Apontamentos sobre Matrizes

Conteúdo

CONCEITOS BÁSICOS DE MATRIZES **2**

Definição 1 : Matriz 2
Definição 2 : Matrizes iguais 2

CLASSIFICAÇÃO DE MATRIZES 3

Definição 3 : Classificação segunda a forma 3
Definição 4 : Diagonal principal 3
Definição 5 : Classificação segunda a natureza dos elementos 3

OPERAÇÃO DE MATRIZES **5**

SOMA DE MATRIZES 5

Definição 6 : Soma de matrizes 5
Proposição 1 : Propriedades da soma de matrizes 5

PRODUTO ESCALAR 6

Definição 7 : Produto escalar 6
Proposição 2 : Propriedades do produto escalar 6

TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES 6

Definição 8 : Transposição de matrizes 6
Proposição 3 : Propriedades da transposição de matrizes 7
Proposição 4 : Propriedade da matriz simétrica 7

PRODUTO DE MATRIZES 7

Definição 9 : Produto de matrizes 7
Proposição 5 : Propriedades do produto de matrizes 8
Definição 10 : Matriz identidade 8
Definição 11 : Matriz invertível 9
Proposição 6 : Propriedades da matriz inversa 9

EXERCÍCIOS SOBRE MATRIZES: **10**

Objetivos de aprendizagem:

- Identificar e classificar uma matriz.
- Efetuar operações de álgebra matricial.
- Reconhecer as propriedades das operações de matrizes.
- Aplicar as propriedades das operações de matrizes.

CONCEITOS BÁSICOS DE MATRIZES

Definição 1 : Matriz

Denomina-se **matriz** do tipo mxn a um quadro de elementos dispostos segundo m filas horizontais (linhas) e n filas verticais (colunas).

(mxn lê-se m por n) ■

A matriz representa-se por letras maiúsculas (A ou A_{mxn}) e os seus elementos por letras minúsculas afetadas por dois índices (a_{ij}), o índice de linha (i) e o índice de coluna (j).

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para cada $i \in \{1,\dots, m\}$, denomina-se <u>linha i</u> da matriz A ao elemento $(a_{i1}, a_{i2},\dots, a_{in})$

Para cada $j \in \{1,\dots, n\}$, denomina-se <u>coluna j</u> da matriz A ao elemento $(a_{1j}, a_{2j},\dots, a_{mj})$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \text{Coluna n} \end{array} \\ A_{mxn} = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{linha 2} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

O elemento a_{ij} denomina-se elemento na posição i j (linha i coluna j).

Ao conjunto das matrizes do tipo mxn com elementos pertencentes ao corpo dos Reais representa-se por $\mathcal{M}_{mxn}(\Re)$.

Definição 2 : Matrizes iguais

Duas **matrizes** dizem-se **iguais** se são do mesmo tipo e se os elementos na mesma posição são iguais.

$A_{mxn} = B_{mxn} \Leftrightarrow \forall\, i = 1,\dots m,\ j = 1,\dots, n\ \ a_{ij} = b_{ij}$ ■

CLASSIFICAÇÃO DE MATRIZES

As matrizes podem ser classificadas segundo a forma e a natureza dos seus elementos.

Definição 3 : Classificação segunda a forma

Segundo a forma as matrizes podem ser classificadas em:

Retangulares: Uma matriz do tipo mxn.

Quadradas: Uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é do tipo nxn, diz-se abreviadamente de **ordem n**.

Linha: Uma matriz em que o número de linhas é igual a 1, do tipo 1xn.

Coluna: Uma matriz em que o número de colunas é igual a 1, do tipo mx1.

______________________________ ■

Definição 4 : Diagonal principal

Nas matrizes quadradas de ordem n denominam-se de **elementos principais** os elementos em que o índice de linha é igual ao índice de coluna, $a_{ii},\ i \in \{1, ..., n\}$; a sequência $(a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ ...,\ a_{nn})$ dos elementos principais de A designa-se por **diagonal principal** de A. ______________ ■

Exemplos:

Retangular	Quadrada	Linha	Coluna
$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{1x3}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2x1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Definição 5 : Classificação segunda a natureza dos elementos

Segundo a natureza dos elementos podem ser classificadas em:

Real: Se todos os elementos da matriz são valores reais.
$\forall\ a_{ij} \in A_{mxn} : a_{ij} \in \Re$

Complexa: Se pelo menos um dos elementos da matriz é complexo.
$\exists\ a_{ij} \in A_{mxn} : a_{ij} \in C$

Nula Se todos os elementos da matriz são nulos, representa-se por O_{mxn}.
$\forall\ a_{ij} \in A_{mxn} : a_{ij} = 0$

Densa Se a maior parte dos seus elementos são não nulos (usa-se para matrizes de grande dimensão).

Dispersa Se a maior parte dos seus elementos são nulos (usa-se para matrizes de grande dimensão).

Triangular superior É uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal são nulos

$$\forall\ a_{ij} \in A_{nxn} : i > j \ \ a_{ij} = 0$$

Triangular inferior É uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal são nulos

$$\forall\ a_{ij} \in A_{nxn} : i < j \ \ a_{ij} = 0$$

Diagonal É uma matriz quadrada em que os elementos não principais são nulos

$$\forall\ a_{ij} \in A_{nxn} : i \neq j \ \ a_{ij} = 0$$

Escalar É uma matriz diagonal em que os elementos principais são iguais

$$\forall\ a_{ij} \in A_{nxn} : i \neq j \ \ a_{ij} = 0 \wedge i = j \ \ a_{ij} = \lambda$$

Simétrica É uma matriz quadrada em que os elementos a_{ij} são iguais aos elementos a_{ji}

$$\forall\ a_{ij} \in A_{nxn} : \ \ a_{ij} = a_{ij}$$

■

Exemplos:

Real	Complexa
$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$
Triangular Superior	Triangular Inferior
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Diagonal	Escalar
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Simétrica	
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$	

No conjunto das matrizes podem ser definidas operações.

OPERAÇÃO DE MATRIZES

SOMA DE MATRIZES

Definição 6 : Soma de matrizes

Se as matrizes A e B são do mesmo tipo e sobre o mesmo corpo, define-se soma das matrizes A e B, representando-se por A+B, como sendo a matriz C, do mesmo tipo de A e B, cujos elementos são formados pela soma dos elementos na mesma posição de A e B.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re)\ \exists C \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re):\ C = A + B$$
$$\text{onde}\quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\quad \text{com } i = 1,\ldots,m \text{ e } j = 1,\ldots,n$$ ■

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 0 \\ -1 & \boxed{6} & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 2 \\ -1 & \boxed{3} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{5} & -3 & 2 \\ -2 & \boxed{9} & 10 \end{bmatrix}$$

Proposição 1 : Propriedades da soma de matrizes

A operação soma de matrizes, <u>do mesmo tipo</u>, goza das seguintes propriedades:

i. comutativa.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re)\ \ A + B = B + A$$

ii. associativa.

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re)\ \ (A + B) + C = A + (B + C)$$

iii. elemento neutro (matriz nula).

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re), \exists O \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re): A + O = A$$

iv. elemento simétrico.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re), \exists B \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re): A + B = O$$ ◄

As propriedades acima indicadas são uma consequência imediata da definição de adição de matrizes e das propriedades usuais da adição de números reais. Diz-se assim que $\mathcal{M}_{mxn}(\Re)$ para a operação soma de matrizes forma um grupo aditivo comutativo.

PRODUTO ESCALAR

Definição 7 : Produto escalar

Dada uma matriz A pertencente a $\mathcal{M}_{mxn}(\Re)$ e um escalar $\lambda \in \Re$, define-se **produto escalar** de λ por A, representando-se por λA, como sendo a matriz C, do mesmo tipo de A, cujos elementos são formados pelo produto dos elementos de A por λ.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re) \wedge \lambda \in \Re, \exists C \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re) : C = \lambda A$$
$$\text{onde } c_{ij} = \lambda a_{ij} \text{ com } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n$$
■

Exemplo:

$$3\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 9 \\ -9 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

Proposição 2 : Propriedades do produto escalar

A operação produto escalar, goza das seguintes propriedades:

i. **Distributiva** (em relação à adição de matrizes)
$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re), \lambda \in \Re \ \ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

ii. **Distributiva** (em relação à adição de escalares)
$\forall A \ \mathcal{M}_{mxn}(\Re), \lambda, \mu \in \Re \ \ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

iii. **Associatividade Mista**
$\forall A \ \mathcal{M}_{mxn}(\Re), \lambda, \mu \in \Re \ \ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ ◄

TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES

Definição 8 : Transposição de matrizes

Dada a matriz A pertencente a $\mathcal{M}_{mxn}(\Re)$ denomina-se de transposta de A a uma matriz B pertencente a $\mathcal{M}_{nxm}(\Re)$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, representa-se por A^T. ■

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$$

Proposição 3 : Propriedades da transposição de matrizes

Dadas as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(\Re) \wedge \alpha \in \Re$ (A e B do <u>mesmo tipo</u>, e α um escalar real). Então, as seguintes propriedades são válidas:

i. $\left(A^T\right)^T = A$

ii. $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ◄

Proposição 4 : Propriedade da matriz simétrica

Uma matriz A de ordem n diz-se **simétrica** sse $\mathbf{A = A^T}$.

PRODUTO DE MATRIZES

Consideremos o sistema de m equações lineares a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado matricialmente do modo seguinte:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Assim fica definido o produto matricial.

Definição 9 : Produto de matrizes

Dadas as matrizes A pertencente a $\mathcal{M}_{mxn}(\Re)$ e B pertencente a $\mathcal{M}_{nxp}(\Re)$, define-se **produto** de A por B, representando-se por AB, como sendo a matriz C pertencente a $\mathcal{M}_{mxp}(\Re)$, cujos elementos $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ para i = 1,…,m e j=1,…,p ■

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \boxed{8} & & \\ & & \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$8 = (1x1) + (2x2) + (3x1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & 27 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ efetue se possível AB, BA, AC e CA.

> **Observação**: O produto de matrizes **NÃO** é comutativo.

Proposição 5 : Propriedades do produto de matrizes

Dadas as matrizes A, B e C, e α um escalar real. Então, se todas as operações a seguir indicadas **<u>forem definidas</u>**, as seguintes propriedades são válidas:

- **i. Associativa** $(AB)C = A(B\ C)$
- **ii. Distributiva**
  - (à esquerda) $(A+B)\,C = A\,C + B\,C$
  - (à direita) $A\,(B+C) = A\,B + A\,C$
- **iii. Associativa mista** $\alpha\,(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- **iv. Ordem inversa da transposta do produto** $(AB)^T = B^T A^T$ ____ ◄

Definição 10 : Matriz identidade

Denomina-se de matriz **<u>identidade de ordem n</u>** a matriz quadrada escalar de ordem n cujos elementos da diagonal são iguais a 1. Representa-se por I_n. ■

Definição 11 : Matriz invertível

Dada uma matriz A de ordem n (quadrada) diz-se que a matriz A é **invertível** se existir uma matriz B tal que:

$$A\,B = B\,A = I$$

A matriz B denomina-se de inversa de A e representa-se por $\mathbf{A}^{-1}$. ■

Proposição 6 : Propriedades da matriz inversa

Dadas as matrizes A, B quadradas de ordem n e invertíveis, então as seguintes propriedades são válidas:

i. $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

ii. Para qualquer $\alpha \neq 0$, a matriz αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

iii. A^T é invertível e $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

iv. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ◄

EXERCÍCIOS SOBRE MATRIZES:

1. Para cada uma das seguintes matrizes indique: o tipo e a sua classificação segundo a forma e a natureza dos seus elementos.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 5 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Considere as seguintes matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diga se estão definidas as somas e os produtos indicados e, nesse caso, efetue-os:

a) -2A **b)** A+B **c)** B+C **d)** AB **e)** BA **f)** AC

g) $(AC)^2$ **h)** DE **i)** ED **j)** EF **k)** FE **l)** D(BA)

m) B(CA) **n)** (A-B)(C+2D)

3. Considere as matrizes

$A \in \mathcal{M}_{4x5}(\Re)$, $B \in \mathcal{M}_{4x5}(\Re)$, $C \in \mathcal{M}_{5x2}(\Re)$, $D \in \mathcal{M}_{4x2}(\Re)$ e $E \in \mathcal{M}_{5x4}(\Re)$,

determine quais das seguintes expressões estão definidas. Para as expressões que estão definidas determine o tipo da matriz resultante.

a) BA **b)** AC+D **c)** AE+B **d)** AB+B

e) E(A+B) **f)** E(AC) **g)** $E^T A$ **h)** $(A^T+E)D$

m) B(CA) **n)** (A-B)(C+2D)

4. Sabendo que a matriz AB é do tipo 6x8 que pode ser dito dos tipos das matrizes A e B.

5. Considere as matrizes $A_{3\times 4}=\left[a_{ij}\right]_{3\times 4}$ onde $a_{ij}=i+j$ e $B_{3\times 4}=\left[b_{ij}\right]_{3\times 4}$ onde $b_{ij}=i-j$, determine A+B.

6. Considere as matrizes A e B de ordem 4 definidas por:

$$a_{ij}=\begin{cases} 2 & \text{se } i=j \\ -1 & \text{se } |i-j|=1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad b_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 2 & \text{se } i>j \\ 3 & \text{se } i<j \end{cases}$$, determine AB.

7. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-4&6&1\\2&1&4&-2&2\\1&0&1&0&2\\-3&2&1&1&1\\2&4&1&5&4\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}1&1&1&3&5\\2&1&0&4&3\\1&0&1&3&7\\-3&2&1&9&1\\2&0&1&6&6\end{bmatrix}$$

Determine:

i. A terceira linha da matriz AB
ii. A segunda coluna da matriz AB
iii. A matriz Ae_2, onde e_2 designa a segunda coluna da matriz identidade (neste caso de ordem 5)
iv. A matriz $e_2^T A$, onde e_2 é a matriz referida na alínea anterior

8. Considere as matrizes

$A \in \mathcal{M}_{3x4}(\Re)$, $B \in \mathcal{M}_{3x2}(\Re)$, C e $E \in \mathcal{M}_{2x3}(\Re)$, $F \in \mathcal{M}_{2x4}(\Re)$, D e $G \in \mathcal{M}_{4x4}(\Re)$.

Diga Justificando:

a) Se se pode verificar
- **i)** CB = BC;
- **ii)** DG = GD.

b) Se é possível efectuar
- **i)** CA + F;
- **ii)** CF - 3AD;
- **iii)** $C + \gamma A$, com $\gamma \in \Re$.

9. Determine os valores de a, b, c e d de modo que a seguinte igualdade se verifique:

$$\begin{bmatrix}a-b & b+c\\ 3d+c & 2a-4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&1\\7&6\end{bmatrix}$$

10.

a) Calcule 2(A+B) - AB sendo

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\2&3&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

b) Sendo α e β dois números reais, calcule o produto

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

11. Efetue se possível, o produto das seguintes matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$; **b)** $C=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&-1\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&1&0\\1&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}$.

12. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&0\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}$$

a) Calcule a matriz $\left(A^T\right)^T$ e compare-a com A.

b) Calcule as matrizes AC, $(AC)^T$ e $C^T A^T$ e compare-as.

13. Sejam A e B duas matrizes reais e $\alpha \in \Re$. Indique de que tipo devem ser as matrizes A e B, para que as operações em causa estejam definidas:

a) $\left(A^T\right)^T = A$ **b)** $(A+B)^T = A^T+B^T$ **c)** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$ **e)** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

14. Mostre que se A e B são matrizes simétricas da mesma ordem então $(AB)^T$=BA.

15. Considere as matrizes A, B, C e A+B, todas de ordem n e invertíveis, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $(AX)^T B = A^{-1} + I_n$ **b)** $-AX = C + BX$ **c)** $(A + XC)^T B = A^{-1} + I_n$

d) $-CAX - C^{-1}B = C^{-1}A + CBX$

16. Determine a matriz A de modo que,

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para qualquer escolha de valores para x, y e z.

17. Seja X uma matriz coluna com n elementos.

a) Mostre que XX^T é uma matriz quadrada de ordem n.

b) Verifique que o produto X^TX é uma matriz de ordem 1.

c) Se $X^TX = [a]$ e os elementos de X forem números reais, mostre que:

i) $a \geq 0$ **ii)** a = 0 se e só se X é a matriz nula.

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Verifique que;

i) AB=O **ii)** AC=AD **iii)** comente os resultados obtidos

Perguntas de testes

1 Considere as matrizes $A, B \in M_{4\times4}$ e $C \in M_{4\times3}$. Diga se são verdadeiras ou não as seguintes igualdades:

a) $AB = BA$ **b)** $A + B = B + A$ **c)** $(A+C)^T = A^T + C^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$ **e)** $(A+B)+C = A+(B+C)$ **f)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2 Considere as matrizes $A, B \in M_{4\times4}$ e $C \in M_{4\times3}$. Diga se são verdadeiras ou não as seguintes igualdades:

a) $AB = BA$ **b)** $A + B = B + A$ **c)** $(A+C)^T = A^T + C^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$ **e)** $(A+B)C = BC + AC$ **f)** $A^2 A^3 = A^5$

3 Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

a) Dadas 2 matrizes A e B da mesma ordem, AB pode ser igual a BA.

b) Só se podem somar matrizes iguais.

c) O produto de matrizes quadradas é comutativo.

d) Todas as matrizes admitem transposta.

4 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } D \in M_{3x2} \text{ onde } d_{ij} = \begin{cases} j & \text{se } i \le j \\ 2j & \text{se } i > j \end{cases}$$

Determine $AB^T + C^2 - BD$.

5 Indique as condições para que as seguintes propriedades sejam verdadeiras.

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

b) $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$

c) $(\mathbf{AB}) = \mathbf{C}_{2\times3}$

d) $(\mathbf{AB}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}_{2\times3}$