MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS
LISTA 1

Nome: Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Questão 1.

(b) $log_{10}\ n$ **é** $O(lg\ n)$

Queremos mostrar que $log_{10}n \leq c{\times}lg\ n = c{\times}log_2 n$. *Logo temos:*

$$log_{10}n \leq c \times log_2 n \Rightarrow 1 \leq c \times \frac{log_2 n}{log_{10} n} = c \times \frac{\frac{lnn}{ln2}}{\frac{lnn}{ln10}} = c \times \frac{ln10}{ln2} \approx c \times 3.3219$$
$$\Rightarrow 1 \leq c \times 3.3219 \Rightarrow \frac{1}{3.3219} = 0.30129 \leq c$$

Portando, o valor de c *é no mínimo igual à 0.30129. E assim, para* $n \geq n_0 = 0$ *e para* $c = 0.30129$, *temos que* $log_{10}\ n$ *é* $O(lg\ n)$, *ou seja,* $log_{10}n \leq 0.30129{\times}lg\ n$. ■

Questão 2.

(d) $n = O(2^n)$

Para fazer a seguinte demonstração, utilizaremos indução em n.

Base:

Para $n = 0$ temos:

$$0 \leq 2^0 = 1$$

Para $n = 1$ temos:

$$1 \leq 2^1 = 2$$

Passo:

Fixe n e suponha que vale que $n \leq 2^n$, vamos mostrar então que vale também para $n+1$:

$$n + 1 \leq 2^{n+1} = 2^n \times 2$$

Sabemos pela nossa hipótese de indução que vale que $n \leq 2^n$, podemos então subtrair 2^n dos dois lados da inequação:

$$k + 1 \leq 2^n(2-1) = 2^n$$

Temos então dois casos:

$$\begin{cases} \text{Se } n = 2^n\text{, então } k = 0 \\ \text{Se } n < 2^n\text{, então } k < 0 \end{cases}$$

Nos dois casos temos que o que está do lado esquerdo é menor que 2^n. Assim é verdadeiro que $k+1 \leq 2^n$ e, portanto, para $c = 1$ e $n \geq n_0 = 0$ vale que $n \in O(2^n)$. ■

Questão 3.

(b) ***Se*** $f(n) = \Theta(g(n))$ ***e*** $g(n) = \Theta(h(n))$ ***então*** $f(n) = \Theta(h(n))$**.**

Pela definição da função Θ *temos pelo enunciado que:*

$$\begin{cases} c_1 \times g(n) \leq f(n) \leq c_2 \times g(n) \\ c_3 \times h(n) \leq g(n) \leq c_4 \times h(n) \end{cases}$$

Sendo c_1, c_2, c_3 e c_4 *constantes positivas.*

Portando, segue da análise do sistema acima que:

$$c_1 \times c_3 \times h(n) \leq c_1 \times g(n) \leq f(n) \leq c_2 \times g(n) \leq c_2 \times c_4 \times h(n)$$

Assim podemos concluir que:

$$c_1 \times c_3 \times h(n) \leq f(n) \leq c_2 \times c_4 \times h(n)$$

E se chamarmos $c_1 \times c_3 = c_1^{'}$ e $c_2 \times c_4 = c_2^{'}$, *temos que a relação segue a definição da função* Θ. *E assim concluímos que* $f(n) = \Theta(h(n))$. ∎

Questão 4.
(a) $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ **é** $\Theta(n^{11})$.

Parte I - $O(n^{11})$
Vamos mostrar que $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ *é* $O(n^{11})$. *Para isso vamos fazer uma indução em* n.
Base:

Para $n = 1$*:*

$$1^{10} = 1 \leq 1^{11} = 1$$

Para $n = 2$*:*

$$2^{10} = 10241 \leq 2^{11} = 2048$$

Passo:
Supor que vale que $\sum_{i=1}^{n} i^{10} \leq n^{11}$, *e vamos mostrar que é válido também para* $n + 1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^{10} = \sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10}$$

Pela nossa hipótese de indução, sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10} \leq n^{11} + (n+1)^{10}$$

Além disso, sabemos que para $n \geq 1$, *vale que* $n^{11} \geq n^{10}$, *portanto:*

$$\sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10} \leq n^{11} + n^{11} = 2 \times n^{11}$$

Assim encontramos que a constante $c_1 = 2$ *e que*

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} \in O(n^{11})$$

.

Parte II - $\Theta(n^{11})$
Vamos tomar a constante $c_2 = \frac{1}{11}$. *Vamos mostrar por meio de indução em* n *que* $\sum_{i=0}^{n} i^{10} \geq \frac{1}{11} \times n^{11}$.
Base:

Para $n = 1$*:*

$$1^{10} = 1 \geq \frac{1}{11} \times 1^{11}$$

Para $n = 2$*:*

$$1^{10} + 2^{10} = 1 + 1024 = 1025 \geq \frac{1}{11} \times 2^{11} = \frac{2048}{11} \approx 186.1818$$

Passo:
Assuma que vale $\sum_{i=0}^{n} i^{10} \geq \frac{1}{11} \times n^{11}$, *vamos mostrar que vale para* $n + 1$*:*

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^{10} = \sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10}$$

E pela nossa hipótese de indução sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10} \geq \frac{1}{11} \times n^{11} + (n+1)^{10}$$

Além disso, sabemos que para $n \geq 1$ *vale que* $(n+1)^{10} \geq n^{10}$*. Logo:*

$$\sum_{i=0}^{n} i^{10} + (n+1)^{10} \geq \frac{1}{11} \times n^{11} + n^{10} \geq \frac{1}{11} \times n^{11}$$

Assim $\sum_{i=1}^{n} i^{10} \in \Theta(n^{11})$.

Portando, $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ *é* $\Theta(n^{11})$ *para as constantes* c_1 e c_1 *iguais a, respectivamente,* 2 e $\frac{1}{11}$*, e para todo* $n \geq n_0 = 1$. ■