MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E58 **Data: 03/11/2022**

SOLUÇÃO

Temos que posto(S) = dim(Span S). E sendo A uma matriz, esta possui o espaço de suas colunas , Col(A), e o espaço de suas linhas, Row(A), que são o Span dos vetores que formam cada uma destas partes.
Logo, posto(A) = posto(Col(A)) = posto(Row(A)).

i)

• *Vamos mostrar que posto(AB)* $\leq$ *posto(A).*
Temos que $S \in$ *Col(AB).*

$$S = a_1(AB)_{*1} + ... + a_n(AB)_{*n} = ABa$$
$$\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ ... \\ \mathrm{a}_n \end{bmatrix}$$

Pela associatividade:

$$S = A(Ba) = Au = u_1A_{*1} + ... + u_mA_{*m} \in \mathit{Col(A)}$$

Logo, Col(AB) $\subset$ *Col(A), assim posto(AB)* $\leq$ *posto(A).*

• *Vamos mostrar, da mesma forma que no item anterior, posto(AB)* $\leq$ *posto(B).*
Temos que $t \in$ *Row (AB).*

$$t = b_1(AB)_{1*} + ... + b_n(AB)_{l*}$$
$$t = b(AB) = (bA)B = vB \in \mathit{Row(B)}$$

Dessa forma, Row(AB)$\subset$ *Row(B), logo posto(AB)* $\leq$ *posto(B).*

Logo, como posto(AB) $\leq$ *posto(A) e posto(AB)* $\leq$ *posto(B), encontramos que posto(AB)* $\leq$ *min*$\{$*posto(A), posto(B)*$\}$.

ii)

Sabemos que:

- $AB = I_m$;
- $BA = I_n$;

E com isso, sabemos desta forma que posto(AB) = m e posto(BA) = n, pois como ambas resultam em matrizes identidade, todos os vetores que formas suas linhas e colunas são linearmente independentes, e assim, o posto, ou seja, a quantidade de vetores linearmente independentes de cada matriz é sua própria dimensão (m e n).

E, com isso, temos que $min\{posto(A),\ posto(B)\} \leq min\{m,\ n\}$, *e encontramos o sistema:*

$$\begin{cases} m \leq min\{m,\ n\} \\ n \leq min\{m,\ n\} \end{cases}$$

Tal sistema possui solução somente para o caso que m = n.

iii)

Temos que $M \in \mathbb{F}^{mxn}$ *é inversível, e para tal M, precisa ser uma matriz quadrada. E com isso* $m = n$.

Sabemos que a matriz A é inversível somente se a função f associada a ela também é inversível. E sabemos também que para que f seja inversível iff dim Ker f = 0 e $\mathbb{F}^m = \mathbb{F}^n$, *ou seja,* $m = n$.