MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E33 **Data: 29/09/2022**

SOLUÇÃO

Dados do problema:

•*U e V espaços vetoriais sobre* $\mathbb{F}$;

• *f: U* $\longrightarrow$ *V uma função linear;*

• $g = f^{-1}$: $V \longrightarrow U$ *sua inversa.*

Dados os vetores u, $u_1, u_2 \in U$, *e v,* $v_1, v_2 \in V$ *e* α *um escalar qualquer, temos que provar os seguintes lemas que caracterizam uma função linear:*

• *L1:* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$;

• *L2:* $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$.

Temos pelo enunciado que U e V são espaços vetoriais, logo, aplicando as propriedades de um espaço vetorial, temos que:

•$f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha v$ *é verdadeiro;*

• $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$ *também é verdadeiro.*

Provando L1:

Sabendo que $f(\alpha u) = \alpha v$ *é verdadeiro, usaremos* $g \circ f = g(f(v))$:

$$f(\alpha u) = \alpha v$$
$$g(\alpha v) = \alpha u$$
$$g(f(\alpha u)) = \alpha u$$
$$g(\alpha f(u)) = \alpha u$$
$$g(\alpha v) = \alpha u$$

$$\alpha g(f(u)) = \alpha u$$
$$\alpha g(v) = \alpha u$$

$$g(\alpha v) = \alpha g(v)$$

Logo a função g atende ao primeiro lema.

Provando L2:

Sabendo que $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$ é verdadeiro, usaremos $g \circ f = g(f(v))$:

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$$
$$g(v_1 + v_2) = u_1 + u_2$$

Sabendo pela inversibilidade que:

$$f(u_1) = v_1 \text{ e } f(u_2) = v_2$$
$$g(v_1) = u_1 \text{ e } g(v_2) = u_2$$

Temos então que:

$$g(f(u_1) + f(u_2)) = u_1 + u_2$$
$$g(f(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2$$
$$g(v_1 + v_2) = u_1 + u_2$$

$$g(v_1) = u_1 \text{ e } g(v_2) = u_2$$
$$g(v_1) + g(v_2) = u_1 + u_2$$

$$g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$$

Assim a função g atende aos dois lemas de uma função linear.