MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome:Beatriz Viana Costa **Número USP: 13673214**

Assinatura

Beatriz Viana Costa

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E74 **Data: 10/12/2022**

SOLUÇÃO

Seja:

- $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *ortogonal, tal que* $v_i \in \mathbb{R}^n$;
- $M = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T$ *produto externo(outer product);*
- $M \in \mathbb{R}^{nxn}$;
- $V = Span\ S$;
- $b = b^{||V} + b^{\perp V}$;
- $b^{||V} \in V$ *e* $b^{\perp V} \perp V$.

Queremos encontrar $Mb = b^{||V}$.

Temos então:

$$Mb = (\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T)b$$
$$Mb = \sum_{i=1}^{k} v_i(v_i^T b)$$
$$Mb = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, b\rangle v_i$$
$$Mb = b^{||V}$$

E sabendo que o produto interno de v_i *e* v_j *é* $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j; \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}$

Temos então que:

$$b^{||V} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

$$b^{\perp V} = b - b^{||V} = b - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$
$$v_j \in \{v_1, ..., v_k\} : \langle b^{\perp V}, v_j \rangle = 0$$
$$\langle b - \sum_{i=1} \alpha_i v_i, v_j \rangle = 0$$
$$\langle b, v_j \rangle - \sum_{i} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = 0$$
$$\langle b, v_j \rangle - \sum_{i} \alpha_i \delta_{ij} = 0$$
$$\langle b, v_j \rangle - \alpha_j = 0$$
$$\alpha_j = \langle b, v_j \rangle$$
$$b^{||V} = \sum_{i=1}^{k} \langle b, v_i \rangle v_i$$

Encontramos assim que $Mb = b^{||V}$.