MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E63 **Data: 10/11/2022**

SOLUÇÃO

Vamos definir:
- V = Im F,* $\{v_1, ..., v_r\}$ *uma base de V*;*
$\{u_1, ..., u_r\}$ *tal que f(*u_k*) =* v_k*;*
- U = Span($\{u_1, ..., u_r\}$*).*
Dessa forma, garantimos que a f definida anteriormente é inversível.*

• *Iremos supor U = U*** $\oplus$ *Ker f, e então, iremos verificar se é possível que dim U** $\neq$ *dim U**.*
Utilizando o lema que dim(A $\oplus$ *B) = dim A + dim B, temos então que:*

$$\text{dim } U = \text{dim } U^* \oplus \text{dim Ker } f = \text{dim } U^{**} + \text{Ker } f$$
$$\text{dim } U^* = \text{dim } U^{**}$$

Portanto não é possível que dim U seja diferente de U**.*

• *Partindo da informação de que dim U* = dim U**, temos então que:*

$$U^* = \text{Span } (B), \text{ onde } B = \{u_1^*, ..., u_r^*\}$$
$$U^{**} = \text{Span } (\{u_1^{**}, ..., u_r^{**}\}), \text{ ode } B' = \{u_1^{**}, ..., u_r^{**}\}$$
$$u = u^* + w = u^{**} + \overline{w}$$
$$w, \overline{w} \in \text{Ker } f$$

Temos que mostrar que não há nenhum elemento em U que não esteja também em U**, ou seja, as bases geradas pelas combinações lineares são equivalentes.*

Tiramos de nossa informação incial, que se as dimensões de U e U** são iguais, então há um mapeamento linear e bijetivo entre os elementos dos dois espaços vetoriais.*
Seja B uma base de U, então existe uma base B' de U**, tal que B* $\subset$ *B'. Assim dim U* =* $|B|$ $\leq |B'|$ *= dim U**, e como temos que dim U* = dim **, então encontramos que dim U* =* $|B|$ $= |B'|$ *= dim U**, ou seja, Span (B) = Span (B').*