Métodos de Prova – Parte 2

Lógica Propositional Clássica

Marcelo Finger

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

2022

Tópicos

Próximo Tópico

1. Tableaux Analíticos
2. Correção e Completude

Tableaux Analíticos

- Também chamado de Tableaux Semânticos, apesar de ser um método sintático
- Proposto inicialmente por Raymond Smullyan [1968]
- Baseado no Cálciulo de Sequentes de Gentzen (livre de corte)

$$\underbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_k}_{\text{antecedente}} \vdash \underbrace{\psi_1, \ldots, \psi_m}_{\text{sucedente}}$$

- Interpretação: Quando todos φ_i são verdadeiros, ao menos um ψ_j é verdadeiro
- É um método de refutação: tenta forçar todos os φ_i verdadeiro, e todos ψ_j falsos

Prova por Refutação

- Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$
- Construir uma **árvore de refutação**
- Prova: expandir a árvore por meio de regras de expansão
  - Regras-α: expansão linear de ramo
  - Regras-β: bifurcação
- Ramo fechado: contém contradição
- Ramo aberto saturado: contraexemplo (sequente refutado)
- Tableaux são um **método de decisão** (C.f. Tabelas da Verdade)

Fórmulas Marcadas

- Nossa versão dos tableaux utilizam formas marcadas por T ou F
- A refutação de $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$ gera a árvore inicial (parcial)

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$$

$$\begin{array}{c} T\varphi_1 \\ \vdots \\ T\varphi_k \\ F\psi_1 \\ \vdots \\ F\psi_m \end{array}$$

Exemplo 1

$$p \vdash p$$

$$\begin{array}{ll} (1) & Tp \\ (2) & Fp \\ & \times \\ & 1,2 \end{array}$$

- Um único ramo, fechado
- Todos os ramos da árvore fechados-
- Refutação falho: sequente provado

Regras α

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

α	$T\alpha_1 \wedge \alpha_2$	$F\alpha_1 \vee \alpha_2$	$F\alpha_1 \to \alpha_2$	$T\neg\alpha_1$	$F\neg\alpha_1$
α_1	$T\alpha_1$	$F\alpha_1$	$T\alpha_1$	$F\alpha_1$	$F\alpha_1$
α_2	$T\alpha_2$	$F\alpha_2$	$F\alpha_2$		

Regras β

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \beta \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{tikzcd}$$

β	$F\beta_1 \wedge \beta_2$	$T\beta_1 \vee \beta_2$	$T\beta_1 \rightarrow \beta_2$
β_1	$F\beta_1$	$T\beta_1$	$F\beta_1$
β_2	$F\beta_2$	$T\beta_2$	$T\beta_2$

Exemplo 2

$p \wedge q \rightarrow r, p, \neg r \vdash \neg q$

(1)	$T p \wedge q \rightarrow r$	Hipótese
(2)	$T p$	Hipótese
(3)	$T \neg r$	Hipótese
(4)	$F \neg q$	Hipótese
(5)	$F r$	α (3)
(6)	$T q$	α (4)
(7)	$F p \wedge q$ $T r$	β (1)
(8)	$F p$ $F q$ $\times$ 5,8	β (7)
	$\times$ 2,8 $\times$ 6,8	

Exemplo 3

$p \wedge q \to r, p \vdash \neg q$

(1)	$Tp \wedge q \to r$		Hipótese
(2)	Tp		Hipótese
(3)	$F\neg q$		Hipótese
(4)	Tq		α (3)
(5)	$Fp \wedge q$	Tr	β (1)
(6)		?	aberto p(T) q(T) r(T)
(7)	Fp Fq		β (5)
	$\times$ 2,8 $\times$ 6,8		

Exercícios

Verificar a validade dos seguintes sequentes pelo método TA, e apresentar uma valoração contra-exemplo caso seja inválido.

1. $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$
2. $\neg q \rightarrow \neg p \dashv\vdash p \rightarrow q$
3. $\neg(\neg p \wedge q) \dashv\vdash p \rightarrow q$
4. $\neg(\neg p \wedge q) \dashv\vdash q \rightarrow p$
5. $\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg p \wedge \neg q$
6. $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$
7. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
8. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p$

Próximo Tópico

1. Tableaux Analíticos

2. Correção e Completude

Correçao de um método de provas

Definição: Correção

Um método de prova ($\vdash$) da LPC é **correto** em relação à semântica de valorações booleanas se, para toda fórmula φ:

$$\vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \models \varphi$$

Um sistema de inferência é correto se "todo teorema é válido"

Completude de um método de provas

Definição: Completude

Um método de prova ($\vdash$) da LPC é **completo** em relação à semântica de valorações booleanas se, para toda fórmula φ:

$$\models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \varphi$$

Um sistema de inferência é completo se "toda tautologia é teorema"

Como provar a correção e completude do método TA

1. Definir um ramo como **aberto** se existe uma valoração v tal que para cada fórmula marcada $S\ \varphi$ do rama, $v(\varphi) = S$
2. Provar que: ramo aberto permanece aberto após uma expansão α
3. Provar que: ao menos um dos ramos gerados por uma expansão β de um ramo aberto é aberto
4. Provar que: Se um tableau fecha por uma escolha de expansões, ele fecha com todas as possíveis expansões

Como provar a correção

1. φ é um teorema se um tableau para $F\ \varphi$ fecham
2. Todos os tableaux para φ fecham
3. Não há valoração $v(\varphi) = F$
4. φ é tautologia

Como provar a completude

1. Completude: $\models \varphi \implies \vdash \varphi$
2. Contrapositiva: $\nvdash \varphi \implies \nvDash \varphi$
3. Se $\nvdash \varphi$ então tableau é aberto
4. Ramo aberto só pode vir da expansão de ramo aberto
5. Valoração obtida de ramo aberto fornece v tal que $v(\varphi) = F$
6. $\nvDash \varphi$