*MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I*

**FOLHA DE SOLUÇÃO**

**Nome:Beatriz Viana Costa** **Número USP: 13673214**

*Assinatura*

**Beatriz Viana Costa**

*Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.*

**Exercício: E29** **Data: 29/09/2022**

---

## SOLUÇÃO

*Para solucionar o problema, foi utilizada a função button vectors apresentada no livro, e também a função escrita no exercício 17.*

*Primeiro, denotamos a configuração inicial como o vetor s, de tal forma que:*

$$s \in GF(2)^{n^2}$$
$$GF(2)^{n^2} = \{s_i\text{: } s_i = 1 \text{ se a luz esta acessa, e 0 caso contrário}\}$$

*Uma vez que o corpo $\mathbb{F}$ que estudamos é GF(2), e a dimensão de S é n x n, tal que $n \in \mathbb{N}$.*

*Além disso, temos também o conjunto $B_n$ de vetores botões que é retornado pela função button vectors:*

$$B_n = \{b_{ij} \in GF(2)^{n^2}\text{: } (i, j) \in (1, ..., n) * (1, ..., n)\}$$

*Onde ij são as coordenadas do botão que ao ser selecionado muda seu valor e de seus quatro vizinhos (cima , baixo, esquerda e direita).*
*Chegamos então que, se $\forall s \in GF(2)^{n^2}\ \exists\ A \subset B_n$ tal que:*

$$s + \sum_{b \in A} b = 0$$

$$A \subset B$$

*Sendo A o conjunto de botões que formam o Null Space da matriz de entrada.*
*Ainda, se somarmos o estado inicial s dos dois lados da equação, temos:*

$$\sum_{b \in A} b = s$$

*Logo, se há um botão ou uma combinação de botões que somados resultam em s, a equação possui solução para este s. Descrevendo-a de maneira mais abrangente tomamos escalares $\alpha \in$ GF(2):*

$$\exists \{\alpha_i \colon \alpha \in GF(2)\} \text{ tal que}$$
$$\sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i b_i = s, \forall s$$

*Descrevemos assim a função característica de $b_i$ em $A$, ou seja:*

$$\alpha_i = \mathbb{1}_A(b_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } b_i \in A \\ 0 \text{ se se } b_i \notin A \end{cases}$$

*Escrevendo de maneira generalizada, podemos tomar a função característica de $b_i$.*

*Logo percebemos que para que todas as configurações iniciais s tenham solução, o cardinal do conjunto $GF(2)^{n^2}$ deve ser igual ao cardinal do Span do conjunto B de botões, pois assim temos que qualquer entrada pode ser formada por uma combinação de vetores b:*

$$s = \alpha_1\ b_1 + \ldots + \alpha_k\ b_k$$

*Assim temos a seguinte relação:*

$$Span(B_n) = GF(2)^{n^2}$$
$$|Span(B_n)| = |GF(2)^{n^2}|$$
$$|GF(2)^{n^2}| = 2^{n^2}$$

*Tendo esta informação, foram testadas as entradas com n = 2, n = 3 e n = 4, onde conseguimos os seguintes resultados:*

(1) *Para n = 2 encontramos que há solução para todas as configurações iniciais, pois o cardinal de Span de $B_n$ é igual ao cardinal de $GF(2)^{n^2} = 16$.*
(2) *Para n = 3 encontramos que há solução para todas as configurações iniciais de forma que $|Span(B_n)| = |GF(2)^{n^2}| = 512$.*
(3) *Para n = 4 encontramos que não há solução para todas as configurações iniciais. Encontramos $|Span(B_n)| < |GF(2)^{n^2}| = 65.536$.*