MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E34 **Data: 09/10/2022**

SOLUÇÃO

i)

Dados do exercício: Suponhamos os três conjuntos X, Y e Z apresentados no problema.
Sabemos que:

- $g : X \longrightarrow Y$ e $f : Y \longrightarrow Z$ de tal forma que $f \circ g$ é inversível.

Contudo, somente com a informação que a composta das duas funções é inversível não é suficiente para inferir que as funções individualmente são inversiveis, pois, dois ou mais elementos pertencentes ao conjunto Y podem mapear um mesmo elemento em Z. Ou seja, mesmo que a composta seja inversível, este fato não implica que as funções que fazem parte da composição são bijetoras.

Um exemplo seriam as funções g(x) = $\sqrt{x}$ e f(y) = y^2, g(4) = 2 e g(4) = -2, que levariam à mesma imagem em Z, no caso f(2) = f(-2) = 4. Temos que $f \circ g$ é inversível, contudo, f não.

ii)

Pelo enunciado, temos:

- $AB \in \mathbb{F}_R x D$ é inversível;
- $A \in \mathbb{F}^{RxC}$;
- $B \in \mathbb{F}^{CxD}$;

Definimos então:

- f_A: $\mathbb{F}^C \longrightarrow \mathbb{F}^R$;
- $f_A(x) = Ax$;
- $f_B(x) = Bx$.

Temos então que:

$$f_A \circ f_B(x) = f_A\ (f_B(x)) = A(Bx) = (AB)x$$

Escolhendo um contraexemplo, temos:

$$\text{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

E calculamos o seu produto, AB:

$$\text{AB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

*Encontramos que tanto A * [0, 0, 1] quanto A * [0, 0, 0] são iguais a [0, 0], logo a função* $f_A(x)$ *= Ax não é injetora, e, portanto, f não é uma função inversível.*
Dessa forma chegamos à conclusão que sabermos que AB é inversível não é suficiente para dizer que A e B são matrizes inversíveis.

iii)
Temos:
- $AB = I_R$;

Utilizando as mesmas matrizes do problema anterior, temos que ambos [0, 0, 1] e [0, 0, 0] multiplicados pela matriz A são iguais a [0, 0]. Contudo, sabemos que para $B = A^{-1}$, $f \circ g(x) =$ *ABx, e portanto,* $f \circ g$ *deve ser uma função identidade, e como observamos,* f_A *não segue este requisito, pois não é bijetora, logo chefamos à conclusão que sabermos* $AB = IR$ *não é suficiente para inferir que* $B = A^{-1}$.

iv)
Pelo item anterior podemos chegar a mesma conclusão, pois neste caso, f_B *não é uma função identidade e portando não é bijetora.*