Introdução à Lógica e Verificação de Programas (MAC0239)

EP2 - Lógica de Primeira Ordem

Nome: Beatriz Viana Costa *Número USP: 13673214*

Questão I:

Temos a assinatura $\sum = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$, *onde nosso conjunto de constantes* $\mathcal{C} = \{c \text{ qualquer: } c \in \mathbb{R}\}$, *o conjunto de funções* $\mathcal{F} = \{+^2\}$ *e o conjunto de predicados* $\mathcal{P} = \{=\}$. *O símbolo funcional da soma possui aridade 2 e pode ser definido como:*

- $x + 0 = x$;
- $x + y = y + x$.

Dessa forma podemos construir a fórmula:

$$\exists x \forall y (x + y = c)$$

Uma vez que a constante c é um número real, ou seja, possui pelo menos uma representação decimal infinita, os elementos x e y são forçados a pertencerem à um conjunto $\mathcal{A}$ *não finito.*

Questão II:

Seja $\mathcal{A}$ *o nosso domínio.*

(a)

$\exists x \exists y \ (x \in \mathcal{A} \land y \in \mathcal{A} \land \neg(x = y))$

(b)

$\exists w \exists x \exists y \exists z \ (w \in \mathcal{A} \land x \in \mathcal{A} \land y \in \mathcal{A} \land z \in \mathcal{A} \land \neg(x = w) \land \neg(x = y) \land \neg(x = z) \land \neg(w = y) \land \neg(w = z) \land \neg(z = y))$

Questão III:

Seja nosso domínio como o do exercício anterior, temos:

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_{2n} (\bigwedge_{i=1}^{2n} x_i \in \mathcal{A} \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n} \neg(x_i = x_j))$$

Questão IV:

Temos que se possuímos um conjunto de fórmulas que garante que o modelo possui pelo menos 2i elementos, com i dado, sabemos que pelo menos um modelo satisfaz a condição de possuir cardinalidade par, que seria o caso deste possuir exatamente 2i elementos. Isto pode ser expresso pela fórmula:

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_{2n} (\bigwedge_{i=1}^{2n} x_i \in \mathcal{A} \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n} \neg(x_i = x_j) \land x_{2i+1} \in \mathcal{A} \rightarrow (\bigvee_{j=1}^{2i} x_{2i+1} = x_j))$$

Questão V:

Iremos supor uma fórmula φ *que é verdadeira se e somente se o modelo é finito. E então iremos supor uma fórmula* ψ_n *que é verdadeira se e somente se o domínio possui no mínimo n elementos. Ou seja,* ψ_n *pode ser expresso por:*

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in \mathcal{A} \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \neg(x_i = x_j))$$

Temos então o conjunto $\Psi = \{\varphi\} \cup \{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$*, que não possui modelo, contudo todo subconjunto finito possui, o que contradiz a compacidade de Lógica de Primeira Ordem, que diz que todo conjunto cujo os subconjuntos finitos possuem modelo, também possui modelo.*

Dessa forma chegamos que não é possível que exista uma fórmula na LPO que seja verdadeira em todos os modelos com domínio finito e par, e apenas nestes, por conta da característica de a LPO ser uma lógica compacta.