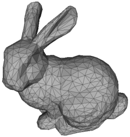
Stage M2 MPRI

Tétraèdres en Diamants : Structure de Données Compacte pour Maillages Tétraédriques

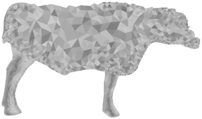
Gabriel Beauplet supervisé par Luca Castelli Aleardi

Présentation du 02/09/2019

Préliminaires



(a)



(b)

Figure: **Gauche** : Maillage triangulaire (surfacique) contenant 14k sommets, 42k arêtes et 28k faces. **Droite** : Vue de coupe d'une tétraédrisation (maillage volumique) contenant 30k sommets, 182k arêtes, 143k faces et 134k tétraèdres.

Les maillages

- La dimension
  - Les maillages 2D (surfaciques) sont constitués de polygones
  - Les maillages 3D (volumiques) sont constitués de polyèdres
- Ses composantes
  - Géométrie : positions des sommets
  - Connectivité : relations d'adjacence entre les polygones/polyèdres
- Compression et structure de données compacte
  - Compression : réduire la place mémoire du maillage
  - Structure de données compacte : réduire la place mémoire du maillage tout en permettant une utilisation

Préliminaires

Notations

- V est l'ensemble des sommets du maillage
- E est l'ensemble des arêtes du maillage
- F est l'ensemble des triangles (faces) du maillage
- T est l'ensemble des tétraèdres du maillage

Combinatoire

- Maillage triangulaire : environ 2 fois plus de triangles que de sommets
  - $V - E + F \simeq 0$
  - $2E = 3F \Rightarrow V - \frac{3}{2}F + F \simeq 0 \Rightarrow F \simeq 2V$
- Maillage tétraédriques : environ 4.5 fois plus de tétraèdres que de sommets

Figure: Maillage surfacique contenant 1Md de sommets, 3Md d'arêtes et 2Md de triangles. 32GB sont nécessaires pour stocker le maillage

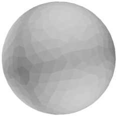


Figure: Maillage tétraédrique d'une boule contenant 3M sommets, 21M arêtes et 17M tétraèdres. Le fichier OFF associé occupe une place de 780 MB

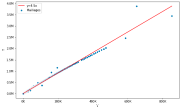
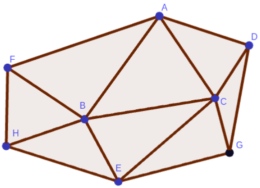
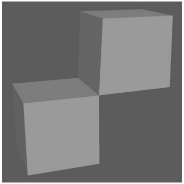


Figure: Evolution du nombre de tétraèdres en fonction du nombre de sommets.

Préliminaires



(a)



(b)

Figure: **Gauche** : Maillage triangulaire avec bords ($|V| = 8, |E| = 15, |F| = 9$). **Droite** : Volume n'étant pas une variété. Les deux cubes sont connectés par une arête de taille infiniment fine.

Définitions

- Simplexe : Un simplexe σ^p de dimension p est l'enveloppe convexe de $p+1$ points $\{v_0, v_1, \ldots v_p\}$, où $v_i \in R^n$ et les vecteurs $v_1 - v_0, v_2 - v_0 \ldots$ sont linéairement indépendants.
- Variété : Espace topologique M connexe séparé localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Chaque point de M admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Complexe Simplicial : Ensemble K de simplexes d'un espace affine tel que toutes les faces de chaque simplexe de K appartiennent aussi à K et si deux simplexes σ et τ de K sont adjacents alors $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$
- Maillage : Complexe simplicial représentant un objet géométrique. Il a la même dimension que l'objet qu'il représente
- Etoile : Ensemble des k-simplexes adjacents à un sommet

Préliminaires

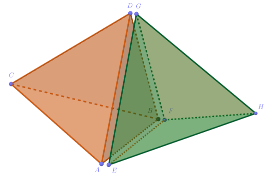


Figure: Deux tétraèdres partageant une face. Un espace a été ajouté entre les deux tétraèdres pour plus de clarté.

Opérations courantes

- `incident_face`(i, t): renvoie la i-ème face du tétraèdre t (pour $i = 0..3$)
- `incident_vertex`(v): renvoie un des tétraèdres incidents au sommet v
- `neighbour`(i, t): renvoie le tétraèdre qui est le i-ème voisin adjacent au tétraèdre t
- `get_vertex_index`(v, t): renvoie un entier $i \in \{0 \dots 3\}$, l'indice du sommet v dans le tétraèdre t

Une implémentation naïve

- 4 références par tétraèdre donnant l'accès aux tétraèdres voisins
- 4 références par tétraèdre donnant l'accès aux sommets incidents
- 1 référence par sommet donnant l'accès à l'un de ses tétraèdres incidents

$\Rightarrow$ **8 références par tétraèdre (rpt) et 1 référence par sommet**

Etat de l'Art

Structures de données surfaciques et volumiques

Structure de données	Taille mémoire	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
Basées sur les arêtes (Half-edge, Quad-edge, Winged-edge)	18n+n	O(1)	O(1)	oui
Basées sur les triangles	13n	O(1)	O(1)	oui
Corner table	13n	O(1)	O(1)	oui
2D catalog (Aleardi, Devillers, Mebarki)	7.67n	O(1)	O(1)	oui
Star vertices (Kallmann, Thalmann)	7n	O(d)	O(1)	non
SOT (Gurung,Rossignac)	6n	O(1)	O(d)	non
SQUAD (Gurung, Laney, Lindstrom, Rossignac)	$(4+\epsilon)$n	O(1)	O(d)	non

Table: Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages surfaciques. n représente le nombe de sommets.

Structure de données	Taille mémoire moyenne	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
VOT	8t+n	O(1)	O(1)	oui
Compact Half Face (Lage, Lewiner, Lopes, Velho)	8t+n	O(1)	O(1)	oui
Bande de triangles (Weiler, Mallón, Kraus, Ertl)	5.1t	O(1)	O(1)	non
SOT (Gurung, Rossignac)	4t	O(1)	O(d)	non
Tétraèdres en diamants	**2.4t**	**O(1)**	**O(d)**	**non**

Table: Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages volumiques. t représente le nombre de tétraèdres et n le nombre de sommets.

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Principe général

Notre but

- Construire une structure de données compacte pour maillages tétraédriques
- Construction rapide de la structure
- Navigation en temps constant
- Calcul de l'hypersphère d'un sommet

Procédure

- Etape 1 : Groupement des tétraèdres en diamants (*SQUAD*)
- Etape 2 : Ancrage des sommets avec des diamants/tétraèdres isolés. Le *i*-ème sommet est ancré au *i*-ème diamant/tétraèdre isolé (*SOT*)
- Etape 3 : Encodage des références. Passage d'un tétraèdre à l'autre en utilisant les faces (*Half-Face*)

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Etape 1 : Groupement des tétraèdres en diamants

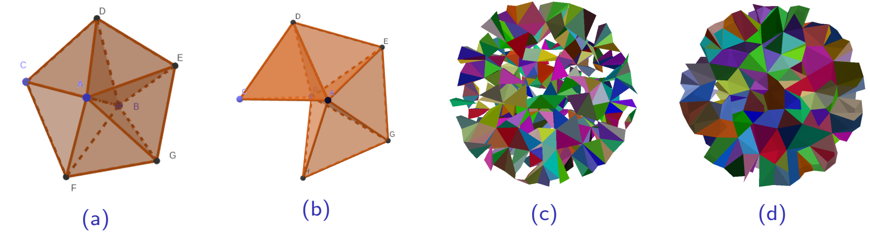


Figure: **(a)** : Diamant contenant 5 tétraèdres et dont l'arête centrale commune est AB. **(b)** : Exemple n'étant pas un diamant car les tétraèdres ne sont pas cycliques. **(c)** : Vue de coupe des tétraèdres isolés après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un tétraèdre isolé. **(d)** : Vue de coupe des diamants après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un diamant.

Etape 1

- Problème : Grouper les tétraèdres en diamants
- Motif : Omission des références entre les tétraèdres du même diamant
  - Deux voisins dans un diamant ne se référenceront pas mutuellement. Chaque tétraèdre dans le diamant n'aura donc que deux références vers ses voisins extérieurs au diamant
- Solution : Parcours en profondeur du maillage
- Résultat : Une partie des tétraèdres est groupé en diamants. Les autres tétraèdres sont dits isolés

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Etape 2 : Ancrage des sommets

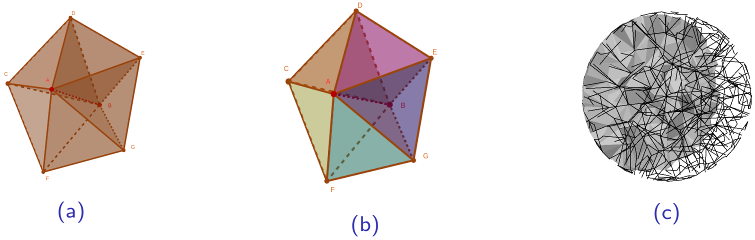


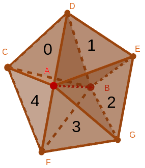
Figure: **Gauche** : Diamant contenant 5 tétraèdres dont l'arête centrale est le segment AB et ancré au sommet A. **Milieu** : 5 tétraèdres isolés (chaque couleur est un tétraèdre différent). **Droite** : Vue de coupe d'une tétraédrisation d'une boule avec affichage des arêtes centrales de tous les diamants

Etape 2

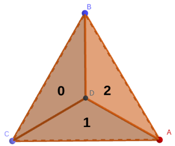
- Problème : Ancrer chaque sommet à un tétraèdre/diamant
- Motif : Omission des références des sommets vers l'un de leurs tétraèdres incidents
- Solution : Algorithme glouton privilégiant les sommets de faible degré
- Résultat : Chaque sommet est ancré à un diamant/tétraèdre isolé. On réordonne les diamants/tétraèdres isolés tel que le *i*-ème sommet soit ancré au *i*-ème diamant/tétraèdre isolé

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Organisation générale



(a)



(b)

Figure: **Gauche** : Diamant contenant 5 tétraèdres ordonnés, dont l'arête centrale est AB et ancré au sommet A. L'ordre des tétraèdres est indiqué en noir. **Droite** : Tétraèdre isolé ancré au sommet A.

Règles pour l'ordonnancement

- Diamant
  - L'ordre de deux tétraèdres partageant une face doit être consécutif modulo la taille du diamant
  - Les faces extérieures du i-ème tétraèdre seront les faces $2i$ et $2i+1$
  - On ordonne d'abord les sommets situés entre deux faces, puis les deux sommets communs à toutes les faces
- Tétraèdre isolé
  - S'il est ancré à un sommet, alors la première face doit être la face opposée à l'ancre
  - Les sommets sont ordonnés tel que le i-ème sommet est opposé à la i-ème face

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Etape 3 : Encodage des références

La situation

- Les tétraèdres sont regroupés en diamants ou isolés
- Chaque sommet est associé avec un diamant ou un tétraèdre isolé

Notations

- D l'ensemble des diamants
- T_D l'ensemble des tétraèdres appartenant à des diamants
- T_i l'ensemble des tétraèdres isolés
- F_e l'ensemble des faces des tétraèdres isolés et des faces extérieures des diamants où $|F_e| = 2 \cdot |T_D| + 4 \cdot |T_i|$

Comment définir les références ?

- On numérote toutes les faces extérieures $f \in F_e$ de notre maillage
- Une référence est juste un numéro de face
- Chaque $f \in F_e$ possède une référence vers une autre face

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Identification des sommets dans des tétraèdres/diamants opposés

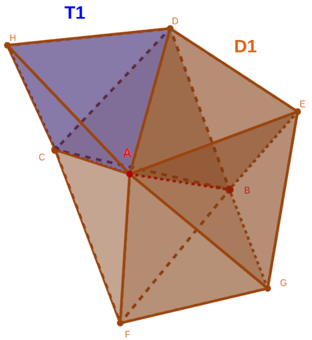


Figure: Tétraèdre isolé **T1** partageant la face ACD avec un diamant **D1** ancré au sommet **A**.

Notre situation

- Le sommet **A** est ancré au tétraèdre **D1**
- Nous sommes sur la face ACD de **D1**
- **Comment savoir où se trouve le sommet A dans T1 ?**

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Identification des sommets dans des tétraèdres/diamants opposés

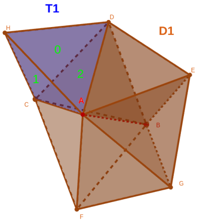


Figure: Un diamant partage la face ACD avec un tétraèdre isolé.

Organisation des sommets et des faces

- L'ordre des sommets de **T1** est : A,D,C,H $\Rightarrow$ l'ordre des faces de **T1** est DCH,ACH,ADH,ADC
- L'ordre des faces de **D1** est : ACD,BCD,ADE,BDE,AEG,BEG,EFG,BFG,AFC,BFC $\Rightarrow$ l'ordre des sommets de **D1** est C,D,E,G,F,A,B

Calculer la permutation

- On identifie la face (et ses 3 sommets) dont on souhaite savoir la permutation
  - La face ACD nous intéresse
- On compare l'ordre des sommets dans les deux entités
  - Dans **T1**, nous avons A,D,C et C,D,A dans **D1**

La permutation des sommets pour la face ACD est donc τ=(2,1,0)

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

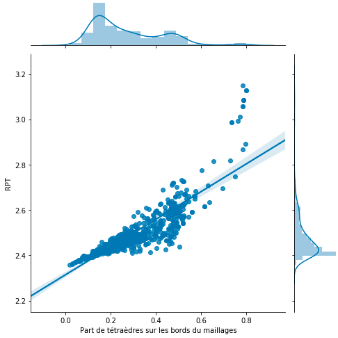
Exemple

	1 er diamant								1 er tétraèdre isolé				2 ème tétraèdre isolé				3 ème tétraèdre isolé			
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A[i]	-1	281	202	758	854	829	239106	307	865	12	289	-1	9	863	239086	-1	861	385	380	239084
1 bit de service	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
3 bits de service	0,0,0	1,0,2	2,0,1	0,2,1	2,0,1	2,0,1	2,1,0	1,0,2	1,0,2	0,1,2	0,1,2	0,0,0	0,1,2	1,0,2	1,0,2	0,0,0	2,0,1	1,0,2	1,0,2	1,0,2

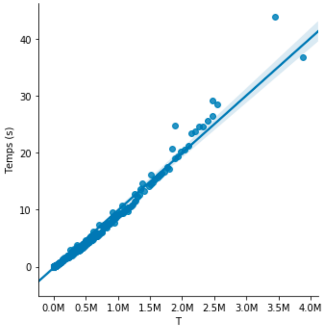
Figure: Dans cet exemple, la face 0 est sur le bord et la face 1 est opposée à la face 281. La permutation de la face 1 du premier diamant (1,0,2) indique que le premier et second sommet de cette face sont inversés dans la face opposée.

Résultats

Appariement des diamants et ancrage des sommets



(a)



(b)

Figure: **Gauche** : Evolution du nombre de références par tétraèdre (RPT) en fonction de la part de tétraèdres sur les bords du maillage. **Droite** : Temps en secondes (s) du parcous en largeur en fonction du nombre de tétraèdres.

Compter le nombre de références par tétraèdre (RPT)

$$\text{RPT} = \frac{2 \cdot T_D + 4 \cdot T_i}{|T|} \quad (1)$$

Résultats

Les requêtes

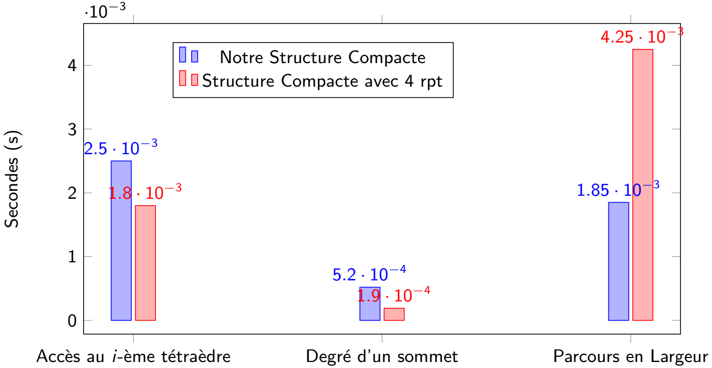


Figure: Comparaison des temps moyens (s) requis pour répondre aux requêtes et effectuer la navigation dans le maillage. Notre structure de données compacte (en bleue) est comparée à une structure de données compacte utilisant 4 rpt (i.e SOT). Le temps pour le parcours en largeur est normalisé pour 100K tétraèdres.

Résultats

Taille mémoire

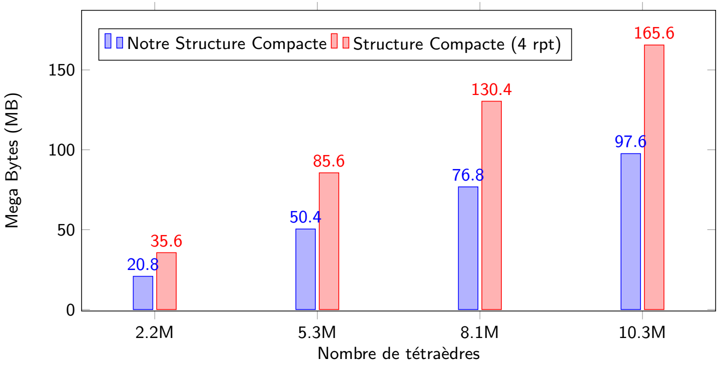


Figure: Comparaison de la taille mémoire (en Mega Bytes) de notre structure de données compacte (en bleue) et de la même structure de données sans regroupement des tétraèdres en diamants (i.e SOT)

Conclusion

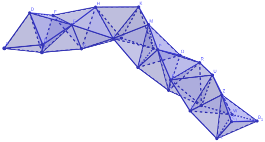


Figure: Serpentin de tétraèdres. Aucun diamant n'est réalisable

Avantages et inconvénients

- 40% plus économe en références que l'état de l'art (i.e SOT)
- Navigation en O(1) et calcul de l'hypersphère d'un sommet en O(d)
- Facilement implémentable
- Sauvegarde plus concise d'un maillage tétraédrique
- Notre structure peut utiliser jusqu'à 4 RPT
- La lecture des tétraèdres afin de créer les diamants est un réel frein

Travail futur

- Rendre la structure dynamique
- Etendre la structure de données à des maillages non tétraédriques