MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E54 **Data: 27/10/2022**

SOLUÇÃO

i)

Prova por indução em n.

Base: n = 0

$$\sum_{0 \leq i} x^i = \tfrac{1-x^n}{1-x}$$
$$x^0 = \tfrac{1-x^0}{1-x}$$
$$1 = \tfrac{1-1}{1-x}$$
$$1 = \tfrac{0}{1-x}$$
$$1 - x = 0$$
$$x = 1$$

Passo:

Assumindo que é verdadeiro para n, iremos provar que vale para n+1.

$$\sum_{0 \leq i \leq n+1} x^i = \tfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$$
$$\sum_{0 \leq i \leq n+1} x^i = \tfrac{1-x^n * x}{1-x}$$
$$\sum_{0 \leq i \leq n} x^i + x^n = \tfrac{1-x^n}{1-x} + x^n$$

Dessa forma, como já sabemos que a fórmula é verdadeira para x^n, temos que ela também é válida para n+1.

ii)

• *Para F_2:*

$S = \{0, 1\}$

$$F_2 = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{2}} \end{bmatrix}$$

• *Para F_3:*
$S = \{0,\ 1,\ 2\}$

$$F_3 = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{8\pi i}{3}} \end{bmatrix}$$

• *Para F_4:*
$S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

$$F_4 = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{\pi i}{2}} & e^{\pi i} & e^{\frac{3\pi i}{2}} \\ 1 & e^{\pi i} & e^{2\pi i} & e^{3\pi i} \\ 1 & e^{\frac{3\pi i}{2}} & e^{3\pi i} & e^{\frac{9\pi i}{2}} \end{bmatrix}$$

iii)
• *F_nG_n:*

$$F_nG_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{n-1*2} & \omega^{n-1*3} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-(n-1*2)} & \omega^{-(n-1*3)} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & (1+\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-3}+...+\omega^{-(n-1)}) & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (1+\omega+\omega^2+\omega^3+...+\omega^{n-1}) & n & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Notamos também que o elemento $a_{0,2}$ é igual à $(1+\omega^{-2}+\omega^{-4}+\omega^{-6}+...+\omega^{-(n-1)})$ (não coube na matriz), dessa forma podemos perceber um padrão em relação aos expoentes associados a cada Ômega.
Seja $f_{i,j}$ um elemento da matriz F_n e $g_{i,j}$ um elemento da matriz G_n, chegamos na seguinte fórmula geral para se escrever cada elemento da matriz é:

$$\sum_{\substack{0\leq m\leq ij \\ 0\geq n\geq -ij}} (f_{i,j})^m (g_{i,j})^n$$

• *G_nF_n, utilizando as mesmas matrizes da opeação mostrada anteriormente:*

$$G_nF_n = \begin{bmatrix} n & (1+\omega+\omega^2+\omega^3+...+\omega^{n-1}) & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (1+\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-3}+...+\omega^{-(n-1)}) & n & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Logo encontramos que G_nF_n é a matriz transposta do produto F_nG_n ou seja, $G_nF_n = (F_nG_n)^T$. E, portanto, a sua fórmula geral para o cálculo de cada elemento da matriz resultante desse produto é:

$$\sum_{\substack{0\leq m\leq ij \\ 0\geq n\geq -ij}} (f_{i,j})^n (g_{i,j})^m$$

iv)