MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E59 **Data: 03/11/2022**

SOLUÇÃO

i)

Temos pelo enunciado a matriz $A \in \mathbb{F}^{nxn}$*, ou seja, f:* $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$*, f(x) = Ax. Além disso, temos também que posto(A)=n, ou seja, dim(Col(A)) = n = dim(Row(A)).*
Temos então:

$$f(x) = Ax \in Col(A)$$
$$Im(f) = Col(A) = \mathbb{F}^n$$

Ou seja, temos que Col(A) é subespaço de $\mathbb{F}^n$*, e assim* $\{a_1, ..., a_n\} \in Col(A)$ *é uma base de* $\mathbb{F}^n$*, dessa forma f é sobrejetora.*
E tendo o que foi dito anteriormente, que $A = [a_1, ..., a_n]$ *e tendo dois vetores, u e v, diferentes entre si, temos:*

$$f(u) = Au = u_1a_1 + ... + u_na_n$$
$$f(v) = Av = v_1a_1 + ... + v_na_n$$
$$f(u) - f(v) = (u_1 - v_1)a_1 + ... + (u_n - v_n)a_n \neq 0$$
$$f(u) \neq f(v)$$

Dessa forma, encontramos que f é injetora e, consequentemente, inversível. Logo:

$$\exists g \; f(g(x)) = x$$
$$g(x) = Qx$$
$$AQx = I_n$$

E, portanto:

$$AQ = I_n$$

ii)

Da mesma maneira que o item anterior, temos que f(x) = Bx $\in$ *Row(B), ou seja:*

$$f(x) = Bx \in Row(B)$$
$$Im(f) = Row(B) = \mathbb{F}^n$$

Ou seja, Row(B) é subespaço de $\mathbb{F}^n$*, e dessa forma,* $\{b_1, ..., b_n\} \in$ *Row(B), é uma base de* $\mathbb{F}^n$*, e com isso, sabemos que ela é sobrejetora.*
E da mesma forma que no item i), temos que tal f também é injetora, e portanto, inversível. Logo:

$$\exists g \; f(g(x)) = x$$
$$g(x) = Px$$
$$PBx = I_n$$
$$PB = I_n$$

iii)

Temos pelos dois itens anteriores que $f(g(x)) = MN = g(f(x)) = NM = I_n$.