Funções reais de variável real

1. O domínio da função real de variável real $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2-x}} & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ \arctan x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ é:

☐ $D_f = \mathbb{R} \backslash]0, 2]$.

☐ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

☐ $D_f =]2, +\infty[$

☐ $D_f =]-\infty, 2[$

2. Qual das funções seguintes tem por domínio $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$?

☐ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$.

☐ $f(x) = \sqrt{x-5}$

☐ $f(x) = \sqrt[3]{x-5}$

☐ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$

3. Qual das funções seguintes é crescente em $\mathbb{R}$?

☐ $f(x) = \sin x$.

☐ $f(x) = \arcsin x$

☐ $f(x) = \arctan x$

☐ $f(x) = \arccos x$

4. Qual das funções seguintes é limitada?

☐ $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

☐ $f(x) = \tan \frac{x}{2}$

☐ $f(x) = \arctan x$

☐ $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$

5. Qual das funções seguintes é majorada?

☐ $f(x) = x^2 + 1$.

☐ $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

☐ $f(x) = \exp x$

☐ $f(x) = \frac{1}{x}$

6. Qual das funções seguintes é minorada?

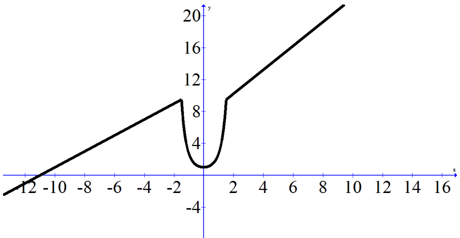
☐ $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

☐ $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$

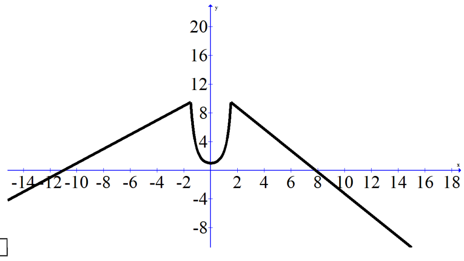
☐ $f(x) = \ln x^2$

☐ $f(x) = \frac{1}{x}$

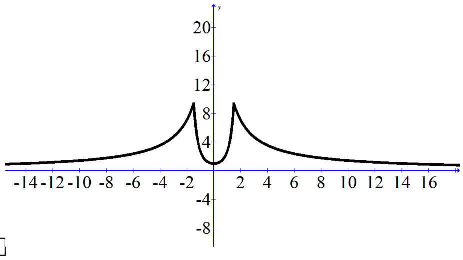
7. Qual das funções abaixo tem máximo e mínimo absoluto em $\mathbb{R}$?



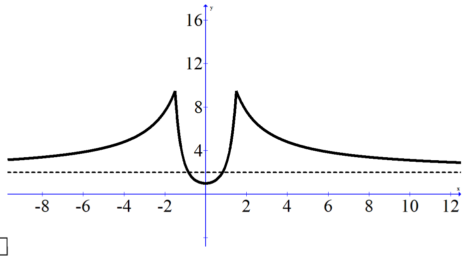
☐



☐



☐



☐

8. Qual das funções seguintes é par?

☐ $f(x) = \exp x$.

☐ $f(x) = \ln(x^2 + x)$

☐ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

☐ $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$

9. Qual das funções seguintes é ímpar?

☐ $f(x) = \exp(x^3)$.

☐ $f(x) = \sin(|x|)$

☐ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

☐ $f(x) = \frac{x^3+x}{x+1}$

10. Considere a função $f(x) = |x-2| + |x+1|$.

(a) Determine o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 5\}$.

(b) Justifique que, para $x \in A$, f é uma função limitada.

11. Considere a função $f(x) = |\arctan x|$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f, justificando.

(b) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq 1$.

12. Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x| - 1}$

(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|2x-5| - 3|x-1|}}$

(c) $h(x) = \ln(|x^2 - x - 1| - 1)$

(d) $j(x) = \sqrt{\ln|x^2 - 4| - \ln|x+2| - 1}$

13. Determine o domínio de continuidade das funções seguintes:

(a) $\sec x$; (b) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; (c) $\dfrac{d}{dx}|x|$.

14. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x - \frac{x^2}{2})$. Justifique se é verdadeira ou falsa a proposição $\exists x \in [1,2] : f(x) = \frac{1}{4}$.

15. Seja $f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ uma função contínua que verifica $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$. Verifique se a equação $f(x) - x = 1$ tem solução no domínio de f.

16. Usando a **definição** de derivada, determine:

    (a) $\dfrac{df}{dx}(1)$ onde $f(x) = \frac{1}{x}$;

    (b) $\dfrac{dg}{dx}(x_0)$ onde $g(x) = x^2 + 3x$;

    (c) $\dfrac{dh}{dx}(x_0)$ onde $h(x) = x^3$.

17. Determine a derivada das seguintes funções, indicando o domínio e o respetivo domínio de diferenciabilidade:

    $(a)\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$; $(b)\ \dfrac{\cos(2x)}{x}$; $(c)\ e^{2f(x)} - g(x)$; $(d)\ \ln(\sin x)$

    $(e)\ e^{\cos x^2}$; $(f)\ \dfrac{\arctan(\sinh(x/2))}{\sqrt{x}}$; $(g)\ \dfrac{\arcsin x}{1+\sinh x^2}$; $(h)\ \dfrac{\ln(3+\cosh(x/2))}{\sqrt{x}}$;

    $(i)\ \dfrac{1-e^{x^2}}{1+e^{\sqrt{x}}}$; $(j)\ f(u) = \arctan u^2 . \ln u$; $(l)\ g(t) = \dfrac{\sqrt{t+1}}{\sin t}$; $(m)\ \ln(x. \sinh x)$

    $(n)\ \arcsin(\arctan x)$; $(o)\ \ln(\arcsin(\dfrac{x+1}{x-1}))$;

18. Determine, sabendo que a e k são constantes reais:

    $(a)\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t}{\ln t}\right)|_{(e^2)}$; $(b)\ \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\sin(kx)\right)$; $(c)\ \dfrac{d}{d\theta}\left(\sqrt[3]{a + k\sin^2\theta}\right)$; $(d)\ \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{3u}{\tan 2u}$

    $(e)\ \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{a - k\cos^2 t}\right)$; $(f)\ \dfrac{d}{du}(u\ln(2u))$ $(g)\ \dfrac{d}{dy}\dfrac{\sqrt{y}}{1+2y}|_1$ $(h)\ \dfrac{d}{dx}(\tan^3 x^4)$

19. Considere a função real de variável real, contínua em $x = 0$ e definida por $f(x) = \frac{x}{2+e^{\frac{1}{x}}}$, para todo $x \neq 0$. Determine as derivadas laterais de f no ponto $x = 0$.

20. Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{x^2}{3}$ no ponto $x = 1$.

21. Qual o ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) com o eixo OX?

22. Para u, v e w funções diferenciáveis, determine a fórmula para a derivada do seu produto $(uvw)'$.

23. Determine $\dfrac{d}{dy}\left(\sin^2 y \cos^2 y\right)$ de duas formas diferentes. Primeiro, usando a regra da derivada do produto, depois escrevendo a função como $f(2y)$ e fazendo a sua derivada. Verifique que as duas são iguais.

24. Verifique que se $y = uv$, então $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$. Deduza y'''.

25. Deduza a fórmula da derivada de $\arccos y$, usando a derivada da função inversa.

26. Deduza a fórmula da derivada de $x = \arctan y$, a partir da derivada da $y = \tan x$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

27. Deduza a fórmula $\dfrac{d}{dx}(a^x) = M(a)a^x$ (a constante real) usando a definição de derivada, e escreva $M(a)$ como um limite.

28. Determine os seguintes limites, relacionando-os com o cálculo de derivadas.

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1+h}}{h}$

(b) $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^5-1}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}$

29. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} x^2.\arctan x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \sin(\cos(x^2)-1) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(a) Verifique se f é derivável em $x = 0$.

(b) Determine a função derivada f'.

30. Considere a função g real de variável real, definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Prove que g é uma função diferenciável em $x = 0$ com $g'(0) = 0$.

31. Considere a função $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 - x + x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$ com a e b constantes reais.

(a) Sabendo que f é contínua em $\mathbb{R}$, determine todos os valores possíveis de a e b.

(b) Sabendo que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, determine todos os valores possíveis de a e b.

32. Considere a função $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se} \quad x > 0 \\ x^4 + x + 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$ com a e b constantes. Sabendo que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, determine todos os valores possíveis de a e b.

33. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 3x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(a) Verifique se existe $f'(0)$.

(b) Determine a função f' no seu domínio. Onde é que f é diferenciável?

(c) Estude a continuidade da função f.

34. Repita o exercício anterior para a função $g(x) = \begin{cases} 3x + 5, & \text{se } x \leq 0 \\ 5, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

35. Considere a função $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

(a) Qual a taxa de variação média da função f no intervalo $[2, 3]$?

(b) Qual a taxa de variação instântanea da função f no ponto $x = 2$?

(c) Determine a função linear que melhor se aproxima da função f na vizinhança de $x = 2$.

(d) Utilize a alínea anterior para calcular um valor aproximado de $f(2, 01)$.

36. Considere a função real de variável real, definida por $f(x) = |x|e^{1-x^2}$.

(a) Estude a continuidade da função f.

(b) Determine o domínio de diferenciabilidade da função f.

(c) Nos pontos onde f não é diferenciável, calcule as derivadas laterais.

(d) Estude a monotonia da função f.

37. Suponha que $f''(x)$ existe no intervalo I e que $f(x)$ tem três zeros que pertencem a I, $a < b < c$. Mostre que existe um ponto p em $[a, c]$ tal que $f''(p) = 0$.

38. Considere a função real de variável real $f(x) = x.\arctan(3x)$.

(a) Determine o domínio da função f.

(b) Justifique porque é que f é uma função contínua no seu domínio.

(c) Mostre que f é uma função par.

(d) Mostre que f tem um mínimo absoluto em $x = 0$.

39. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} a.\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \arcsin x & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq -1 \end{cases}$

(a) Determine a constante real a de modo que f seja contínua em $x = 1$.

(b) Determine $f(\dfrac{4}{\pi}\arccos(-\dfrac{4}{5}))$ e $f(\cos(\dfrac{5\pi}{12}))$.

(c) Estude a continuidade da função f.

(d) Indique o contradomínio de f e se a função admite máximo e/ou mínimo.

(e) Determine, caso existam, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

40. Considere a função $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, definida em $]-1, 1[$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-2}{x+1}$ e $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x+1}$

(b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada e/ou minorada e se tem máximo e/ou mínimo em $]-1, 1[$.

41. Considere a função real definida no intervalo real $[0, \pi/2]$ definida por $f(x) = 2\sin^2 x + 3\cos^2 x$.

(a) Verifique que f é estritamente decrescente.

(b) Mostre que o mínimo absoluto de f é 2 e que o seu máximo absoluto é 3.

(c) Mostre que existe $c \in]0, \pi/2[$ tal que $f(c) = \frac{15}{7}$.

(d) Determine o ponto do gráfico de f onde a reta tangente ao gráfico é paralela à reta de equação $y = -x$.

42. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \arctan x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $f'(a)$ e $f'(b)$ e escreva equações das rectas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa a e b.

(b) Justifique que $f'(0) = 1$.

(c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para justificar que a função f não tem extremos locais.

43. Considere a função f real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(1-x^2) & \text{se} \quad |x| < 1 \\ \\ \ln(2x^2 - c) & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde $c \in]-\infty, 2[$ designa uma constante.

(a) Determine o valor de c.

(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = 0$.

(c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f.

44. Considere a função f real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\arctan(\sin x)}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Seja g uma função real de variável real, diferenciável tal que $g(2) = 0$ e $g'(2) = -6$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 2$.

45. Considere a função f real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & \text{se} \quad x < -1 \\ \ln(x+2) & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = -1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia e extremos da função f.

(d) Seja g uma função real de variável real, diferenciável tal que $g(3) = 1$ e $g'(3) = -1$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 3$.

46. Considere a função f real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \alpha. \arctan x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$ com α uma constante real.

(a) Determine para que valores de α a função é contínua em $x = 1$.

(b) Para $\alpha = \frac{4}{\pi}$, determine a função derivada de f.

(c) Verifique que f é uma função crescente. Determine, justificando, o seu contradomínio.

47. Considere $f'(x) = e^{x^2}$ e $f(0) = 10$. Usando o teorema de Lagrange, determine os valores reais A e B tais que $A < f(1) < B$.

48. Considere $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $f(1) = 1$. Usando o teorema de Lagrange, determine os valores reais A e B tais que $A < f(2) < B$.

49. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x-\pi)}{3x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(\ln(2x))}{\ln x^3}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3 e^{-x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arcsen}(x-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{cotg} x}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\tan x)^{\tan x}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{\coth x}$; (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^{x/2}-1)^{3x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1-x)^{\frac{1}{\arcsin x}}$; (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin \frac{x}{2})^{\frac{1}{\ln x}}$; (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$; (p) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; (q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

50. Seja f uma função real de variável real contínua, estritamente crescente, tal que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta$ e $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha$. Mostre que o contradomínio de f é o intervalo $]\alpha, \beta[$.

51. Considere uma função par definida em $\mathbb{R}$ e crescente no intervalo $]a, b[$ com a, b positivos. Mostre que f é decrescente no intervalo $]-b, -a[$.

52. Considere uma função ímpar definida em $\mathbb{R}$ e crescente no intervalo $]a, b[$ com a, b positivos. Mostre que f é crescente no intervalo $]-b, -a[$.

53. Mostre que uma função diferenciável num ponto x_0 do seu domínio, é contínua em x_0.

54. Mostre que a derivada de uma função par é uma função ímpar.

55. Mostre que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

56. A massa de uma substância radioativa está a diminuir ao longo do tempo t, segundo a fórmula $A(t) = A_0 \exp(-rt)$, com r uma constante real positiva.

    (a) Deduza uma expressão (dependente de r) para determinar o tempo necessário até que a massa da substância radioativa seja $1/4$ da sua massa inicial A_0.

    (b) Nesse momento, quão rapidamente está a massa da substância a diminuir?

57. Pretende-se construir uma estufa com formato triangular encostada a um muro. Cada um dos lados que não está encostado ao muro mede L metros. Determine quanto mede o lado encostado ao muro x de modo que a estufa tenha área máxima? Justifique que o valor que encontrou para x é mesmo o que maximiza a área.

58. É lançado um foguetão na vertical para o céu. A altura a que ele se encontra é de $h = 10t^2$ metros, t segundos depois de ter sido lançado. Considere que está uma pessoa no chão a 1000 metros do local de onde foi lançado o foguetão. A linha da sua visão para o foguetão faz um ângulo θ com o plano horizontal.

    Determine quantos radianos por segundo o ângulo θ está a mudar, 10 segundos após o lançamento do foguetão.

59. Considere um triângulo no primeiro quadrante de um referencial cartesiano, cujos lados são formados pelos eixos coordenados e por uma reta de declive negativo m que passa no ponto $(1, 2)$. Qual é a reta que minimizará a área do triângulo? (considere m - o declive da reta - a variável independente).

60. Um frigorífico está a perder água e o seu volume no instante t (em minutos) é $(10-t)^2/5$ litros.

    (a) Determina a taxa de variação média da perda de água nos primeiros 5 minutos.

    (b) Qual a velocidade de saída de água 5 minutos depois de começar a escorrer?