Métodos de Prova – Parte 1

Lógica Propositional Clássica

Marcelo Finger

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

2022

Tópicos

1. Introdução
2. Axiomatização
3. Dedução Natural
4. Tableaux Analíticos

Próximo Tópico

O Que É um Sistema Dedutivo?

Um **sistema dedutivo** nos permite:

- inferir; ou
- derivar; ou
- deduzir

as conseqüências lógicas de um conjunto de fórmulas, chamado de teoria.

As deduções são manipulações simbólicas sem referência à semântica dos elementos.

Sistemas Dedutivos

- Existem um grande número de sistemas de inferência
- Representaremos uma inferência por $\vdash$; ou $\vdash_{\text{Tipo}}$
- Vamos ver apenas algums sistemas dedutivos
- Do mais matemático para o mais computacional

Próximo Tópico

Sistemas de Hilbert

- Remonta aos *Elementos* de Euclides
- Formalização da axiomatização segue o estilo utilizado por Hilbert para diversos tipos de Lógica**s**
- Elementos:
  - os *axiomas*, que são fórmulas da lógica aos quais se atribui um status especial de "verdades básicas"; e
  - as *regras de inferência*, que permitem inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas.

Substituições

- A *substituição* de átomo p por fórmula B em A, representado por $A[p := B]$
  1. $p[p := B] = B$
  2. $q[p := B] = q$, para $q \neq p$.
  3. $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$.
  4. $(A_1 \circ A_2)[p := B] = A_1[p := B] \circ A_2[p := B]$, para $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg\}$.
- Ex:$A = p \rightarrow (p \wedge q)$,
- $B = A[p := (r \vee s)] = (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)$, B é uma *instância* da fórmula A

Uma Axiomatização da Lógica Proposicional

$$
\begin{array}{ll}
(\to_1) & p \to (q \to p) \\
(\to_2) & (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \\
(\wedge_1) & p \to (q \to (p \wedge q)) \\
(\wedge_2) & (p \wedge q) \to p \\
(\wedge_3) & (p \wedge q) \to q \\
(\vee_1) & p \to (p \vee q) \\
(\vee_2) & q \to (p \vee q) \\
(\vee_3) & (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) \\
(\neg_1) & (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p) \\
(\neg_2) & \neg\neg p \to p
\end{array}
$$

e as seguintes regras de inferência:

Substituição: Axioma A; p e B quaisqer; infere $A[p := B]$

Modus Ponens: De $A \to B$ e A; infere B.

Dedução em Sistema Axiomático

Uma **dedução axiomática** é uma sequência finita de formulas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

onde cada A_i

- é um axioma; ou
- é obtido a elementos anteriores da sequência usando alguma Regra de Inferência
- A_n é um **teorema**, $\vdash_{\mathrm{Ax}} A_n$.
- Note que todos os A_i são teoremas

Exemplo: Dedução de $p \to p$

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	de $(\to_2)$, onde $p := A$, $q := A \to A$, $r := A$.
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	de $(\to_1)$, onde $p := A, q := A \to A$,
3.	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	por Modus Ponens 1, 2.
4.	$A \to (A \to A)$	de $(\to_1)$, onde $p := A, q := A$.
5.	$A \to A$	por Modus Ponens 3, 4.

Fórmula Dedutível em uma Teoria: $\Gamma \vdash_{\mathrm{Ax}} A$

Definition

Dizemos que a fórmula A é *dedutível* a partir do conjunto de fórmulas ($=$ teoria) Γ, representado por

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{Ax}} A,$$

se há uma *dedução*, ou seja, uma seqüência de fórmulas $A_1, \ldots, A_n = A$ tal que cada fórmula A_i na seqüência:

- ou é uma fórmula $A_i \in \Gamma$;
- ou é uma instância de um axioma;
- ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de Modus Ponens.

$\Gamma = \emptyset$, temos $\vdash_{\mathrm{Ax}} A$, A é um teorema

Fragmento Implicativo

I	$p \to p$
B	$(p \to q) \to (r \to p) \to (r \to p)$
C	$(p \to q \to r) \to (q \to p \to r)$
W	$(p \to p \to q) \to (p \to q)$
S	$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)$
K	$p \to q \to p$
Peirce	$((p \to q) \to p) \to p$

Próximo Tópico

A Disciplina do Método de Dedução Natural

- Objetivo explícito de ser uma formalização da dedução mais próxima da pessoas.
- Prova é uma árvore (ou sua linearização), a partir de **premissas** (que podem não existir) e com a inserção de **hipóteses** e seu posterior descarte.
- Premissas e hipóteses podem ser **usadas**, ou **não usadas**, **reusadas**, usadas **fora de ordem** [**Regras estruturais**].
- Hipóteses devem ser **descartadas** na ordem inversa em que foram introduzidas em um ramo da árvore de provas; após o descarte não podem ser mais usadas

A Disciplina do Método de Dedução Natural

- Objetivo explícito de ser uma formalização da dedução mais próxima da pessoas.
- Prova é uma árvore (ou sua linearização), a partir de **premissas** (que podem não existir) e com a inserção de **hipóteses** e seu posterior descarte.
- Premissas e hipóteses podem ser **usadas**, ou **não usadas**, **reusadas**, usadas **fora de ordem** [**Regras estruturais**].
- Hipóteses devem ser **descartadas** na ordem inversa em que foram introduzidas em um ramo da árvore de provas; após o descarte não podem ser mais usadas

Disciplinas das regras de conectivos

Para cada conectivo, uma regra de **inserção** e uma de **eliminação**.

Disciplinas das regras de conectivos

Para cada conectivo, uma regra de **inserção** e uma de **eliminação**.

Regras de dedução natural 1A

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I^i)$$	$$\dfrac{A \to B \quad A}{B}\ (\to E)$$

Prova de $\vdash_{\mathrm{DN}} A \to (B \to A)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A}}{B \to A}\,(\to I)^2}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^1
$$

Prova de $\vdash_{\mathrm{DN}} A \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A}}{B \to A}\,(\to I)^2}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^1$$

Compare com a prova de $A \vdash B \to A$

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [B]^1}{A}}{B \to A}\,(\to I)^1$$

Prova de $\vdash_{\mathrm{DN}} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^1 \quad [A]^3}{B \to C}(\to E) \quad \dfrac{[A \to B]^2 \quad [A]^3}{B}(\to E)}{C}(\to E)}{A \to C}(\to I)^3}{(A \to B) \to (A \to C)}(\to I)^2}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}(\to I)^1
$$

A Negação é uma Implicação

As regras de dedução natural a negação são totalmente análogas às regras de implicação.

Elas se valem da seguinte equivalência lógica:

$$\neg A \equiv A \rightarrow \bot$$

Regras de dedução natural 1B

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I^i)$$	$$\dfrac{A \to B \quad A}{B}\ (\to E)$$
$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ (\neg I^i)$$	$$\dfrac{\neg A \quad A}{\bot}\ (\neg E)$$

Exemplo de dedução com regras de negação

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1 \quad [A]^3}{B}\,(\to E) \qquad \dfrac{[A \to \neg B]^2 \quad [A]^3}{\neg B}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A}\,(\neg I)^3}{(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)}\,(\to I)^{2,1}
$$

Regras de dedução natural 2

$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E_1) \quad \dfrac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E_2)$
$\dfrac{A}{A \vee B}\ (\vee I_1) \quad \dfrac{B}{A \vee B}\ (\vee I_2)$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^j\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ (\vee E^{i,j})$

Exemplos de Dedução Natural

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\,(\wedge E_1)}{A \wedge B \to A}\,(\to I)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A \to (B \to A \wedge B)}\,(\to I) \times 2$$

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}\,(\vee I_1)}{A \to A \vee B}\,(\to I)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to C]^1 \quad [A]^4}{C}\,(\to E) \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^5}{C}\,(\to E) \quad [A \vee B]^3}{C}\,(\vee E)^{4,5}}{(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))}\,(\to I) \times 3$$

Regras de dedução natural 3

$(\bot I) = (\neg E)$	$\dfrac{\bot}{A}\ (\bot E)$
Lógica Clássica	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg E)$

Mais exemplos

$\neg A \vdash A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \quad [A]^1}{\perp}\neg E}{B}\perp E}{A \to B)}(\to I)^1$$

$\vdash \neg\neg A \to A$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^1}{A}(\neg\neg E)}{\neg\neg A \to A}(\to I)^1$$

1. Provar todos os axiomas do fragmento implicativo.
2. O Cálculo de Dedução Natural prova todos os axiomas. Provar todos os demais axiomas (vários axiomas já foram provados)
3. Provar: $\vdash A \vee \neg A$
4. Provar as leis de De Morgan: $\neg(A \wedge B) \dashv\vdash (\neg A \vee \neg B)$ e $\neg(A \vee B) \dashv\vdash (\neg A \wedge \neg B)$
5. Provar as leis de distributividade:

$$(A \wedge (B \vee C)) \dashv\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \dashv\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

6. Como provar que $A \rightarrow B \nvdash \neg A$?

Próximo Tópico