MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E19 **Data: 15/09/2022**

SOLUÇÃO

Vamos provar por meio dos três axiomas que definem um espaço vetorial V, são eles:
-A1: V deve conter a origem, ou seja, deve contar o vetor nulo.
-A2: Se v e w pertencem a V, então v + w pertence a V.
-A3: Para cada v em V existe um elemento –v em V tal que v + (-v) = 0.

1.
Primeiro provando para uma quantidade par de 1's no vetor:
Temos que o A1 é trivial, pois o vetor [0, 0, 0, 0, 0] contém uma quantidade par de 1's, ou seja, zero.
Vamos usar a prova por absurdo para demonstrar A2.
Vamos supor u1 e u2 vetores pertencentes ao conjunto de vetores em GF(2) com quantidades pares de 1's cuja a soma resulta em um vetor v que possui uma quantidade ímpar de 1's. Logo:
u1 + u2 = v
Agora vamos realizar o produto escalar da soma de u1 e u2 por [1, 1, 1, 1, 1]. Para não se alterar a igualdade, faremos o mesmo com v:
*[1, 1, 1, 1, 1] * (u1 + u2) = [1, 1, 1, 1, 1] * v*
E isto é o mesmo que fazer o produto escalar de u1 e u2 individualmente e posteriormente somá-los:
*[1, 1, 1, 1, 1] * u1 + [1, 1, 1, 1, 1] * u2 = [1, 1, 1, 1, 1] * v*
Sabemos que o produto escalar em GF(2) de um vetor que contém uma quantidade par de 1's por outro que possui todas as coordenadas iguais a 1, resultará em zero, logo conseguimos:
*0 + 0 = [1, 1, 1, 1, 1] * v*
Contudo, sabemos também que o produto escalar em GF(2) de um vetor que possui uma quantidade ímpar de 1's em suas coordenadas por outro que possui 1 em todas as coordenadas, é igual a 1. Assim chegamos que:
0 = 1

Logo, provamos por absurdo que a soma de quaisquer dois vetores, ambos com quantidades pares de 1's em suas coordenadas, sempre resultará em outro vetor com uma quantidade par de 1's em suas coordenadas.
Já para provar o A3, sabemos que a soma de duas coordenadas iguais em GF(2), resultará em 0, logo o elemento que com v resultará em 0 é o próprio vetor v, que pelo enunciado, já pertence ao conjunto de vetores de V.
Logo chegamos que o conjunto 1. apresentado é um espaço vetorial.

2.

Provando para uma quantidade ímpar de 1's no vetor.
Para A1 temos de maneira trivial que o vetor nulo não pertence ao grupo de vetores descritos, pois [0, 0, 0, 0, 0], vetor nulo, possui uma quantidade par de 1's, zero.
Para o A2 iremos supor que a soma de u1 e u2, ambos com uma quantidade ímpar de coordenadas iguais à 1, resulta em v, um vetor com uma quantidade par de 1's em suas coordenadas:
$u1 + u2 = v$
Vamos fazer então o mesmo do exercício 1, realizaremos o produto escalar:
$[1, 1, 1, 1, 1] * u1 + [1, 1, 1, 1, 1] * u2 = [1, 1, 1, 1, 1] * v$
Por ser uma soma em GF(2), sabemos que o produto escalar de um vetor com uma quantidade ímpar de coordenadas iguais a 1 por um vetor com todas as coordenadas iguais a 1 é igual a 1, e o produto escalar de um vetor com uma quantidade par de 1's por um vetor com todas as coordendas iguais a 1 é igual a 0:
$1 + 1 = 0$
$0 = 0$
Logo, é possível que neste conjunto a soma de dois vetores resulte em um terceiro, com quantidade par de 1's, que não pertence ao conjunto.
Já o A3, pelo mesmo motivo que em ***1.*** *é o mesmo, o elemento que somado com v resulta em 0 é o próprio vetor v.*
Assim, concluímos que este grupo não define um espaço vetorial, pois não satisfazem todas suas propriedades, A1 e A2.