

Tétraèdres en Diamants : Structure de Données Compacte pour Maillages Tétraédriques

Stage de M2 MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique)

Gabriel Beauplet *supervisé par Luca Castelli Aleardi[†]

2 septembre 2019

Le contexte général

Un maillage représente un domaine géométrique en le discrétisant en formes simples. Les maillages permettent de représenter des objets géométriques en 1, 2 ou 3D à des fins scientifiques ou industrielles par exemple. En 2D, les maillages représentent des surfaces et sont constitués de polygones (triangles, carrés...) reliés deux à deux par une arête. On parle de maillages surfaciques. En 3D, les maillages représentent des volumes à l'aide de polyèdres (tétraèdres, pyramides...) partageant une face commune. On parle alors de maillages volumiques. Les maillages sont très utilisés pour la visualisation de volume, calculs de solutions pour des équations aux dérivées partielles... Cependant, ce sont des structures complexes qui peuvent devenir très volumineuses et dont on essaye de réduire la taille mémoire.

Le problème étudié

La compression de données est omniprésente en informatique, avec des formats compressés génériques comme *gzip* mais aussi dédiés comme *mp3* pour les fichiers audio. Ce besoin de compresser les données est grandissant car de plus en plus de fichiers sont stockés à distance sur des serveurs et la moindre économie de stockage a d'importantes répercussions. Néanmoins, sous certains formats compressés, les données originales deviennent inutilisables (ex : *rar*). Cela pose problème quand l'on souhaite accéder aux données sans passer par l'étape de décompression.

Une structure de données est une manière d'organiser les données pour faciliter leur traitement. Les listes, arbres et graphes sont des exemples de structures de données. Leur but n'est pas de limiter l'usage mémoire mais seulement de faciliter l'utilisation des données. Ainsi, pour certains formats volumineux, des structures de données compactes ont été inventées. Ce sont des structures de données compressées, c'est-à-dire des structures de données dont l'utilisation de la mémoire est limitée.

Si l'on revient aux maillages, les algorithmes de compression limitent au maximum l'usage mémoire du maillage et il devient alors inutilisable sous forme compressée tandis que la structure de données prétraite le maillage en réduisant l'usage mémoire mais celui-ci reste utilisable.

Les maillages surfaciques sont majoritairement utilisés car ils sont plus légers, et permettent de représenter implicitement des volumes (la frontière). Par conséquent, de nombreuses structures de données compactes ont été créées afin de faciliter leur utilisation. Les maillages volumiques étant beaucoup moins utilisés pour l'instant, peu de structures de données compactes leur sont dévolues. Néanmoins, leur utilisation croissante incite à procéder de même. La suite de ce rapport sera principalement consacrée aux structures de données compactes pour maillages volumiques tétraédriques.

*LIX, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

[†]LIX, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

La contribution proposée

De manière générale, une structure de données pour maillage stocke trois types d'informations :

- La géométrie, c'est-à-dire les positions des sommets
- La connectivité, les relations d'adjacence entre les tétraèdres
- Des attributs (par sommet, par arête, par face, par tétraèdre)

Elle doit par ailleurs supporter des requêtes simples :

- Quels sont les sommets de la i -ème face ?
- Quel est le degré du i -ème sommet ?
- Quels sont les tétraèdres adjacents au i -ème tétraèdre ?
- ...

Dans ce rapport, nous présentons une structure de données compacte permettant de représenter la connectivité d'un maillage tétraédrique en utilisant en moyenne 2.4 références par tétraèdre. Le principe de notre structure consiste à regrouper les tétraèdres en diamants. Nous exploitons le fait que les tétraèdres puissent être ordonnés autour d'une arête. Cet ordre permet d'omettre des informations de connectivité. Notre structure de données permet l'accès au i -ème sommet, au i -ème tétraèdre en temps constant et à l'hypersphère d'un sommet en temps proportionnel au degré du sommet. Son implémentation est simple et l'utilisation d'un tableau d'entiers afin de représenter les références permet une interopérabilité entre les langages de programmation.

Les arguments en faveur de sa validité

Notre structure de données est en moyenne 40% plus économique que la meilleure structure de données disponible actuellement pour les maillages tétraédriques. Cette économie est purement empirique et nous n'apportons que peu de garanties théoriques concernant la place mémoire occupée par notre structure. La validité de la solution que nous proposons est directement liée aux expériences menées. Par conséquent, afin que nos résultats soient fidèles à la réalité, nous évaluons notre structure sur une dizaine de maillages aux propriétés différentes en prêtant particulièrement attention au temps requis pour la construction, au temps nécessaire pour répondre à de simples requêtes et à la taille mémoire consommée.

Le bilan et les perspectives

Notre structure permet de réduire la taille mémoire de la connectivité du maillage sans utiliser sa géométrie. Par conséquent, cela rend notre approche très générale.

Néanmoins, notre structure de données est statique. Elle ne permet pas de modifier le maillage localement. Rendre notre structure dynamique en permettant l'ajout de sommets ou l'ajout de tétraèdres permettrait une utilisation encore plus étendue.

Par ailleurs, notre structure est destinée aux maillages tétraédriques et plus particulièrement aux variétés tétraédriques. Cependant, les maillages hexaédriques sont souvent préférés aux maillages tétraédriques car ils offrent un meilleur ratio entre précision et temps de calcul. Une autre piste de recherche intéressante serait donc l'extension de notre structure aux maillages hexaédriques.

Remerciements

Je tiens à remercier mon superviseur Luca Castelli Aleardi pour sa précieuse aide ainsi que pour ses très intéressantes pistes de réflexion. Je remercie aussi Olivier Devillers pour ses explications des travaux effectués en compression de maillages.

1 Préliminaires

Ce rapport fait appel à des notions de géométrie. Afin que tous les termes employés soient compris par le lecteur, nous allons en définir certains qui seront employés tout au long de ce rapport.

1.1 Définitions

Simplexe. Un simplexe σ^p de dimension p est l'enveloppe convexe de $p + 1$ points $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$, où $v_i \in \mathbb{R}^n$ et les vecteurs $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots$ sont linéairement indépendants. Les simplexes de dimensions 0, 1, 2 et 3 sont respectivement les sommets, arêtes, triangles et tétraèdres.

Complexe simplicial. Un complexe simplicial est un ensemble K de simplexes d'un espace affine tel que toutes les faces de chaque simplexe de K appartiennent aussi à K et si deux simplexes σ et τ de K sont adjacents alors $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

Variété. Une variété topologique (manifold en anglais) M de dimension n est un espace topologique connexe séparé localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . C'est-à-dire que chaque point de M admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Variété à bord. Une variété à bord est un sous-espace topologique dont les points admettent un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n (les points intérieurs) ou un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ (les points bordants). L'ensemble des points bordants constitue le bord de la variété.

Frontière. Les $(k-1)$ -simplexes d'une k -variété M qui sont incidents à seulement un k -simplexe sont les simplexes frontières. L'ensemble des simplexes frontières est noté ∂M .

Maillage. Un maillage est un complexe simplicial représentant un objet géométrique. Il a la même dimension que l'objet qu'il représente. Ainsi, pour tout objet en 1, 2 ou 3D, les maillages respectifs seront en dimensions 1, 2 ou 3. Dans un maillage de dimension d , les simplexes de dimensions $(d-1)$ sont appelés des facettes. Ainsi, les facettes d'un tétraèdre sont ses faces, les facettes d'une face sont ses arêtes et les facettes d'une arête sont ses sommets.

Le degré. Le degré d'un k -simplexe est le nombre de $(k+1)$ -simplexes adjacents. Ainsi le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes adjacentes et le degré d'une arête est le nombre de faces adjacentes.

Etoile. L'étoile d'un sommet est l'ensemble des k -simplexes adjacents à un sommet. C'est l'ensemble des triangles (resp. tétraèdres) adjacents à un sommet dans le cas surfacique (resp. volumique). Dans ce dernier cas, on appelle cela l'hypersphère.

1.2 Combinatoire

En mathématiques et en optimisation combinatoire, la caractéristique d'Euler χ est un invariant topologique décrivant la forme d'un objet géométrique. Par conséquent, la valeur de χ ne change pas après déformation continue de l'objet géométrique.

$$\chi = \sum_{i=0} (-1)^i |dim(H_i)| = 2 - 2g \quad (1)$$

- H_i est l'ensemble des faces de dimension i
- g est le genre (le nombre de trous de l'objet étudié)

1.2.1 Cas surfacique

Dans le cas surfacique, la formule devient :

$$\chi = |V| - |E| + |F| \quad (2)$$

- V est l'ensemble des sommets
- E est l'ensemble des arêtes

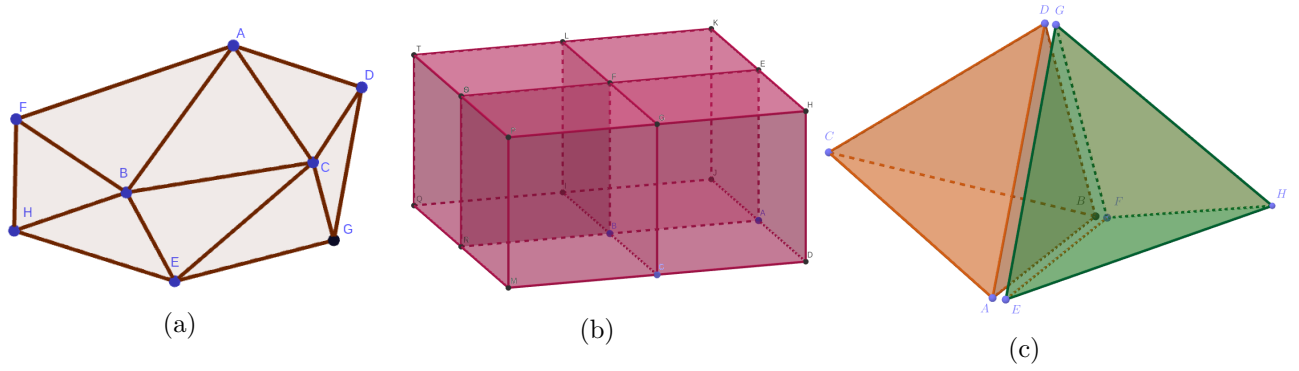


FIGURE 1 – **Gauche** : Graphe planaire ($|V| = 8, |E| = 15, |F| = 9$). **Milieu** : Polyèdre ($|V| = 18, |E| = 33, |F| = 20, |T| = 4$). **Droite** : Deux tétraèdres partageant une face. Un espace a été ajouté entre les deux tétraèdres pour plus de clarté. Une structure de données naïve pour représenter le maillage stockerait pour chacun des deux tétraèdres leurs quatre voisins, leurs quatre sommets puis pour chacun des sommets l'un des tétraèdres adjacents.

— F est l'ensemble des faces (ie. polygones)

Si nous sommes dans le cadre d'une triangulation surfacique et sans trou, alors chaque face est bordée par 3 arêtes et chaque arête n'étant pas sur les bords appartient à 2 faces. Par conséquent $3F \leq 2E$. Ainsi l'équation 2 devient :

$$2 \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E|$$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Il y a donc dans une triangulation surfacique environ 3 fois plus d'arêtes que de sommets.

1.2.2 Cas volumique

Pour un maillage volumique, la formule d'Euler contient un terme de plus :

$$\chi = |V| - |E| + |F| - |T| \quad (3)$$

— T est l'ensemble des polyèdres (tétraèdres, hexaèdres...)

Si l'objet considéré est une variété alors chaque facette qui n'est pas sur les bords du volume est partagée par deux polyèdres, alors :

$$|F| \simeq 2|T| \quad (4)$$

Ainsi :

$$\chi \simeq |V| - |E| + |T| \quad (5)$$

Il y a donc autant d'arêtes que de polyèdres et sommets réunis (Tab. 3).

1.3 Représentation des maillages tétraédriques

Ce rapport se concentre sur les structures de données pour maillages tétraédriques. Comme rappelé dans l'introduction, une structure de données doit fournir une implémentation des opérateurs permettant la navigation et l'accès à la combinatoire du maillage (décrite par les relations d'incidence entre ses éléments). Dans le cas de maillages tétraédriques, il est usuel de disposer des opérations suivantes :

- `incident_face(i, t)` : renvoie la i -ème face du tétraèdre t (pour $i = 0..3$).
- `incident_vertex(v)` : renvoie un des tétraèdres incidents au sommet v .
- `neighbour(i, t)` : renvoie le tétraèdre qui est le i -ème voisin adjacent au tétraèdre t .
- `get_vertex_index(v, t)` : renvoie un entier $i \in \{0 \dots 3\}$, l'indice du sommet v dans le tétraèdre t .

La combinaison de ces fonctions permet de réaliser la quasi-totalité des opérations de navigation locale qui sont effectuées habituellement dans le cadre des procédures de modélisation géométrique et géométrie algorithmique. A titre d'exemple, on peut implémenter de manière efficace les fonctions suivantes :

- **degree**(v) : renvoie le degré d'un sommet v .
- **hypersphere**(v) : renvoie l'hypersphère ou l'étoile d'un sommet v , c'est-à-dire l'ensemble des tétraèdres incidents à v .
- **BFS**(t) : réalise un parcours en largeur du maillage en commençant par le tétraèdre t .

On dit que la structure de données est *indexable* si, de plus, elle permet l'accès en temps constant aux éléments du maillage (ses faces, sommets, ...), par le biais des opérations suivantes :

- **tetrahedron**(i) : donne accès au i -ème tétraèdre,
- **vertex**(i) : donne accès au i -ème sommet.

Ces deux opérations sont parfois importantes dans plusieurs applications : elles permettent, par exemple, d'itérer sur tous les sommets ou tétraèdres, ainsi que de récupérer les attributs qui y sont associés (couleurs, normales, coordonnées, ...).

Implémentation naïve Une solution simple à implémenter (utilisée, entre autres, par la librairie **CGAL** [1]) permettant de représenter un maillage tétraédrique consiste à stocker explicitement les relations d'adjacence entre tétraèdres voisins et les relations d'incidence tétraèdre/sommet. Plus précisément, on stocke pour chaque tétraèdre plusieurs références :

- 4 références par tétraèdre donnant l'accès aux tétraèdres voisins
- 4 références par tétraèdre donnant l'accès aux sommets incidents
- 1 référence par sommet donnant l'accès à l'un de ses tétraèdres incidents

Au total, on comptabilise donc 8 références par tétraèdre et 1 référence par sommet $(8|T| + |V|)$ ¹.

2 Etat de l'art

Nous venons de présenter le fonctionnement d'une simple structure de données pour les maillages tétraédriques. Elle ne peut pas être considérée comme compacte car elle utilise trop de références. Nous allons dans cette partie nous intéresser aux algorithmes de compression et structures de données compactes pour les maillages surfaciques et volumiques. Bien que notre travail soit uniquement centré sur les maillages volumiques, l'essentiel des travaux effectués jusqu'à présent est consacré aux maillages surfaciques.

Que ce soit pour de la compression ou pour une structure de données compacte, on peut réduire la taille mémoire d'un maillage en le simplifiant (supprimant des sommets...), en encodant la géométrie et/ou la connectivité du maillage. Nous ne nous intéresserons ici qu'à la réduction de la taille de la connectivité puisque c'est la plus gourmande en mémoire.

La mesure utilisée pour évaluer la qualité d'une compression est le nombre de bits par sommets (bits per vertex ou bpv) tandis que la mesure utilisée pour évaluer la qualité d'une structure de données compacte est le nombre de références par triangle (resp. tétraèdre) rpt pour les maillages surfaciques (resp. volumiques).

2.1 Maillages 2D

2.1.1 Compression

Bande de triangles. Les bandes de triangles ("triangle strips") et les éventails de triangles ("triangle fans") sont des représentations utilisées pour transférer les maillages de la mémoire centrale du PC vers la mémoire du GPU. Une bande de triangles est une séquence de sommets où chaque nouveau sommet définit un triangle avec les deux précédents sommets. En ce qui concerne les bandes de triangles, le but est de trouver de très longues bandes. Si celles-ci sont suffisamment longues alors, cette représentation permet de passer de $3N$ références aux sommets à $N+2$. L'algorithme de Deering utilise ces bandes de triangles et utilise entre 3.3 et 9.8 bpv [2].

Traversée de triangles. La Cut border Machine [3] est un algorithme de Gumhold qui encode la connectivité en parcourant le graphe en largeur. L'algorithme étend la frontière définie par un triangle initial en traversant itérativement des triangles adjacents. Sept symboles sont utilisés pour préciser si la frontière a été étendue en insérant un nouveau sommet, si la frontière a été séparée ou si deux frontières se sont jointes. Le schéma peut compresser des variétés avec 4 bpv. En revanche, ce résultat est seulement valide pour des maillages réguliers.

1. Lorsqu'on parle de références il peut s'agir, selon le langage de programmation et environnement de travail choisi, de pointeurs (comme en **C/C++**), de références (comme en **Java**), ou d'indices si l'implémentation mise en place fait appel à des tableaux d'entiers (dans ce cas une référence vers un tétraèdre coûtera $\lceil \log_2 |T| \rceil$ bits).

En effet, quand une jointure est effectuée, un décalage doit être fait pour désigner les sommets concernés. Par conséquent, il n'y a pas de borne supérieure garantie pour la compression avec cet algorithme.

L'algorithme EdgeBreaker de Rossignac [4] traverse lui aussi le graphe d'un triangle adjacent à un autre et enregistre la connectivité d'un maillage en produisant les symboles C,L,R,E,S. Cependant, il garantit un coût de 4bpv.

Codage de la Valence. Une manière de décrire la connectivité des sommets est à travers leur valence. Le premier travail sur la valence des sommets est le travail de Touma et Gotsman [5]. Le principe est de considérer la frontière d'un triangle initial et de l'étendre en ajoutant itérativement de nouveaux sommets. La connectivité est encodée en utilisant la valence des nouveaux sommets (concentrée autour de 6). Ainsi, la liste de valences des sommets peut être efficacement compressée par un encodeur d'entropie (2.3 bpv). C'est toujours aujourd'hui l'une des méthodes les plus efficaces.

2.1.2 Structure de données compacte

Plusieurs structures de données permettent une utilisation très facile des maillages et se focalisent sur l'utilisation des arêtes du graphe. C'est le cas d'Half-Edge, Winged-Edge [6] et Quad-Edge qui stockent $19n$ références (soit 9.5 rpt). Elles permettent facilement de naviguer dans le maillage et opèrent des requêtes d'adjacence en temps constant. Cependant, elles occupent trop de place pour être considérées comme compactes.

La Corner Table (CT) est à la base de plusieurs structures de données. Elle utilise deux listes V et O de $3|F|$ entiers chacune où F est l'ensemble des faces du maillage. La table V stocke les incidences triangle/sommet tel-que les 3 sommets bordant un triangle t sont consécutifs ($V[3t], V[3t+1], V[3t+2]$) et sont listés dans un ordre consistant avec le maillage. Ainsi, $V[c]$ représente un coin c associé avec une face f et un sommet. La table O stocke la référence entière du coin opposé. Le coin opposé $o(c)$ au coin c est un coin dans un triangle adjacent qui partage la même arête opposée.

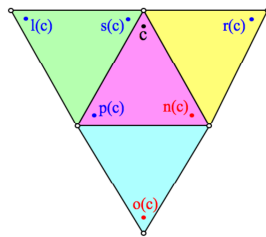


FIGURE 2 – Les opérateurs utilisant les coins pour un maillage triangulaire

VOT. La structure de données VOT (Vertex Opposite Table) est la première structure de données à utiliser cette 'Corner Table'. Elle permet une représentation simple et efficace des maillages avec 6 références par triangle (3 références pour les sommets dans la table V et 3 références pour les coins dans la table O).

SOT. Développée par Rossignac [7] est une amélioration de VOT où la table O est réordonnée et la table V supprimée. Néanmoins, l'accès au coin d'un sommet et à l'étoile d'un sommet sont toujours en temps constant. Cette dernière structure de données utilise 3 rpt en moyenne.

SQUAD. Dans SQUAD [8], les auteurs traversent le graphe en profondeur afin d'appareiller les triangles deux à deux avec l'un de leurs sommets partagés. Cela leur permet d'avoir 4 références par quad (i.e paire de triangles) et donc d'économiser une référence par triangle². Quant aux triangles non appareillés, ils sont déguisés comme des quads. D'autre part, tout comme SOT, ils utilisent l'ordre des quads tel-que le i -ème quad soit associé au i -ème sommet. Dans un maillage surfacique, il y a deux fois plus de triangles que de sommets (cf. 1.2.1). Par conséquent, le nombre de quads et le nombre de sommets devraient être assez proche. Leur structure utilise en moyenne 2 rpt.

2. Ils ne stockent pas la relation d'adjacence entre les deux triangles du même quad

Structure de données	Taille mémoire	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
Basées sur les arêtes (Half-edge, Quad-edge, Winged-edge)	$18n+n$	$O(1)$	$O(1)$	oui
Basées sur les triangles Corner table	$13n$ $13n$	$O(1)$ $O(1)$	$O(1)$ $O(1)$	oui oui
2D catalog [9]	$7.67n$	$O(1)$	$O(1)$	oui
Star vertices [10]	$7n$	$O(d)$	$O(1)$	non
SOT [7]	$6n$	$O(1)$	$O(d)$	non
SQUAD [8]	$(4 + \epsilon)n$	$O(1)$	$O(d)$	non

TABLE 1 – Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages surfaciques. n représente le nombre de sommets.

2.2 Maillages 3D

2.2.1 Compression

Grow&Fold. L’algorithme Grow&Fold [11] combine les idées de l’algorithme Topological Surgery [12] de Taubin et EdgeBreaker [4] de Rossignac. Il construit un arbre couvrant de tétraèdres et un folding string. L’arbre couvrant débute à une face arbitraire et grandit en ajoutant des tétraèdres aux faces externes de l’actuel arbre couvrant. Pour chaque ajout de tétraèdre, 3 bits encodent si d’autres tétraèdres seront attachés aux 3 faces extérieures de ce tétraèdre. Le folding string contient pour chaque triangle externe de l’arbre couvrant un code sur 2 bits permettant de retrouver les relations d’incidence absentes de l’arbre couvrant. L’arbre couvrant contient $|T|$ tétraèdres et il y a $2|T|$ faces externes. Par conséquent, l’usage mémoire est en moyenne de 7 bpt.

Cut Border Machine. La Cut Border Machine pour les maillages volumiques [3] est directement inspirée de celle pour les maillages surfaciques de Gumhold [13]. L’algorithme étend la frontière définie par une face initiale en traversant des tétraèdres adjacents. Dix symboles sont utilisés pour décrire l’entourage de la frontière lors de l’ajout d’un nouveau sommet pour la construction d’un tétraèdre. Leur algorithme permet de compresser les maillages tétraédriques en utilisant 2.4 bpt et s’adapte aux non-variétés.

2.2.2 Structure de données compacte

VOT. La Corner Table a été adaptée par Rossignac aux maillages tétraédriques (VOT). Elle demande 8 rpt (4 pour les sommets et 4 pour les coins opposés). Un index dans ces listes identifie un coin particulier à un tétraèdre. Ainsi, les tables O et V ont toutes les deux $4|T|$ entrées. Les coins de chaque tétraèdre sont consécutifs dans les deux listes (les quatre coins du i -ème tétraèdre sont stockés aux entrées $4i+j$, where $j = 0,1,2,3$) et sont listés dans un ordre cohérent avec l’orientation du tétraèdre (les sommets des coins $j=1,2,3$ apparaissent dans le sens inverse des aiguilles d’une montre depuis le sommet du coin 0).

Bande de Triangles. Weiler et al. [14] encode les tétraèdres en bandes. L’inclusion d’une petite quantité d’informations d’adjacence leur permet d’accéder aux faces voisines en temps constant. Leur algorithme stocke en moyenne 5.1 rpt.

SOT. La dernière structure de données développée est SOT [7] par Rossignac. Elle améliore sa première structure de données VOT en triant la table O et en supprimant la table V. La structure de données utilise 4 références et 9 bits par tétraèdre en moyenne et permet l’accès à l’étoile d’un sommet en temps proportionnel à son degré.

Structure de données	Taille mémoire moyenne	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
VOT	$8t+n$	$O(1)$	$O(1)$	oui
Compact Half Face [15]	$8t+n$	$O(1)$	$O(1)$	oui
Bande de triangles [14]	$5.1t$	$O(1)$	$O(1)$	non
SOT [7]	$4t$	$O(1)$	$O(d)$	non
Tétraèdres en diamants	$2.4t$	$O(1)$	$O(d)$	non

TABLE 2 – Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages volumiques. t représente le nombre de tétraèdres et n le nombre de sommets

3 Notre Contribution : Tétraèdres en Diamants

3.1 Principe général

Notre algorithme s’inspire fortement de SQUAD. Seulement, appairer les tétraèdres deux à deux permet seulement d’économiser deux références par hexaèdre (i.e les deux tétraèdres partageant la même face n’ont plus de références l’un vers l’autre), c’est-à-dire de passer de 4 références par tétraèdre à 3.

L’idée ici est de regrouper les tétraèdres partageant une même arête. On appelle un tel regroupement : **un diamant**. Notre algorithme plusieurs idées :

- Regroupement des tétraèdres comme SQUAD
- Ancrer un sommet avec un diamant comme SOT
- Ordonner les diamants tel-que le i -ème sommet soit au sein du i -ème diamant comme SOT
- Passage d’un tétraèdre à l’autre en utilisant les faces (et non les coins)

Un diamant est un ensemble de tétraèdres adjacents deux à deux, partageant une arête commune et formant un cycle (Fig. 3a). Dès lors que l’ensemble des tétraèdres n’est pas cyclique, la figure géométrique n’est plus un diamant (Fig. 3b).



FIGURE 3 – **Gauche** : Exemple de diamant contenant 5 tétraèdres et dont l’arête centrale commune est AB. **Droite** : Exemple n’étant pas un diamant car les tétraèdres ne sont pas cycliques (bien que tous les tétraèdres partagent la même arête AB)

Au sein d’un diamant, les tétraèdres sont ordonnés. Ainsi, on peut oublier les références de voisinage entre deux tétraèdres du même diamant. Pour les tétraèdres au sein d’un diamant, seules les références vers des tétraèdres extérieurs au diamant sont nécessaires. Un diamant D_i contenant $|D_i|$ tétraèdres a $2|D_i|$ faces extérieures donc $2|D_i|$ références. Sur la Fig. 3a, les faces ABD, ABE, ABG, ABF, ABC n’apparaîtront pas dans notre structure car nous savons implicitement que pour passer d’un tétraèdre à l’autre dans ce diamant, nous utilisons une de ces faces.

3.2 Appariement des tétraèdres en diamants

La première étape consiste à regrouper les tétraèdres en diamants. Un tétraèdre ne peut appartenir qu’à un seul diamant au maximum. On peut ramener ce problème à un problème d’optimisation dans les graphes. En considérant notre maillage tétraédrique comme un graphe (i.e en ne conservant que les arêtes et les sommets), il s’agit de choisir un ensemble E' d’arêtes telles-que deux arêtes de E' n’appartiennent pas au même tétraèdre. Les arêtes candidates pour appartenir à E' sont toutes les arêtes qui ne sont pas situées sur les bords du maillage. Par exemple, sur Fig. 3b, l’arête AB est située sur le bord du maillage et n’est donc pas candidate pour appartenir à E' . Pour chaque arête sélectionnée, le diamant est constitué de tous les tétraèdres possédant cette arête. Tous les tétraèdres n’ayant pas d’arêtes dans E' sont appelés les tétraèdres isolés.

Pour trouver cet ensemble d’arêtes, nous avons essayé plusieurs algorithmes.

3.2.1 Choisir une direction pour chaque sommet

La première méthode consiste à prendre pour chaque sommet, une arête dans une direction prédéfinie. Néanmoins, cette méthode a deux inconvénients majeurs : deux arêtes peuvent être choisies et appartenir au même tétraèdre et elle utilise la géométrie du domaine (et donc peut sembler moins générique). Nous avons donc choisi de ne pas utiliser cette méthode.

3.2.2 Optimisation aléatoire

Notre problème s'exprime facilement comme un problème d'optimisation combinatoire en nombres entiers. Malheureusement, la résolution de ces problèmes est NP-difficile, ce qui signifie qu'aucun algorithme ne peut trouver une solution optimale en temps polynomial. Néanmoins, on peut utiliser des algorithmes d'optimisation aléatoire afin de trouver une solution approchée. Ce sont des algorithmes très utilisés en pratique qui visitent plus ou moins aléatoirement l'espace des solutions.

Soit f la fonction aléatoire à maximiser, l'idée est de partir d'une solution initiale x et tant que la condition d'arrêt n'est pas remplie, de créer une solution y à partir de x puis de remplacer x par y si $f(y) > f(x)$.

Dans notre cas, une solution est un ensemble d'arêtes. Elle est faisable si pour toute paire d'arêtes de notre solution, aucunes n'appartiennent au même tétraèdre. On peut donc matérialiser notre solution comme un vecteur de 0 et 1 pour chaque arête du graphe (1 si l'arête appartient à la solution, 0 sinon). Pour calculer la valeur de notre solution, on ajoute pour chaque arête de la solution le nombre de tétraèdres utilisant l'arête et si deux arêtes appartiennent au même tétraèdre alors on inflige une pénalité en soustrayant le nombre de tétraèdres adjacents à ces deux arêtes. L'inconvénient majeur de cet algorithme est sa lenteur. Il permet de trouver des solutions quasi optimales pour des maillages avec quelques milliers d'arêtes rapidement mais ne permet pas de trouver des solutions convenables au-delà dans un temps raisonnable. Nous avons donc décidé de ne pas retenir cette solution.

3.2.3 Choisir l'arête de degré maximum

Le degré d'une arête est le nombre de tétraèdres possédant cette arête. Une heuristique très simple consiste à prendre en priorité les arêtes ayant un degré important. C'est un algorithme glouton dans la mesure où seulement la récompense immédiate nous intéresse. Il est nécessaire de trouver l'arête maximum à chaque itération de l'algorithme et cela a pour conséquence un temps d'exécution relativement long.

3.2.4 Parcours en largeur des tétraèdres

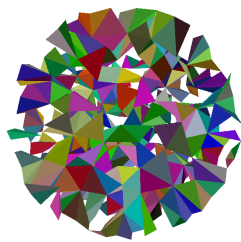
La troisième approche consiste à parcourir le maillage en largeur. On choisit un tétraèdre au début de l'algorithme puis on regarde pour chacune de ses arêtes si les tétraèdres partageant cette arête forment un diamant et qu'aucun n'appartienne déjà à un diamant. Si ces deux conditions sont remplies, on crée un nouveau diamant avec cette arête centrale. Puis on ajoute à la file les tétraèdres adjacents et non visités au tétraèdre choisi. On exécute ainsi cet algorithme tant que la file n'est pas vide.

Function `Parcours_en_largeur(Tétraèdre t)` :

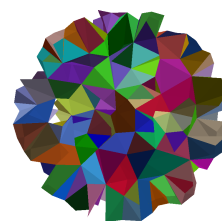
```

Soit F une file;
F.ajouter(t);
while F n'est pas vide do
    t = F.défiler();
    for arête e dans t do
        if e forme un diamant then
            if aucun des tétraèdres ayant e n'appartient à un diamant then
                Créer un diamant avec e comme arête centrale;
    Marquer t;
    Ajouter voisins de t non marqués à Q;
```

Algorithm 1: Parcours en largeur du maillage avec un tétraèdre de départ t



(a)



(b)

FIGURE 4 – **Gauche** : Vue de coupe des tétraèdres isolés après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un tétraèdre isolé. **Droite** : Vue de coupe des diamants après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un diamant.

Sur Fig. 4a, on note une certaine homogénéité des tétraèdres isolés. En analysant plus spécifiquement la concentration des tétraèdres isolés, on remarque sur la Fig. 5 qu'ils sont particulièrement situés sur les bords et dans des régions à courbures³.

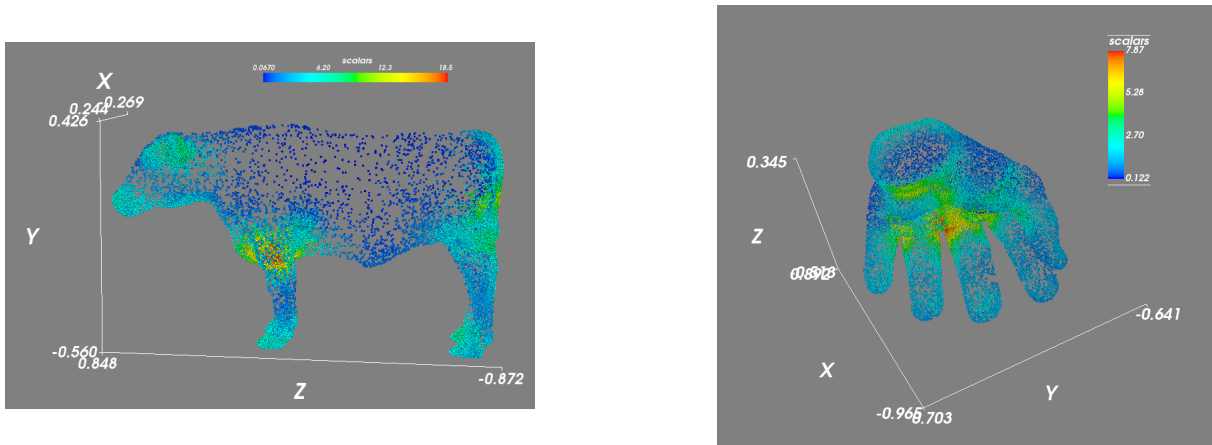


FIGURE 5 – Distribution des tétraèdres isolés. Chaque point représente le barycentre d'un tétraèdre et sa couleur indique la densité (le nombre de tétraèdres isolés à proximité).

Choix du tétraèdre de départ Suivant le premier tétraèdre choisi pour lancer l'algorithme de parcours en largeur (Fig. 6), le taux de tétraèdres appareillés dans des diamants varie peu (1% d'écart). Il semble néanmoins plus intéressant de commencer par les régions étroites.

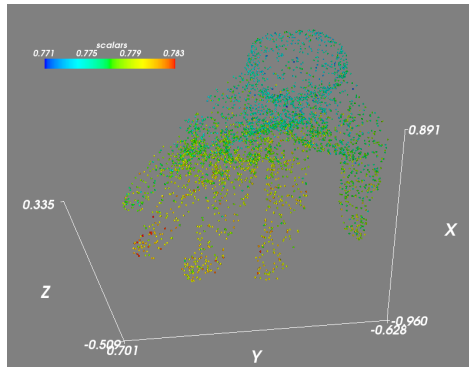


FIGURE 6 – Performance de l'algorithme de parcours en largeur en fonction du tétraèdre de départ.

3.3 Choisir l'ancre

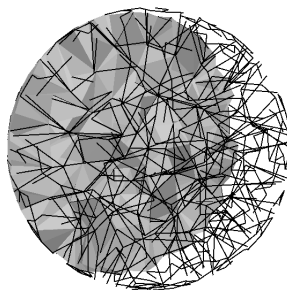


FIGURE 7 – Vue de coupe d'une tétraédrisation d'une boule avec affichage des arêtes centrales de tous les diamants

Le but de cette section est d'associer chaque sommet à un diamant ou un tétraèdre isolé. On dit qu'un diamant

3. Afin que la densité ne soit pas biaisée, nous avons soustrait la densité originale du maillage. Le fait qu'une région soit plus densément peuplée en tétraèdres n'influence donc pas le résultat.

ou un tétraèdre isolé est libre s'il n'est pas ancré avec un sommet. Voici les règles pour l'association.

- Un diamant ne peut être associé qu'à un des deux sommets de son arête centrale
- Un tétraèdre isolé peut être associé à n'importe lequel de ses quatre sommets
- On associe en priorité les sommets à des diamants afin de calculer plus rapidement le degré du sommet

Les différents cas possibles pour l'association des sommets sont les suivants :

- Le sommet est adjacent à l'arête centrale d'un diamant libre. On associe le sommet au diamant.
- Le sommet n'est adjacent à aucune arête centrale d'un diamant libre mais il est adjacent à un tétraèdre isolé libre. Alors on associe le sommet à ce tétraèdre libre.
- Le sommet n'est adjacent à aucune arête centrale de diamant libre ni à un tétraèdre isolé libre mais est adjacent à un diamant (i.e mais pas par son arête centrale). On 'explose' alors le diamant, c'est-à-dire qu'on fait comme s'il n'était constitué que de tétraèdres isolés. Sur la Fig. 8a, le sommet F n'est pas sur une arête centrale. Si le diamant est déjà associé au sommet A (resp. B) alors on explose le diamant. On peut alors associer le sommet F (Fig. 8b) aux tétraèdres ABFG ou ABFC et le sommet A (resp. B) aux tétraèdres ACDB ou ADEB ou ABEG.



FIGURE 8 – **Gauche** : Diamant contenant 5 tétraèdres dont l'arête centrale est le segment AB et ancré au sommet A. **Droite** : 5 tétraèdres isolés (chaque couleur est un tétraèdre différent)

Afin d'ancrer les sommets aux diamants/tétraèdres isolés, nous appliquons un algorithme glouton affectant en priorité les sommets adjacents à peu d'arêtes centrales et de tétraèdres isolés. Puis si nécessaire, nous explosons des diamants afin que tous les sommets soient appareillés avec des diamants/tétraèdres isolés différents.

3.4 Organisation des diamants, tétraèdres et sommets

Les diamants sont construits et les sommets sont appareillés avec des diamants ou des tétraèdres isolés. Nous allons désormais apporter des précisions sur la manière dont sont ordonnés les diamants, tétraèdres et sommets.

Ordre des tétraèdres dans un diamant Au sein d'un diamant les tétraèdres sont ordonnés de manière purement arbitraire (Fig. 9a). La seule condition est que deux tétraèdres adjacents doivent avoir un ordre consécutif modulo le nombre de tétraèdres dans le diamant (ex : dans un diamant contenant 5 tétraèdres, le troisième tétraèdre doit être adjacent au deuxième tétraèdre et au quatrième).

Ordre des faces dans un diamant L'ordre des faces dans un diamant respecte celui des tétraèdres. Pour le i -ème tétraèdre dans un diamant, ses faces extérieures seront les faces $2i$ et $2i + 1$. Si un diamant est associé à un sommet alors les faces paires sont adjacentes à l'ancre. Sur la Fig. 9a, l'ordre des faces est donc : ACD,BCD,ADE,BDE,AGE,BGE,AFG,BFG,AFC,BFC.

Ordre des faces dans un tétraèdre isolé Les faces d'un tétraèdre isolé sont ordonnées de manière arbitraire. Seulement, si le tétraèdre isolé est ancré à un sommet, alors la première face doit être la face opposée à l'ancre.

Ordre des sommets dans les diamants Tout comme les tétraèdres, les sommets peuvent être ordonnés au sein d'un diamant. Un diamant D_i possédant $|D_i|$ tétraèdres contient $|D_i| + 2$ sommets. On ordonne d'abord les sommets situés entre deux faces (les sommets D,E,G,F,C sur la Fig. 9a), puis les deux sommets communs à toutes les faces (les sommets A et B sur la Fig. 9a). Le classement entre ces deux derniers n'est pas important car on ne compare jamais l'ordre de ces deux sommets.

Ordre des sommets dans les tétraèdres isolés Au sein d'un tétraèdre isolé, les sommets sont ordonnés tel que le i -ème sommet est opposé à la i -ème face. Si un sommet est associé au tétraèdre alors ce sommet est opposé à la première face.



FIGURE 9 – **Gauche** : Diamant contenant 5 tétraèdres ordonnés, dont l'arête centrale est AB et ancré au sommet A. L'ordre des tétraèdres est indiqué en noir. L'ordre des sommets est : C,D,E,G,F,A,B. **Droite** : Un diamant partage une face avec un tétraèdre isolé. En vert est l'ordre des faces du tétraèdre isolé (face 0 : DCH, face 1 : ACH, face 2 : ADH, face 3 : ADC). L'ordre des sommets du tétraèdre est A,D,C,H et celui du diamant est C,D,E,G,F,A,B. La permutation des sommets pour la face ADC est $\tau = (2, 1, 0)$. L'ordre des sommets dans la face opposée est donc C,D,A.

3.5 Identification des sommets partagés par des tétraèdres adjacents

Avec la structure naïve décrite dans la partie 1.3, chaque tétraèdre possède 4 références vers ses 4 sommets incidents. Ainsi, étant donné un tétraèdre t , l'implémentation de la fonction `get_vertex_index(v, t)` nécessite juste la comparaison de v avec 4 indices (ou références). Cela permet, entre autres, de retrouver en temps constant les sommets communs à deux tétraèdres adjacents.

Ici, par souci d'économie, nous ne souhaitons pas stocker de références des tétraèdres vers leurs sommets : nous utilisons juste l'ordre des diamants et des tétraèdres isolés afin de représenter la relation d'incidence sommet/tétraèdre (comme décrit dans 3.3). Or, ce type d'information est crucial lors de la navigation entre tétraèdres adjacents : l'implémentation d'opérations telles que `degree(v)` et `hypersphere(v)` nécessitent l'identification d'un sommet afin de parcourir les faces opposées deux à deux aux tétraèdres incidents à ce sommet. Cette limitation est illustrée par la Fig. 9b : lors du passage du tétraèdre isolé ACDH au diamant adjacent (ancré en AB) via la face ACD, on perd l'identification des sommets A, C, D. Ce problème, commun aussi à la structure de données SOT [7], peut être résolu à l'aide de permutations : pour chaque face (appartenant à un diamant ou à un tétraèdre isolé), on stocke un triplet de permutations (stocké sur 3 bits) permettant de retrouver l'indice des sommets partagés par les deux entités opposées. Comme illustré par la Fig. 9b, pour calculer la permutation vue du tétraèdre isolé de la face CAD, il suffit de comparer l'ordre des sommets du tétraèdre isolé et du diamant. Si l'on garde seulement les 3 sommets qui de cette face dans les deux classements des sommets, on a : A,D,C et C,D,A. La permutation est donc (2,1,0). Bien entendu, la permutation pour la même face du point de vue du diamant est la même. Il y a $3! = 6$ permutations possibles des sommets d'une face et donc 3 bits par face sont nécessaires pour représenter ces permutations.

3.6 Description de la structure

Désormais, nos diamants sont formés, les sommets sont associés à des diamants (ou des tétraèdres isolés) et les permutations sont calculées pour chaque face du maillage. Nous introduisons quelques notations :

- D l'ensemble des diamants
- T_D l'ensemble des tétraèdres appartenant à des diamants
- T_i l'ensemble des tétraèdres isolés

— F_e l'ensemble des faces des tétraèdres isolés et des faces extérieures des diamants où $|F_e| = 2 \cdot |T_D| + 4 \cdot |T_i|$

La structure que nous proposons est un tableau A de taille $|F_e|$. Le tableau contient des entiers représentant les indices des faces. Ainsi A[i] indique l'indice dans le tableau de la face opposée⁴ à la i -ème face. Si la i -ème face est sur le bord du volume alors A[i]=-1.

Un diamant contenant 4 tétraèdres occupera 8 cellules dans le tableau (car il a 8 faces extérieures) et un tétraèdre isolé en occupera 4. Les diamants et tétraèdres isolés sont réordonnés de telle manière que le i -ème sommet soit ancré au i -ème diamant/tétraèdre isolé. Etant donné qu'il y a plus de diamants que de sommets, seuls les $|V|$ premiers diamants/tétraèdres isolés sont réordonnés.

Par ailleurs, pour savoir quand on passe d'un diamant à un autre, nous utilisons des bits de service⁵ (1 ou 0) pour chaque face. Une face contient un 1 si c'est la première face d'un diamant/tétraèdre isolé, 0 sinon. Finalement, afin de pouvoir tourner facilement autour d'un sommet, nous utilisons 3 bits de service par face pour représenter la permutation des sommets entre ces deux faces.

Pour résumer, voici notre structure de données :

- Un tableau A de taille $|F_e|$
- Un bit de service par face afin de savoir si une face est la première d'un diamant ou d'un tétraèdre isolé
- 3 bits de service par face afin de représenter la permutation des sommets entre deux faces

	1 er diamant								1 er tétraèdre isolé				2 ème tétraèdre isolé				3 ème tétraèdre isolé			
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A[i]	-1	281	202	758	854	829	239106	307	865	12	289	-1	9	863	239086	-1	861	385	380	239084
1 bit de service	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
3 bits de service	0,0,0	1,0,2	2,0,1	0,2,1	2,0,1	2,0,1	2,1,0	1,0,2	1,0,2	0,1,2	0,1,2	0,0,0	0,1,2	1,0,2	1,0,2	0,0,0	2,0,1	1,0,2	1,0,2	1,0,2

FIGURE 10 – Notre structure est constituée d'un tableau A contenant les indices des faces opposées, d'un bit de service permettant de savoir si une face est la première d'un diamant ou d'un tétraèdre isolé, et de trois autres bits de service afin de connaître la permutation des sommets entre deux faces. Dans cet exemple, la face 0 est sur le bord et la face 1 est opposée à la face 281. La permutation de la face 1 du premier diamant (1,0,2) indique que le premier et second sommet de cette face sont inversés dans la face opposée.

3.7 Implémentation des requêtes et des opérations de navigation

Notre structure de données permet de réaliser des requêtes simples et courantes sur le maillage. Nous détaillons dans cette partie comment ces requêtes ont été implémentées et la complexité pour chacune d'elles.

3.7.1 Incidences et indexabilité

Accès aux faces Pour accéder à la i -ème face, il suffit d'accéder à la cellule A[i] dans laquelle se trouve l'indice de la face opposée à la i -ème face. L'accès est donc en temps $O(1)$.

Accès aux tétraèdres Pour accéder au i -ème diamant ou tétraèdre isolé⁶, il suffit de parcourir le tableau A et de regarder pour chaque face si le premier bit de service vaut 1. On s'arrête alors dès que l'on a parcouru i faces dont la valeur du premier bit de service est 1. En utilisant une représentation efficace de *Bit-vectors* [16] muni de *Rank and Select*⁷, la complexité de la fonction `tetrahedron(i)` est $O(1)$.

4. Deux faces sont opposées si elles partagent les 3 mêmes sommets

5. Un bit de service est un bit permettant de faciliter une opération. Il prend si peu de place qu'on ne le considère pas comme une référence (qui est souvent codée sur 32 bits)

6. Lors du regroupement des tétraèdres en diamants, l'ordre des diamants n'est plus le même que l'ordre initial (à la lecture du fichier OFF). Néanmoins, on peut re-ordonner les tétraèdres dans le fichier original afin que l'ordre des tétraèdres soit les mêmes. De cette manière on peut accéder au i -ème tétraèdre en $O(1)$.

7. Dans un tableau de bits $B[0..n-1]$, $rank(x) = |\{k \in [0..x] : B[k] = 1\}|$ et $select(x) = \min\{k \in [0..n-1] : rank(k) = x\}$

Parcourir les tétraèdres d'un diamant. Les faces au sein d'un diamant sont ordonnées. Les faces consécutives dans le tableau (modulo la taille du diamant) sont adjacentes dans le diamant. Par conséquent, pour accéder aux faces du jème tétraèdre d'un diamant D_i , il suffit d'aller aux faces d'indices $2j$ et $2j + 1$ (modulo $|D_i|$). La complexité est $O(1)$.

Accès aux sommets et aux incidences tétraèdre/sommet Bien que nous ne stockions pas les sommets de manière explicite (nous ne stockons que les faces), nous sommes en mesure de localiser le i -ème sommet car il est adjacent au i -ème diamant/tétraèdre isolé. Il suffit donc d'accéder au i -ème diamant/tétraèdre isolé. Si c'est un diamant, alors le sommet est adjacent à toutes les faces paires du diamant. Si c'est un tétraèdre isolé, alors le sommet est opposé⁸ à la première face et est donc adjacent aux trois autres faces. La complexité est la même que pour accéder au i -ème diamant/tétraèdre isolé, $O(1)$.

3.7.2 Navigation entre faces et autour des sommets

Degré et hypersphère d'un sommet. Calculer le degré d'un sommet est compliqué⁹. On sait que le i -ème sommet est adjacent au i -ème diamant/tétraèdre isolé. Si celui-ci est un diamant alors toutes les faces paires de celui-ci sont adjacentes au sommet ciblé. Si c'est un tétraèdre isolé, alors le sommet ciblé est opposé à la première face et est donc adjacent aux trois autres faces. Pour chaque face adjacente au sommet on accède à la face opposée en utilisant notre tableau A. En utilisant les permutations entre deux faces, nous sommes en mesure de savoir où se situe notre sommet dans la face opposée. Ainsi, nous pouvons accéder aux faces adjacentes au sommet dans ce nouveau diamant/tétraèdre isolé. Pour chaque diamant/tétraèdre isolé, on utilise un bit de service afin de savoir si celui-ci a déjà été visité¹⁰. On arrête de parcourir les faces quand tous les diamants et tétraèdres isolés adjacents au sommet ont été visités. La complexité est donc $O(d)$.

Retrouver l'indice d'un sommet Retrouver l'indice d'un sommet est une procédure courante. En effet lorsqu'on est sur une face, on peut vouloir connaître les indices des trois sommets qui la composent. Pour connaître l'indice d'un sommet, on calcule son hypersphère. Puis pour chaque diamant ou tétraèdre isolé dans l'hypersphère dont l'indice de la première face est inférieur à la limite¹¹, on calcule alors l'hypersphère du sommet ancré. Il suffit de comparer l'hypersphère de notre sommet cible avec les hypersphères des sommets ancrés et de renvoyer l'indice du sommet ayant la même hypersphère. Cette opération peut s'avérer néanmoins très coûteuse. La complexité pour calculer l'hypersphère d'un sommet est $O(d)$. En utilisant notre algorithme pour appareiller les tétraèdres en diamants, les sommets sont en moyenne adjacents à 8 diamants/tétraèdres isolés. Seulement parmi ces 8 diamants/tétraèdres isolés, en moyenne 65%¹² auront un indice inférieur à la limite. Par conséquent, retrouver l'indice d'un sommet nécessite de calculer en moyenne 6 ($0.65 \cdot 8 + 1$) hypersphères.

Parcours en largeur du graphe. Parcourir en largeur le graphe est plus facile. Il suffit d'utiliser une file et un bit de service pour chaque tétraèdre afin de savoir si celui-ci a été visité. Le passage d'un tétraèdre à l'autre est rendu très facile grâce à notre tableau représentant les faces adjacentes. La complexité est donc la même que dans le maillage original : $O(|T|)$.

3.8 Un nouveau format de stockage

Les fichiers OFF encodent d'abord les coordonnées géométriques de chaque sommet puis les indices des 4 sommets de chaque tétraèdre. Ils sont ainsi très faciles à manipuler mais ne sont pas concis (un sommet apparaît en moyenne 22 fois dans une tétraédrisation). L'idée de cette section est de tirer avantage de notre appariement des tétraèdres en diamants afin de sauvegarder les maillages dans un format plus succinct.

Encodage de la structure Comme exprimé dans la partie 3.7.2, un sommet dans notre structure est adjacent en moyenne à 8 diamants/tétraèdres isolés. Par conséquent, plutôt que de décrire pour chaque tétraèdre les 4 indices des 4 sommets, nous pouvons encoder les indices des sommets composant un diamant. Les sommets sont ordonnés dans un diamant (3.4). Ainsi, en ayant juste l'ordre des sommets, nous sommes en mesure

8. Dans un tétraèdre, un sommet est opposé à une face s'il ne fait pas partie de celle-ci)

9. Le pseudo code est en appendices

10. Nous omettons ce bit de service car il y en a en moyenne $\frac{|Diamants| + |Tétraèdres isolés|}{|Tétraèdres|} \simeq 0.5$ par tétraèdre

11. La limite est l'index à partir duquel les diamants et tétraèdres isolés ne sont plus associés à des sommets

12. $\frac{|Diamants| + |Tétraèdres isolés|}{|V|}$

de retrouver les faces (la première face est bordée par le premier, le deuxième et l’avant-dernier sommet). Cependant, notre structure ne stocke pas implicitement les sommets. Nous savons seulement que le i -ème sommet est adjacent au i -ème diamant/tétraèdre isolé. Néanmoins, en calculant l’hypersphère d’un sommet, nous informons les faces adjacentes qu’elles possèdent ce sommet. En faisant ainsi pour tous les sommets du maillage, nous associons alors à chaque face ses 3 sommets bordants.

Il est alors facile de retrouver l’ordre des sommets dans un diamant à partir des sommets bordants chaque face du diamant. Il suffit de prendre tous les sommets qui apparaissent exactement deux fois dans toutes les faces (i.e les sommets qui n’appartiennent pas à l’arête centrale). Puis de les ordonner afin qu’ils décrivent un cycle. Par exemple, sur la Fig. 9a, à partir du calcul de l’hypersphère de chaque sommet, nous saurions alors que :

- Les faces 0 et 1 contiennent les sommets C et D
- Les faces 2 et 3 contiennent les sommets E et D
- Les faces 4 et 5 contiennent les sommets G et E
- Les faces 6 et 7 contiennent les sommets F et G
- Les faces 8 et 9 contiennent les sommets C et F

Trouver l’ordre des sommets est alors aisé. On commence par trouver le sommet commun à la première et dernière face (i.e C), puis le sommet commun à la première et deuxième face (i.e D) et ainsi de suite pour finalement obtenir : C,D,E,G,F,A,B (les deux derniers sommets sont communs à toute les faces).

Écriture dans un fichier L’écriture dans un fichier suit le même procédé que pour les fichiers OFF. Nous écrivons d’abord les coordonnées géométriques de chaque sommet. Puis nous écrivons pour chaque diamant et tétraèdre isolé l’ordre de ses sommets.

Ouverture du fichier L’ouverture est similaire à l’encodage du maillage. Pour chaque diamant, l’ordre des sommets nous permet de connaître les faces. Pour chaque tétraèdre isolé, l’ordre n’est pas important étant donné que tous les sommets d’un tétraèdre sont adjacents.

Résultats En théorie comme en pratique, notre structure nous permet de réduire en moyenne la taille du fichier OFF de 44% ($\frac{8}{18}$).

3.9 Encodage des références

En ce qui concerne le choix d’implémentation des références, nous avons utilisé un tableau A stockant des entiers sur 32 bits. Bien que nous ayons pu inclure les 4 bits de services dans les 32 bits de chaque entier, nous avons préféré utiliser deux tableaux annexes pour représenter ces bits de service. Le premier bit de service est stocké dans un tableau de booléens et les 3 autres bits de service sont stockés dans un tableau d’entiers. En codant les indices dans le tableau A sur 28 bits et en utilisant les 4 derniers bits comme bits de service, nous pouvons encoder des maillages ayant jusqu’à $2^{28} = 268$ millions de faces.

4 Résultats

4.1 Procédure d’évaluation

Afin d’évaluer les performances de notre structure de données en matière de ressources mémoires ainsi qu’en vitesse de navigation, nous avons implémenté la totalité des procédures décrites dans ce rapport et effectué une comparaison avec d’autres structures de données existantes.

Tout le code est implémenté en C++ natif, sans l’aide d’aucune bibliothèque extérieure. Le code source est compilé avec g++ sous Elementary OS. Tous les algorithmes ont été exécutés sur une machine avec un processeur i5-5300U et 16Go de RAM. L’ensemble du code est open-source et disponible sur github : <https://github.com/beaupletga/3D-Mesh-Compression>.

Pour effectuer nos tests, nous avons choisi une dizaine de maillages avec des formes, des tailles, et des tétraédrisations différentes (Fig. 11). Les boules ont été générées avec CGAL [1] en utilisant le module de génération de sphères implicites. Les autres tétraédrisations ont été pris le site *Aim@Shape*. Nous ne présentons les résultats de nos algorithmes que sur 8 de ces maillages.



FIGURE 11 – Exemples de maillages tétraédriques utilisés pour évaluer notre structure de données.

Nom de la structure	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes	Nombre de tétraèdres	Part de tétraèdres sur les bords	Nombre de tétraèdres par sommet	Nombre d'arêtes par sommet
Boule (B1)	1k	5k	3k	0.45	13.52	10.32
Boule (B2)	15k	101k	83k	0.07	22.15	13.45
Boule (B3)	378k	2M	2.2M	0.05	23.70	13.98
Boule (B4)	1.3M	9.5M	8.1M	0.01	24	14
Boule (B5)	1.7M	12.1M	10.3	0.01	24.03	14.01
Vache (V1)	30k	182k	134k	0.24	17.48	11.82
Main (M1)	28k	169k	125k	0.24	17.38	11.74
Crane (C1)	37k	217k	156k	0.30	16.51	11.52

TABLE 3 – Caractéristiques des maillages tétraédriques utilisés pour évaluer notre structure

4.2 Appariement des tétraèdres en diamants

On peut évaluer l'appareillage des tétraèdres en diamants en regardant la part des tétraèdres dans des diamants ou en calculant le nombre de références par tétraèdre (rpt). On calcule ce dernier de cette manière :

$$\text{rpt} = \frac{2 \cdot T_D + 4 \cdot T_i}{|T|} \quad (6)$$

Nom de la structure	Parcours en largeur			Degré de l'arête		
	Part des tétraèdres dans des diamants (%)	RPT	Temps (s)	Part des tétraèdres dans des diamants (%)	RPT	Temps (s)
B1	76	2.69	0.03	81	2.36	0.47
B2	80	2.39	1.02	85	2.29	497
B3	81	2.37	39.79			
B4	82	2.35	150			
B5	82	2.35	172			
V1	77	2.44	1.56	81	2.36	922
M1	77	2.44	1.26	83	2.34	794
C1	77	2.44	1.48	80	2.38	1262

TABLE 4 – Résultats des algorithmes d'appareillage des tétraèdres en diamants. Le deuxième algorithme ayant des temps de calcul assez importants, certains maillages n'ont pas pu être considérés.

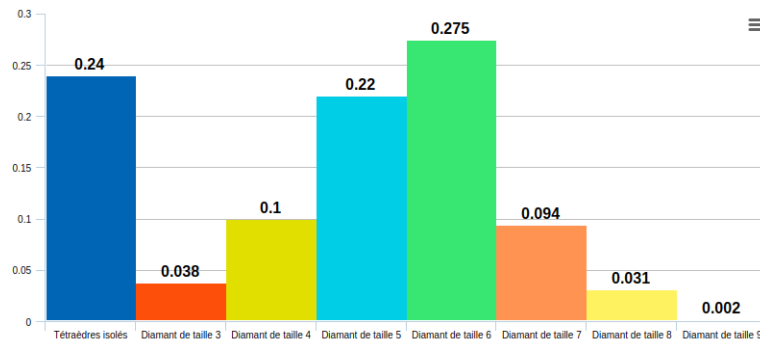


FIGURE 12 – Histogramme de la part de tétraèdres parmi les tétraèdres isolés et diamants en utilisant le parcours en largeur

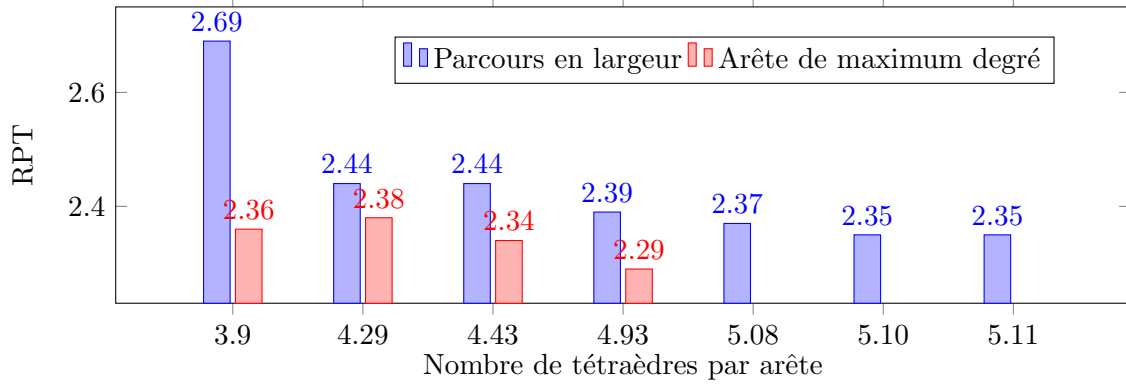


FIGURE 13 – Nombre de références par tétraèdre (rpt) en fonction du nombre de tétraèdres par arête

On note sur la Fig. 13 qu'il semble avoir un lien entre le nombre de tétraèdres par arête et les performances de nos algorithmes de création de diamants. Ce comportement ne semble pas étonnant étant donné que plus le nombre de tétraèdres par arête est important, plus les diamants peuvent contenir un nombre important de tétraèdres. Compte tenu des résultats de Tab. 4, nous avons choisi d'utiliser le parcours en largeur pour appareiller les tétraèdres en diamants. Le parcours en largeur est rapide et permet d'associer en moyenne 76% des tétraèdres en diamants. Néanmoins, notre algorithme pourrait probablement être amélioré en étant exécuté en parallèle ou en choisissant plus spécifiquement un tétraèdre de départ (Fig. 6). On remarque que 50% des tétraèdres sont dans des diamants possédant 5 ou 6 tétraèdres (Fig. 12).

4.3 Ancrage des sommets

Nom de la structure	Part de sommets non associés avec des diamants ou tétraèdres isolés (%)	Part de tétraèdres dans des diamants avant choix des ancrs (%)	Part de tétraèdres dans des diamants après choix des ancrs (%)
B1	6	76	65
B2	0.08	80	80
B3	0.03	82	82
B4	0.01	82	82
B5	0.02	82	82
V1	0.8	77	76
M1	0.7	77	76
C1	0.8	77	76

TABLE 5 – Résultats de l'ancrage des sommets aux diamant/tétraèdres isolés en utilisant un algorithme glouton affectant en priorité les sommets adjacents à peu de diamants/tétraèdres isolés

On remarque sur le Tab. 5 qu'en appliquant l'algorithme glouton afin d'appareiller sommets et diamants/tétraèdres isolés, une part minime des sommets demeure non ancrée (1ère colonne). Par ailleurs, on note que la destruction de certains diamants pour associer des sommets à des tétraèdres n'a que peu d'incidence sur la part de sommets ancrés tant que le nombre de sommets est important (2ème et 3ème colonnes).

4.4 Les requêtes

Pour évaluer le temps nécessaire pour répondre à une requête, nous évaluons celle-ci après 10 000 essais aléatoires. Les temps sont obtenus en utilisant l’optimisation ‘-O3’ de C++.

Nom de la structure	Accès au i -ème tétraèdre (s)	Accès au i -ème diamant (s)	Degré d’un sommet (s)	Parcours en largeur (s)	Parcours en largeur normalisé ¹³ (s/tétraèdre)
B1	1e-5	5e-6	1.9e-5	6e-4	1.67e-7
B2	4.1e-4	1.6e-4	1.2e-4	0.01	1.19e-7
B3	0.011	0.0042	0.002	0.8	3.56e-7
B4	0.01	0.01	0.01	4.6	5.6e-7
B5	0.04	0.01	0.01	4.46	4.3e-7
M1	6.4e-4	2.6e-4	2.2e-4	0.02	1.59e-7
C1	8.1e-4	3.4e-4	2.8e-4	0.02	1.28e-7

TABLE 6 – Temps requis (s) pour répondre aux requêtes sur plusieurs maillages

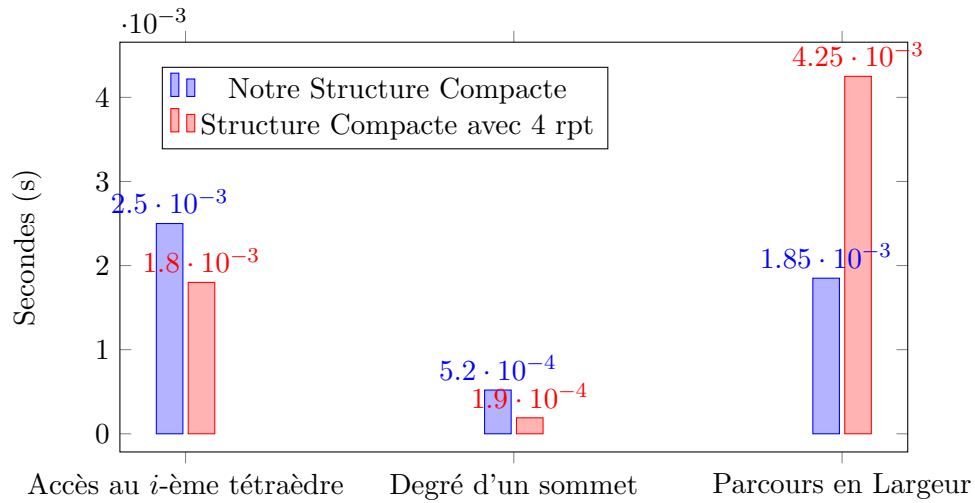


FIGURE 14 – Comparaison des temps moyens (s) requis pour répondre aux requêtes et effectuer la navigation dans le maillage. Notre structure de données compacte (en bleue) est comparée à une structure de données compacte utilisant 4 rpt (i.e SOT). Le temps pour le parcours en largeur est normalisé pour 100K tétraèdres.

Sur Fig. 14, on constate que les temps de calcul de notre structure de données compacte sont moins bons pour l’accès au i -ème tétraèdre et le calcul du degré d’un sommet¹⁴. Etant donné que dans notre structure de données, le i -ème tétraèdre est plus proche du début du tableau que dans la structure à 4 rpt, le résultat devrait être l’inverse. De la même manière, pour le calcul du degré d’un sommet, sachant que les tétraèdres sont regroupés en diamants dans notre structure, le degré devrait être plus rapidement calculé. Nous expliquons ces deux écarts par les comparaisons effectuées dans les requêtes. En effet, lorsque nous voulons calculer le degré d’un sommet, si le sommet est adjacent à un tétraèdre isolé, alors il suffit de localiser la face du tétraèdre isolé non adjacente au sommet puis de naviguer au sein des trois autres faces. En revanche, lorsque notre sommet est adjacent à un diamant, davantage de comparaisons sont nécessaires afin de connaître les faces adjacentes au sommet. Cette supposition est confirmée en analysant les temps requis pour le parcours en largeur du graphe. Lorsque nous effectuons un parcours en largeur du graphe, aucune comparaison (utilisant les permutations des sommets) n’est nécessaire, il suffit seulement d’accéder au diamant/tétraèdres adjacents. Sachant que les tétraèdres sont regroupés en diamants dans notre structure, en accédant à un diamant D_i , on accède directement au $|D_i|$ tétraèdres le composant, gagnant un temps non négligeable.

13. Par rapport au nombre de tétraèdres

14. Nous n’affichons pas le temps d’accès au i -ème diamant car la structure de données compacte à 4 rpt ne réunit pas les tétraèdres en diamants

4.5 Taille mémoire

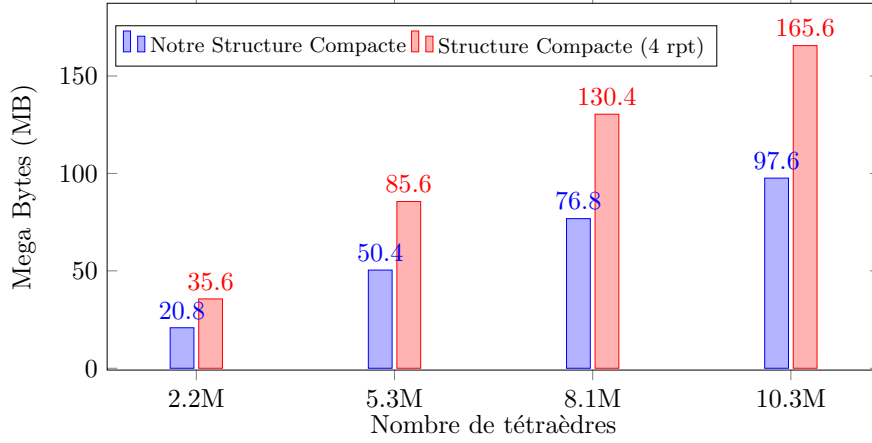


FIGURE 15 – Comparaison de la taille mémoire (en Mega Bytes) de notre structure de données compacte (en bleue) et de la même structure de données sans regroupement des tétraèdres en diamants (i.e SOT)

La Fig. 15 compare l'évolution de la place mémoire en fonction du nombre de tétraèdres par maillage pour notre structure de données et une structure de données utilisant 4 références par tétraèdres. Cette dernière structure de données est équivalente à SOT, seulement son interface de navigation utilise les faces plutôt que les coins pour accéder aux éléments du maillage. Sur le plus gros maillage, notre structure de données permet d'économiser 68MB de place mémoire.

5 Taille mémoire de notre structure : garanties théoriques

Les performances du parcours en largeur pour appareiller les tétraèdres en diamants nous semblent raisonnables. Cependant, il serait bien de pouvoir assurer une borne minimum théorique sur le nombre de diamants possible. A priori, aucune borne minimale intéressante ne peut être apportée. En effet, certains maillages comme des chaînes de tétraèdres où les tétraèdres sont juste reliés deux à deux n'autorisent pas le regroupement en diamant. Néanmoins, nous allons dans cette partie essayer de dégager une borne inférieure sous certaines assumptions. Nous allons d'abord transformer notre maillage M en graphe annexe $G'(V', E')$. Dans ce graphe annexe, chaque sommet correspond à une arête centrale potentielle du maillage M et deux sommets sont connectés si leurs arêtes correspondantes appartiennent au même tétraèdre dans M .

$V' = \{e \in E : e \notin B\}$ et $E' = \{(e, e'), e, e' \in E : e, e' \in T_i, i \in \{0, |T| - 1\}\}$.

- V est l'ensemble des sommets de notre maillage M
- E est l'ensemble des arêtes de notre maillage M
- B est le bord du maillage M
- b est la part d'arêtes situées sur les bords dans le maillage M
- V' est l'ensemble des sommets de notre graphe G'
- E' est l'ensemble des arêtes de notre graphe G'
- d' est le degré maximum d'un sommet dans notre graphe G'

$$|V'| = (1 - b) \cdot |E| \quad (7)$$

$$|d'| = 27 \quad (8)$$

L'équation Eq. 7 vient du fait que seules les arêtes n'étant pas sur les bords du maillage peuvent être utilisées comme arêtes centrales et donc devenir des sommets dans notre graphe annexe G' .

L'équation Eq. 8 est la conséquence de notre choix d'appariement des tétraèdres en diamants contenant au maximum 9 tétraèdres¹⁵. Un diamant contenant 9 tétraèdres contient 27 arêtes. Par conséquent (dans le pire des cas) chaque arête n'étant pas sur les bords du maillage M peut être adjacente à 9 tétraèdres. Le sommet correspondant dans notre graphe annexe G' sera alors adjacent à 27 autres sommets.

Calculer un Stable Maximum $\alpha(G')$ (Maximum Independant Set en anglais) dans ce graphe annexe G' revient ainsi à choisir un ensemble d'arêtes de M maximal tel que deux arêtes n'appartiennent pas au même tétraèdre.

15. Nous avons choisi de limiter le nombre de tétraèdres arbitrairement

C'est donc une autre formulation de notre problème d'appariement des tétraèdres en diamants. Si on applique un algorithme glouton choisissant à chaque itération le sommet de maximum degré alors :

$$\alpha(G') \geq \frac{|V'|}{d+1} = \frac{(1-b) \cdot |E|}{28} \quad (9)$$

En pratique, l'algorithme de parcours en largeur permet de trouver 4 fois plus de diamants que cette borne inférieure. Bien entendu, l'écart entre l'algorithme de parcours en largeur et la borne théorique s'amenuise à mesure qu'on limite le nombre de tétraèdres maximum dans des diamants.

6 Travail Futur

6.1 Améliorations et extensions possibles

Références différentielles Dans notre tableau A, chaque face est représentée par un indice sur 32 bits, qui est la taille minimale d'un entier en C++. Néanmoins, nous pourrions représenter l'adjacence par la différence entre les indices des deux faces. Malheureusement, les faces sont seulement ordonnées de manière à ce que le i -ème sommet soit adjacent au i -ème diamant. Par conséquent, nous n'avons aucune garantie sur l'éloignement (dans le tableau A) de deux faces opposées. Etant donné que le gain semblait mineur, nous avons choisi de ne pas implémenter cette fonction.

Dynamicité Une structure de données compacte est dites *dynamique* lorsqu'on peut modifier les données localement (i.e de manière instantanée, avec un coût proportionnel au nombre d'éléments à mettre à jour). Dans notre cas, modifier les données peut revenir à ajouter un sommet, ajouter une face, ou supprimer un tétraèdre ce qui nécessite une re-organisation locale de la décomposition en diamants. Bien que notre stratégie puisse s'adapter pour tenir compte des mises à jour, nous n'avons pas exploré cette piste dans ce travail. Il est à observer que dans le cas de maillages volumiques 3D, il n'existe pas de structure de données compacte permettant la mise à jour du maillage.

6.2 Défauts

Lecture du maillage Afin d'appareiller les tétraèdres en diamants, nous réalisons un parcours en largeur de notre maillage. Seulement, pour parcourir le maillage, nous lisons entièrement le fichier original car nous n'avons aucune garantie géométrique sur la manière dont sont énumérés les tétraèdres. Si les tétraèdres sont énumérés dans le fichier original par proximité alors nous pouvons maintenir un cache de tétraèdres puis les associer en diamants au moment voulu. Sans cela, nous devons lire le fichier entièrement et cela représente un vrai goulot d'étranglement.

Maillages problématiques Le second défaut est inhérent à notre structure de données car celle-ci apparie les tétraèdres en diamants. Cependant, certains maillages pathologiques (en forme de serpentins par exemple) peuvent ne pas autoriser la formation de diamants. Notre structure de données utilisera alors 4 rpt.

7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce rapport une nouvelle structure de données compacte afin de représenter les maillages tétraédriques en utilisant en moyenne 2.4 rpt. Cela représente une économie de 40% de références par tétraèdres en comparaison avec l'état de l'art (SOT). Notre structure s'adapte ainsi parfaitement aux maillages très volumineux. La navigation dans le maillage est intuitive car notre structure utilise les faces des tétraèdres. L'accès au i -ème sommet, i -ème tétraèdre se fait en temps constant et le calcul de l'hypersphère d'un sommet est proportionnel au degré du sommet. Finalement, nous avons aussi réussi à enregistrer notre structure dans un nouveau format de fichier afin que celle-ci puisse se partager facilement.

Références

- [1] The CGAL Project, *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.14 ed., 2019.
- [2] M. Deering, “Geometry compression,” in *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 13–20, Citeseer, 1995.
- [3] S. Gumhold, “Improved cut-border machine for triangle mesh compression,” in *Erlangen Workshop*, vol. 99, pp. 261–268, 1999.
- [4] J. Rossignac, “Edgebreaker : Connectivity compression for triangle meshes,” *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 5, no. 1, pp. 47–61, 1999.
- [5] C. Touma, “Triangle mesh compression,” in *Graphics Interface 98*, 1998.
- [6] B. G. Baumgart, “Winged edge polyhedron representation,” tech. rep., STANFORD UNIV CA DEPT OF COMPUTER SCIENCE, 1972.
- [7] T. Gurung and J. Rossignac, “Sot : compact representation for tetrahedral meshes,” in *2009 SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling*, pp. 79–88, ACM, 2009.
- [8] T. Gurung, D. Laney, P. Lindstrom, and J. Rossignac, “Squad : Compact representation for triangle meshes,” in *Computer Graphics Forum*, vol. 30, pp. 355–364, Wiley Online Library, 2011.
- [9] L. C. Aleardi, O. Devillers, and A. Mebarki, “Catalog-based representation of 2d triangulations,” *International Journal of Computational Geometry & Applications*, vol. 21, no. 04, pp. 393–402, 2011.
- [10] M. Kallmann and D. Thalmann, “Star-vertices : a compact representation for planar meshes with adjacency information,” *Journal of Graphics Tools*, vol. 6, no. 1, pp. 7–18, 2001.
- [11] A. Szymczak and J. R. Rossignac, “Grow & fold : Compression of tetrahedral meshes,” tech. rep., Georgia Institute of Technology, 1999.
- [12] G. Taubin and J. Rossignac, “Geometric compression through topological surgery,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 17, no. 2, pp. 84–115, 1998.
- [13] S. Gumhold, S. Guthe, and W. Straßer, “Tetrahedral mesh compression with the cut-border machine,” in *Proceedings of the conference on Visualization’99 : celebrating ten years*, pp. 51–58, IEEE Computer Society Press, 1999.
- [14] M. Weiler, P. N. Mallón, M. Kraus, and T. Ertl, “Texture-encoded tetrahedral strips,” in *2004 IEEE Symposium on Volume Visualization and Graphics*, pp. 71–78, IEEE, 2004.
- [15] M. Lage, T. Lewiner, H. Lopes, and L. Velho, “Chf : a scalable topological data structure for tetrahedral meshes,” in *XVIII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI’05)*, pp. 349–356, IEEE, 2005.
- [16] G. Navarro and E. Provel, “Fast, small, simple rank/select on bitmaps,” in *International Symposium on Experimental Algorithms*, pp. 295–306, Springer, 2012.

Appendices

```

struct {
    Entier index_face ;                                // Indice de la face
    Entier pos_ancre ;                                // Position du sommet ciblé dans la face
} Face;

Function degré_sommet (A[], bit_service[], permutation[], indice_sommet) :
    degré=0;
    file Q de faces;
    index_face = index_du_sommet_i_dans_tableau(indice_sommet, bit_service);
    // taille_conteneur renvoie le nombre de face du diamant/tetra à l'index i
    if taille_conteneur(index, bit_service)=4 then // si le sommet est ancré à un tétra isolé
        ajouter à Q les faces
        [index_face+1, pos_ancre=0], [index_face+2, pos_ancre=0], [index_face+3, pos_ancre=0];
    else // si le sommet est ancré à un diamant
        ajouter à Q les faces [index_face+i, pos_ancre=2] pour i={0,2,4..taille_conteneur(index_face, bit_service)};
    while Q non vide do
        face = Q.defiler();
        index_face=face.index;
        index_face_op=A[index_face];
        pos_ancre=face.pos_ancre;
        taille_conteneur = taille_conteneur(index_face_op, service_bit);
        if index_face_op non visité then
            if taille_conteneur>4 then // si on entre dans un diamant
                if permutation[index_face][0]==pos_ancre then
                    if index_face_op%2==0 then
                        ajouter à Q les faces [index_face_op+1, pos_ancre=0], [index_face_op-1, pos_ancre=1], [index_face_op-2, pos_ancre=2];
                    else
                        ajouter à Q les faces [index_face_op-1, pos_ancre=0], [index_face_op-2, pos_ancre=1], [index_face_op-3, pos_ancre=2];
                    degré+=2;
                if permutation[index_face][1]==pos_ancre then
                    if index_face_op%2==0 then
                        ajouter à Q les faces
                        [index_face_op+1, pos_ancre=1], [index_face_op+2, pos_ancre=0], [index_face_op+3, pos_ancre=0];
                    else
                        ajouter à Q les faces [index_face_op-1, pos_ancre=1], [index_face_op+1, pos_ancre=0], [index_face_op+2, pos_ancre=0];
                    degré+=2;
                if permutation[index_face][2]==pos_ancre then
                    if index_face_op%2=0 then debut=0 else debut=1;
                    for (i=debut, i<taille_conteneur(index_face_op, service_bit), i+=2) do
                        ajouter à Q la face [index_face_op+i, pos_ancre=2];
                    degré++;
            else // si on entre dans un tétra isolé
                if indice_face==0 then indexes=1,2,3;
                if indice_face==1 then indexes=0,2,3;
                if indice_face==2 then indexes=0,1,3;
                if indice_face==3 then indexes=0,1,2;
                if permutation[index_face][0]==pos_ancre then
                    ajouter à Q les faces
                    [index_face_op+indexes[1], pos_ancre=0], [index_face_op+indexes[2], pos_ancre=0];
                if permutation[index_face][1]==pos_ancre then
                    ajouter à Q les faces
                    [index_face_op+indexes[0], pos_ancre=1], [index_face_op+indexes[2], pos_ancre=0];
                if permutation[index_face][2]==pos_ancre then
                    ajouter à Q les faces
                    [index_face_op+indexes[1], pos_ancre=2], [index_face_op+indexes[2], pos_ancre=2];
                degré++;
    Retourner degré;

```

Algorithm 2: Pseudo code permettant de calculer le degré d'un sommet