离散数学

教师：王璐

2022-2023-1

主要内容

1 数理逻辑

2 集合论

3 代数系统

4 图论

第六章　集合代数

1. 集合的基本概念
2. 集合的运算、恒等式
3. 集合包含、相等的证明方法
4. 有穷集的计数

集合的运算、有穷集计数

内容

集合的运算，文氏图、有穷集、有穷集合元素的计数

重点

(1) 掌握集合的运算

$A \cup B, A \cap B, A - B, \sim A, A \oplus B$

(2) 用文氏图表示集合间的相互关系和运算，

(3) 容斥定理

一、集合的运算

集合的基本运算有

并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(当 $A \cap B = \phi$ 时，称 A, B 不交)

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ （B对A的）

绝对补 A对全集E的相对补集，记作：$\sim A$

$$\sim A = E - A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$$

对称差　$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

广义交　设A 为非空集合，A的所有元素的公共元素构成的集合为A 的广义交。

$\cap \varnothing$不是集合

$\cap A = \{x \mid \forall z(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

例　$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} = \{1\}$

$\cap\{\{a\}\} = \{a\}$

$\cap\{a\} = a$

$\cup\varnothing=\varnothing$

广义并　设A 为集合，A的元素的元素构成的集合为A 的广义并。

$$\cup A=\{x \mid \exists z(z\in A \wedge x\in z)\}$$

例 $\cup\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$

一般地, 一元运算符(绝对补集,幂集,广义交,广义并)**优先于** 二元运算符(并集,交集,相对补,对称差,笛卡儿积); 二元运算符**优先于**集合关系符(∈,⊂,=,)。

此外,许多集合表达式里还使用到联结词,和逻辑关系符以及括号,我们规定:

(1) 集合运算优先于逻辑运算;

(2) 括号内优先于括号外;

(3) 同一括号内,同一优先级按从左至右运算。

并和交运算可以推广到有穷个集合上：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求出以下集合。

(1) $A\cap B$ $\{1\}$

(2) $B-C$ $\{1,5\}$

(3) $\sim A$ $\{2,3,5\}$

(4) $B\cup\sim A$ $\{1,2,3,5\}$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求出以下集合。

(5) $A\oplus B$ $\{2,4,5\}$

(6) $\sim(A\cup B)$ $\{3\}$

(7) $(A\cap B)\cup\sim C$ $\{1,3,5\}$

(8) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\{1,4\}$

例： $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cup A$, $\cap A$, $\cup\cup A$, $\cap\cap A$。

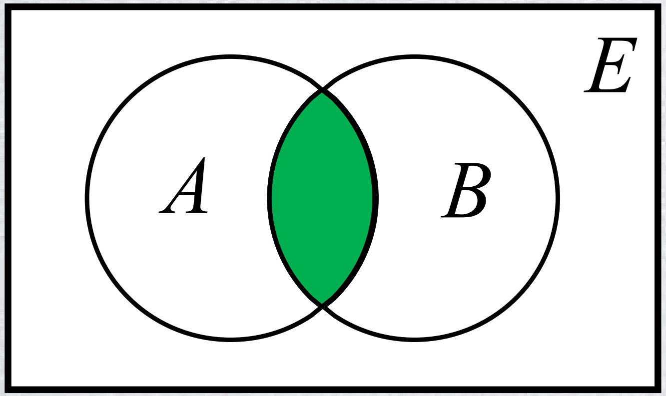
解： $\cup A=\{a,b\}$

$\cap A=\{a\}$

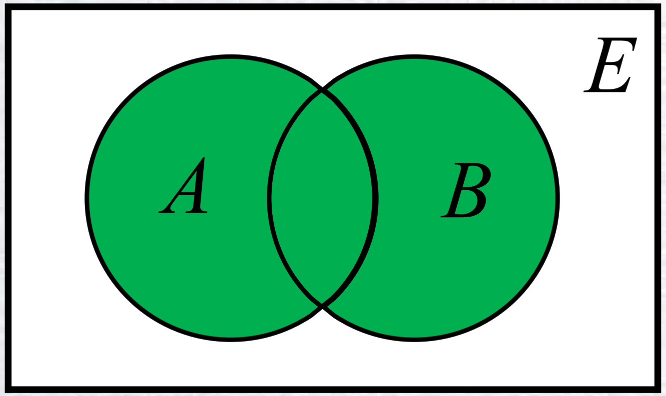
$\cup\cup A=a\cup b$

$\cap\cap A=a$

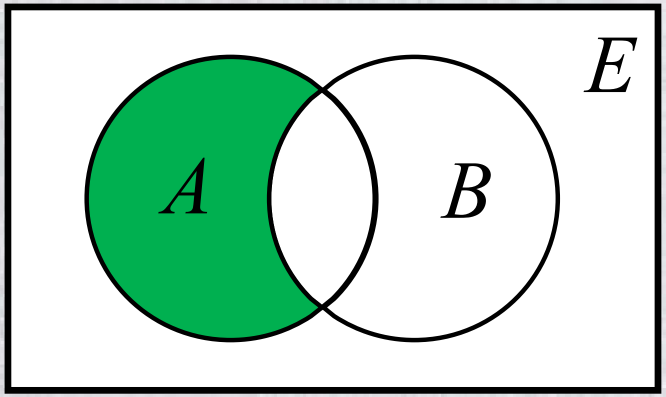
二、文氏图 (*John Venn*) ---集合运算对应的文氏图表示



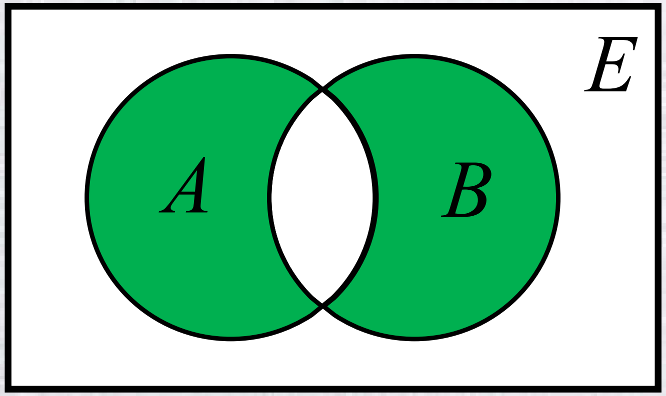
$A \cap B$



$A \cup B$

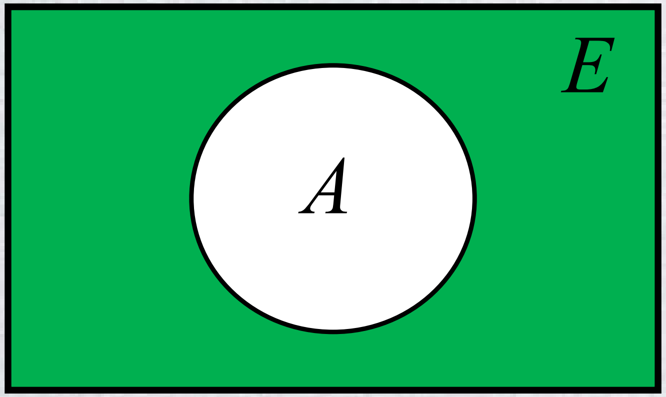


$A - B$

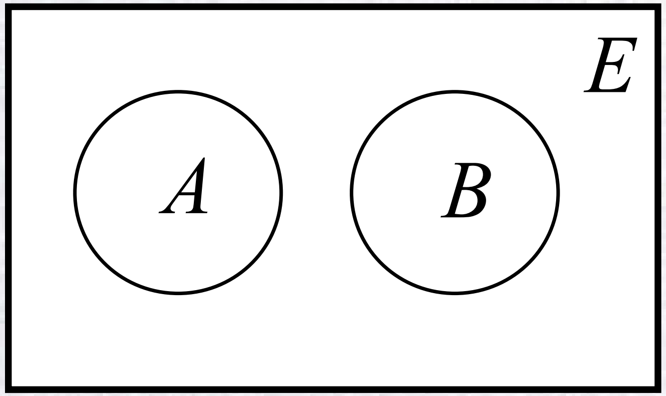


$A \oplus B$

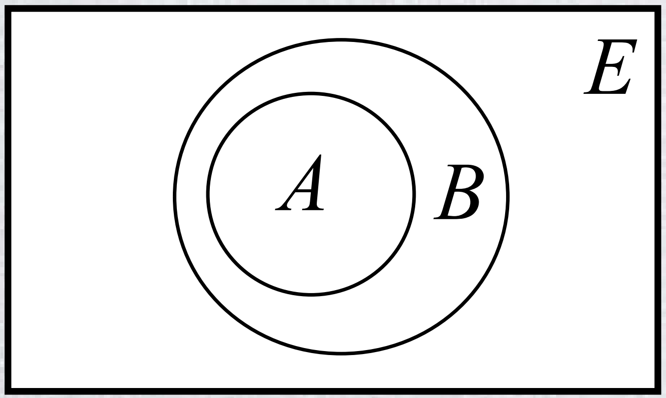
二、文氏图 (*John Venn*)



$\sim A$



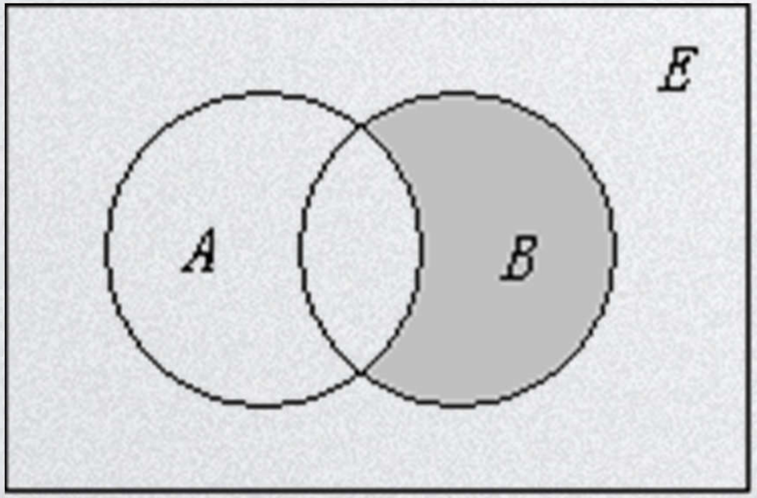
$A \cap B = \varnothing$



$A \subset B$

例2、用文氏图表示下列集合。

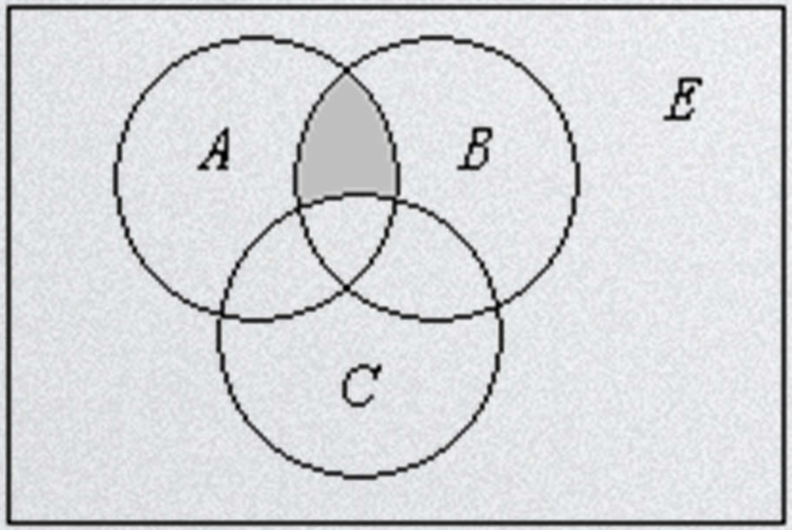
(1) $\sim A \cap B$



$\sim A \cap B$

例2、用文氏图表示下列集合。

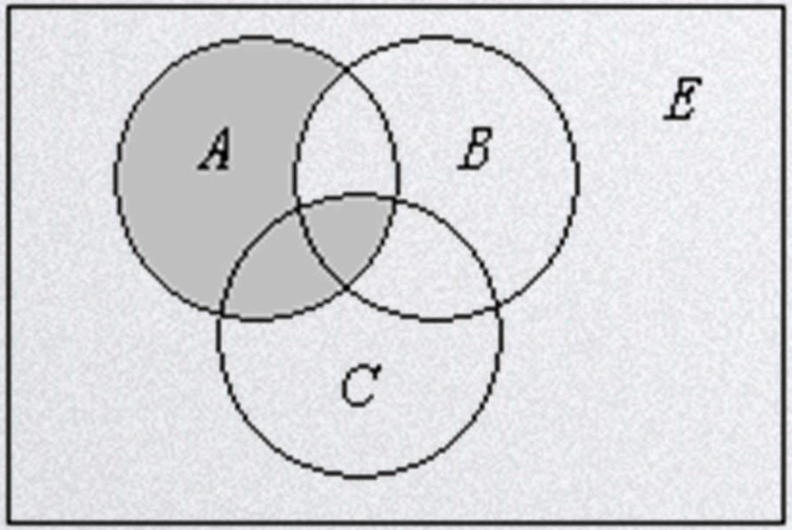
(2) $(A \cap B) - C$



$(A \cap B) - C$

例2、用文氏图表示下列集合。

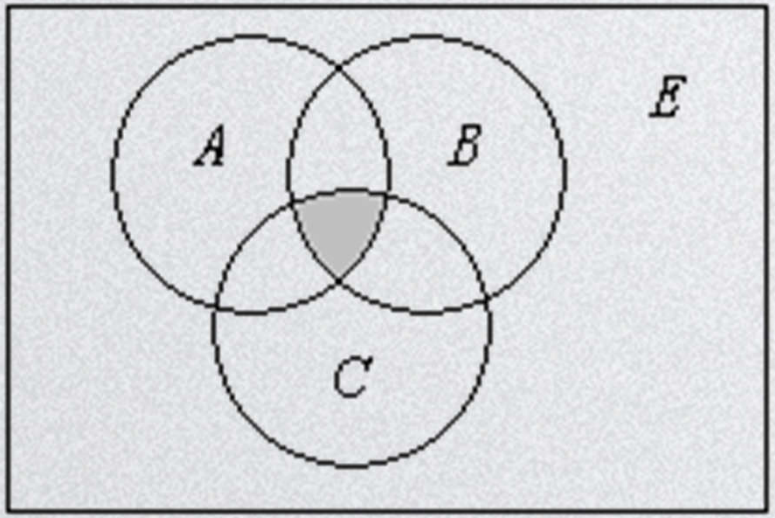
(3) $A\cap(\sim B\cup C)$



$A\cap(\sim B\cup C)$

例3、用集合公式表示下列文氏图中的阴影部分。

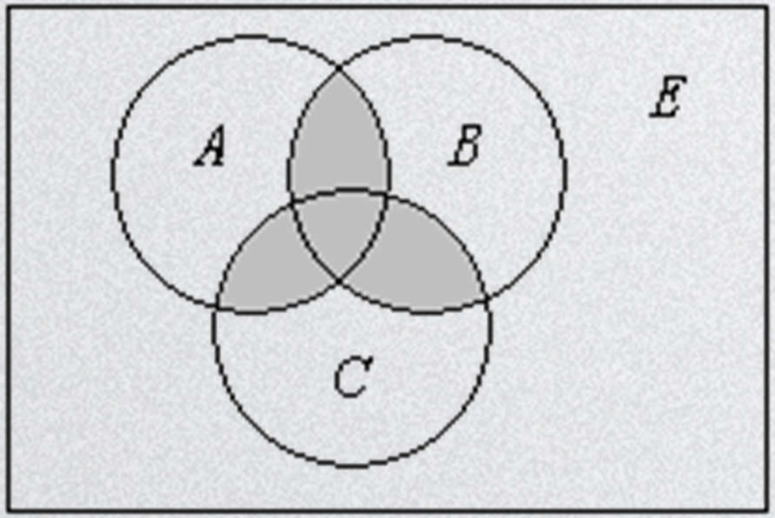
(1)



解：$A \cap B \cap C$

例3、用集合公式表示下列文氏图中的阴影部分。

(2)



解：$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

有穷集的计数

基数：表示集合中所含元素多少的量。

如果集合A的基数是，可记为：card A=n或者$|A| = \mathrm{n}$

定义3.10 设A是集合，若存在自然数n(0也是自然数)，使得$|A|$= card A=n，则称A为有穷集，否则称A为无穷集。

例如: {1,2,3,……，10}就是有穷集，而N，Z，Q，R都是无穷集

- 有穷集合元素的计数

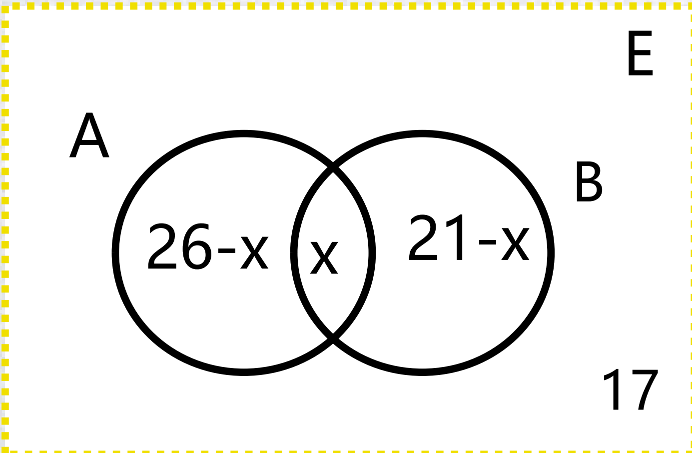
    1. 文民图法
    2. 包含排斥原理

例：一个班有50个学生，第一次考试有26人得5分，第二次考试有21人得5分。如果两次考试都没得5分的有17人，那么在两次考试都得5分的有多少人?

解：分别用A,B表示第一次考试得5分和第二次考试得5分的学生集合。

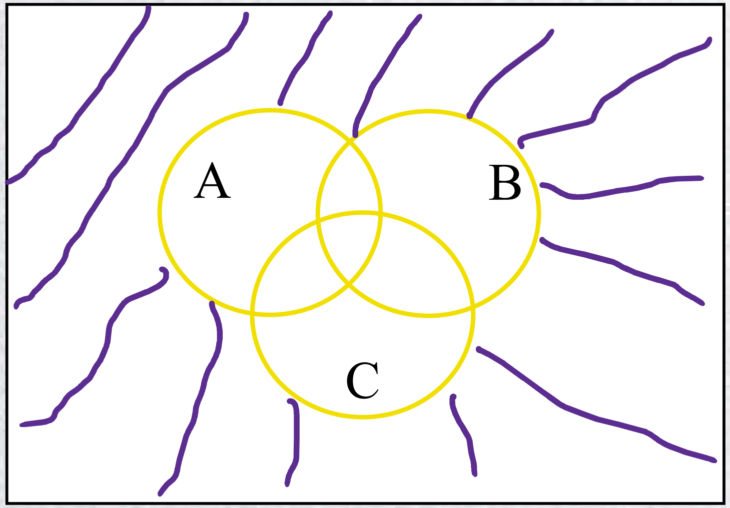
$$(26-x)+x+(21-x)+17=50$$

$$X=14$$



例1　求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个?

设1到1000之间的整数构成全集E，A，B，C分别表示其中可被5，6或8整除的数的集合。
在$A \cap B \cap C$中的数一定可被5,6和8的最小公倍数$[5,6,8]=120$整除，即



$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/[5,6,8] \rfloor = 8$

同样可得

$|A \cap B| = \lfloor 1000/[5,6] \rfloor = 33$;

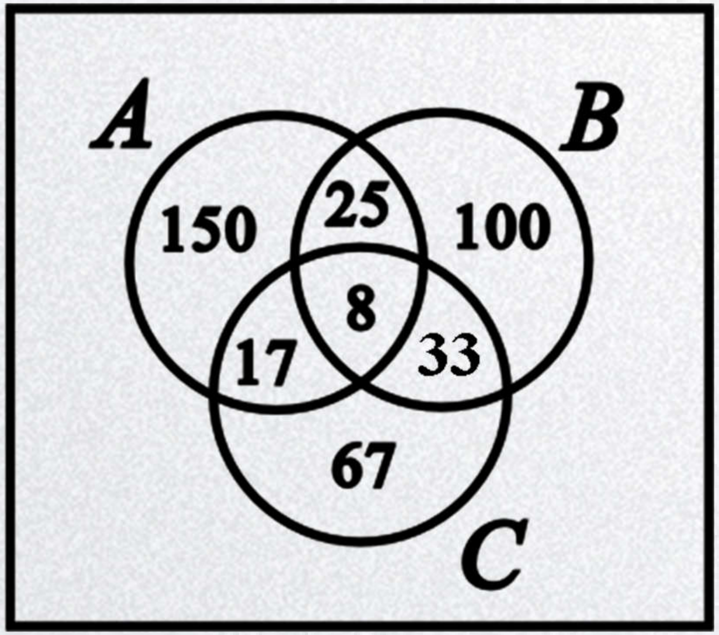
$|A \cap C| = \lfloor 1000/[5,8] \rfloor = 25$;

$|B \cap C| = \lfloor 1000/[6,8] \rfloor = 41$;

然后计算 $|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$；

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$；

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$



从而得到

$|A \cup B \cup C|=200+100+33+67=400$

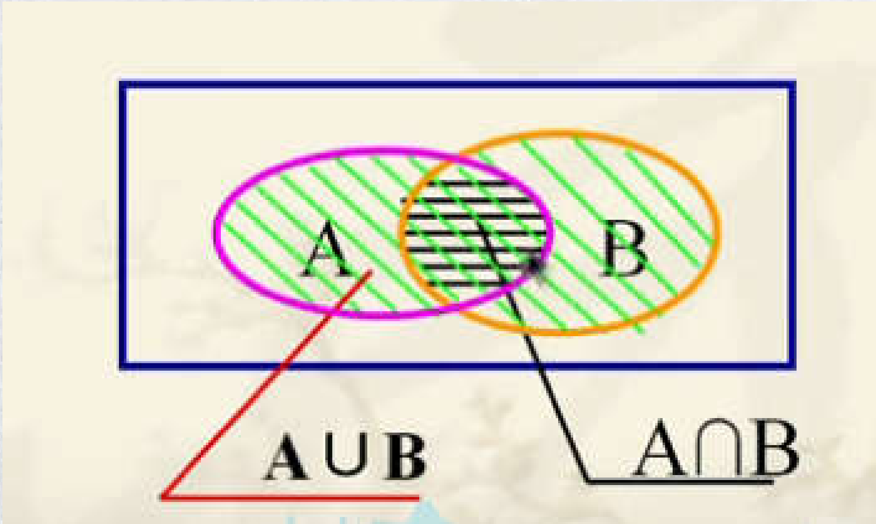
解得

$$N=1000-(200+100+33+67)$$
$$=600$$

2. 包含排斥原理

应用举例：有**A,B**两个商店，求他们一共经营的商品种类是多少？

$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$



设A,B,C是三个有限集合

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

$$
|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C| \\
-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|
$$

一般地，如果有n个有限集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

定理　设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

当n=2时

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$

当n=3时

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

$$|A \cup B| \le |A| + |B|$$

$$|A \cap B| \le \min(|A|, |B|)$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A \cup B| - |A \cap B|$$

例：一个班有50个学生，第一次考试有26人得5分，第二次考试有21人得5分。如果两次考试都没得5分的有17人，那么在两次考试都得5分的有多少人？

解：分别用A,B表示第一次考试得5分和第二次考试得5分的学生集合。

依题意有：$|A| = 26$，$|B| = 21$，$|\overline{A} \cap \overline{B}| = 17$

则$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = |A| + |B| - (|\mathrm{E}| - |\overline{A} \cap \overline{B}|)$

$= 26 + 21 - 50 + 17 = 14$

例 某班有25个学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，还有2人会打这三种球。而6个会打网球的人都会打另外一种球(指篮球或排球)，求不会打这三种球的人数。

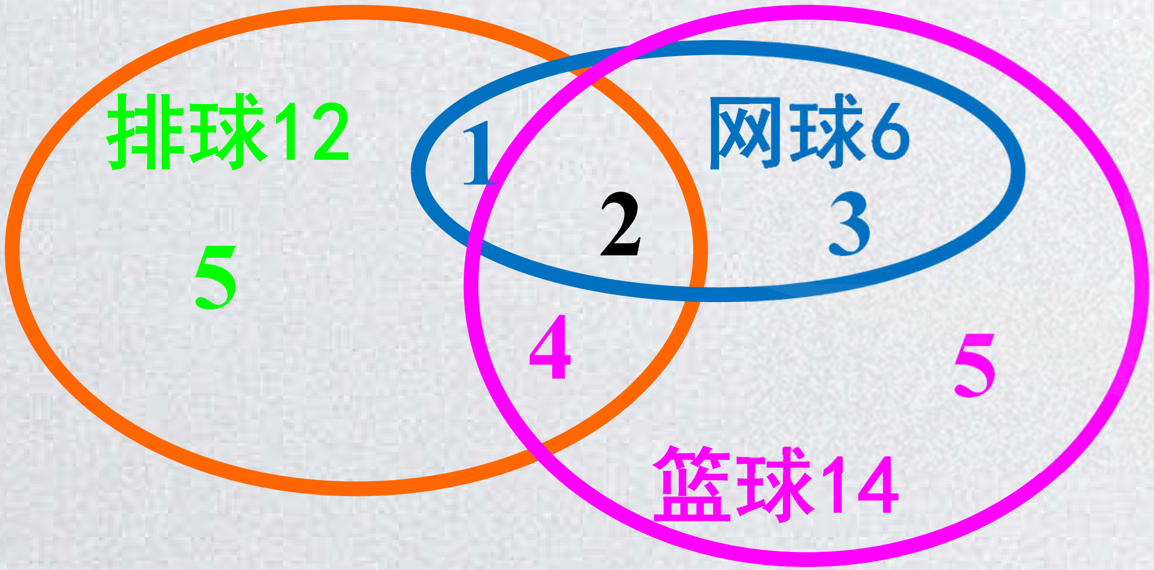
解： 设会打排球、网球、篮球的学生集合分别为A，B和 C，则有

$|A|=12$， $|B|=6$，

$|C|=14$， $|S|=25$

$|A\cap C|=6$，$|B\cap C|=5$，

$|A\cap B\cap C|=2$



不会打三种球人数为：

25-(12+5+3)=5

现在求|A∩B|，因为会打网球的人都会打另一种球，即篮球或排球，而其中会打篮球的有5人，那么另一个人肯定会打排球但不会打篮球，再加上会打三种球的2人，共有3人会打排球和网球，即|A∩B|=3，根据容斥定理有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=25-(12+6+14)+(3+6+5)-2=5$$

另一种理解：

分别用A,B,C表示会打篮球、排球、网球的学生集合。

依题意有：$|A|=14$，$|B|=12$，$|C|=6$，

$|A\cap B|=6$，$|A\cap C|=5$，$|A\cap B\cap C|=2$，

且有$C\subseteq A\cup B$，**求**$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$

于是 $C=C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)$

$$|C|=|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$

$$6=5+|B\cap C|-2 \quad \text{得} \quad |B\cap C|=3$$

从而$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C|$

$$- |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cup B \cup C| = 25 - 20 = 5$$

练习：某班有学生60人，其中24个喜欢数学，28个喜欢物理，26个喜欢化学，10个同学即喜欢数学又喜欢物理，8个既喜欢数学也喜欢化学。14个物理和化学都喜欢。6个三门课都喜欢，问有多少学生三门都不喜欢？