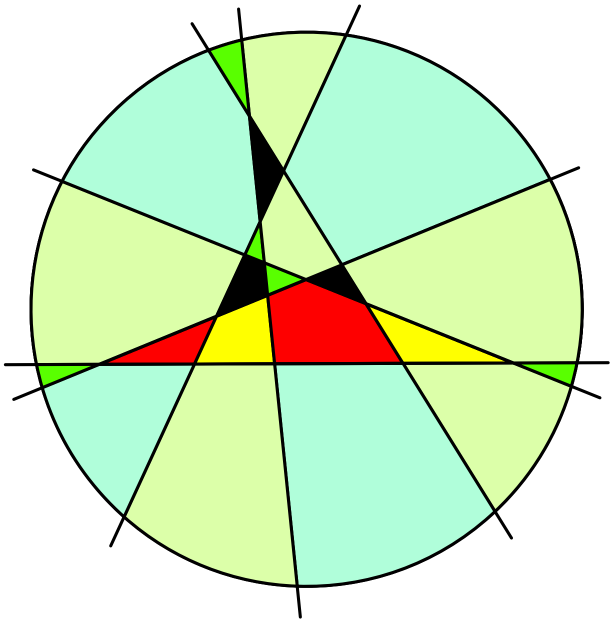
Peter Hammer 22. VI 22
hammer.ch@bluewin.ch

was passiert



wenn mehr als zwei nur zwei Ziele verfolgen

Peter Hammer	hammer.ch@bluewin.ch
Armin Widmer	widmer.ar@bluewin.ch
Felix Huber	felix.68@gmx.ch

Teil 2

Rätsel des Monats $2 + 2 - \sqrt{4} + 20 = 22$

22 Pirouetten

Idee **Felix Huber und Peter Hammer**

www.ran.de/fussball/england/news/ben-brereton-neuer-name-neue-nationalitaet-und-ploetzlich-ein-superstar-128403

Ein Superstar wie Benjamin Anthony Brereton Díaz (**22**) will Felix Huber nicht sein und nicht werden. Aber zumindest für uns ist der Luzerner Gymnasiallehrer ein genialer Zahlen-Jongleur, denn niemand verwertet unsere Steilvorlagen – wie die **Jahreszahl 22** – so oft und so genial wie Felix.

Frage **Ein Hahn kostet zweieinhalb Sapek, eine Henne eineinhalb Sapek und ein Küken einen halben Sapek. Wir wollen mit 22 Sapek präzis 22 dieser Tiere kaufen. Ist dies möglich ?**

Daraus macht Felix Huber keinen Hehl. So zum Beispiel ist die obige Frage «nur» eine Abhandlung des berühmten 100-Vogel-Rätsels aus dem arithmetischen Handbuch des Chinesen **Zhāng Qiūjiàn** (um 430 – 490).

Und wenn es jeweils aufgeht, wenn sich alles um die **Zahl 22** dreht, dreht unser Zahlen-Philosoph nicht eine und auch nicht zwei Pirouetten. Richtig – es sind **22 Pirouetten**, damit sogar das Eis – gemeint ist das Glacé in seiner Hand – schmilzt !

22	**0**	**0**	**0**	**0**
19	**9**	**5**	**4**	**1**
17	**13**	**5**	**1**	**0**
17	**11**	**7**	**5**	**0**
16	**13**	**7**	**3**	**1**
15	**13**	**9**	**3**	**0**
15	**12**	**9**	**5**	**3**
13	**11**	**9**	**8**	**7**

Frage **Wie ist die Tabelle mit den 22 Zeilen sinngemäss zu vervollständigen ?**

$$\frac{22}{2} \cdot \int_0^{22} \sin(x)\,dx = ?$$

Eine Problemstellung darf nicht aufgeblasen oder ungefähr passen. Seine uns herausfordernden Prämissen sind klipp und klar und deshalb hier auch ganzzahlig !

Frage **Gibt es ein Dreieck ABC mit $a + b = 22$, $u = 20 + 22 = 42$ und einem Flächeninhalt A , der die Jahreszahl $20 + 22 = 42$ umrahmt ?**

Lösungen   Rätsel des Monats $2 + 2 - \sqrt{4} + 20 = 22$

Mit der Devise «starten und verändern» haben wir die gesuchten, sechs Varianten ohne jegliche Hilfsmittel flugs zur Hand ! Der «hahnlose» Start (11 Hennen und 11 Küken) ist trivial. Mit dem Auftauchen eines Hahns verschwinden – nicht zwangsläufig naturgetreu – zwei Hennen. Dafür taucht – sich beschützt fühlend – ein Küken auf. So bleibt die **Summe 22** und die **Anzahl der Tiere 22** erhalten.

Hahn 2.5	Henne 1.5	Küken 0.5	Summe
0	11	11	22
1	9	12	22
2	7	13	22
3	5	14	22
4	3	15	22
5	1	16	22

Der Spielraum ist amüsant. Werten wir beispielsweise die Henne um 0.5 auf 2.0 (anstatt 1.5) auf, so verbleiben nur noch zwei Varianten:

$$(1, 6, 15) \text{ und } (4, 2, 16)$$

Bei der Suche des Dreiecks mit den Bedingungen

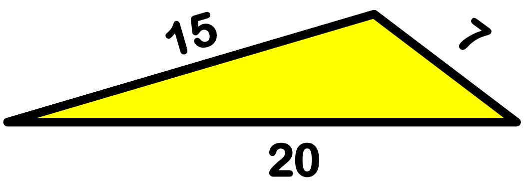
$$u = a + b + c = 20 + 22 = 42 \quad , \quad A = 20 + 22 = 42 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

führt die «überflüssige, aber passende» Zugabe a + b = **22** direkt zu Heron.

Heron , $a = ?$, $b = 22 - a$, $c = 20$, $s = 21$

$$\sqrt{21 \cdot (21 - a) \cdot [21 - (22 - a)] \cdot 1} = 42$$

$$\sqrt{21 \cdot (21 - a) \cdot (a - 1)} = 42$$



$$21 \cdot \left(-21 + 22a - a^2\right) = 1'764$$

$$-21 + 22a - a^2 = 84 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 22a + 105 = 0$$

$$(a - 7) \cdot (a - 15) = 0$$

1	22	0	0	0	0	484
2	20	8	4	2	0	484
3	20	7	5	3	1	484
4	19	9	5	4	1	484
5	19	8	7	3	1	484
6	18	12	4	0	0	484
7	17	13	5	1	0	484
8	17	13	4	3	1	484
9	17	11	8	3	1	484
10	17	11	7	5	0	484
11	17	11	7	4	3	484
12	17	9	8	7	1	484
13	16	13	7	3	1	484
14	16	12	8	4	2	484
15	16	11	9	5	1	484
16	15	13	9	3	0	484
17	15	13	8	5	1	484
18	15	13	7	5	4	484
19	15	12	9	5	3	484
20	15	11	8	7	5	484
21	13	12	11	7	1	484
22	13	11	9	8	7	484

Die Spielerei mit den Quadratzahlen schreibt im **Jahr 22** ein besonderes Kapitel. Attraktiv ist, dass die Raumdiagonale im Quader nur eine Variante (4 , 12 , 18) zulässt.

Das Bilden der **Quadratzahl von 22** mit maximal fünf verschiedenen Quadratzahlen führt zu **22 Varianten**. Da stellt sich die Frage, ob dies ebenso göttlich ist wie die «quadratische Bildung» der Jahreszahl.

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$$

$$13^2 + 14^2 = 365$$

Rätsel des Monats $(2+2)\cdot 5+2+0 = 22$

faire Teilung an der Wunder-Bar

Idee **Martin Gardner und Peter Hammer**

Martin Gardner

Geoff Olson (2004)

Genau vor 12 Jahren – am 22. Mai 2010 – hat uns mit **Martin Gardner** ein Zahlen-Spezialist, der nicht zuletzt wegen seinem spürbaren, philosophischen Hintergrund und seinen x-Büchern nach wie vor viele inspiriert, für immer verlassen. **Frage:** Was fällt uns auf, wenn wir die Quadratzahlen 16, 36, 196, 256, 576, 676, … unter die Lupe nehmen ? Richtig – die Zehner (**1** , **3** , **19** , **25** , **57** , **67** , …) sind ungerade.

Frage **Wie lässt sich beweisen, dass bei Quadratzahlen mit der Endziffer 6 die Anzahl Zehner ungerade ist ?**

Bitte sehr – wie verwandeln wir diese lustige, bekannte Eigenschaft in eine spannende Geschichte mit dem Titel «faire Teilung»? Martin Gardner kennt die Antwort, die wir hier leicht angepasst wiedergeben: «Adam und Eva verkaufen eine Herde Schafe. Für jedes Tier erhalten sie so viel wie die Grösse der Anzahl Tiere. Die Auszahlung erfolgt in 10-Dollar-Scheinen und der Rest in Münzen. Abwechselnd nehmen Adam und Eva 10-Dollar-Scheine vom Tisch, wobei Eva den ersten und letzten Schein erhält. Dafür darf Adam die Münzen nehmen. Um diese Teilung fair zu gestalten, schreibt Eva einen Check von x Dollars aus. Wie gross ist x?»

Die Erkenntnis, dass die Quadratzahl eine ungerade Anzahl Zehner haben muss, liefert «hinten eine 6» und schiebt Adam 6 Dollars (in Münzen) zu. Da Eva einen Zehner-Lappen (Start und Ende) mehr besitzt, wird das Delta von vier (10 – 6) durch einen Check über **2 Dollars** ausgeglichen.

Und wie könnte es anders sein? Es sind sehr viele Seiten in den Büchern von Martin Gardner durchzublättern, bis sie auftaucht, die denk- und merkwürdige **22**.

Bei einem Wettbewerb mit Hochsprung, Weitsprung, Kugelstossen, usw. kämpfen drei Teams um Medaillen respektive Punkte. Gold, Silber und Bronze geben jeweils stets gleich viele Punkte, zum Beispiel für Gold je 6, für Silber je 3 und für Bronze je 2 Punkte. In der Schlussrangliste hat das Team A **22 Punkte** erobert, das

Team B, das den Weitsprung gewinnt, 9 Punkte und damit gleich viele Punkte wie das Team C. Welches Team hat bei der Disziplin Hochsprung triumphiert?

Frage **Bei ? Disziplinen realisiert A 22 Punkte , B und C je 9 Punkte. Bei jeder Disziplin ist die Bewertung bei den Rängen eins bis drei gleich. Wie viele Punkte gibt es für einen Sieg bei einer Disziplin ?**

A	1	4	8	11	15	18
B	2	5	9	12	13	16
C	3	6	7	10	14	17

Wir werden zu einem Würfel-Duell eingeladen. Wer die höhere Zahl wirft, hat gewonnen. Wir dürfen zwar die drei Würfel A, B und C mit den Zahlen 1 bis 18 – wie zum Beispiel in der Abbildung – beschriften, aber unser Vis-à-vis darf zuerst einen der drei Würfel auswählen. Spielen oder nicht spielen, ist hier keine Frage !

Wer zuerst wählen muss, ist im Verhältnis 17:19 im Nachteil. Würfel A verliert gegen B, der aber wiederum C unterliegt. Weil schliesslich Würfel A gegen C dominiert, steht jeder Würfel einmal als Sieger und einmal als Verlierer da. Somit ist der Vortritt – wörtlich zu nehmen – die Wahl der Qual.

Dem Thema «intransitive Würfel» widmet Martin Gardner im Buch «Denkspiele» ein ganzes Kapitel. Und so taucht sie zwangsläufig auf – die **Schnapszahl 22**.

A	3	4	5	20	21	22
B						
C						
D						

Frage **Wie sind bei den Würfeln B, C und D alle verbleibenden Zahlen von 1 – 24 zu «beschriften», damit A > B , B > C , C > D und D > A gilt ?**

Ist es nicht «wonderful»? Ziehen wir die Wurzel aus der neunstelligen Zahl, so wird die **Zahl 22** eine Hauptrolle spielen.

Frage **Die Buchstaben W O N D E R F U L symbolisieren alle Ziffern von 1 bis 9. Ziehen wir die Wurzel aus WONDERFUL, so ergibt sich das «Wort» O O D D F . Welcher Buchstabe entspricht der Ziffer 2 ?**

Lösungen Rätsel des Monats $(2+2)\cdot 5+2+0 = 22$

Mathematische Hexereien	**ISBN 3 550 065 787**	**Seite 65**
Mathematische Knobeleien	**ISBN 3 529 083 212**	**Seite 108 und Seite 180**
Mathematische Denkspiele	**ISBN 3 880 343 233**	**Seite 18**

Eine Qualität von Martin Gardner ist unbestritten die Bekanntgabe der Quellen. So zum Beispiel geht die Geschichte der «fairen Teilung» auf einen Chemiker namens Ronald A. Wohl (1936 – 2014), der übrigens in Basel auf die Welt kam, zurück. Wohl wiederum entdeckte diese Aufgabe in einem französischen Buch. Und so ist wie des Öftern nur eines gewiss: Die Herkunft ist ungewiss.

Werden Zahlen der Form 10 a + **4** oder 10 a + **6** quadriert, ist die Anzahl Zehner ungerade.

$$(10a+4)^2 = 100a^2 + 80a + 16$$

weil $80a$ gerade ist , muss $80a+1$ ungerade sein !

analog verläuft es bei $(10a+6)^2 = 100a^2 + 120a + 36$

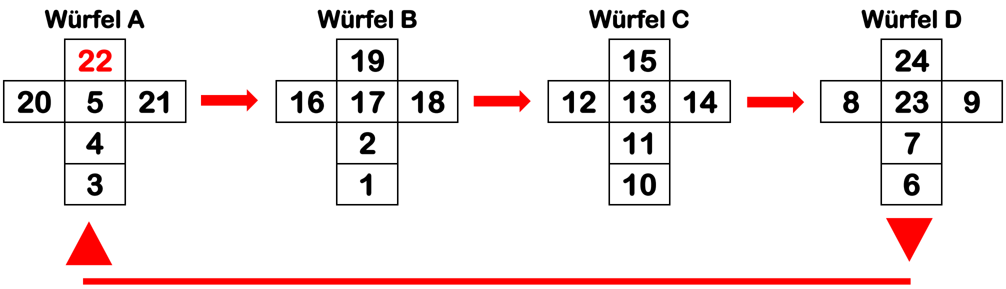
und grösseren Zahlen $(100b+10a+6)^2$

Aufgrund der Punkteausbeute von A, B und C (**22** / 9 / 9) werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Die Anzahl Disziplinen muss deshalb ein Faktor von 40 sein. Leicht ersichtlich ist, dass nur hierfür nur 5 in Frage kommt. Somit gibt es **5 Disziplinen** mit je **8 Punkten** (für Gold 5 Punkte , für Silber 2 Punkte und für Bronze 1 Punkt).

- Team A gewinnt viermal Gold und einmal Silber (5 + 5 + 5 + 5 + 2 = 22).
- Team B holt einmal Gold und viermal Bronze (5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9).
- Team C als ewiger Zweiter erobert fast stets Silber (2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9).

Bei der Geschichte von Martin Gardner gewinnt das Team B den Weitsprung und somit wird klar, dass bei allen vier anderen Disziplinen das Team A dominierte und demnach beim Hochsprung einen Höhenflug landete.

Beim Würfel-Spielchen «die höhere Zahl gewinnt» verliert Würfel B gegen Würfel A im Verhältnis 1:2 klar – konkret bei 24 von 36 Bildern wird der Würfel A dominieren. Die Zahlen 20, 21 und **22** gewinnen gegen alle sechs Zahlen des Würfels B (18 Siege). Die Zahlen 3, 4 und 5 übertrumpfen die Zahlen 1 und 2 (6 Siege). Analog – und zwar im gleichen Verhältnis von 2:1 – gewinnt Würfel B gegen C und Würfel C gegen D. Weil schliesslich Würfel D gegen Würfel A gewinnt, ist der Kreislauf perfekt !



So «wonderful» wie das Rätsel mit der «wunderbaren Quadratwurzel» war das Leben von Carson McCullers (1917 – 67) nicht !

Die amerikanische Schriftstellerin war von klein auf eine Einzelgängerin und geprägt von mittelmässigen Noten in der Schule. Hoppla – einmal mehr erhalten die verflixten Schulnoten schlechte Noten !

https://de.wikipedia.org/wiki/Carson_McCullers

$$\sqrt{\text{wonderful}} = \text{ooddf} \quad , \quad \sqrt{523'814'769} = 22'887$$

Da die Quadratzahl von **33**'??? mehr als neun Stellen hat und es keine Quadratzahl der Form **11**'??? gibt, muss **oo** der **Zahl 22** entsprechen. Der Rest überlassen wir mit gemischtem Gefühl der verwurzelten Neu – Gier – de eines jeden.

Rätsel des Monats $2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 + 0 = 22$

St – ART in der W – ART – e – Schlange

Idee **Inéz Meyer und Peter Hammer**

Delikate Frage: Wo gibt es die längsten Schlangen zu bewundern ? Richtig – auf der Autobahn, zum Beispiel vor dem Gotthardtunnel mit einem Fernblick in das wunderschöne Tessin. Für diejenigen, die sich **leiden** – schaft – lich gern wie eine sanft kriechende Schlange bewegen, haben wir sogar zwei Tipps. Der eine Ratschlag ist, sich an Ostern in den Süden zu orientieren. Im Jahr **2022** war eine Stau-Länge von **22 Kilometern** sogar passend zum Jahr, und nicht einmal ein Rekord.

www.nzz.ch/panorama/osterstau-am-gotthard-am-karfreitag-stauten-sich-die-auto-bis-zu-22-kilometer-am-ld.1679619?reduced=true

$1^2 + 2 = 3$ $\quad (1+2)!:2 = 3$ $\quad -1+2+2 = 3$ $\quad \sqrt{(1+2)^2} = 3$

Der andere Tipp ist das kunstvolle Autonummern-Spielchen: Kreiere mit dem Ziffern-Vorspann die letzte Ziffer bei der Autonummer ! Eine **ART** – gerechtere Variante besteht darin, mit den ersten vier Ziffern einer sechsstelligen Zahl (mit einer **22** am Schluss) eine Identität zu schaffen. Somit gilt es, die **Zahl 22** mit den ersten vier Ziffern zu bilden, ohne an der Reihenfolge zu rütteln. Ansonsten ist alles erlaubt, was gewiss der am **22.** Dezember 1887 geborene, indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan auch erlaubt hätte und wie dies vor allem die beiden Beispiele andeuten.

4	8	0	4	2	2

6	4	6	4	2	2

$\sqrt{480+4} = 22$ $\quad 6!:4! - 6 - \sqrt{4} = 22$

Auf eine **ART** «sexy» ist es natürlich, wenn wir alle sechs Ziffern-Schilder knacken und bei einem Schild sogar sechs verschiedene Zahlen-Wege entdecken !

1	2	3	4	2	2
4	4	4	2	2	2
2	3	5	7	2	2

7	7	7	2	2	2
1	5	4	7	2	2
3	4	4	3	2	2

Frage **Wie lässt sich mit den vier vorderen Ziffern die Zahl 22 bilden, ohne die Reihenfolge der Ziffern zu verändern ?**

Ist es wirklich so **h - ART** – beispielsweise in einem Stau – eine sechsstellige Autonummer zu finden, bei der die **Zahl 22** so leuchten wird, wie uns die Sterne speziell am **22.** Juni 20**22** am Himmel erscheinen werden ?

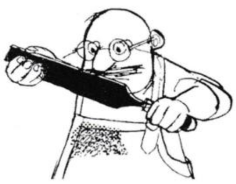
Die Quersumme muss aber nicht ebenfalls 22 sein wie im Bild.

https://www.br.de/sternenhimmel/index.html

Frage **Wie gross ist die Chance, bei einem Nummernschild mit sechs Ziffern mindestens einmal die Zahl 22 vorzufinden ? Ob die Zahl 22 vorne, innerhalb oder hinten platziert ist, spielt keine Rolle. An der ersten Stelle darf es allerdings keine null haben.**

Und auch das wissen wir vom im Stau-Stehen. Abkürzungen sind stets gefragt !

$$\frac{1\cancel{6}\cancel{3}}{\cancel{3}2\cancel{6}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{1\cancel{4}\cancel{5}}{\cancel{4}3\cancel{5}} = \frac{1}{3} \qquad \frac{?}{?} = \frac{1}{22}$$

Lösung **Rätsel des Monats** $2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 + 0 = 22$

1	2	3	4	2	2	7	7	7	2	2	2
4	4	4	2	2	2	1	5	4	7	2	2
2	3	5	7	2	2	3	4	4	3	2	2

1. $-1 + 2 - 3 + 4! = 22$

2. $(77 : 7) \cdot 2 = 22$

3. $4 \cdot 4 + 4 + 2 = 22$

4. $154 : 7 = 22$

5. $(-2 + 3!)! + 5 - 7 = 22$

6. $3 \cdot 4 + 4 + 3! = 22$

Beim dritten Nummernschild (4 4 4 2) lassen sich leicht sechs Varianten finden.

a) $44 : (4 - 2) = 22$

b) $44 : 4 \cdot 2 = 22$

c) $4 \cdot 4 + 4 + 2 = 22$

d) $4! - 4 + 4 - 2 = 22$

e) $4! - \sqrt{4 \cdot 4} + 2 = 22$

f) $4^{\sqrt{4}} + 4 + 2 = 22$

schwarz auf weiss : Das Nebeneinander als Rarität !

Bei zwei Ziffern gibt es nicht 100, sondern nur 90 Möglichkeiten, da vorne keine Null sein darf. Analog gibt es bei drei Ziffern 900 Möglichkeiten und bei sechs Ziffern 900'000 mögliche Fälle. Bei zwei Ziffern ist die 22 einzigartig. Bei drei Ziffern gibt es 18 günstige Fälle – 10 Fälle, wenn die 22 vorne steht und nur 8 (wegen der Null), wenn die 22 hinten steht.

Die Auflösung der richtigen Sequenz, die der Folge https://oeis.org/A255372 nur ähnelt, verdanken wir Armin Widmer und Prof. Dr. Alois Heinz (Heilbronn). Auf Anfrage liefern wir ihre Erkenntnisse gern bis zum Geht-nicht-mehr.

https://mitarbeiter.hs-heilbronn.de/~heinz/

Anzahl Ziffern	2	3	4	5	6
günstig	1	18	261	3’411	42’048
möglich	90	900	9’000	90’000	900’000
Prozent	1.11 %	2.00 %	2.90 %	3.79 %	4.672 %

the show must go on !

$$\frac{1\cancel{6}\cancel{3}}{\cancel{3}2\cancel{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1\cancel{4}\cancel{5}}{\cancel{4}3\cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{?}{?} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\cancel{4}1\cancel{9}\cancel{2}}{\cancel{9}22\cancel{2}\cancel{4}} = \frac{1}{22}$$

Lösung : Felix Huber