MAC0239: Exercício-Programa 2

Lógica de Primeira Ordem

Marcelo Finger

2022

Aviso Importante

> ### **Este exercício deve ser criado e processado por LaTeX e entregue no formato PDF via e-disciplinas.**

Não precisa entregar "os fontes", ou seja, o arquivo `.tex` ou `.bib`.

Para facilitar a vida de você, estou fornecendo os fontes deste enunciado, assim vocês já tem um arquivo `.tex` para começar a haquear (do inglês, *to hack*).

É explícito e declarado queeste exercício tem como objetivo secundário ensinar vocês a usar um processador de texto como o LaTeX. Este tipo de programa tem o aspecto de uma linguagem de programação e, como tal, você deve consultar a sua documentação. O LaTeX possui implementações para linux, windows, mac e interface web via Overleaf. Use qual plataforma quiser, com os pacotes (*packages*) que achar conveniente. Mais uma vez: **Só entregue o PDF**.

1 Introdução

O objetivo deste EP é desenvolver uma série de fórmulas de lógica de primeira ordem a partir das quais um resultado de (falta de) expressividade da lógica de primeira ordem. Ou seja, este EP será um "estudo dirigido" para provar o seguinte resultado sobre a Lógica de Primeira Ordem (LPO).

Teorema 1.1 (Resultado Principal do EP2) *Não existe na Lógica de Primeira Ordem uma fórmula que seja verdadeira em todos os modelos com domínio finito e par, e apenas nestes.* ■

A teoria por trás destes resultados podem ter como base, dentre outras tantas possíveis, o livro de Smullyan [Smu95], nos capítulos 3 e 5, que tratam dos resultados de compacidade; também há uma versão em português; ver [Smu09].

2 Questões

Apresentar num documento escrito e processado em LaTeX, a resposta para as seguintes questões. Você receberá nota por suas respostas a estas questões. O seu arquivo de entrega deve conter claramente as questões solicitadas e suas respostas.

Questão 1 (Aquecimento) Apresentar uma fórmula da LPO que, quando verdadeira em algum modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$, força o domínio $\mathcal{A}$ a ser infinito; esta fórmula não é verdadeira em modelos com domínio finito.

Dica: use uma assinatura com apenas uma constante, um símbolo funcional unário e apenas o predicado da igualdade e, possivelemente, uma ordem parcial estrita $>$.

Nota: eu chamei isso de aquecimento pois não tem nada a ver com o Teorema 1.1. Ou tem?

Questão 2 Apresentar duas fórmula fórmula que satisfaçam as seguintes restrições:

(a) Uma fórmula que seja verdadeira se e somente se (*sse*) o modelo tiver pelo menos dois elementos.

(b) Uma fórmula que seja verdadeira sse o modelo tiver pelo menos 4 elementos.

Questão 3 Apresentar uma fórmula que seja verdadeira sse, dado $n \in \mathbb{N}^+$, o modelo pelo menos $2n$ elementos.

Dica: usar os conectivos generaizados:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$$

Questão 4 Mostrar que, um conjunto de fórmulas que garante que o modelo possui pelo menos $2i$ elementos, para $i \in [1, n]$ sempre tem um modelo com tamanho par.

Questão 5 (Finalmente) Provar o Teorema 1.1.

Dica: Usar um argumento de compacidade, como o feito em sala de aula, e usar as fórmulas apresentadas na Questão 4.

Referências

[Smu95] Raymond M. Smullyan. *First-order Logic*. Dover books on advanced mathematics. Dover, 1995. Revised version from the 1968 original.

[Smu09] Raymond M. Smullyan. *Lógica de Primeira Ordem*. Editora da Unesp, 2009. Vesão em português.