Stage M2 MPRI

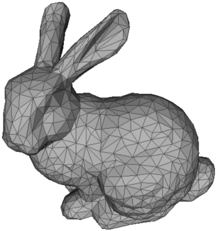
Tétraèdres en Diamants : Structure de Données Compacte pour Maillages Tétraédriques

Gabriel Beauplet supervisé par Luca Castelli Aleardi

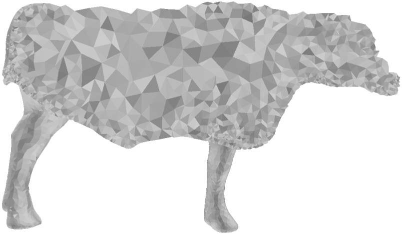
Présentation du 02/09/2019

Préliminaires

Maillages surfaciques et volumiques



(a) Maillage surfacique contenant 14k sommets, 42k arêtes et 28k faces.



(b) Vue de coupe d'une tétraédrisation (maillage volumique) d'une vache avec 30k sommets, 182k arêtes, 143k faces et 134k tétraèdres.

Définitions

- Les maillages 2D (surfaciques) sont constitués de polygones
- Les maillages 3D (volumiques) sont constitués de polyèdres

Nous nous intéressons dans la suite de ce rapport aux maillages volumiques tétraédriques

Composantes d'un maillage

- Géométrie : positions des sommets
- Connectivité : relations d'adjacence entre les tétraèdres

Préliminaires

Une structure de données naïve

Etat de l'Art

Structure de données	Taille mémoire	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
Basées sur les arêtes (Half-edge, Quad-edge, Winged-edge)	18n+n	O(1)	O(1)	oui
Basées sur les triangles	13n	O(1)	O(1)	oui
Corner table	13n	O(1)	O(1)	oui
2D catalog (Aleardi, Devillers, Mebarki)	7.67n	O(1)	O(1)	oui
Star vertices (Kallmann, Thalmann)	7n	O(d)	O(1)	non
SOT (Gurung,Rossignac)	6n	O(1)	O(d)	non
SQUAD (Gurung, Laney, Lindstrom, Rossignac)	$(4+\epsilon)$n	O(1)	O(d)	non

Table: Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages surfaciques. n représente le nombe de sommets.

Structure de données	Taille mémoire moyenne	Temps de navigation	Accès au sommet	Dynamique
VOT	8t+n	O(1)	O(1)	oui
Compact Half Face (Lage, Lewiner, Lopes, Velho)	8t+n	O(1)	O(1)	oui
Bande de triangles (Weiler, Mallón, Kraus, Ertl)	5.1t	O(1)	O(1)	non
SOT (Gurung, Rossignac)	4t	O(1)	O(d)	non
Tétraèdres en diamants	**2.4t**	**O(1)**	**O(d)**	**non**

Table: Taille mémoire et performances des structures de données pour maillages volumiques. t représente le nombre de tétraèdres et n le nombre de sommets

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Principe général

Inspirations

- Regroupement des tétraèdres comme SQUAD
- Ancrer un sommet avec un diamant comme SOT
- Ordonner les diamants tel-que le i-ème sommet soit au sein du i-ème diamant comme SOT
- Passage d'un tétraèdre à l'autre en utilisant les faces (et non les coins) comme Half-Face

Construction

- Etape 1 : Appareiller les tétraèdres en diamants
- Etape 2 : Ancrer les sommets

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Etape 1 : Appariement des tétraèdres en diamants

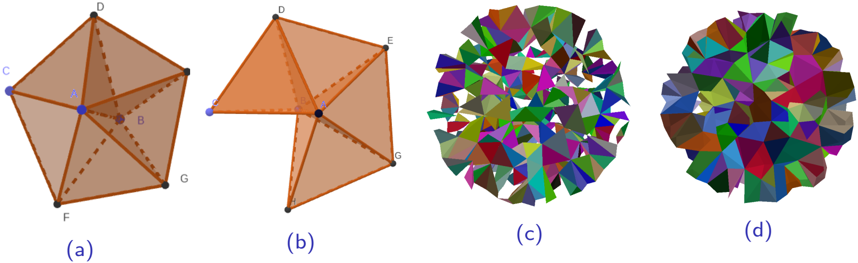
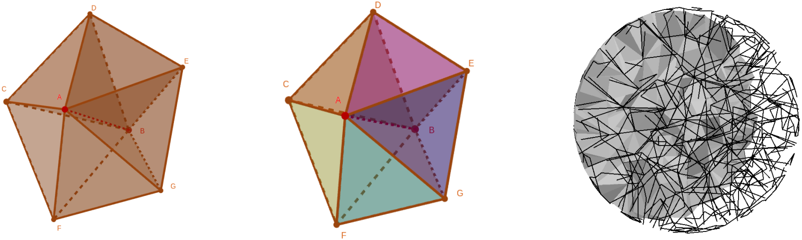


Figure: **(a)** : Diamant contenant 5 tétraèdres et dont l'arête centrale commune est AB. **(b)** : Exemple n'étant pas un diamant car les tétraèdres ne sont pas cycliques. **(c)** : Vue de coupe des tétraèdres isolés après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un tétraèdre isolé. **(d)** : Vue de coupe des diamants après exécution du parcours en largeur pour créer les diamants. Chaque couleur représente un diamant.

- Problème : Grouper les tétraèdres en diamants
- Motif : Omission des références entre les tétraèdres du même diamant
- Solution : Parcours en profondeur du graphe
- Complexité : O(T)
- Résultat : Une partie des tétraèdres est groupé en diamants. Les autres tétraèdres sont dits isolés

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Etape 2 : Ancrage des sommets



(a) (b) (c)

Figure: **Gauche** : Diamant contenant 5 tétraèdres dont l'arête centrale est le segment AB et ancré au sommet A. **Milieu** : 5 tétraèdres isolés (chaque couleur est un tétraèdre différent). **Droite** : Vue de coupe d'une tétraédrisation d'une boule avec affichage des arêtes centrales de tous les diamants

- Problème : Ancrer chaque sommet à un tétraèdre/diamant
- Motif : Omission des références des sommets vers leurs tétraèdres adjacents
- Solution : Algorithme glouton privilégiant les sommets de faible degré
- Complexité : O(nlog(n))
- Résultat : Chaque sommet est ancré à un diamant/tétraèdre isolé. Le *i*-ème sommet est ancré avec le *i*-ème diamant/tétraèdre isolé

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Organisation générale

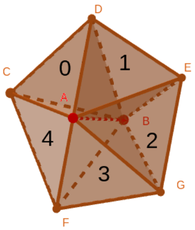


Figure: Diamant contenant 5 tétraèdres ordonnés, dont l'arête centrale est AB et ancré au sommet A. L'ordre des tétraèdres est indiqué en noir.

Ordres

- Deux tétraèdres partageant une face doivent être consécutif dans le classement modulo la taille du diamant
- Les faces extérieures du i-ème tétraèdre d'un diamant seront les faces $2i$ et $2i + 1$
- Si un tétraèdre isolé est ancré à un sommet, alors la première face doit être la face opposée à l'ancre
- On ordonne d'abord les sommets situés entre deux faces (les sommets D,E,G,F,C sur la Fig.), puis les deux sommets communs à toutes les faces (les sommets A et B sur la Fig.)
- Au sein d'un tétraèdre isolé, les sommets sont ordonnés tel que le i-ème sommet est opposé à la i-ème face

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Identification des sommets dans des tétraèdres/diamants opposés

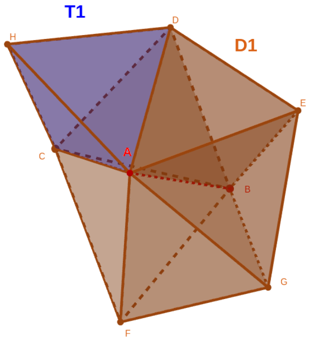


Figure: Tétraèdre isolé **T1** partageant la face ACD avec un diamant **D1** ancré au sommet **A**.

- Le sommet **A** est ancré au tétraèdre **D1**
- Nous sommes sur la face ACD de **D1**
- **Comment savoir ou se trouve le sommet A dans T1 ?**

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Identification des sommets dans des tétraèdres/diamants opposés

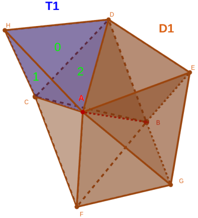


Figure: Un diamant partage la face ACD avec un tétraèdre isolé.

Organisation des sommets et des faces

- L'ordre des sommets de **T1** est : A,D,C,H ⇒ l'ordre des faces de **T1** est CDH,ACH,ADH,ADC
- L'ordre des faces de **D1** est : ACD,BCD,ADE,BDE,AEG,BEG,EFG,BFG,ACF,BCF ⇒ l'ordre des sommets de **D1** est C,D,E,G,F,A,B

Calculer la permutation

- On identifie la face (et ses 3 sommets) dont on souhaite savoir la permutation
  - La face ACD nous intéresse
- On compare l'ordre des sommets dans les deux entités
  - Dans **T1**, nous avons A,D,C et C,D,A dans **D1**

La permutation des sommets pour la face ACD est donc τ=(2,1,0)

Notations

- D l'ensemble des diamants
- T_D l'ensemble des tétraèdres appartenant à des diamants
- T_i l'ensemble des tétraèdres isolés
- F_e l'ensemble des faces des tétraèdres isolés et des faces extérieures des diamants où $|F_e| = 2 \cdot |T_D| + 4 \cdot |T_i|$

Contenu

- Un tableau A de taille $|F_e|$
- Un bit de service par face afin de savoir si une face est la première d'un diamant ou d'un tétraèdre isolé
- 3 bits de service par face afin de représenter la permutation des sommets entre deux faces

Notre Structure : Tétraèdres en Diamants

Exemple

	1 er diamant								1 er tétraèdre isolé				2 ème tétraèdre isolé				3 ème tétraèdre isolé			
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A[i]	-1	281	202	758	854	829	239106	307	865	12	289	-1	9	863	239086	-1	861	385	380	239084
1 bit de service	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
3 bits de service	0,0,0	1,0,2	2,0,1	0,2,1	2,0,1	2,0,1	2,1,0	1,0,2	1,0,2	0,1,2	0,1,2	0,0,0	0,1,2	1,0,2	1,0,2	0,0,0	2,0,1	1,0,2	1,0,2	1,0,2

Figure: Dans cet exemple, la face 0 est sur le bord et la face 1 est opposée à la face 281. La permutation de la face 1 du premier diamant (1,0,2) indique que le premier et second sommet de cette face sont inversés dans la face opposée.

Résultats

Appariement des diamants et ancrage des sommets

Résultats

Les requêtes

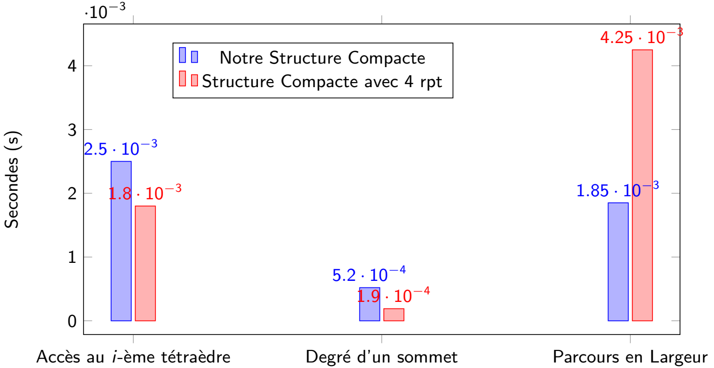


Figure: Comparaison des temps moyens (s) requis pour répondre aux requêtes et effectuer la navigation dans le maillage. Notre structure de données compacte (en bleue) est comparée à une structure de données compacte utilisant 4 rpt (i.e SOT). Le temps pour le parcours en largeur est normalisé pour 100K tétraèdres.

Résultats

Taille mémoire

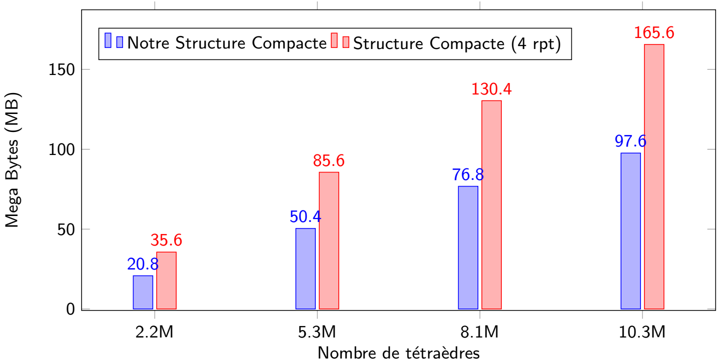


Figure: Comparaison de la taille mémoire (en Mega Bytes) de notre structure de données compacte (en bleue) et de la même structure de données sans regroupement des tétraèdres en diamants (i.e SOT)

Coclusion

Avantages et inconvénients

- 40% plus économe en références que l'état de l'art (i.e SOT)
- Navigation en O(1) et calcul de l'hypersphère d'un sommet en O(d)
- Facilement implémentable
- Sauvegarde plus concise d'un maillage tétraédrique
- Notre structure peut utiliser jusqu'à 4 RPT
- La lecture des tétraèdres afin de créer les diamants est un réel frein

Travail futur

- Rendre la structure dynamique
- Etendre la structure de données à des maillages non tétraédriques