MAE0119 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

FOLHA DE RESPOSTAS - LISTA 3

Nome: Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

1)
Começamos definindo nosso Ω, que pode ser qualquer combinação de faces dos dois dados, que são lançados simultâneamente:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Além disso, vamos difinir também os eventos A e B:
- A = {Soma das duas faces do dado ser igual a 7}
- B = {Pelo menos uma face igual a 3}

Pelos dois experimentos serem repetidos até que haja o primeiro sucesso, usaremos a distribuição geométrica.

i)
Tratando do evento A:
Temos nosso estaço amostral Ω, onde os eventos favoráveis estão em negrito:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \mathbf{(1,6)} \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \mathbf{(2,5)} & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \mathbf{(3,4)} & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & \mathbf{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & \mathbf{(5,2)} & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ \mathbf{(6,1)} & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Temos que o parâmetro $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, sabendo que $\mathbb{E}(A) = \frac{1}{p}$, temos então que $\mathbb{E}(A) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$, que pode ser vista como a quantidade de lançamentos até que a soma de ambas as faces de cada dado dar 7 pela primeira vez.

ii)
Tratando do evento B, temos o seguinte Ω, onde os acontecimentos favoráveis estão marcados em negrito:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & \mathbf{(1{,}3)} & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \mathbf{(2{,}3)} & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ \mathbf{(3{,}1)} & \mathbf{(3{,}2)} & \mathbf{(3{,}3)} & \mathbf{(3{,}4)} & \mathbf{(3{,}5)} & \mathbf{(3{,}6)} \\ (4,1) & (4,2) & \mathbf{(4{,}3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & \mathbf{(5{,}3)} & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & \mathbf{(6{,}3)} & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Temos que p $= \frac{11}{36}$*, logo, analogamente à* ***i)****,* $\mathbb{E}(B) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{11}{36}} = \frac{36}{11} \approx$ *3,2 lançamentos.*
Assim, tendo em vista que os dados serão lançados até que o primeiro evento ocorra (A), e posteriormente até que o segundo evento ocorra (B), a quantidade de lançamentos esperados para os dois eventos é a soma da quantidade de lançamentos esperados para cada um deles, que é $\mathbb{E}(A)+\mathbb{E}(B) = 9{,}2 \approx = 10$ *lançamentos.*

2)
Definindo o evento X:
- $X = \{$*Maior valor observado*$\}$

Temos nosso espaço amostral Ω *definido a seguir, com os maiores valores observados marcados em negrito:*

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{1},1) & (1,\mathbf{2}) & (1,\mathbf{3}) \\ (\mathbf{2},1) & (\mathbf{2},2) & (2,\mathbf{3}) \\ (\mathbf{3},1) & (\mathbf{3},2) & (\mathbf{3},3) \end{array} \right\} |\Omega| = 9$$

Usando a fórmula $\frac{k}{|\Omega|}$*, onde k é o número de acontecimentos favoráveis, temos as seguintes probabilidades:*
- $P(X = 1) = \frac{1}{9}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{3}$
- $P(X = 3) = \frac{5}{9}$

Logo para a função acumulada, temos:
- $P(X \leq 1)=P(X = 1)+P(X < 1)= \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $P(X \leq 2)=P(X = 2)+P(X = 1)= \frac{1}{9}$
- $P(X \leq 3)=P(X = 3)+P(X = 2)+P(X = 1)= 1$

O gráfico da Função de Distribuição Acumulada está grampeada na última página.

3) *Vamos primeiros definir os eventos A, B, C e D:*
- $A = \{$*Ser a urna 3*$\}$
- $B = \{$*2 bolas brancas sejam retiradas*$\}$
- $C = \{$*Ser a urna 1*$\}$
- $D = \{$*Ser a urna 2*$\}$

Vamos definir então a probabilidade de cada urna ser escolhida:

- $P(A) = \frac{1}{6}$
- $P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{1}{2}$

Após isso, fazemos as probabilidades de duas bolas brancas serem retiradas sabendo a urna escolhida:

- $P(B/A) = \frac{1}{2} * \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$
- $P(B/C) = \frac{3}{4} * \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$
- $P(B/D) = \frac{1}{4} * \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

Continuando, não sabemos calcular $P(A/B)$, ou seja, dado que saíram duas bolinhas brancas, a probabilidade de ser da urna 3, contudo, já temos o valor calculado de $P(B/A)$, que é a probabilidade de duas bolinhas brancas serem retiradas, sabendo que a urna 3 foi escolhida. Usando o Teorema de Bayes, temos a seguinte equação:

$$P(A/B) = \frac{P(B)*P(A)}{P(B)+P(B)+P(B)} = \frac{P(B)*P(A)}{P(B/A)*P(A)+P(B/C)*P(C)+P(B/D)*P(D)}$$

Substituindo os valores temos:

$$P(A/B) = \frac{\frac{3}{14}*\frac{1}{6}}{\frac{3}{14}*\frac{1}{6}+\frac{15}{28}*\frac{1}{3}+\frac{1}{28}*\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{1}{28}+\frac{5}{28}+\frac{1}{56}} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{13}{56}} = \frac{2}{13} \approx 15\%$$

Temos então que a probabilidade de que a urna 3 tenha sido escolhida, dado que foram retiradas duas bolinhas brancas, é de aproximadamente 15%.

4)

Utilizaremos o modelo de distribuição geométrica, pois o experimento é repetido até que haja o primeiro sucesso.

Temos então que o cardinal de nosso espaço amostral é:

$$|\Omega| = B + V$$

Que seria basicamente a quantidade de bolinhas brancas somada à quantidade de bolinhas vermelhas.

Temos a partir disso que nosso parâmetro p é:

$$p = \frac{B}{B+V}$$

Logo, queremos a probabilidade X do número de bolinhas retiradas até que a primeira branca seja retirada seja pelo menos k, dado que $k \geq 1$.

Temos então:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X<k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{B}{B+V} * (1 - \frac{B}{B+V})^i$$

5)

Vamos definir o evento A_i :

- $A_i = \{Quando\ a\ i\text{-ésima pessoa pega o i-ésimo celular}\}$

Uma vez que nosso espaço amostral são todas as permutações de n, podemos definir a probabilidade de A_i como:

$$P(A_i) = \frac{1}{n!}$$

Logo, dado que $k \leq n$, temos que X, a quantidade de pessoas que pegaram seus respeticvos celulares, pode ser definida como:

$$P(X = k) = (\frac{1}{n!})^k$$

Pois temos que ter exatos k pareamentos, isto é, k pessoas tem que pegar seus respectivos celulares, logo basta elevar $P(A_i)$ por k.