2.

2.1 Grafo Planar é o nome designado aos grafos que podem ser representados de tal maneira que nenhuma aresta sobreponha outra aresta deste grafo.

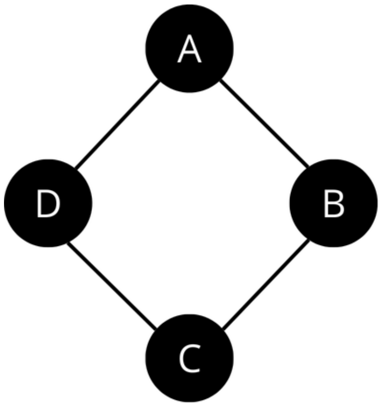


Imagem 1: Grafo planar.

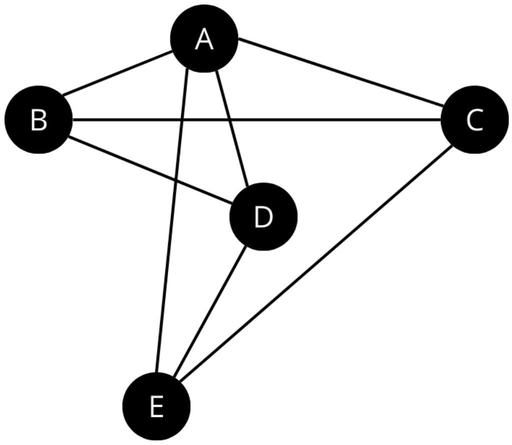


Imagem 2: Grafo não planar.

Um grafo *G=(V,E)* é **planar** se existe uma representação de G no plano em que cada vértice é um ponto e cada aresta é uma curva que liga dois vértices, de modo que:

- As curvas não se intersectam, exceto nos seus extremos (vértices),
- Nenhuma aresta passa "por cima" de um vértice que não seja uma de suas extremidades.

Também é válido ressaltar que mesmo que um grafo possua intersecção, ele pode ser plano se puder ser representado de tal forma:

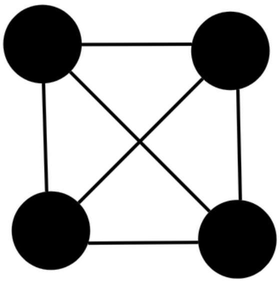


Imagem 3: Grafo H.

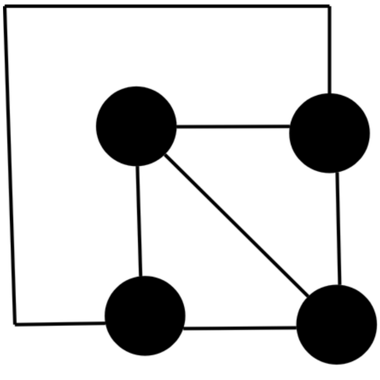


Imagem 4: Grafo H (Planar).

2.2 A fórmula de Euler é a seguinte:

$$V - A + F = 2$$

Onde:
- *V = número de vértices*
- *A = número de arestas*
- *F = número de faces (internas e externas)*

A fórmula de Euler se aplica a todo grafo planar conexo e também a todo poliedro convexo, pois o grafo formado pelos vértices e arestas de um poliedro convexo é um grafo planar conexo.

De forma prática:

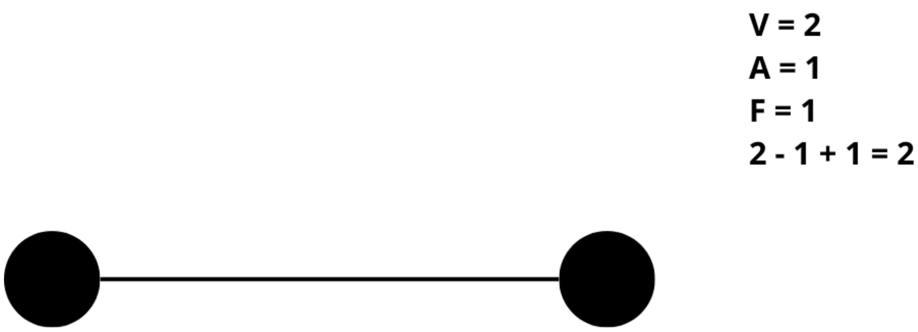


Imagem 5: Demonstração Euler 1.

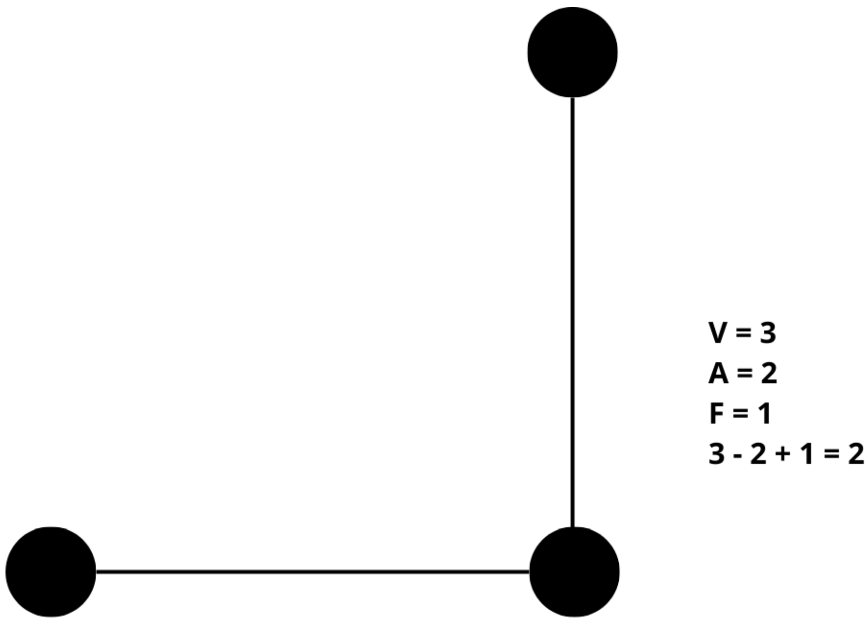
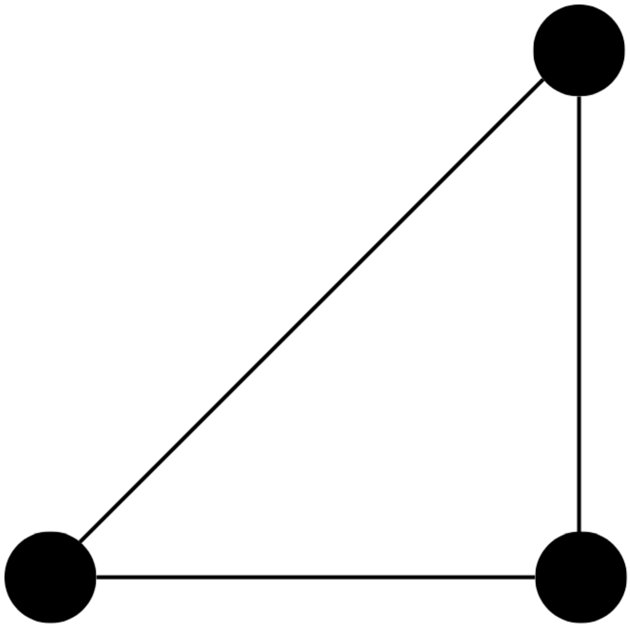
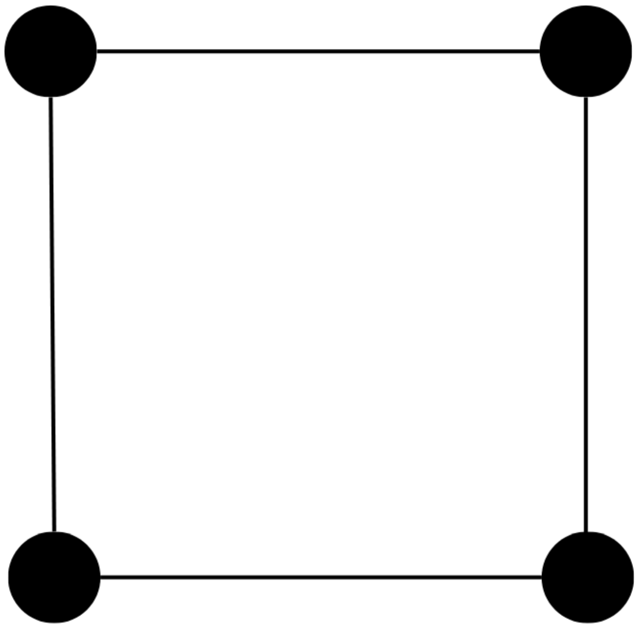


Imagem 6: Demonstração Euler 2.



V = 3
A = 3
F = 2
3 - 3 + 2 = 2

Imagem 7: Demonstração Euler 3.



V = 4
A = 4
F = 2
4 - 4 + 2 = 2

Imagem 8: Demonstração Euler 4.

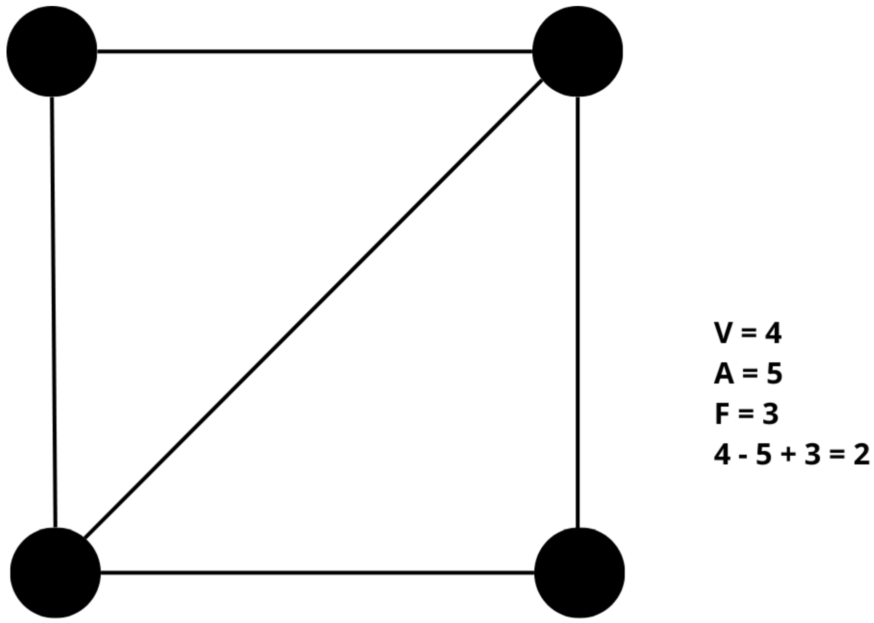


Imagem 9: Demonstração Euler 5.

A fórmula **somente** falha quando o poliedro deixa de ser convexo:

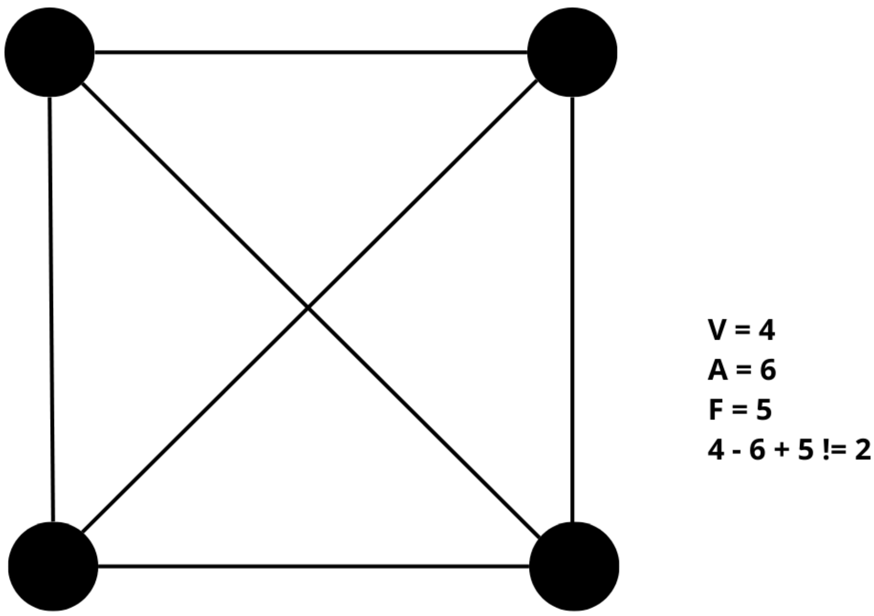


Imagem 10: Euler em poliedro não convexo.

2.3 O Teorema de Kuratowski é um resultado que caracteriza exatamente quando um grafo não é planar.

Ele pode ser enunciado assim:

Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém nenhum subgrafo que seja uma subdivisão de K5 ou de K3,3.

Onde:

- K5 é o grafo completo com 5 vértices, isto é, todos os pares de vértices são ligados por uma aresta.

- K3,3 é o grafo bipartido completo com duas partes de 3 vértices cada (3 de um lado e 3 do outro), em que todo vértice de uma parte se liga a todos os vértices da outra parte, e não existem arestas dentro da mesma parte.

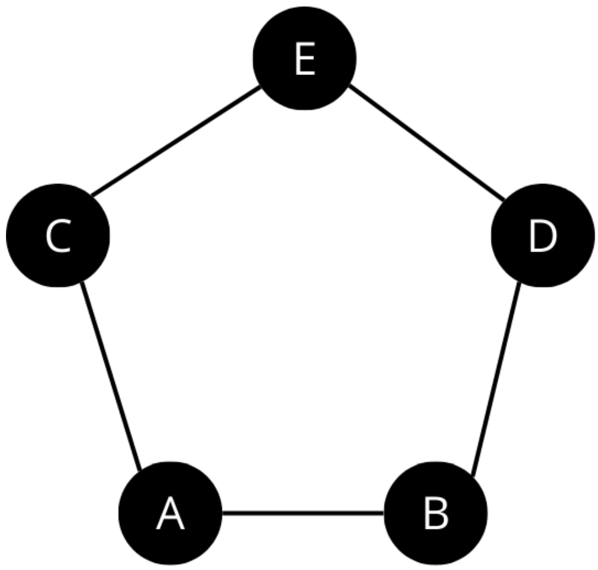


Imagem 11: Grafo K5.

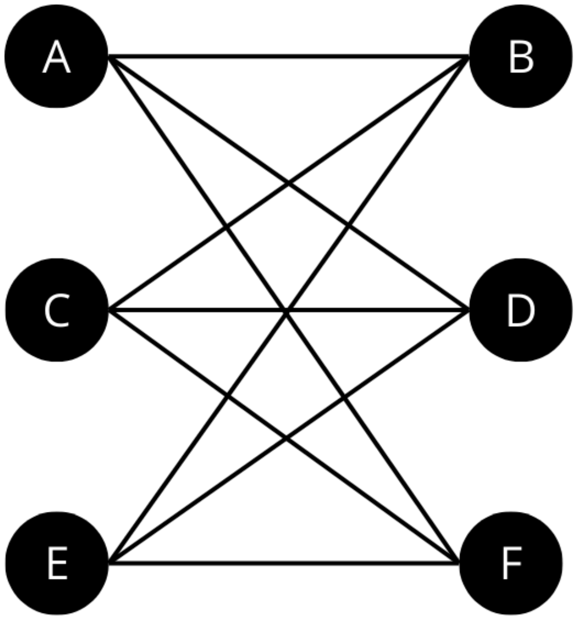


Imagem 12: Grafo K3,3.

Dizemos que um grafo contém uma subdivisão de K5 ou de K3,3 quando conseguimos “enxergar” esses grafos dentro dele, permitindo quebrar algumas arestas em caminhos maiores ao inserir vértices de grau 2 no meio. Em outras palavras, podemos substituir uma aresta direta por um caminho com mais vértices, mas mantendo a mesma estrutura de conexões entre os vértices “importantes”.

De forma intuitiva:

- Se for possível encontrar dentro de G uma versão “disfarçada” de K5 ou de K3,3 (com arestas subdivididas), então G é não planar.

- Por outro lado, se G é planar, isso significa que nenhum desses dois grafos aparece como subgrafo subdividido dentro dele.

Na prática, o Teorema de Kuratowski é usado principalmente para provar que um grafo não é planar: em vez de tentar desenhar o grafo de todas as formas possíveis, basta identificar um subgrafo que seja uma subdivisão de K5 ou de K3,3.