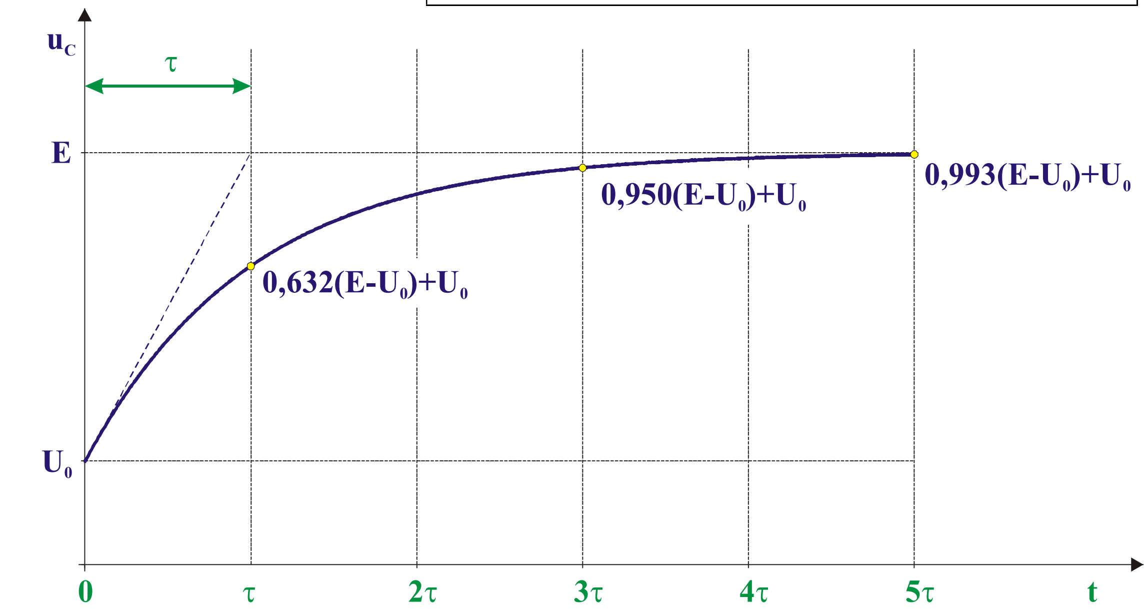
$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{E - u_C(t)}{R} = \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}^{\text{Resposta Forçada}} \overbrace{\boxed{-\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}^{\text{Resposta Natural}}}_{\substack{\text{Estado}\\ \text{Transitório}}}$$

Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(0) = U_0 \\ i_C(0) = \dfrac{E - U_0}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = E \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente carregado com uma tensão de valor U_0 atingir o valor $0{,}632 \cdot (E - U_0) + U_0$

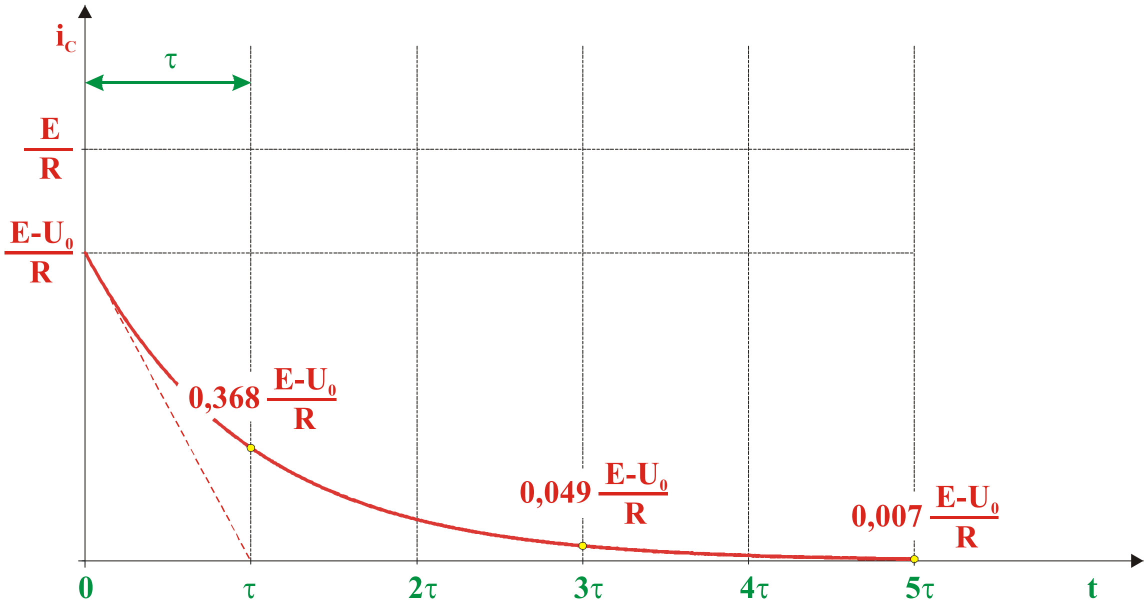
Resposta Total do Circuito RC de 1ª Ordem:

$$u_C(t) = E - E\cdot e^{-\frac{t}{RC}} + U_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}} = (E-U_0)\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+U_0$$

$$i_C(t) = \frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E-U_0}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

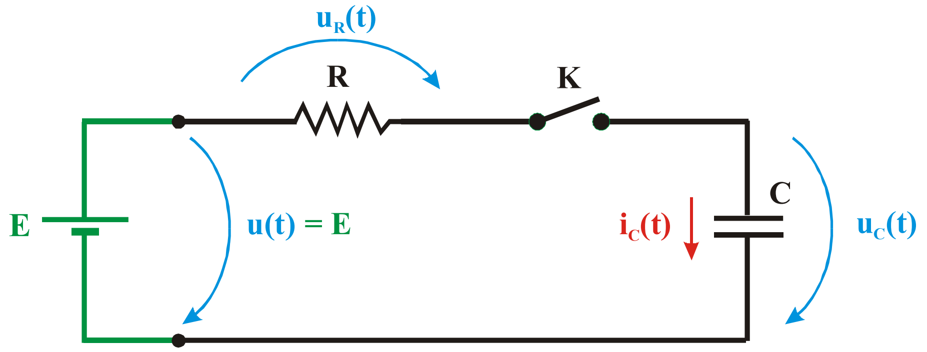


$t=\tau$	$u_C(t) = (E-U_0)\cdot(1-e^{-1})+U_0 = 0{,}632\cdot(E-U_0)+U_0$
$t=3\tau$	$u_C(t) = (E-U_0)\cdot(1-e^{-3})+U_0 = 0{,}950\cdot(E-U_0)+U_0$
$t=5\tau$	$u_C(t) = (E-U_0)\cdot(1-e^{-5})+U_0 = 0{,}993\cdot(E-U_0)+U_0$



$t=\tau$	$i_C(t) = \frac{E-U_0}{R}\cdot e^{-1} = 0{,}368\cdot\frac{E-U_0}{R}$
$t=3\tau$	$i_C(t) = \frac{E-U_0}{R}\cdot e^{-3} = 0{,}049\cdot\frac{E-U_0}{R}$
$t=5\tau$	$i_C(t) = \frac{E-U_0}{R}\cdot e^{-5} = 0{,}007\cdot\frac{E-U_0}{R}$

Se o interruptor K for fechado num instante $t = t_0$ em vez de ser fechado no instante $t = 0$ ...



Verificam-se as seguintes condições iniciais:

- O interruptor K está inicialmente aberto, garantindo que a corrente no condensador $i_C(t)$ é nula e a sua tensão $u_C(t)$ permanece constante;
- O condensador está carregado com uma tensão U_0 no instante $t = t_0$, ou seja, $u_C(t_0) = U_0$;
- O interruptor K é fechado no instante $t = t_0$ e permanece fechado a partir desse instante. Enquanto K estiver fechado, este circuito corresponde ao caso particular do circuito apresentado no ponto 2.1 em que $u(t) = E$.

Como já se tinha visto no ponto 2.1,

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

Assim, para se determinar a tensão no condensador para $t \geq t_0$ é necessário resolver a seguinte **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, na qual E, R e C são constantes e $u_C(t)$ é a incógnita:

$$\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

A solução desta equação é a seguinte:

$$u_C(t) = \overset{\text{Resposta Forçada}}{\boxed{\underbrace{E}_{\substack{\text{Estado}\\\text{Permanente}}} \underbrace{- E \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}} }} \underbrace{\;+\; \overset{\text{Resposta Natural}}{\boxed{U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}}}}_{\substack{\text{Estado}\\\text{Transitório}}}$$

Para $t \geq t_0$ a corrente no condensador (que é a mesma que passa na fonte e na resistência) é dada por

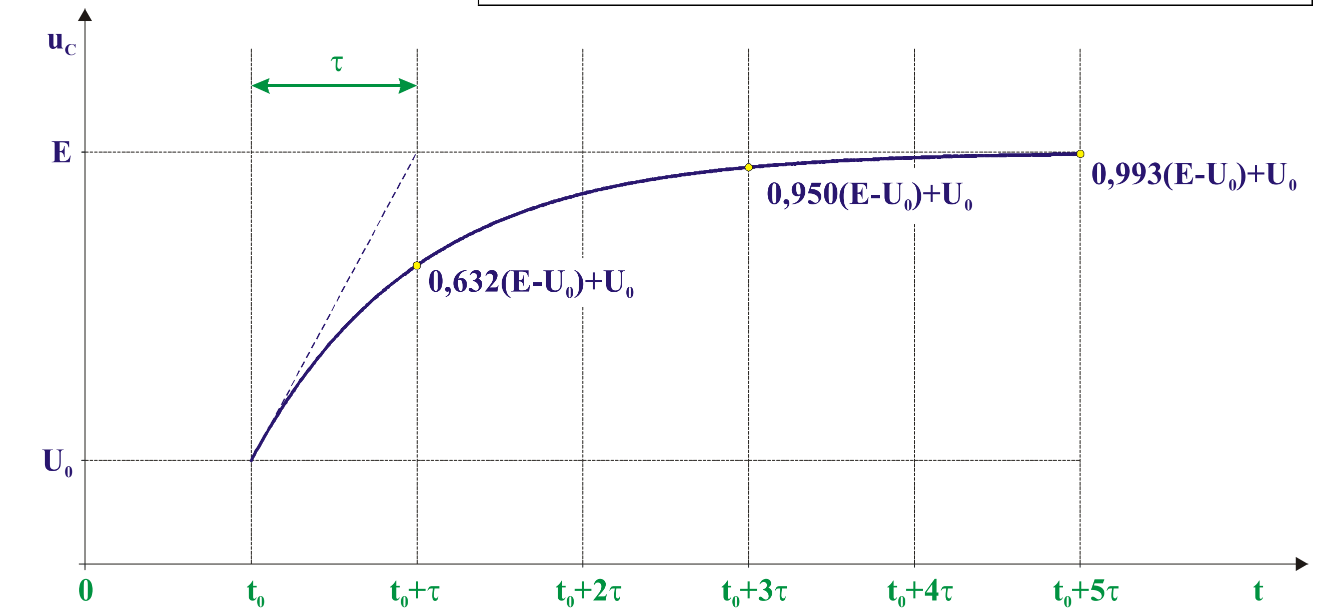
$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} = \frac{E - u_C(t)}{R} = \underbrace{\overset{\text{Resposta Forçada}}{\boxed{\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}}} \overset{\text{Resposta Natural}}{\boxed{-\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}}}}_{\substack{\text{Estado}\\\text{Transitório}}}$$

Valores iniciais: $\begin{cases} u_C(t_0) = U_0 \\ i_C(t_0) = \dfrac{E - U_0}{R} \end{cases}$	Regime permanente: $\begin{cases} u_C(t \to \infty) = E \\ i_C(t \to \infty) = 0 \end{cases}$	Constante de tempo do circuito: $\tau = RC$ (s) τ é o tempo necessário para a tensão entre os terminais do condensador inicialmente carregado com uma tensão de valor U_0 atingir o valor $0{,}632 \cdot (E - U_0) + U_0$

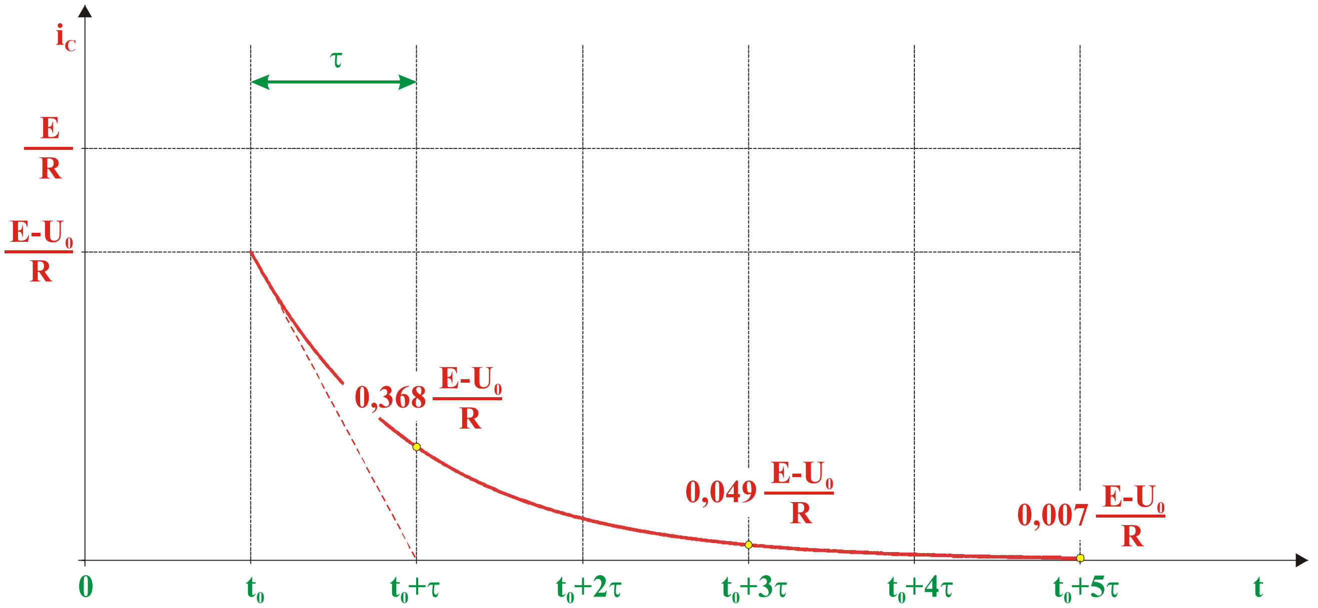
Resposta Total do Circuito RC de 1ª Ordem:

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} + U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} = (E - U_0)\cdot\left[1 - e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}\right] + U_0$$

$$i_C(t) = \frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} - \frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} = \frac{E-U_0}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)}$$

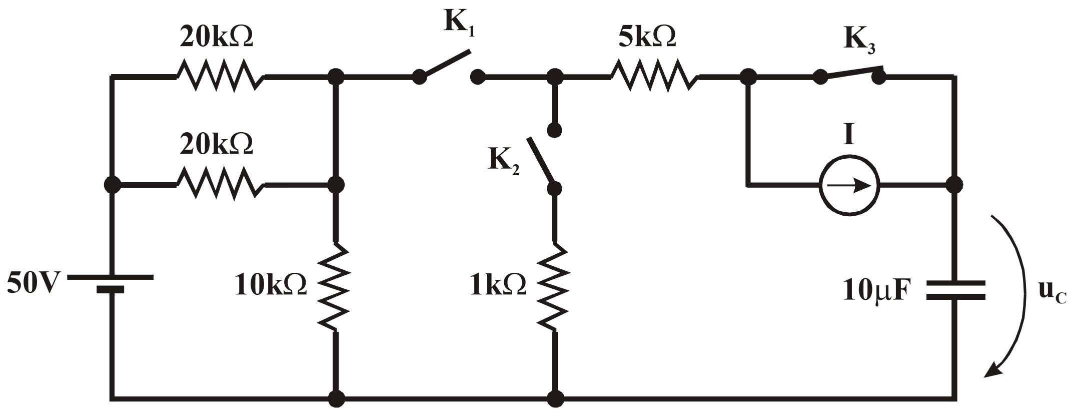


$t - t_0 = \tau$	$u_C(t) = (E - U_0)\cdot(1 - e^{-1}) + U_0 = 0{,}632\cdot(E - U_0) + U_0$
$t - t_0 = 3\tau$	$u_C(t) = (E - U_0)\cdot(1 - e^{-3}) + U_0 = 0{,}950\cdot(E - U_0) + U_0$
$t - t_0 = 5\tau$	$u_C(t) = (E - U_0)\cdot(1 - e^{-5}) + U_0 = 0{,}993\cdot(E - U_0) + U_0$



$t - t_0 = \tau$	$i_C(t) = \frac{E - U_0}{R}\cdot e^{-1} = 0{,}368\cdot\frac{E - U_0}{R}$
$t - t_0 = 3\tau$	$i_C(t) = \frac{E - U_0}{R}\cdot e^{-3} = 0{,}049\cdot\frac{E - U_0}{R}$
$t - t_0 = 5\tau$	$i_C(t) = \frac{E - U_0}{R}\cdot e^{-5} = 0{,}007\cdot\frac{E - U_0}{R}$

Exercício: Preencha os quadros anexos à figura.



K_1 fechado	K_2 aberto	K_3 fechado

Tensão de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Resitência de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Constante de tempo do circuito	
Valor de u_C em regime permanente	

K_1 aberto	K_2 aberto	K_3 fechado

Resitência de Thévenin do circuito ligado ao condensador	

-	-	K_3 aberto

Resitência de Thévenin do circuito ligado ao condensador	

K_1 aberto	K_2 fechado	K_3 fechado

Tensão de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Resitência de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Constante de tempo do circuito	
Valor de u_C em regime permanente	

K_1 fechado	K_2 fechado	K_3 fechado

Tensão de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Resitência de Thévenin do circuito ligado ao condensador	
Constante de tempo do circuito	
Valor de u_C em regime permanente	

- **Condições iniciais:**
  K_1 aberto, K_2 aberto, K_3 fechado e u_C = 0.
- **K_1 é fechado no instante t_0 e aberto 250ms depois.**
- **K_2 é fechado no instante t_0 + 500ms.**
- **K_3 é aberto no instante t_0 + 600ms e fechado quando u_C atinge 20V.**

Valor máximo efectivamente atingido por **u_C**	
Valor de **u_C** no instante **t_0 + 51ms**	
Instante em que u_C atinge pela segunda vez o valor **15V**	
Valor de **I** tal que **K_3** permaneça aberto **50ms**	