Semântica

Lógica Propositional Clássica

Marcelo Finger

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

2022

Tópicos

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
   - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
   - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Próximo Tópico

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
   - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
   - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.
- Os fatos podem ser "verdadeiros" $\Rightarrow$ correspondem à realidade,

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.
- Os fatos podem ser "verdadeiros" $\Rightarrow$ correspondem à realidade,
- ou "falsos" $\Rightarrow$ não correspondem.

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.
- Os fatos podem ser "verdadeiros" $\Rightarrow$ correspondem à realidade,
- ou "falsos" $\Rightarrow$ não correspondem.

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.
- Os fatos podem ser "verdadeiros" $\Rightarrow$ correspondem à realidade,
- ou "falsos" $\Rightarrow$ não correspondem.

Exemplo:
p = "Hoje está chovendo"

Semântica

- Fórmulas representam fatos sobre o mundo.
- Os fatos podem ser "verdadeiros" $\Rightarrow$ correspondem à realidade,
- ou "falsos" $\Rightarrow$ não correspondem.

Exemplo:
p = "Hoje está chovendo"
q = "Todo par maior que 2 é a soma de dois primos".

Valores Verdade

T: "verdadeiro"
F: "falso"

Valoração:

$$v : \mathcal{P} \to \{T, F\}$$

Exemplo: valorações para $p \vee \neg q$

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\vee$

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\vee$

p	q	$p \vee q$

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\vee$

p	q	$p \vee q$
T	T	T

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\vee$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \vee q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\vee$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T

Valor verdade de fórmulas complexas

$v(p \lor q)$ depende de:

- $v(p)$
- $v(q)$
- interpretação de $\lor$

p	q	$p \lor q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Formalização da semântica

- Vamos iniciar criando uma valoração v para os símbolos proposicionais $\mathbb{P}$
$$v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$$

Formalização da semântica

- Vamos iniciar criando uma valoração v para os símbolos proposicionais $\mathbb{P}$
$$v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$$
- Vamos agora extender esta valoração sobre todas as fórmulas da linguagem $\mathcal{L} \supset \mathbb{P}$

$$v : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$$

Formalização da semântica

- Vamos iniciar criando uma valoração v para os símbolos proposicionais $\mathbb{P}$
$$v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$$
- Vamos agora extender esta valoração sobre todas as fórmulas da linguagem $\mathcal{L} \supset \mathbb{P}$
$$v : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$$
- Necessitamos apresentar regras que indutivamente extendam v de $\mathbb{P}$ para $\mathcal{L}$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = T$ sse se $v(\alpha) = T$ então $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = T$ sse se $v(\alpha) = T$ então $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = T$ sse se $v(\alpha) = T$ então $v(\beta) = T$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = F$ sse $v(\alpha) = T$
- $v(\alpha \wedge \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \vee \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ e $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = F$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = F$

Próximo Tópico

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
    - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
    - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Recursão Regular

Uma definição por recursão se dá sobre alguma propriedade numérica n e contém as seguintes partes.

- Um (ou mais) casos básicos

  Em geral, os casos básico se referem aos valores iniciais de n, e.g. $n = 0$

- Um ou mais casos recursivos, que assumem que o objeto da definição já está definido para valores de $n < N$, e a partir disso constroi-se o objeto com valor de $n = N$.

Definições por Recursão Estrutural

Por **estrutura**, nos referimos aos componentes da fórmula, ou seja, aos conectivos booleanos e aos demais componentes da fórmula.

Uma definição por recursão estrutural se dá sobre fórmulas e contém as seguintes partes.

- Um (ou mais) casos básicos e não se referem à estrutura da fórmula
  Em geral, os casos básico se referem às fórmulas atômicas, ou à fórmula como um todo
- Um ou mais casos recursivos, que se referem à estrutura da fórmula (conectivos e demais componentes da fórmula)

Definição de Conjunto de Subformulas

O **conjunto de subfórmulas** de φ, $Subf(\varphi)$ é o **menor** conjunto tal que:

Caso básico $Subf(p) = \{p\}$, onde p é atômico

Caso Rec 1 $Subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Subf(\varphi)$

Caso Rec 2 $Subf(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

Caso Rec 3 $Subf(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \{\varphi_1 \vee \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

Caso Rec 4 $Subf(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = \{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

Definição de Conjunto de Subformulas

O **conjunto de subfórmulas** de φ, $Subf(\varphi)$ é o **menor** conjunto tal que:

Caso básico $Subf(p) = \{p\}$, onde p é atômico

Caso Rec 1 $Subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Subf(\varphi)$

Caso Rec 2 $Subf(\varphi_1 \land \varphi_2) = \{\varphi_1 \land \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

Caso Rec 3 $Subf(\varphi_1 \lor \varphi_2) = \{\varphi_1 \lor \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

Caso Rec 4 $Subf(\varphi_1 \to \varphi_2) = \{\varphi_1 \to \varphi_2\} \cup Subf(\varphi_1) \cup Subf(\varphi_2)$

ψ é **subfórmula própria** de φ se $\psi \in Subf(\varphi)$ e $\psi \neq \varphi$

Tamanho de uma fórmula

O tamanho de uma fórmula $|\varphi|$ é definido por recursão estrutural

Caso básico $|p| = 1$, onde p é atômico

Caso Rec 1 $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$

Caso Rec 2 $|\varphi_1 \wedge \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Caso Rec 3 $|\varphi_1 \vee \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Caso Rec 4 $|\varphi_1 \rightarrow \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Tamanho de uma fórmula

O tamanho de uma fórmula $|\varphi|$ é definido por recursão estrutural

Caso básico $|p| = 1$, onde p é atômico

Caso Rec 1 $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$

Caso Rec 2 $|\varphi_1 \land \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Caso Rec 3 $|\varphi_1 \lor \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Caso Rec 4 $|\varphi_1 \to \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$

Uma indução estrutural pode ser vista como uma indução "regular" sobre o tamanho da fórmula

Próximo Sub-Tópico

1 Valorações

2 Recursão Estrutural
- Exercícios

3 Tabelas da Verdade
- Exercícos

4 Satisfazibilidade

5 Consequência Lógica

Exercícios

1. Definir por indução estrutural a altura de uma fórmula: $h(\varphi)$, como o maior número de conectivos desde a raiz (conectivo principal) até alguma folha (símbolo proposicional) em sua árvore sintática.
2. Definir por indução estrutural o número de $\wedge$-ocorrências de uma fórmula.
3. Definir por indução estrutural o grau de alternância $\wedge - \vee$ de uma fórmula. (Dica: use outras funções auxiliares)

Mais Exercícios

1. Seja Γ um conjunto finito de fórmulas. Seja $|\Gamma|$ a sua cardinalidade, ou seja, o número de elementos do conjunto.

   Prove por indução estrutural que, para toda fórmua φ da LPC,

$$|Subf(\varphi)| \leq |\varphi|.$$

Próximo Tópico

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
   - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
   - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Tabelas Verdade dos Conectivos Lógicos

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tabelas Verdade dos Conectivos Lógicos

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabelas Verdade dos Conectivos Lógicos

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabelas Verdade dos Conectivos Lógicos

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

Tabelas Verdade dos Conectivos Lógicos

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

$\top$
T

$\bot$
F

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F			
F	F	T			
F	T	F			
F	T	T			
T	F	F			
T	F	T			
T	T	F			
T	T	T			

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T		
F	F	T	T		
F	T	F	F		
F	T	T	F		
T	F	F	T		
T	F	T	T		
T	T	F	F		
T	T	T	F		

Exemplo

$(p \land \neg q) \to r$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F	T	F	
F	F	T	T	F	
F	T	F	F	F	
F	T	T	F	F	
T	F	F	T	T	
T	F	T	T	T	
T	T	F	F	F	
T	T	T	F	F	

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T

Próximo Sub-Tópico

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
   - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
   - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Dê a Tabela da Verdade para as seguintes fórmulas

- $p \vee \neg q$
- $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
- $((p \to q) \to p) \to r$
- $((p \to q) \to p) \to p$

Próximo Tópico

1. Valorações
2. Recursão Estrutural
   - Exercícios
3. Tabelas da Verdade
   - Exercícos
4. Satisfazibilidade
5. Consequência Lógica

Fórmulas notáveis

- Uma fórmula φ é **satisfazível** (ou satisfatível) se $v(\varphi) = T$ para algum v

Fórmulas notáveis

- Uma fórmula φ é **satisfazível** (ou satisfatível) se $v(\varphi) = T$ para algum v
- Uma fórmula φ é **falsificável** se $v(\varphi) = F$ para algum v

Fórmulas notáveis

- Uma fórmula φ é **satisfazível** (ou satisfatível) se $v(\varphi) = T$ para algum v
- Uma fórmula φ é **falsificável** se $v(\varphi) = F$ para algum v
- Uma fórmula φ é **válida** (ou uma **tautologia**) se $v(\varphi) = T$ para todo v

Fórmulas notáveis

- Uma fórmula φ é **satisfazível** (ou satisfatível) se $v(\varphi) = T$ para algum v
- Uma fórmula φ é **falsificável** se $v(\varphi) = F$ para algum v
- Uma fórmula φ é **válida** (ou uma **tautologia**) se $v(\varphi) = T$ para todo v
- Uma fórmula φ é **inválida** (ou insatistazível) se $v(\varphi) = F$ para todo v

Fórmulas notáveis

- Uma fórmula φ é **satisfazível** (ou satisfatível) se $v(\varphi) = T$ para algum v
- Uma fórmula φ é **falsificável** se $v(\varphi) = F$ para algum v
- Uma fórmula φ é **válida** (ou uma **tautologia**) se $v(\varphi) = T$ para todo v
- Uma fórmula φ é **inválida** (ou insatistazível) se $v(\varphi) = F$ para todo v
- Uma fórmula é **contingente** se for tanto satisfazível quanto falsificável

Exemplos

Classificar as seguintes fórmulas a partir de suas tabelas da verdade:

1. $\neg(p \to p)$
2. $((p \to q) \to p) \to p$ [Fórmula de Peirce]
3. $((p \to q) \to p) \to r$

Próximo Tópico

1 Valorações

2 Recursão Estrutural
- Exercícios

3 Tabelas da Verdade
- Exercícos

4 Satisfazibilidade

5 Consequência Lógica

Consequência Lógica ou Acarretamento Lógico

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Consequência Lógica ou Acarretamento Lógico

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

$$\Updownarrow$$

Se $v(\varphi_i) = T$, então $v(\psi) = T$

Exemplo

$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

Exemplo

$(p \land \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \rightarrow r$
F	F	F				
F	F	T				
F	T	F				
F	T	T				
T	F	F				
T	F	T				
T	T	F				
T	T	T				

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F	T			
F	F	T	F			
F	T	F	T			
F	T	T	F			
T	F	F	T			
T	F	T	F			
T	T	F	T			
T	T	T	F			

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T		
F	F	T	F	T		
F	T	F	T	F		
F	T	T	F	F		
T	F	F	T	T		
T	F	T	F	T		
T	T	F	T	F		
T	T	T	F	F		

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F	T	T	F	
F	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	F	F	
F	T	T	F	F	F	
T	F	F	T	T	T	
T	F	T	F	T	T	
T	T	F	T	F	F	
T	T	T	F	F	F	

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	**T**	F	**T**	F	F	**T**
T	T	T	F	F	F	T

Exemplos

Pelo método da a tabela da verdade, verifique a validade dos seguintes acarretamentos:

- $\neg p \vee \neg q \models \neg(p \wedge q)$
- $(p \vee (q \rightarrow p)) \wedge q \models p$
- $p \wedge (q \vee r) \models (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \rightarrow (q \vee r),\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow s \models p \rightarrow s$
- $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s \models p \vee r \rightarrow q \vee s$

Teorema da Dedução

Teorema (da Dedução)

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ *se e somente se* $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ *é válida*

Prova

($\Rightarrow$) Seja v tq se $v(\varphi_1) = \cdots = v(\varphi_n) = 1$ então $v(\psi) = 1$; logo $v(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi) = 1$; por outro lado, se existe φ_i tq $v(\varphi_i) = 0$, $v(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi) = 1$, logo $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ é válida.

($\Leftarrow$) Se para todo v, $v(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi) = 1$, então,para todo v se $v(\varphi_1) = \cdots = v(\varphi_n) = 1$ teremos $v(\psi) = 1$; logo $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplos

- $p \models p$
- $p \to q, r \to p \models r \to q$
- $(p \to q) \to p \models p$

Equivalência Lógica

Equivalência Lógica

$$\varphi \equiv \psi \text{ se } \varphi \models \psi \text{ e } \psi \models \varphi$$

Equivalência Lógica

$\varphi \equiv \psi$ *se* $\varphi \models \psi$ *e* $\psi \models \varphi$

Lema

$\varphi \equiv \psi$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$ para todo v

Exemplos de equivalência lógica

- $p \to q \equiv \neg p \vee q$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$
- $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

Verificar que a tabela da verdade de cada membro da equivalência coincide

Completude Funcional

Todas as fórmulas da LPC são equivalentes a fórmulas contendo apenas os seguintes conectivos:

- $\neg$ e $\wedge$
- $\neg$ e $\vee$
- $\neg$ e $\rightarrow$
- NAND ($\uparrow$): $\varphi \uparrow \psi =_{def} \neg(\varphi \wedge \psi)$
- Para demonstrar que um conjunto C de conectivos é **funcionalmente completo**, basta mostrar que os demais conectivos são equivalentes a fórmulas contendo apenas os conectivos de C.

Completude Funcional: Exemplos e Exercícios

1. Considere como básicos $\neg$ e $\wedge$. Verificar as equivalências lógicas que definem $\vee$ e $\rightarrow$:

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

2. Considere como básicos $\neg$ e $\vee$. Apresentar e verificar as equivalências lógicas que definem $\wedge$ e $\rightarrow$.
3. Considere como básicos $\neg$ e $\rightarrow$. Apresentar e verificar as equivalências lógicas que definem $\wedge$ e $\vee$.
4. Considere como básico $\uparrow$. Apresentar e verificar as equivalências lógicas que definem $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$.