

GENERACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE VÓRTICES  
ÓPTICOS MEDIANTE MODULADORES ESPACIALES DE LUZ

TRABAJO DE GRADO

Santiago Echeverri Chacón  
[sechev14@eafit.edu.co](mailto:sechev14@eafit.edu.co)

ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS FÍSICAS  
MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA  
UNIVERSIDAD EAFIT  
2015

# GENERACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS MEDIANTE MODULADORES ESPACIALES DE LUZ

Santiago Echeverri Chacón  
[sechev14@eafit.edu.co](mailto:sechev14@eafit.edu.co)

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MÁGISTER EN FÍSICA  
APLICADA

DIRECTOR: René Restrepo Gómez  
[rrestre6@eafit.edu.co](mailto:rrestre6@eafit.edu.co)

CO-DIRECTOR: Luciano A Ángel Toro  
[langel@eafit.edu.co](mailto:langel@eafit.edu.co)

ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS FÍSICAS  
MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA  
UNIVERSIDAD EAFIT  
2015

*“The first principle is that you must not fool yourself - and  
you are the easiest person to fool...”*

**Richard P. Feynman**

*A mis padres*

## **Agradecimientos**

Muchas gracias. A mis padres por haberme dado la oportunidad y soporte para llegar hasta aquí. A Satya por su cariño y compañía. A René y Luciano, por su dirección, amistad, apoyo, y por aceptarme en su grupo. A Nestor, por sus excelentes ideas y por su muy acertada y equilibrada asesoría académica y personal. A Carlos y Camilo por su ayuda y trabajo duro en el proyecto.

Asimismo, agradezco a la Universidad EAFIT y la Dirección de investigación que me otorgó una beca en el marco de la convocatoria para proyectos internos y a Colciencias y su programa Jóvenes Investigadores. Sin estas dos instituciones como soporte habría sido muy difícil cursar mis estudios de maestría y a la vez generar los resultados de investigación que se presentan en esta disertación.

Santiago

junio 2015



## Licencia

Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

### Usted es libre de:

**Compartir** — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

**Adaptar** — remezclar, transformar y crear a partir del material

El licenciador no puede revocar estas libertades mientras cumpla con los términos de la licencia.

### Bajo las condiciones siguientes:



**Reconocimiento** — Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.

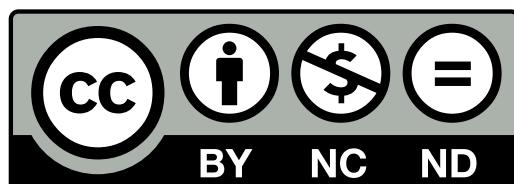


**NoComercial** — No puede utilizar el material para una finalidad comercial.



**CompartirIgual** — Si remezcla, transforma o crea a partir del material, deberá difundir sus contribuciones bajo la misma licencia que el original.

**No hay restricciones adicionales** — **No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas** que legalmente restrinjan realizar aquello que la licencia permite.





## **Resumen**

La generación de haces de luz con vorticidad óptica usando moduladores espaciales de luz, es una capacidad que desde hace más de 10 años le ha permitido a laboratorios de alto prestigio generar innovaciones tecnológicas que han revolucionado campos de la biomedicina. Entre ellas se encuentran las pinzas ópticas para micromanipulación de objetos microscópicos, y nuevas técnicas de microscopía de fase mejoradas con vórtices ópticos (VOs). En este trabajo se presentan los resultados de un proyecto del Laboratorio de Fotónica del Grupo de Óptica Aplicada de la Universidad EAFIT, en el cual logramos implementar las herramientas y métodos necesarios para la generación de VOs de calidad suficiente para la investigación en estas áreas. En primera instancia, se desarrolló y caracterizó un montaje experimental en el cual los VOs son generados al proyectar máscaras de fase sobre un modulador espacial de luz de transmisión. Esto implicó comprender el funcionamiento de este tipo de dispositivos e implementar técnicas y herramientas para su caracterización, que garantizaran una modulación de fase y amplitud adecuada. Una vez cumplido el objetivo de generar VOs de forma experimental, se desarrolló un método novedoso de reconstrucción de fase basado en la técnica de Diversidad de Fase (PD) para la caracterización de las aberraciones ópticas del sistema que distorsionan sus distribuciones de intensidad. La novedad del método resulta del uso de máscaras de fase espiral como diversidades de fase, de tal forma que los mismos VOs distorsionados sirven para la detección de las aberraciones que los están deformando. Finalmente, se presentan VOs de calidad, generados experimentalmente, y en los cuales se ha introducido y corregido una aberración conocida como demostración de las capacidades adquiridas.

---

# Índice general

<b>Lista de Acrónimos</b>	<b>xv</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte del estudio de haces Laguerre-Gauss . . . . .	2
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo General . . . . .	5
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	5
1.5. Estructura del documento . . . . .	5
<b>I Generación de haces Laguerre-Gauss por medio de un SLM</b>	<b>11</b>
<b>2. Generalidades y Marco Teórico</b>	<b>12</b>
2.1. Estado del Arte . . . . .	12
2.1.1. Moduladores Espaciales de Luz . . . . .	13
2.1.1.1. Moduladores basados en micro espejos . . . . .	13
2.1.1.2. Moduladores de cristal líquido . . . . .	13
2.1.2. Marco Teórico de la Caracterización de SLMs de Trasmisión . . . . .	15
2.2.1. Cristales líquidos . . . . .	16
2.2.1.1. Características de los Cristales Líquidos . . . . .	16
2.2.1.2. Clasificación de los LC . . . . .	18
2.2.1.3. Las pantallas de cristal líquido nematico retorcido. . . . .	20
2.2.2. Polarización de la luz . . . . .	21
2.2.3. El formalismo de Jones . . . . .	27
2.2.3.1. Algunos estados de polarización importantes . . . . .	28

---

2.2.3.2. Elementos ópticos como operadores en la representación de Jones . . . . .	30
2.2.4. Propiedades ópticas de los cristales líquidos nemáticos enroscados (TN-LCD) . . . . .	36
2.3. Revisión de la literatura . . . . .	40
<b>3. Caracterización de TN-SLM</b>	<b>44</b>
3.1. Medida de la modulación de amplitud . . . . .	44
3.1.1. La notación de Dirac . . . . .	46
3.2. El método de Ma et al. para la caracterización del SLM . . . . .	47
3.2.1. Comprobación experimental con 100 medidas . . . . .	51
3.3. Un método basado en minimización de parámetros . . . . .	55
3.3.1. Funcional a minimizar . . . . .	56
3.3.2. Una ampliación de la función de minimización . . . . .	60
3.3.2.1. Instrumento para la automatización del proceso de medida.	62
3.4. Medida de la modulación de fase . . . . .	63
3.4.1. Resultados de la medida de modulación de fase . . . . .	66
<b>4. Generación de Vórtices Ópticos</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Plataforma computacional para la generación de máscaras de fase . . . . .	73
4.3. Resultados de los Vórtices Ópticos obtenidos . . . . .	75
4.3.1. Vórtices Ópticos obtenidos usando máscaras tipo tenedor . . . . .	76
<b>II Caracterización y corrección de aberraciones de VO</b>	<b>86</b>
<b>5. Caracterización de aberraciones en Vórtices Ópticos</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción . . . . .	87
5.1.1. Aberraciones ópticas . . . . .	87
5.1.2. Las técnicas de reconstrucción de fase no interferométricas . . . . .	89
5.2. Marco Teórico . . . . .	90
5.2.1. Phase Diversity tradicional . . . . .	92
5.2.2. PD con iluminación coherente . . . . .	95
5.2.3. Máscaras espirales como diversidades de fase . . . . .	96
5.3. Metodología . . . . .	97
5.4. Resultados . . . . .	102

---

5.4.1.	Resultados de simulaciones	102
5.4.1.1.	Preparación de las fases de referencia	102
5.4.1.2.	Descripción y análisis de resultados simulados	103
5.4.1.3.	Discusión sobre el método Gerchberg-Saxton	105
5.4.1.4.	Sobre las limitantes del método	107
5.4.2.	Resultados experimentales	108
5.4.2.1.	Montaje óptico	109
5.4.2.2.	Análisis de resultados	110
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>116</b>
6.1.	Productos desarrollados en el transcurso del proyecto	117
6.2.	Trabajo futuro	118
<b>A.</b>	<b>Apéndice Planos de rotadores</b>	<b>119</b>
<b>B.</b>	<b>Interfáz y programas del instrumento de calibración</b>	<b>124</b>
B.1.	Interfaz de calibración de motores	124
B.2.	Interfaz para toma de medidas	126
B.3.	Programa del Arduino para control de motores de paso	129
B.4.	Programa de Python para comunicación serial	129
<b>C.</b>	<b>Descripción de los polinomios de Zernike</b>	<b>130</b>

---

# Índice de figuras

1.1. Comparación entre haces Gaussianos y haces Laguerre-Gauss . . . . .	2
2.1. Comparación entre TN-SLM . . . . .	13
2.2. Modulador espacial basado en arreglos de micro espejos . . . . .	14
2.3. Dos estados de la materia comunes en la naturaleza. . . . .	16
2.4. Esquema de la composición química general en una molécula de LC. . . . .	17
2.5. Orientación de una molécula de LC con respecto al ángulo director en su vecindad. . . . .	19
2.6. Clasificación de los cristales líquidos según su orden. . . . .	19
2.7. Arquitectura de un TN-LCD . . . . .	21
2.8. Distintas representaciones del campo eléctrico para ilustrar la polarización .	23
2.9. Rotación del sistema de coordenadas de la elipse de polarización . . . . .	24
2.10. Estados de polarización circular . . . . .	25
2.11. Propagación de un estado de polarización lineal a través de un polarizador horizontal. . . . .	32
2.12. Generación de estados de polarización circulares . . . . .	34
2.13. Generación de estados de polarización lineales . . . . .	35
2.14. Propagación de la luz en un TN-LC . . . . .	37
2.15. Modelos de TN-LCD . . . . .	41
2.16. Publicaciones en relación a la caracterización de TN-LCD . . . . .	42
3.1. Esquema de un sistema generador y analizador de estados de polarización .	45
3.2. Curva de modulación de amplitud para un estado no óptimo . . . . .	46
3.3. Comparación entre las tres intensidades para calibración medidas por Ma et al. para un SLM similar y por nosotros. . . . .	50

---

3.4. Valores de $X^2$ , $Y^2$ $Z^2$ y $W^2$ encontrados por nosotros utilizando el método de Ma et al. . . . .	50
3.5. Comparación entre los valores de $X$ , $Y$ $Z$ y $W$ encontrados por Ma et al. para un SLM similar y por nosotros. . . . .	51
3.6. Numeración de medidas experimentales de modulación para corroboración del modelo de SLM . . . . .	52
3.7. Estados de polarización elípticos . . . . .	53
3.8. Curvas de modulación experimentales comparadas con las simuladas usando el modelo obtenido con el método de Ma et al . . . . .	54
3.9. Curvas de modulación que sirven de entrada para el ajuste de parámetros de la matriz de Jones del SLM . . . . .	55
3.10. Funcional a minimizar para el ajuste de parámetros basado en 6 medidas de modulación de amplitud. . . . .	57
3.11. Condiciones de frontera, argumentos iniciales y llamado de la función de minimización ( <code>fmin_l_bfgs_b</code> ) para cada nivel de gris. . . . .	58
3.12. Parametros reales que conforman la matriz de Jones del SLM encontrados por minimización con 6 medidas . . . . .	58
3.13. Curvas de modulación experimentales comparadas con las simuladas usando el modelo obtenido con el método de minimización de 6 medidas . . . . .	59
3.14. Parametros reales que conforman la matriz de Jones del SLM encontrados por minimización con 100 medidas . . . . .	60
3.15. Curvas de modulación experimentales comparadas con las simuladas usando el modelo obtenido con el método de minimización de 100 medidas . . . . .	61
3.16. Hardware del instrumento de polarimetría y montaje experimental . . . . .	62
3.17. Interferómetro Mach-Zehnder para caracterización de curvas de modulación de fase . . . . .	63
3.18. Interferogramas obtenidos en el montaje experimental para caracterización de modulación de fase . . . . .	64
3.19. Máscara dividida e interferograma obtenido para caracterización de modulación de fase . . . . .	65
3.20. Patrones de interferencia 1D de interferogramas con y sin desfase . . . . .	66
3.21. Transformada de Fourier de un patrón de interferencia . . . . .	69
3.22. Script para el cálculo de la fase de un interferograma usando FT . . . . .	69
3.23. Modulación de amplitud y fase del estado con máximo rango de fase . . . . .	70
3.24. Modulación de amplitud y fase del estado con mínima modulación de amplitud	70

---

3.25. Modulación de amplitud y fase óptima . . . . .	70
4.1. Primeros 12 modos LG . . . . .	72
4.2. Fase e intensidad de haces LG . . . . .	73
4.3. Plataforma para la generación de máscaras de fase . . . . .	74
4.4. Vórtices ópticos obtenidos en la configuración en linea para el BraKet 10 . .	75
4.5. Vórtices ópticos obtenidos en la configuración en eje para el BraKet 6 . .	76
4.6. Composición de una máscara tipo tenedor con dislocación de carga 1 . . .	77
4.7. Vórtices ópticos difractados por una rejilla tipo blazed. . . . .	78
5.1. Efecto de pixelado en el SLM sobre las aberraciones en VOs . . . . .	88
5.2. Relaciones entre funciones de transferencia ópticas y sus FT. . . . .	93
5.3. Diagrama de flujo del PD con iluminación coherente . . . . .	98
5.4. Diagrama del sistema óptico para PD con iluminación coherente. . . . .	100
5.5. Ejemplo de una máscara tenedor con astigmatismo. . . . .	100
5.6. Resultados de simulaciones con PD de iluminación coherente. . . . .	104
5.7. Resultados visuales de simulaciones de PD coherente para aberración $1/14\lambda$	105
5.8. Algoritmo de GS . . . . .	106
5.9. Resultados visuales de simulaciones de PD coherente para aberración $1\lambda$ .	108
5.10. Montaje experimental para reconstrucción de fase con PD . . . . .	109
5.11. Aberración tipo trébol. . . . .	110
5.12. Resultados experimentales de la reconstrucción de fase con PD. . . . .	111
5.13. VO registrados luego restar las aberraciones detectadas con PD. . . . .	112
A.1. Corte transversal del ensamblaje de los rotadores de elementos ópticos . . .	120
B.1. Interfaz del programa para calibración de motores. . . . .	125
B.2. Interfaz del programa para toma de medidas 1. . . . .	127
B.3. Interfaz del programa para toma de medidas 1. . . . .	128
C.1. Ejemplo de una aberración del frente de onda parametrizada, a través de la suma de unos Polinomios de Zernike, cada uno con diferente peso. . . . .	133



---

# Listado de Acrónimos

**AO** Óptica Adaptativa - Adaptive Optics. [88](#)

**APSF** Función de Dispersión de Punto de Amplitud - Amplitude Point Spread Function. [92](#)

**CCD** Dispositivo de Carga acoplada. [101](#)

**FT** Transformada de Fourier - Fourier Transform. [92](#)

**GP** Pupila Generalizada - Generalized Pupil. [93](#)

**GPU** Unidad de Procesamiento Gráfico -Graphics Processing Unit. [109](#)

**GS** Método de Gerchberg-Saxton. [90](#)

**GSAs** Métodos de Búsqueda del Gradiente - Gradient Search Algorithms. [90](#)

**LCD** Pantalla de Cristal Líquido - Liquid Crystal Display. [13](#)

**LCs** Cristales Líquidos - Liquid Crystals. [13](#)

**LG** Laguerre-Gauss. [2](#)

**NI-WFS** Sensado de Fase No Interferométrico - Non Interferometric Wavefront Sensing. [90](#)

**OAM** Momento Angular Orbital - Optical Angular Momentum. [1, 12, 72, 73](#)

**OTF** Función de transferencia óptica - Optical transfer function. [92](#)

**PD** Diversidad de Fase - Phase Diversity. [90](#)

---

**PSD** Detector de Estados de Polarización - Polarization State Detector. [44](#)

**PSF** Función de Dispersión de Punto - Point Spread Function. [74](#), [92](#)

**PSG** Generador de Estados de Polarización - Polarization State Generator. [44](#)

**RMS** Error cuadrático medio - Root Mean Square. [103](#)

**SF** Filtro Espacial - Spatial Filter. [110](#)

**SLM** Modulador Espacial de Luz - Spatial Light Modulator. [4](#)

**TN-LCD** Pantalla de Cristál Líquido tipo Nemático Retorcido -Twisted Nematic Liquid Crystal Display. [20](#)

**VOs** Vórtices Ópticos - Optical Vortices (OV). [2](#), [88](#)

# Introducción

Como es bien sabido, la luz transporta energía; esto se evidencia al comparar las temperaturas en el día y en la noche o al iluminar una celda fotovoltaica. En su representación cuántica, la luz está compuesta por partículas sin masa llamadas fotones. Al no tener masa, su energía está directamente asociada a su momento, y el momento de los fotones así como el de otras partículas en la mecánica cuántica puede ser tanto lineal como angular. El momento angular se compone a su vez de dos contribuciones, la de spin y la orbital. Desde un punto de vista macroscópico, el momento angular de spin se asocia con la polarización de la luz, es decir con la dirección de oscilación de los campos eléctrico y magnético con respecto a un eje coordenado. Asimismo, el **momento angular orbital (OAM)** se asocia con las distribuciones espaciales de la amplitud y la fase, tal y como se observan en un plano perpendicular a la propagación de la luz. Para aclarar esta idea comparemos dos haces polarizados linealmente, uno con OAM cero, y el otro con OAM +1. El haz de luz que carece de momento angular orbital presenta una distribución de fase constante. Si éste tiene una distribución de amplitud Gaussiana, al ser enfocado por una lente, en un plano de observación veremos que la distribución de intensidad está dada por una función de Airy como la que se ilustra en la Fig. 1.1c). Por el contrario, el haz con OAM +1 posee una distribución de fase helicoidal donde el valor de la fase varía azimutalmente desde  $\pi$  a  $-\pi$  radianes como se muestra en la Fig. 1.1b). Haces con distribuciones de fase de este tipo poseen una indeterminación de la fase en el centro dado que en la coordenada  $r = 0$  confluyen fotones con todos los valores posibles de fase. La consecuencia directa de la indeterminación en este tipo de puntos es la ausencia de luz por efecto de superposición. Si, como en el caso anterior, observamos la intensidad en un plano de enfoque veremos un perfil con forma de dona como la de la Fig. 1.1 d).

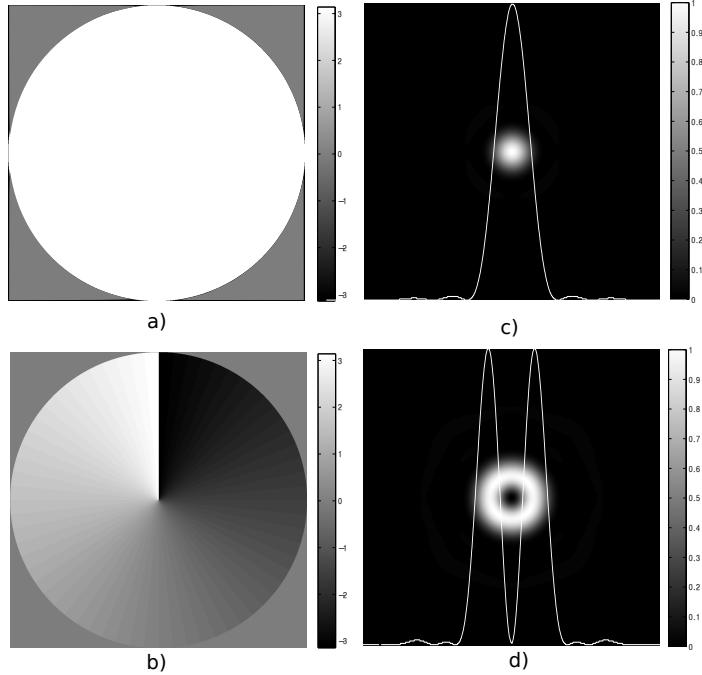


Figura 1.1: Las figuras a) y b) representan mapas de fase de haces con OAM 0 y +1 definidos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Las intensidades correspondientes luego de enfocar los haces en un plano de observación se muestran en las figuras c) y d).

Por su naturaleza rotacional, los puntos alrededor de los cuales la fase varía de  $-\pi$  a  $\pi$  se conocen como **vórtices ópticos (VOS)**, y están presentes siempre que haya haces con momento angular orbital distinto de cero. Por otra parte, de forma similar a cómo se describe la amplitud en haces con OAM cero como “Gaussianas”, los haces con momento angular distinto de cero se describen matemáticamente como haces “**Laguerre-Gauss**” (**LG**). Esto se debe a que soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas incluyen no sólo una componente de amplitud Gaussiana, sino también una dependencia radial y azimutal descrita por polinomios de Laguerre, con los cuales se pueden representar vórtices ópticos de fase y amplitudes del tipo dona. El estudio, y el desarrollo de aplicaciones sobre los haces Laguerre-Gauss y por consecuencia, de los VOs, requiere entonces de la capacidad de manipular el OAM de haces de luz.

## 1.1 Estado del arte del estudio de haces Laguerre-Gauss

El momento angular orbital añade un grado de libertad al conjunto de propiedades que pueden ser manipuladas y que caracterizan a la luz, en particular: la polarización o

## Introducción

---

espin, la coherencia, el espectro y la cantidad de energía. Siendo así, la posibilidad de manipular el momento angular orbital abre camino a un amplio rango de aplicaciones en numerosas áreas de la ciencia y la tecnología, tanto en el mundo microscópico (células y micromanipulación) como en el macroscópico (astronomía y telecomunicaciones).

Por listar brevemente algunas aplicaciones de los haces con OAM distinto de cero se pueden mencionar: el uso de OAM en telecomunicaciones ópticas como una nueva variable para multiplexación de señales en fibra y en espacio libre [6, 11, 13, 13, 20]. En microscopía óptica para resaltar bordes de muestras biológicas transparentes [5, 19], e identificar curvaturas de objetos de fase por medio de interferometría espiral [12]. Además, es una herramienta esencial para la manipulación de objetos en la escala micro al ser usados como pinzas ópticas capaces de atrapar y mover partículas [1, 15]. Se espera también un avance importante en el campo de la computación cuántica vía entrelazamiento cuántico de OAM en fotones [22]. Fuera de las anteriores, cabe destacar algunas de las patentes relacionadas con el tema como: aplicaciones en imagenología médica de resonancia magnética nuclear [10], y teledetección de objetivos militares [26]. También han sido patentadas herramientas y métodos para micromanipulación de partículas microscópicas [16], con posibles aplicaciones en bombas peristálticas para microfluidos [18]. Para concluir, cabe mencionar que hoy en día la radiación óptica no es la única que está siendo usada para la propagación del momento angular orbital; también destacan trabajos en los cuales se utilizan los regímenes de ondas de radio [29], rayos X [25], e inclusive haces de electrones [18] para transmitir OAM.

Las referencias y ejemplos mencionados respaldan e ilustran el intenso interés que se ha generado sobre el tema en la comunidad científica, y en particular en las áreas de óptica aplicada y fotónica. En Colombia, el tema de los vórtices ópticos es un área incipiente pero fértil. A nivel nacional se destaca una primera iniciativa teórica por parte del grupo de óptica e información cuántica de la Universidad Nacional sede Bogotá, en la cual se estudió la propagación de haces con OAM distinto de cero en elementos ópticos conocidos como axicones [17]. Asimismo, en el grupo de óptica y tratamiento de señales de la Universidad Industrial de Santander han trabajado en el diseño de un codificador optoelectrónico basado en el momento angular [8, 23]. Es, sin embargo en el ámbito regional de Antioquia en el cual se concentra la mayor cantidad de esfuerzos en Colombia. El grupo de Óptica y Procesamiento Opto-digital de la Universidad Nacional sede Medellín desarrolló un sistema de pinzas ópticas para la manipulación de microsistemas [1], mientras que el grupo de Óptica y Fotónica de la Universidad de Antioquia ha estudiado la multiplexación de

información encriptada y codificación con momento angular orbital [7], así como la generación experimental de vórtices ópticos con moduladores de transmisión [9, 24]. Además de los esfuerzos de cada institución, destaca el trabajo colaborativo que se ha afianzado en el marco de convenios de cooperación tales como el proyecto interinstitucional titulado: *Aberraciones ópticas en haces Laguerre-Gaussianos: corrección y aplicaciones metrológicas*. Este es un proyecto cuya duración es de 24 meses, que comenzó a ejecutarse el 5 de agosto de 2013 y que culminará el 5 de agosto de 2015. Se desarrolla con la participación de grupos de la Universidad EAFIT, la Universidad de Antioquia, el Centro de Investigaciones Ópticas de Argentina, el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, y el Instituto Tecnológico Metropolitano.

De proyectos como este, se ha formado una red de grupos interesados específicamente en el estudio de VOs. En particular, la cooperación entre algunos de estos grupos derivó en trabajos en los cuales se estudió el efecto de la birrefringencia inducida por cristales birrefringentes en vórtices ópticos [14], y la posibilidad de generar vórtices con una cantidad reducida de niveles de gris en moduladores de transmisión [21, 24]. De forma similar, la Universidad EAFIT, a través de su grupo de Óptica Aplicada y en cooperación con el Centro de Investigaciones Ópticas de Argentina, ha contribuido con el desarrollo de técnicas metrológicas computacionales basadas en el estudio de vórtices en patrones de speckle [2–4, 27, 28].

## 1.2 Motivación

Con la iniciativa de adquirir las capacidades técnicas y experimentales necesarias para el desarrollo de aplicaciones metrológicas de vórtices ópticos, el grupo de Óptica Aplicada de la Universidad EAFIT abrió dos proyectos internos, y fue merecedor de una beca del programa Jóvenes Investigadores de Colciencias, convocatoria 645 a cursar en el 2015. Las prioridades del grupo, y asimismo los temas de trabajo de estos dos proyectos son:

- El desarrollo de aplicaciones metrológicas de haces Laguerre Gauss.
- La implementación de técnicas basadas en los haces con OAM distinto de cero para instrumentos de microscopía de objetos de fase.

## 1.3 Planteamiento del problema

En este proyecto se busca generar y caracterizar haces LG por medio de un instrumento electro óptico conocido como **modulador espacial de luz (SLM)** que previamente debe

ser caracterizado.

La propuesta del presente proyecto consiste entonces en caracterizar haces LG por medio de un SLM a partir de la integración de algoritmos de identificación de aberraciones, y una plataforma experimental sistematizada para la generación de haces del tipo LG. Adicionalmente, se propone estudiar posibles aplicaciones de la observación o manipulación de las aberraciones ópticas presentes en haces LG una vez haya sido dominada la capacidad para identificarlas y corregirlas.

## 1.4 Objetivos

A continuación se listan el objetivo general y los objetivos específicos.

### 1.4.1 Objetivo General

Desarrollar la capacidad para generar y caracterizar vórtices de fase mediante un SLM de transmisión.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Identificar y apropiar los conceptos y procedimientos necesarios para caracterizar moduladores espaciales de luz de transmisión, con miras a la producción y análisis de vórtices ópticos.
- Implementar una plataforma experimental para caracterizar la modulación de amplitud y fase de un SLM a partir de un montaje interferométrico automatizado.
- Obtener experimentalmente vórtices ópticos del tipo Laguerre-Gauss mediante el uso de un SLM y estudiar las distribuciones de intensidad y fase alrededor de los vórtices.
- Proponer alternativas para el desarrollo de aplicaciones metrológicas basadas en la generación de VOs y el estudio de sus propiedades.

## 1.5 Estructura del documento

En esta tesis se propuso generar la capacidad para **generar y caracterizar** Vórtices Ópticos, es por ello que el texto principal de este trabajo, está dividido en 2 partes temáticas que abordan cada una de estas dos metas. A continuación, se presenta la estructura general de la disertación por Partes y Capítulos:

**Parte I: Generación de haces Laguerre-Gauss por medio de un SLM** La primera

parte de este documento abarca los primeros tres objetivos específicos, y culmina con la generación de VOs (no caracterizados ni corregidos), utilizando un SLM de transmisión. Esta sección del documento se compone de tres capítulos, el primero de ellos es el Capítulo 2 y se titula **Generalidades y Marco Teórico**. En este capítulo se presenta la necesidad de usar SLMs para la generación de VOs y se hace un extenso recorrido por la teoría de polarización y las herramientas matriciales que permiten modelar de forma matemática el comportamiento de estos dispositivos. Luego en el Capítulo 3 titulado **Caracterización de TN-SLM** se presenta la metodología usada para la caracterización del SLM y los resultados de parámetros y curvas de modulación obtenidos luego de implementar dos métodos de caracterización. Adicionalmente se menciona brevemente el diseño y construcción de un instrumento mecatrónico que fue usado para la automatización de procesos de medida que implicaban la rotación precisa de múltiples elementos ópticos sin el cual hubiera sido muy difícil obtener los cientos de datos que se utilizaron para el análisis. Este capítulo culmina con la selección de una configuración de elementos ópticos polarizadores en la cual el SLM tiene un desempeño suficientemente bueno para la generación de VOs. La primera parte del documento culmina en el Capítulo 4 titulado **Generación de Vórtices Ópticos** dónde se presentan las características generales de los haces LG, se presenta una herramienta computacional para la generación de máscaras de fase y se muestran los resultados experimentales de la generación de VOs en dos configuraciones. Una es en línea usando máscaras de fase espiral, y la otra es fuera de línea con máscaras del tipo tenedor.

**Parte II: Caracterización y corrección de aberraciones de VO** La parte II de este documento abarca el último objetivo específico y parte del tercero, tiene un solo Capítulo y consiste en la presentación de un método novedoso con el cual se logró caracterizar y corregir las aberraciones ópticas de VOs generados en un sistema formador de imagen del tipo 4F. Este método presentado pertenece a la familia de técnicas de reconstrucción de fase no interferométricas conocida como *Phase Diversity* y se diferencia de implementaciones anteriores en el hecho de que se asume una fuente de iluminación coherente y se aprovecha la gran sensibilidad de los VOs como una forma de mejorar la exactitud de la reconstrucción. Fuera de tener una aplicación en metrología para la corrección de VOs, creemos que el método desarrollado puede servir para caracterizar las aberraciones de sistemas formadores de imagen más complejos haciendo uso de la iluminación con haces portadores de OAM. Finalmente, las conclusiones del trabajo se presentan en el Capítulo 6, y los anexos A, B son apéndices donde se han incluido planos de los rotadores del sistema automatizado de medidas, y descripción de los programas que lo manejan. En el anexo C se hace una rápida descripción de los polinomios de Zernike y la composición de aberraciones en esta base.

## Bibliografía

- [1] María Isabel Alvarez. *Implementación de Pinzas Ópticas Holográficas para la Manipulación de Microsistemas*. Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Antioquia, Colombia, 2011. URL [http://www.bdigital.unal.edu.co/6814/1/43977451.\\_1\\_2012.pdf](http://www.bdigital.unal.edu.co/6814/1/43977451._1_2012.pdf).
- [2] Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, y Néstor Bolognini. Speckle decorrelation influence on measurements quality in vortex metrology. *Optics Communications*, 285(21–22):4312–4316, 2012. ISSN 0030-4018. doi:10.1016/j.optcom.2012.07.021.
- [3] Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, y Néstor Bolognini. Vortex metrology using fourier analysis techniques: vortex networks correlation fringes. *Applied Optics*, 51(30):7411–7419, 2012. ISSN 1539-4522.
- [4] Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, y Néstor Bolognini. In-plane displacement measurement in vortex metrology by synthetic network correlation fringes. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, Image Science, and Vision*, 30(3):462–469, 2013. ISSN 1520-8532.
- [5] Petr Bouchal y Zden?k Bouchal. Selective edge enhancement in three-dimensional vortex imaging with incoherent light. *Optics Letters*, 37(14):2949–2951, 2012. doi: 10.1364/OL.37.002949.
- [6] Nenad Bozinovic, Yang Yue, Yongxiong Ren, Moshe Tur, Poul Kristensen, Hao Huang, Alan E. Willner, y Siddharth Ramachandran. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science*, 340(6140):1545–1548, 2013. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi:10.1126/science.1237861.
- [7] Carlos Andres Rios. *Procesamiento Óptico para la Multiplexación de Información Encriptada y Codificación con Momento Angular Orbital*. Pregrado, Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia, 2010.
- [8] Cristian Acevedo. *Análisis teórico-experimental de un haz con momento angular orbital entero y no entero*. Tesis Doctoral, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander Colombia, 2012. URL <http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7339/2/144386.pdf>.

- [9] David Muñeton. *Generación y caracterización de vórtices ópticos*. Pregrado, Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia, 2012. URL <http://barlai.udea.edu.co/index.php/es/docencia/trabajos-pregrado/637-generacion-y-caracterizacion-de-vortices-opticos>.
- [10] Daniel R. Elgort y Lucian Remus Albu. Active device tracking using light with orbital angular momentum to hyperpolarized MRI. 2013. URL <http://www.google.com/patents/US8611982>. U.S. Classification 600/423, 324/307, 600/420; International Classification G01V3/00; Cooperative Classification A61B2019/5231, A61B19/5244, A61B5/055, A61B2019/5251, A61B5/06, A61B2019/5236.
- [11] Nicolas K. Fontaine, Christopher R. Doerr, y Larry Buhl. Efficient multiplexing and demultiplexing of free-space orbital angular momentum using photonic integrated circuits. En *Optical Fiber Communication Conference*, OSA Technical Digest, pág. OTu1I.2. Optical Society of America, 2012. doi:10.1364/OFC.2012.OTu1I.2.
- [12] Severin Fürhapter, Alexander Jesacher, Stefan Bernet, y Monika Ritsch-Marte. Spiral interferometry. *Optics Letters*, 30(15):1953–1955, 2005. doi:10.1364/OL.30.001953.
- [13] Graham Gibson, Johannes Courtial, Miles Padgett, Mikhail Vasnetsov, Valeriy Pas’ko, Stephen Barnett, y Sonja Franke-Arnold. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics Express*, 12(22):5448–5456, 2004. doi:10.1364/OPEX.12.005448.
- [14] Jorge A. Gómez, Edgar Rueda, Ángel Salazar, Myriam Tebaldi, Nestor Bolognini, y Alberto Lencina. Effects of the induced birefringence in photorefractive crystals on speckle optical vortices. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(3):359–365, 2012. ISSN 01438166. doi:10.1016/j.optlaseng.2011.10.021.
- [15] David G. Grier. A revolution in optical manipulation. *Nature*, 424(6950):810–816, 2003. doi:10.1038/nature01935.
- [16] David G. Grier. Holographic microfabrication and characterization system for soft matter and biological systems. 2013. URL <http://www.google.com/patents/US8431884>. U.S. Classification 250/251; International Classification H01S3/10; Cooperative Classification G02B5/001, G03H1/08, G02B21/32, G02B5/32, G03H1/2294, G03H2001/0077.

- [17] Ángela M. Guzmán, Claudia P. Barrera, Jefferson Flórez, y Florencio E. Hernández. Difracción de luz con momento angular orbital por un axicon. *Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas*, 7(2):31–36, 2009.
- [18] Giulio Guzzinati, Laura Clark, Armand Béché, y Jo Verbeeck. Measuring the orbital angular momentum of electron beams. *Physical Review A*, 89(2):025803, 2014. doi: 10.1103/PhysRevA.89.025803.
- [19] Alexander Jesacher, Severin Fürhapter, Stefan Bernet, y Monika Ritsch-Marte. Shadow effects in spiral phase contrast microscopy. *Physical Review Letters*, 94(23):233902, 2005. doi:10.1103/PhysRevLett.94.233902.
- [20] J. Lin, X.-C. Yuan, S. H. Tao, y R. E. Burge. Multiplexing free-space optical signals using superimposed collinear orbital angular momentum states. *Applied Optics*, 46(21):4680–4685, 2007. doi:10.1364/AO.46.004680.
- [21] N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez, y A. Lencina. Generation of optical vortices by using binary vortex producing lenses. *Applied Optics*, 54(4):796–801, 2015. doi: 10.1364/AO.54.000796.
- [22] Alois Mair, Alipasha Vaziri, Gregor Weihs, y Anton Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412(6844):313–316, 2001. ISSN 0028-0836. doi:10.1038/35085529.
- [23] Carlos Fernando Díaz Meza, Cristian Hernando Acevedo Cáceres, Yezid Torres Moreno, y Jaime Guillermo Barrero Pérez. Modelado preliminar de un codificador optoelectrónico para la transferencia de datos sobre el momento angular orbital de la luz. *REVISTA UIS INGENIERÍAS*, 11(1), 2013. ISSN 2145-8456. URL <http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistauisingenierias/article/view/3193>.
- [24] E. Rueda, D. Muñetón, J. A. Gómez, y A. Lencina. High-quality optical vortex-beam generation by using a multilevel vortex-producing lens. *Optics Letters*, 38(19):3941, 2013. ISSN 0146-9592, 1539-4794. doi:10.1364/OL.38.003941.
- [25] Shigemi Sasaki y Ian McNulty. Proposal for generating brilliant x-ray beams carrying orbital angular momentum. *Physical Review Letters*, 100(12):124801, 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.100.124801.
- [26] Harry A. Schmitt, Donald E. Waagen, Nitesh N. Shah, Delmar L. Barker, y Andrew D. Greentree. System and method of orbital angular momentum

- (OAM) diverse signal processing using classical beams. 2010. URL <http://www.google.com/patents/US7701381>. U.S. Classification 342/42, 340/572.7, 340/572.2; International Classification G01S13/74; Cooperative Classification G01S7/499, G01S7/024, G01S17/74, G01S13/78, G01S13/751; European Classification G01S17/74, G01S13/75C, G01S7/499, G01S7/02P, G01S13/78.
- [27] Daniel Sierra-Sosa y Luciano Angel-Toro. VORTEX-SIM. 2013.
- [28] Daniel Sierra-Sosa, Luciano Angel-Toro, Nestor Bolognini, y Myrian Tebaldi. Novel vortex-transform for high frequency modulated patterns. *Optics Express*, 21(20):23706–23711, 2013. doi:10.1364/OE.21.023706.
- [29] B. Thidé, H. Then, J. Sjöholm, K. Palmer, J. Bergman, T. D. Carozzi, Ya. N. Istomin, N. H. Ibragimov, y R. Khamitova. Utilization of photon orbital angular momentum in the low-frequency radio domain. *Physical Review Letters*, 99(8):087701, 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.087701.

---

## Parte I

# Generación de haces Laguerre-Gauss por medio de un SLM

---

CAPÍTULO  
2

# Generalidades y Marco Teórico

## 2.1 Estado del Arte

Los haces con OAM distinto de cero inicialmente fueron generados en el laboratorio por medio de técnicas analógicas entre las que se destacan el uso de conversores modales [1], placas de fase espiral grabadas en sustratos transparentes [18], y hologramas de fase impresos en acetato [3]. La conversión modal utiliza sucesiones de lentes astigmáticas para convertir los modos Hermite Gauss en modos Laguerre-Gauss, y fue la primera forma en la cual se produjeron VOs en el laboratorio. A diferencia de la conversión modal, - que requiere un montaje experimental muy sensible a desplazamientos - las técnicas que utilizan máscaras de fase se caracterizan por necesitar sólo un elemento óptico que permite modificar punto a punto la fase de un haz que originalmente carecía de momento angular, para convertirlo en un haz con vorticidad óptica. El uso de placas físicas grabadas con un patrón espiral tiene la ventaja de generar haces LG con sólo ubicarlas en el camino óptico del haz, y tiene la desventaja de que una vez fabricadas no se pueden modificar. En situaciones donde es requerido generar haces del tipo LG con la suficiente flexibilidad como para corregir aberraciones ópticas, se necesita de dispositivos digitales con propiedades similares a los dispositivos analógicos mencionados anteriormente. Estos dispositivos se conocen como moduladores espaciales de luz o SLM por sus siglas en inglés. En este proyecto se pretende generar VOs y caracterizar su frente de onda utilizando un tipo de SLMs que modifican la fase de la luz cuando ésta pasa a través de ellos.

### 2.1.1 Moduladores Espaciales de Luz

Como su nombre lo indica, los moduladores espaciales de luz sirven para modular punto a punto las propiedades de la luz sobre un plano. Ya sea solamente su amplitud como en los dispositivos de visualización de cristal líquido (pantallas LCD), o su fase, como en los dispositivos que se ilustran en la Fig. 2.1.



Figura 2.1: Moduladores espaciales modelo PLUTO y LC2012 de reflexión y transmisión marca Holoeye basados en la tecnología de cristal líquido.

Si diferenciamos los SLM por el tipo de tecnología, estos pueden ser agrupados en dos categorías: basados en cristales líquidos, o en arreglos de micro espejos (Fig. 2.2), mejor conocidos en la industria de la proyección como DLP (de Digital Light Processing).

#### 2.1.1.1 Moduladores basados en micro espejos

En su mayoría, los moduladores comerciales basados en arreglos de micro espejos funcionan con micro mecanismos que inclinan una superficie reflectiva de tal forma que se modifique la cantidad de luz que un observador ve desde una perspectiva dada, es decir que modulan intensidad. Sin embargo, con el interés de modular fase además de intensidad se han desarrollado nuevos micro mecanismos que permiten desplazar verticalmente el espejo sin modificar su inclinación, introduciendo así un cambio en la distancia del camino óptico y por ende, la fase. Tal y como se presenta en los trabajos de Wu et al. [44] y Liesener y Osten [23]. Dado que es una tecnología incipiente y ha tenido menor tiempo en el mercado que los cristales líquidos, estos sistemas de micromecanismos y en particular los de tipo pistón, siguen teniendo precios elevados y aún están lejos de ser utilizados en muchos laboratorios.

#### 2.1.1.2 Moduladores de cristal líquido

Los SLM basados en Cristales Líquidos (LCs) aprovechan las propiedades físicas de ciertos polímeros que dada su forma alargada y propiedades electrónicas polares, cambian su orientación ante la presencia de campos eléctricos. Esta sensibilidad a los campos eléctricos,

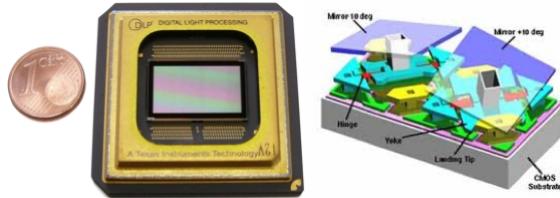


Figura 2.2: Modulador espacial basado en arreglos de micro espejos marca Texas Instruments.

en conjunto con sus propiedades ópticas anisotrópicas permitió que desde los años 70s se implementaran LCs para generar imágenes en pantallas de dispositivos como relojes, calculadoras y luego televisores y proyectores. Fue más adelante cuando estudios especializados de las propiedades de los LCs como los realizados por Yeh y Claire [46] y Yariv y Yeh [45], y experimentos como los de Konforti et al. [21] demostraron que los LCD pueden ser usados como moduladores de solo fase. Aunque la aplicación de LCs para modulación de fase es relativamente reciente, el estudio de sus propiedades físicas no lo es y desde los años 60's la investigación ha sido respaldada por grandes empresas interesadas en desarrollar productos tecnológicos de generación y procesamiento de imágenes como RTC, Hamamatsu, Hitachi, HP, Texas Instruments, Sony y otros. Dado el interés por entender los LCs, se ha llegado a modelos matemáticos y técnicas de caracterización robustas que permiten extraer los parámetros de un SLM para simular su comportamiento. El desarrollo de estas técnicas ha permitido a investigadores alrededor del mundo implementar moduladores de fase a partir de elementos LCD extraídos de dispositivos de proyección comerciales, entre ellos se encuentran los trabajos de [9, 10, 12, 13, 17, 19, 24, 26, 27, 29, 32, 33, 37, 42, 47, 48]. Mientras que autores como Mahmud, [28], Roopahsree [38], y David [11] caracterizaron un Holoeye LC2002 que es vendido comercialmente como modulador de amplitud y fase. Ejemplo de la práctica de reensamblar un LCD y venderlo como SLM es el modulador marca Holoeye LC2012 que gracias a usar un LCD comercial marca Sony es ensamblado a una cuarta parte del precio de otros moduladores.

Adicionalmente, cabe mencionar que los moduladores en base a LCs se dividen en dos tipos, de reflexión y de transmisión. Sin entrar en detalle, los primeros permiten modulaciones de fase que van hasta  $2\pi$  radianes, tienen mayor resolución, necesitan menos elementos de polarización para su uso, tienen altas velocidades de operación y el hecho de que la electrónica esté detrás del cristal (y detrás de la superficie reflectiva) hace que se produzcan menos efectos indeseados de difracción. Todo esto a costa de desarrollar LCs y electrónica personalizados. En cambio, los moduladores de transmisión se ensamblan a

partir de LCs comerciales que fuera de polarizar la luz retardan su fase. Esto implica un acople entre modulación de fase y modulación de intensidad que se traduce en menor calidad de la modulación de fase total. Para lograr una modulación específica se necesitan polarizadores y retardadores que generen un estado de polarización particular a la entrada del SLM. Por otra parte, al tener la electrónica acoplada sobre el cristal y no en un elemento separado como en los de reflexión, se limita la resolución; no todo el volumen de LC se aprovecha y se introducen efectos indeseados de difracción. No obstante, los SLM de transmisión son muy económicos y algunos autores como Davis et al. [7, 8] han propuesto que se podrían usar como dispositivos para modular polarización. En base a la idea de usarlos para modular polarización, otros como Moreno et al. [34, 35] han combinado el formalismo de Fourier con el de las matrices de Jones para modelar el comportamiento de dispositivos ópticos de Fourier que involucran polarización.

En el laboratorio de metrología óptica del grupo de Óptica Aplicada de la Universidad EAFIT se encuentra un moduladores de transmisión marca Holoeye modelos LC-2002 que en el contexto de este trabajo ha sido caracterizado para optimizar su uso en aplicaciones metrológicas tales como la creación y corrección de aberraciones en haces LG. La generación de VOs se da entonces de forma expedita una vez se tenga apropiada la herramienta que los produce. A lo largo de este capítulo se presentarán los conceptos teóricos necesarios para entender la caracterización de SLMs y luego se presentarán las diversas herramientas y métodos que se implementaron para lograr la generación de VOs.

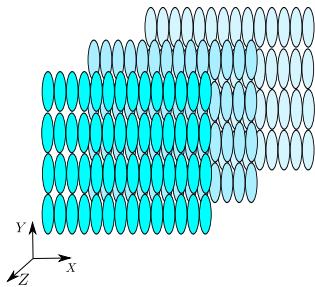
## 2.2 Marco Teórico de la Caracterización de SLMs de Transmisión

Dado que los SLMs de transmisión se ensamblan a partir de LCs, lo primero que hay que tener en cuenta para su caracterización es conocer sus generalidades y entender sus propiedades ópticas. Entenderemos que los LCs afectan el estado de polarización de la luz y por ello se dedicará un espacio del marco teórico a presentar los conceptos generales y herramientas matemáticas propias de la teoría de polarización. Una vez presentadas estas herramientas se mostrarán los modelos actuales con los cuales se representa matemáticamente la modulación de un LC y se hará una breve revisión de la literatura de la caracterización de SLMs.

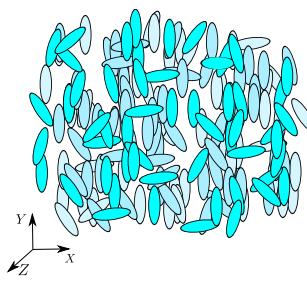
## 2.2.1 Cristales líquidos

### 2.2.1.1 Características de los Cristales Líquidos

Un cristal Líquido es una sustancia que posee propiedades que se asemejan tanto a las de los sólidos cristalinos como a las de los líquidos, y puede ser visto como un líquido en el cual existe orden entre sus moléculas. Para ilustrar esta idea recordemos que los sólidos cristalinos son un estado de la materia que se caracteriza por su rigidez y fuertes enlaces químicos, en el cual se puede establecer un orden posicional en todas las direcciones tal y como se ilustra en la Fig. 2.3a. Esto implica que la posición de las moléculas o átomos que lo componen puede ser abstraída como una red periódica que cumple ciertas reglas de simetría. En cambio, un líquido amorfo como el de la Fig. 2.3b tiene enlaces más débiles por lo cual puede fluir y está compuesto por moléculas que están completamente desorganizadas.



(a) Moléculas con orden posicional y orientacional en un sólido cristalino.



(b) Moléculas desordenadas pero cercanas en un líquido.

Figura 2.3: Dos estados de la materia comunes en la naturaleza.

Los cristales líquidos son sustancias que como los sólidos poseen cierto orden y que pueden fluir como los líquidos.

Por otra parte, los LCs pueden ser clasificados en tres tipos o fases distintas conocidas como, *nemáticos*, *sméticos* y *colestéricos*, y más adelante se abordará esta clasificación. No obstante su diversidad (más de 100.000 compuestos distintos según <http://www.lci-publisher.com>), la característica común de los LCs es que están compuestos de moléculas altamente anisotrópicas, esto es, que sus propiedades (ópticas, eléctricas y mecánicas) dependen de la dirección desde la que se observen. La anisotropía se debe tanto a la geometría alargada o achata de las moléculas, como a las propiedades electrónicas de sus componentes [15, 45, 46]. En el caso de moléculas alargadas de LCs como la de la Fig. 2.4 la estructura química de un LC general se compone de un sistema de anillos aromáticos que pueden ser o no saturados conectados por un grupo de conexión A, y sujetos

a dos cadenas o grupos terminales X y Y [46].

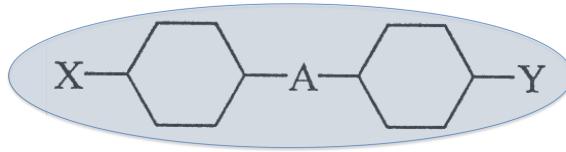


Figura 2.4: Esquema de la composición química general en una molécula de LC.

La presencia de los anillos proporciona las fuerzas intermoleculares de corto alcance que son necesarias para formar fases nemáticas y el tipo de anillos (saturado o no saturado) determina la presencia o no de enlaces  $\pi$  que se asocian a orbitales  $P_z$  de los electrones. Esto a su vez afecta la absorción en el ultravioleta y la birefringencia; se observa mayor birefringencia en LCs con anillos no saturados y mejor comportamiento en el ultravioleta para anillos saturados [15]. Luego, las cadenas del grupo terminal X pueden ser de tres tipos,

- Cadenas alquilos (alkyl)  $C_nH_{2n+1}$ ,
- Grupos alcoxy  $C_nH_{2n+1}O$ ,
- Grupos alilos (alkenyl)  $CH_2 = CH - CH_2 -$ .

La longitud de las cadenas X influencia tanto las constantes elásticas como las temperaturas de transición de fase. Para cadenas cortas con uno o dos átomos de carbono los grupos son muy cortos como para presentar fases de LC. Los grupos terminales de tamaño medio: n = 3-8 son los más adecuados para construir fases nemáticas por su mayor anisotropía, y los compuestos con cadenas aún más largas exhiben fases sméticas. La temperatura a la cual la solución pasa de ser nemática a isotrópica se conoce como el punto de aclarado o *clearing point*, en términos generales, esta temperatura disminuye en la medida en la que se alargan los tamaños del grupo terminal X. La función que relaciona el punto de aclarado con el número de átomos de carbono es una función suave en la cual los números pares generan temperaturas más bajas que los impares. Fuera de esto, las propiedades mecánicas como la viscosidad también se ven afectadas por el tamaño de los grupos terminales, cadenas largas implican viscosidades más altas, y por ello frecuencias de operación más bajas [15]. Finalmente, las cadenas que forman el grupo terminal Y son las que tienen mayor influencia en las constantes dieléctricas de la molécula ( $\epsilon_x, \epsilon_y$ ), y asimismo su anisotropía dieléctrica  $\Delta\epsilon$  variables que como veremos más adelante son las que determinan la birefringencia del LC asociada a la modulación de fase. Las cadenas del grupo terminal Y pueden ser:

- No polares: No Influencian mucho la anisotropía dieléctrica, un ejemplo es el grupo alquilo  $C_nH_{2n+1}$ .
- Polares: Como CN, F, y Cl. Su alta polaridad induce en la molécula una alta anisotropía dieléctrica y por tanto alta birrefringencia. La alta anisotropía se obtiene a costa de alta viscosidad, resistividad insuficiente y problemas de estabilidad bajo iluminación ultravioleta. Los grupos Y muy polares como los que contienen cianuro CN No son buenos para operar a altas temperaturas como por ejemplo proyectores, y sufren de degradación en el UV. Para esas aplicaciones se utilizan compuestos menos polares como el flúor o cloro que tienen menor birrefringencia [15].

#### 2.2.1.2 Clasificación de los LC

En 1922 y sintetizando los hallazgos de 30 años desde el descubrimiento de los LCs, el cristalógrafo George Friedel publicó un artículo [14] en el que clasifica los LCs en tres tipos básicos conocidos como cristales sméticos, nemáticos y colestéricos. En términos de orden, los LCs sméticos son los más similares a un sólido, y los nemáticos se asemejan más a un líquido, y en la medida en la que se calienta un LC éste realiza una transición desde cristal smético hasta líquido isotrópico pasando por la fase nemática. Los estados colestéricos son un tipo particular de LCs nemáticos que a diferencia de los anteriores tienen propiedades inhomogéneas. La principal característica que le da una medida de orden a los LCs es la tendencia de sus moléculas a orientarse en una dirección preferente gracias a su distribución polar de cargas. Esta tendencia se puede observar claramente en las figuras 2.6a y 2.6b como si las moléculas fueran vagones de un tren que se siguen uno detrás del otro en forma de hilo <sup>1</sup>.

La orientación preferencial de las moléculas les otorga una cierta medida de orden a los LCs que en adelante llamaremos orden orientacional. La *cantidad* de orden se medirá por medio de un parámetro estadístico conocido como parámetro de orden, que relaciona la orientación de las moléculas individuales con la orientación preferencial o vector director  $\vec{n}$  en las vecindades de la molécula. Si se tiene un conjunto de moléculas como la que se ilustra en la Fig. 2.5 dónde  $\theta$  es el ángulo que se forma entre el eje mayor de la molécula  $\vec{v}$  y el vector director, el parámetro de orden orientacional del cristal se da como el siguiente promedio estadístico sobre todas las moléculas.

$$S = \frac{1}{2} \langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle$$

---

<sup>1</sup>La palabra *Nematic* proviene de la expresión griega *nema* que significa hilo.

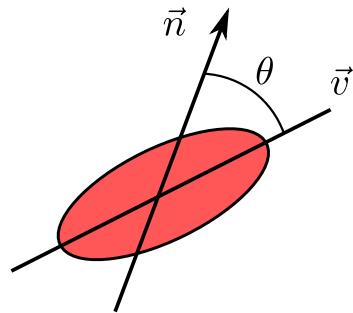


Figura 2.5: Orientación de una molécula de LC con respecto al ángulo director en su vecindad.

Un LC con sus moléculas alineadas perfectamente paralelas tiene un parámetro de orden  $S = 1$ , mientras que un LC con moléculas orientadas aleatoriamente posee un parámetro  $S = 0$ . El parámetro de orden depende tanto del tipo de molécula como de la temperatura; en la medida en la que aumenta la temperatura las moléculas pierden su alineación y el LC se convierte en un líquido isotrópico. El parámetro de orden gana importancia cuando se necesita seleccionar un LC que deba ser usado en rangos de temperatura especiales y se necesite garantizar anisotropía.

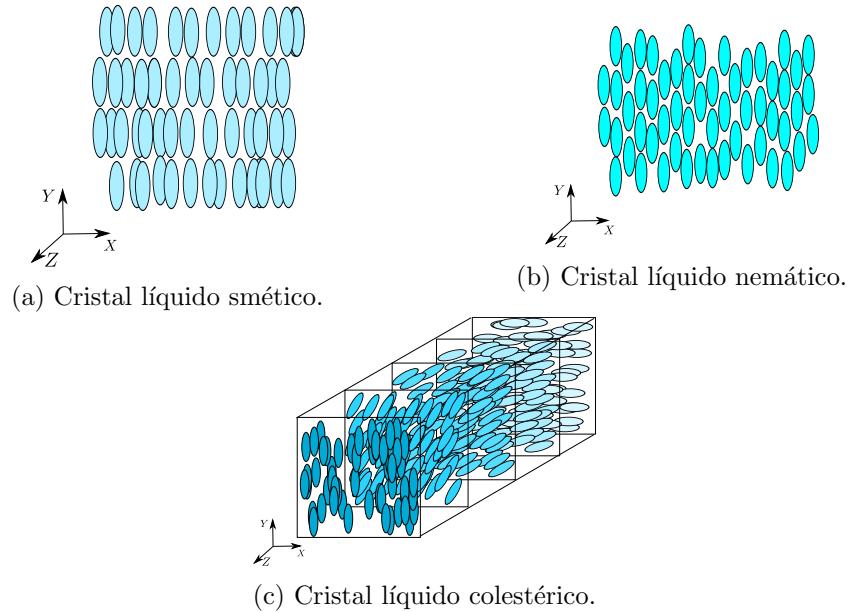


Figura 2.6: Clasificación de los cristales líquidos según su orden.

Los Cristales sméticos como el que se ilustra en la Fig. 2.6a se diferencian de los nemáticos

cos en que poseen orden posicional en una dirección además de orden orientacional. Sin embargo, este orden viene acompañado de propiedades mecánicas que son menos convenientes para la construcción de LCDs y por ello las fases nemáticas y colestéricas son las que tienen mayor número de aplicaciones en dispositivos electro ópticos. A diferencia de las fases smetica y nemática que tienen un solo vector de orientación, en los cristales líquidos colestéricos el vector director varía a través del medio de una forma bien definida y por ello se consideran medios inhomogéneos. Generalmente la variación es helicoidal como la que se ve en la Fig. 2.6c. La variable que caracteriza un cristal líquido colestérico es el ángulo de inclinación o pitch que forman las moléculas inclinadas con respecto al eje óptico del material.

#### 2.2.1.3 Las pantallas de cristal líquido nemático retorcido.

Los moduladores de LC de transmisión que se usan para proyección se construyen usando una configuración conocida como **Twisted Nematic** (**TN-LCD**) o nemáticos retorcidos. Los TN-LCD son dispositivos como el que se ilustra en la Fig. 2.7 en los cuales una solución de cristal líquido nemático se inyecta entre dos superficies rígidas transparentes que han sido rayadas o frotadas a lo largo de una dirección preestablecida. Este proceso se conoce rayado direccional. Las moléculas del LC en contacto con las superficies transparentes se adhieren a los canales microscópicos que resultan del rayado, tomando así una dirección preferencial en ese plano. Cuando las direcciones de rayado de las superficies en ambos extremos no coinciden, la dirección preferente de orientación de las moléculas cambia gradualmente en profundidad desde la dirección del plano de entrada hasta la del plano de salida como se ve en la Fig. 2.7a. El resultado es un cristal líquido inhomogéneo parecido a un cristal colestérico en el cual la orientación de las moléculas varía de forma lineal.

Generalmente las direcciones de frotado en las superficies de entrada y salida son ortogonales de tal forma que las moléculas a la salida experimentan una rotación de 90 grados con respecto a las de la entrada. Ante la presencia de un campo eléctrico a lo largo del cristal las moléculas experimentan una inclinación que es proporcional a la diferencia de potencial entre las placas tal y como se ilustra en la Fig. 2.7b. Al ser moléculas alargadas y polares experimentan un torque que atrae a la parte negativa de la molécula hacia el electrodo positivo del dispositivo y viceversa. La inclinación es proporcional al voltaje aplicado y es de mayor magnitud en las regiones más alejadas de las paredes del dispositivo. La configuración TN ha sido seleccionada para muchos dispositivos electro ópticos comerciales porque afecta la polarización de la luz que incide sobre ella. El objetivo de los

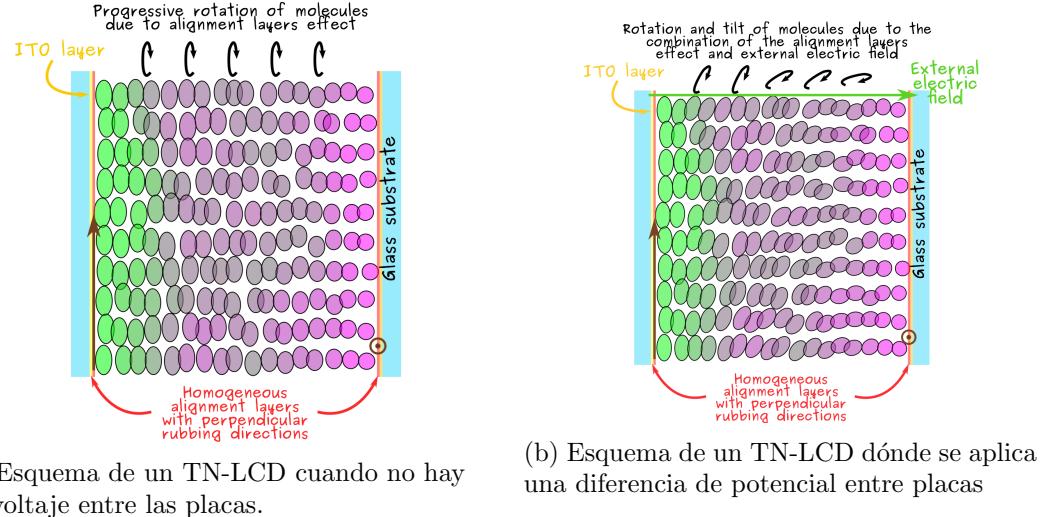


Figura 2.7: Arquitectura de un TN-LCD cuando (a) está apagado, y (b) se le aplica una diferencia de potencial. Tomado de Nestor Uribe [43]

autores que han caracterizado moduladores de transmisión ha sido principalmente el de describir matemáticamente y de forma robusta las propiedades ópticas de dispositivos que tienen cristales líquidos de esta naturaleza.

En lo que sigue se presentarán las herramientas que son base para la descripción matemática de campos ópticos polarizados, y se aplicará para la construcción de un modelo de TN-LCD.

## 2.2.2 Polarización de la luz

En la teoría electromagnética de la luz se representan los campos ópticos como ondas que se propagan en el espacio vacío. Un haz de luz se puede representar tanto por su vector de campo eléctrico como magnético y ambos son perturbaciones de carácter periódico. Si el medio de propagación es isotrópico, la dirección de la perturbación es transversal, es decir orthogonal a la dirección de propagación ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ ). Para haces planos monocromáticos se suele usar la siguiente expresión para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \Re \left[ \mathbf{A} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

dónde,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  es la frecuencia temporal,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda o frecuencia espacial, y  $\mathbf{A}$  determina la amplitud. Las frecuencias espacial y temporal se relacionan por medio de la longitud de onda ( $\lambda$ ) y el índice de refracción del medio ( $\mathbf{n}$ ) con la siguiente expresión:

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Dado que son ortogonales, las variaciones del campo se pueden representar sobre un plano que es ortogonal a la dirección de propagación ( $z$  en nuestro caso), y ese plano se puede representar a su vez por dos vectores que son ortogonales entre si ( $x, y$ ). Cuando la variación del campo sucede sobre una dirección preferencial se dice que la luz es polarizada, y esa dirección se puede descomponer como una combinación lineal de las variaciones mutuamente independientes sobre cada uno de los ejes que forman el plano:

$$\mathbf{E} = E_x + E_y, \quad (2.2)$$

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x), \quad (2.2)$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y). \quad (2.3)$$

Se ha separado entonces el campo en sus componentes vertical ( $y$ ) y horizontal ( $x$ ), cada una con su respectiva amplitud ( $A_x, A_y$ ) y retardo en fase ( $\delta_x, \delta_y$ ). Dado que las amplitudes son positivas las fases se dan en el rango  $-\pi < \delta_{x,y} < \pi$ . La representación en componentes perpendiculares se asemeja a un sistema acoplado de osciladores armónicos que oscilan a una misma frecuencia. Si se dibuja la suma vectorial de las componentes  $x$ ,  $y$  como un vector que va desde el origen hasta el punto  $(E_x, E_y)$  y luego se avanza en el tiempo, la trayectoria que describe la punta del vector será una curva elíptica como la que se muestra en la Fig. 2.8a. Si en cambio se congela el tiempo y se gráfica el desplazamiento de la punta del vector en el espacio se obtiene una curva helicoidal como en la Fig. 2.8b. En estos dibujos se ha escogido representar una elipse por que es el caso más general de polarización. Sin embargo, la relación entre las amplitudes ( $A_y/A_x$ ) y la diferencia de fases ( $\delta = \delta_y - \delta_x$ ) entre las componentes del campo determina si la polarización es lineal ( $\delta = 0$ ), circular ( $\delta = \pm\frac{\pi}{2}, A_y/A_x = 1$ ) o elíptica, y la orientación del eje mayor de la elipse con respecto al eje  $x$ .

Desde el punto de vista matemático, la Fig. 2.8a se describe por medio de la Eq. 2.6 que es la ecuación de una cónica y se puede obtener a partir de las expresiones (2.2) y (2.3).

Si  $\delta = \delta_y - \delta_x$  y  $z = 0$ , entonces el campo se puede escribir como

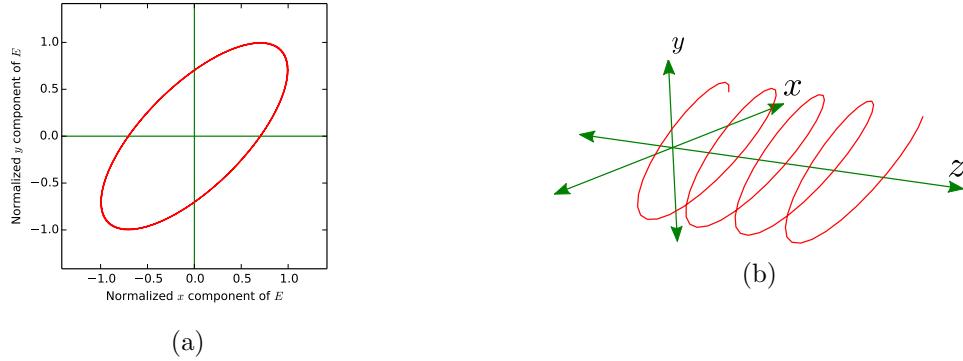


Figura 2.8: Representaciones de la posición de un vector de campo eléctrico con polarización elíptica cuando (a) se analiza en un punto en el espacio, y (b) se congela el tiempo.

$$E_x = A_x \cos(\omega t),$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t - \delta).$$

Y se puede despejar los términos correspondientes al sin y cos

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{E_x}{A_x}, \\ \sin^2 \omega t &= 1 - \left( \frac{E_x}{A_x} \right)^2, \\ \sin \omega t &= \sqrt{1 - \left( \frac{E_x}{A_x} \right)^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene

$$E_y = A_y (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta). \quad (2.4)$$

Reemplazando  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$  en la expresión (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{A_y E_x}{A_x} \cos \delta + A_y \sqrt{1 - \left( \frac{E_x}{A_x} \right)^2} \sin \delta, \\ \frac{E_y}{A_y} - \frac{E_x}{A_x} \cos \delta &= \sqrt{1 - \left( \frac{E_x}{A_x} \right)^2} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Elevando al cuadrado la Eq. (2.5) y organizando términos, obtenemos la ecuación general de una elipse inscrita en un rectángulo con lados  $2A_x$ ,  $2A_y$

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\cos\delta}{A_x A_y} E_x E_y = \sin^2\delta. \quad (2.6)$$

Se puede ahora plantear una rotación de un ángulo  $\phi$  con respecto al eje horizontal ( $x$ ) sobre el sistema de coordenadas como se muestra en la Fig. 2.9 para que el eje mayor de la elipse quede alineado con el eje *horizontal* del nuevo sistema. Haciendo esto, se lleva la

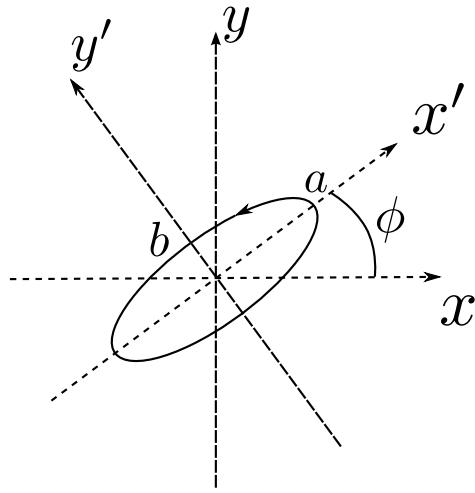


Figura 2.9: Rotación del sistema de coordenadas un ángulo  $\phi$ .

Eq. (2.6) a la forma más conocida de la Eq. (2.7)

$$\left(\frac{E_{x'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_{y'}}{b}\right)^2 = 1, \quad (2.7)$$

dónde  $a$  y  $b$  son los semi ejes mayor y menor, y  $E_{x'}$ ,  $E_{y'}$  son las componentes del campo eléctrico en las direcciones  $x'$ ,  $y'$ . Los semiejes de la elipse están dados por las siguientes expresiones [45]:

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x \cos^2\phi + A_y^2 \sin^2\phi + 2A_x A_y \cos\delta \cos\phi \sin\phi, \\ b^2 &= A_x \sin^2\phi + A_y^2 \cos^2\phi - 2A_x A_y \cos\delta \cos\phi \sin\phi. \end{aligned}$$

La elipticidad se define como la razón entre el eje menor y el eje mayor de la elipse  $e = \pm \frac{b}{a}$  de tal forma que si el semi eje menor es cero, la elipse se vuelve una linea y por tanto se dice que la polarización es lineal en la dirección de  $a$ . Si por el contrario los dos

semi ejes tienen la misma longitud, la ecuación de la elipse se vuelve la de un círculo, y se dice que la polarización es circular como en la Fig. 2.10(a). El signo de la elipticidad determina el sentido de giro de la hélice, si el signo es positivo la elipse es circular izquierda como en la Fig. 2.10(b) y es circular derecha cuando el signo es negativo (Fig. 2.10(c)). Cabe anotar que el sentido de giro de la polarización es una convención que varía según el autor, algunos autores como Yariv y Yeh [45] interpretan el sentido de giro como si se congelara el tiempo y se siguiera la punta del vector  $\mathbf{E}$  desde el momento inicial en adelante. Sin embargo, otros autores como Hecht [16] interpretan el sentido de giro como si en un punto fijo vieran girar el vector  $\mathbf{E}$  que les llega en la medida que pasa el tiempo. En este documento hemos decidido escoger la primera convención dado que es la predominante en las referencias que tratan el análisis de cristales líquidos como elementos que afectan la polarización.

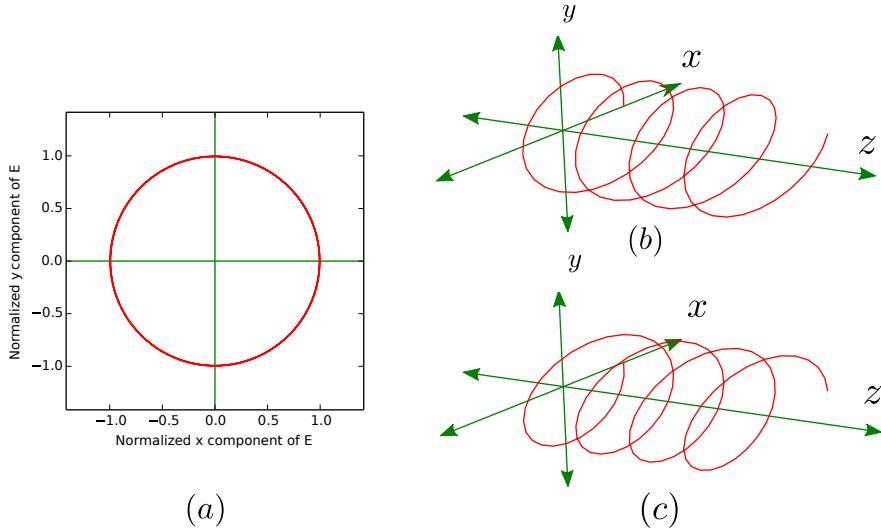


Figura 2.10: (a) Esquema de un estado de polarización circular en donde los semiejes de la elipse son iguales. La polarización circular izquierda (b) se da cuando  $e = \frac{b}{a}$  y la derecha (c) cuando  $e = -\frac{b}{a}$ .

Una ellipse de polarización arbitraria se puede expresar entonces conociendo su elipticidad ( $e$ ) y su ángulo de inclinación ( $\phi$ ) con respecto al eje horizontal. Estas dos características se pueden parametrizar como dos ángulos que se dan en términos de las amplitudes máximas del campo  $A_x$ ,  $A_y$  y el retardo entre componentes  $\delta$ . Por una parte, el ángulo de

inclinación se encuentra interpretando la Eq. (2.6) en su forma bilineal de la forma

$$\begin{pmatrix} E_x & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_x^2} & -\frac{\cos \delta}{A_x A_y} \\ -\frac{\cos \delta}{A_x A_y} & \frac{1}{A_y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \sin^2 \delta, \quad (2.8)$$

sacando factor común  $\frac{1}{A_x^2}$  se obtiene

$$\begin{pmatrix} E_x & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{A_x \cos \delta}{A_y} \\ -\frac{A_x \cos \delta}{A_y} & \frac{A_x/2}{A_y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = A_x/2 \sin^2 \delta, \quad (2.9)$$

o en forma compacta

$$\begin{pmatrix} E_x & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = c. \quad (2.10)$$

Una **cuádrica o superficie cuádrica** es una hipersuperficie D-dimensional representada por una ecuación de segundo grado con coordenadas espaciales. Si estas coordenadas son  $\{x_1, x_2, \dots, x_D\}$ , entonces la cuádrica típica en ese espacio se define mediante la ecuación algebraica:

$$\sum_{i,j=1}^D Q_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^D P_i x_i + R = 0.$$

El caso particular en el cual solo hay dos dimensiones y los valores  $P_i$  son todos 0, es el de una elipse. En nuestro caso, tenemos en notación matricial:

$$\mathbf{E}^T Q \mathbf{E} + R = 0,$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

y  $R = -c = -A_x/2 \sin^2 \delta$ . Ahora, los autovalores de una elipse representada por su forma matricial están asociados con la dirección de sus ejes principales, y apuntan en la dirección de los puntos máximos [4]. Como nuestra incógnita es el ángulo que determina la dirección de los puntos máximos, podemos escribir la siguiente ecuación de autovalores para despejar  $\phi$ <sup>2</sup>

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

---

<sup>2</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic\\_form](http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_form)

desarrollando, se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\cos \phi + a \sin \phi &= \lambda \cos \phi, \\ a \cos \phi + b \sin \phi &= \lambda \sin \phi.\end{aligned}$$

Despejando  $\lambda$  e igualando las ecuaciones se llega a una expresión dependiente de un ángulo doble:

$$\begin{aligned}1 + a \tan \phi &= \frac{a}{\tan \phi} + b, \\ b - 1 &= a \tan \phi - \frac{a}{\tan \phi}, \\ b - 1 &= a \left( \frac{\tan^2 \phi - 1}{\tan \phi} \right), \\ \tan 2\phi &= \frac{2a}{b - 1}.\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando  $a$ , y  $b$  se tiene el ángulo de inclinación de la elipse:

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta \right).$$

Siguiendo un esquema similar, aunque más tedioso se encuentra el ángulo de elipticidad ( $\theta = \tan^{-1} e$ ) en términos de la función seno como:

$$\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \sin \delta \right).$$

A la hora de despejar  $\phi$  y  $\theta$  reemplazando valores en la primera ecuación usando un computador se aconseja reemplazar la función  $\tan^{-1}$  por la función  $\text{atan2}$ , que es popular en paquetes de cálculos numéricos (como numpy) o lenguajes de programación como Matlab, porque permite evitar las singularidades que ocurren cuando el argumento de la función tangente inversa es  $\pi/2$ .

### 2.2.3 El formalismo de Jones

Se conoce como formalismo de Jones al uso de una representación vectorial para describir campos ópticos coherentes y monocromáticos cuando es importante la naturaleza vectorial de la luz y la polarización. En el esquema de Jones los campos ópticos con dos componentes ortogonales se representan como un vector con elementos complejos conocido como vector de Jones. Las dos componentes complejas del campo en la Eq. (2.1) se

representan como elementos de un vector columna conocido como vector de Jones:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Siendo un vector complejo,  $\mathbf{J}$  no es una cantidad observable en el espacio físico. Para obtener por ejemplo, la componente  $x$  del campo eléctrico se hace la operación  $E_x(t) = \Re [J_x e^{i\omega t}]$ . Para el estudio de la polarización conviene representar el vector de Jones en su forma normalizada, es decir tal que cumpla la condición,

$$\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} = 1,$$

dónde el símbolo  $\dagger$  representa la transpuesta conjugada. La normalización se logra parametrizando las amplitudes con el ángulo del vector que forman,

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{A_y}{A_x},$$

de esta forma  $A_y = \sin \psi$  y  $A_x = \cos \psi$ . Adicionalmente, la fase de las componentes se acostumbra a escribir en su forma relativa y con respecto a la componente  $y$  como se muestra en la expresión (2.12).

$$\mathbf{J}(\psi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

#### 2.2.3.1 Algunos estados de polarización importantes

Como se dijo antes, las polarizaciones lineales se obtienen cuando las componentes están en fase, es decir que  $\delta = \delta_y - \delta_x = 0$ . Sin embargo, la condición también se cumple cuando las diferencias de fase entre las componentes son múltiplos de  $\pi$ . A continuación se muestran seis estados de polarización conocidos como los **estados degenerados de polarización** [5] que son importantes tanto en la teoría de polarización de Jones como en la de Stokes para la composición y detección de estados de polarización elípticos. Los primeros dos estados degenerados corresponden a las polarizaciones lineales ( $\delta = n\pi$ ) horizontal y vertical que se dan cuando  $\psi = n\pi$  y  $\psi = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$  respectivamente:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, están los estados con polarización lineal a  $45^\circ$  y  $-45^\circ$ . El primero se da cuando las componentes  $x$  y  $y$  tienen la misma magnitud y dirección, es decir cuando  $\psi = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$ . La polarización a  $-45^\circ$  se da cuando  $\psi = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$ .

$$\mathbf{45}^\circ = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 \\ \sin \pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{45}^\circ = \begin{pmatrix} \cos -\pi/4 \\ \sin -\pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se tienen los estados circulares que consisten en las polarizaciones circular izquierda y circular derecha. Los estados de polarización circulares son tales que ambas componentes tienen la misma magnitud que los de  $\pm 45^\circ$ , pero el retardo en fase entre ellas es de  $\delta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 \\ \sin \pi/4 e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CI} = \begin{pmatrix} \cos -\pi/4 \\ \sin -\pi/4 e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Una característica interesante de los estados lineales y circulares es que se pueden dar unos como combinación lineal de los otros:

$$\begin{aligned} \mathbf{CD} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{H} - i\mathbf{V}), \\ \mathbf{CI} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{H} + i\mathbf{V}), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{CD} + \mathbf{CI}), \\ \mathbf{V} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{CD} - \mathbf{CI}). \end{aligned}$$

Los vectores de las tres parejas de estados que hemos visto hasta ahora son bases ortonormales. Esto quiere decir que fuera de estar normalizados, si calculamos el producto escalar entre elementos de una misma pareja obtenemos un valor de 0,

$$\mathbf{H}^\dagger \mathbf{V} = \mathbf{45}^{\circ\dagger} - \mathbf{45}^\circ = \mathbf{CD}^\dagger \mathbf{CI} = \mathbf{0}.$$

Estos estados se han mencionado porque sirven como base para el espacio de posibles estados de polarización y serán usados en la sección 3.1 para producir curvas de modulación de amplitud que alimentan un modelo de calibración de moduladores capaz de predecir la modulación para otros estados.

### 2.2.3.2 Elementos ópticos como operadores en la representación de Jones

Así como en el álgebra lineal se usan matrices para transformar vectores, en el formalismo de Jones existen operadores que se representan como matrices 2x2 y que tienen la cualidad de transformar los campos. Estos operadores se conocen como matrices de Jones y deben cumplir algunas propiedades generales [45] que se listan a continuación:

1. La dirección de propagación de un campo determina las componentes de la matriz que representa al elemento polarizador. Si la incidencia es desde la izquierda ( $z = 0$ ) definimos la matriz  $M$  como aquella que transforma el vector de entrada en el de salida,

$$\begin{pmatrix} V_x^{out} \\ V_y^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{in} \\ V_y^{in} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

si el vector de entrada ingresa desde la derecha entonces definiremos una matriz distinta  $N$  para representar la transformación:

$$\begin{pmatrix} V_x^{out} \\ V_y^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{in} \\ V_y^{in} \end{pmatrix}.$$

Para que se cumpla el principio de simetría temporal, se debe cumplir que  $NM = 1$ . Si se *rebobina* la propagación en la expresión (2.13) el haz de salida debería seguir el mismo camino que recorrió a la entrada, y ser afectado por la matriz  $N$  de tal forma que vuelva a la forma que tenía en un principio,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_x^{in} \\ V_y^{in} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{out} \\ V_y^{out} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{in} \\ V_y^{in} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conociendo que las matrices están asociadas a un mismo elemento se debe cumplir que  $N$  sea la transpuesta de  $M$

$$N_{11} = M_{11}, \quad N_{12} = M_{21}, \quad N_{21} = M_{12}, \quad N_{22} = M_{22}.$$

Esta relación es importante para analizar sistemas en los cuales la luz debe pasar dos veces por el LC en sentidos opuestos, caso especial es el de los SLM's de reflexión en los cuales hay una superficie especular de un lado.

2. Tanto la matriz  $M$  como la  $N$  son operadores unitarios,

$$M^\dagger M = 1, \quad N^\dagger N = 1.$$

Dónde el símbolo  $\dagger$  indica que se saca el conjugado hermítico de  $M$ ,

$$M^{-1} = M^\dagger = \begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{21}^* \\ M_{12}^* & M_{22}^* \end{pmatrix}.$$

3. Las matrices de Jones son también unimodulares es decir

$$\det(M) = \det(M^\dagger) = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1. \quad (2.14)$$

Si asumimos que  $M^{-1}$  es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix},$$

se ve que cumple con la relación  $M^{-1}M = 1$ :

$$\begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{22}M_{11} - M_{12}M_{21} & M_{22}M_{12} - M_{12}M_{22} \\ -M_{11}M_{21} + M_{11}M_{21} & -M_{12}M_{21} + M_{11}M_{22} \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, se puede simplificar la forma de una matriz de Jones a partir de las siguientes relaciones,

$$M_{21} = -M_{12}^*, \quad M_{22} = M_{11}^*,$$

obteniendo una forma de la matriz que depende de sólo dos números complejos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$= \begin{pmatrix} X + iY & Z + iW \\ -Z + iW & X - iY \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Tener la matriz en esta forma facilita encontrar los parámetros de elementos ópticos

desconocidos como un SLM porque reduce el número de incógnitas.

Los operadores que se verán a continuación hacen referencia a dos tipos de elementos ópticos que se utilizan en el laboratorio para modificar los estados de polarización de una onda, estos son, polarizadores y retardadores. Los polarizadores son elementos que afectan únicamente la amplitud y los retardadores introducen retardos de la fase entre las componentes del campo. Por una parte, los polarizadores horizontales son elementos que sólo dejan pasar la componente  $x$  del campo, y se representan con la matriz de la Eq. (2.17),

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Si llega cualquier campo al polarizador horizontal este dejará pasar sólo la componente  $x$  tal y como se muestra en la Fig. 2.11. La operación vectorial correspondiente a este

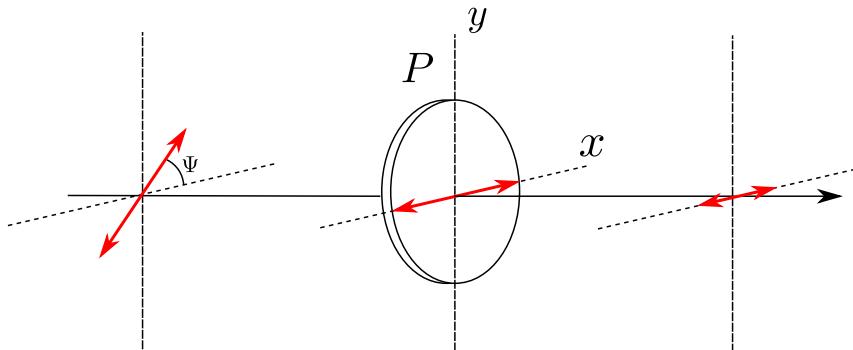


Figura 2.11: Propagación de un estado de polarización lineal a través de un polarizador horizontal.

fenómeno se da como la multiplicación entre la matriz del polarizador y el vector de Jones que representa al campo, en este caso un campo con polarización lineal a  $45^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los polarizadores que no están orientados con el eje  $x$  se pueden obtener a partir de la matriz de  $P_x$  por medio de la siguiente operación de rotación,

$$P_\theta = R^T(\theta) P_x R(\theta)$$

$$P_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En adelante se seguirá usando este método para representar la matriz de cualquier elemento óptico rotado. Reemplazando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta = \frac{\pi}{4}$  obtenemos las matrices  $P_y$  y  $P_{45^\circ}$  correspondientes al polarizador alineado con  $y$  y al que está inclinado  $45^\circ$ :

$$\begin{aligned} P_y &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{45^\circ} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otra parte, los retardadores ópticos modifican tanto la amplitud como la fase de las componentes del campo y sus elementos son complejos. La matriz general para un retardador óptico con desfase  $\beta$  y orientación del eje rápido con el eje  $x$  es,

$$WP = \begin{pmatrix} e^{i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta/2} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Los retardadores ópticos se construyen a partir de materiales birrefringentes donde el re-tardo de fase  $\beta$  de una componente con respecto a otra es proporcional a la diferencia de índices de refracción, y a la profundidad  $d$  del medio birrefringente,

$$\beta = \frac{\pi}{2} d (n_e - n_o).$$

Dónde el índice de refracción extraordinario corresponde al eje rápido del medio, y el extraordinario al eje lento [45]. Si multiplicamos la Eq. (2.18) por  $e^{-i\beta/2}$  obtenemos la

forma no normalizada que es muy común en los libros de texto porque en ella se hace evidente que la componente  $E_y$  del campo sufre un retardo en fase de  $\beta$  con respecto a  $E_x$ ,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}.$$

Los retardadores más usados en el laboratorio son aquellos que introducen retardos de cuarto de onda:

$$QWP = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

y retardos de media onda:

$$HWP = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Los de cuarto de onda permiten obtener polarizaciones circulares o elípticas a partir de polarizaciones lineales. La Fig. 2.12 muestra cómo conseguir un campo con polarización circular derecha a partir de polarización lineal y un retardador  $QWP$ . La operación co-

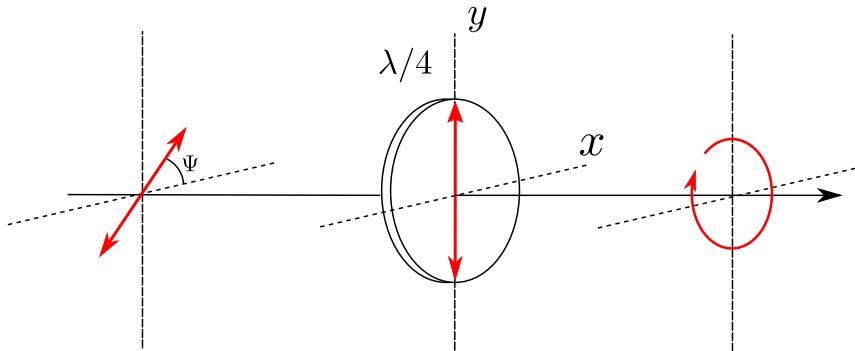


Figura 2.12: Propagación de un estado de polarización lineal a  $45^\circ$  a través de una placa de retardo de cuarto de onda vertical que genera un estado de polarización circular derecho. Las placas de cuarto de onda introducen un retardo de fase de  $\frac{\pi}{2}$  radianes.

rrespondiente en el formalismo de Jones es,

$$\begin{aligned} \mathbf{CD} &= R^T \left( \frac{\pi}{2} \right) (QWP) R \left( \frac{\pi}{2} \right) 45^\circ, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En cambio, los retardadores de media onda permiten rotar el estado de polarización sin afectar la intensidad a la salida. En la figura 2.13 se muestra cómo una placa de media onda orientada a  $45^\circ$  puede rotar un estado de polarización lineal horizontal a uno vertical. Como en los casos anteriores, se puede representar la rotación de la polarización usando el

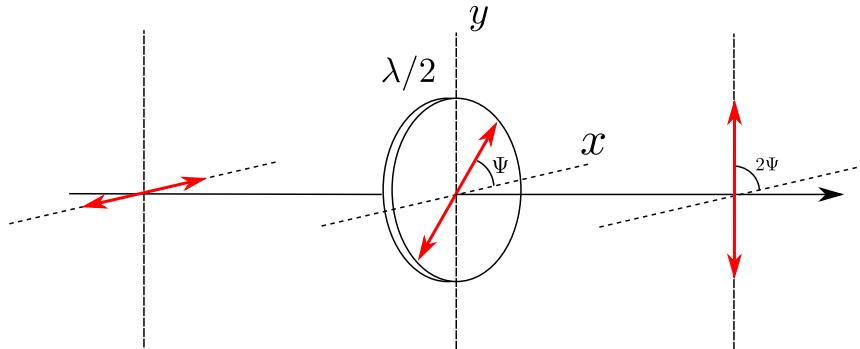


Figura 2.13: Propagación de un estado de polarización lineal horizontal a través de una placa de retardo de media onda vertical a  $45^\circ$  que genera un estado de polarización lineal vertical. Las placas de media onda introducen un retardo de fase de  $\pi$  radianes.

formalismo de Jones:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= R^T \left( \frac{\pi}{4} \right) (HWP) R \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{H}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Combinando rotadores ópticos (HWP) y retardadores de cuarto de onda (QWP), podemos generar polarizaciones elípticas con cualquier inclinación y elipticidad. Así como estos elementos pueden ser modelados por una matriz, el SLM, que es también un elemento birrefringente que transforma los estados de polarización puede ser modelado con matrices de Jones que cumplen las mismas propiedades generales. En la sección que sigue se construirá un modelo para describir el comportamiento de un cristal líquido enroscado (TN-LCD) en términos de matrices de Jones.

## 2.2.4 Propiedades ópticas de los cristales líquidos nemáticos enroscados (TN-LCD)

Los cristales líquidos del tipo TN-LCD son medios ópticos inhomogéneos y anisotrópicos que localmente actúan como si fueran cristales birrefringentes uniaxiales con su eje óptico orientado en la dirección preferente de las moléculas. Como se mencionó en la sección 2.2.1.2 la anisotropía se debe a la forma obloide de las moléculas del cristal, y en el caso de los TN la inhomogeneidad viene dada por la orientación preferencial de las moléculas que es función de su posición. Las propiedades ópticas se estudian suponiendo que el material se puede representar como láminas delgadas perpendiculares a la dirección de propagación, cada una de ellas actuando como si fuera un cristal birrefringente uniaxial con su eje óptico rotado respecto al eje  $x$  un ángulo  $\psi$  como se ilustra en la Fig. 2.14. La rotación de cada *lámina* de moléculas se asume proporcional a la distancia desde la superficie de entrada del LCD [45],

$$\psi(z) = \alpha z. \quad (2.19)$$

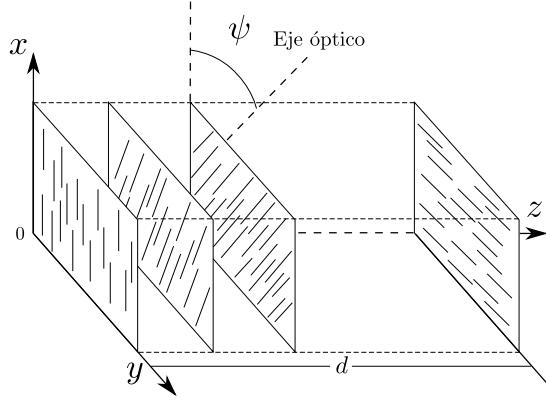


Figura 2.14: Propagación de la luz en un cristal líquido del tipo Twisted Nematic. En este diagrama el ángulo de entorcedura es de  $90^\circ$ .

Aquí la constante  $\alpha$  se conoce como coeficiente de torsión, y el ángulo a la salida viene dado por

$$\phi \equiv \psi(d) = \alpha d.$$

Si se divide el cristal en  $N$  láminas, cada una tendrá un grosor  $d/N$  y estará orientada en los ángulos  $\rho, 2\rho, 3\rho, \dots, (N-1)\rho, N\rho$  con  $\rho = \phi/N$ . Si cada lámina representa un cristal birrefringente, ésta tendrá una birrefringencia asociada a su grosor dada por

$$\beta_N = \frac{\pi d}{2N} (n_e - n_o).$$

La matriz de Jones general para el conjunto de todas las láminas se encuentra como la multiplicación de cada una como se muestra a continuación:

$$M = W_N W_{N-1} \cdots W_3 W_2 W_1 = \prod_{m=1}^N W_m = \prod_{m=1}^N R(m\rho)^T W_0 R(m\rho),$$

dónde  $R$  es la matriz de rotación,  $W_m$  es la matriz de Jones para el retardador  $m$  rotada, y  $W_0$  es aquella lámina en donde el eje rápido está orientado con el eje  $x$ ,

$$W_0 = \begin{pmatrix} e^{i\beta/2N} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta/2N} \end{pmatrix}.$$

Las matrices de rotación cumplen la siguiente regla:

$$\begin{aligned}
 R^T(\psi_m)R^T(\psi_{m-1}) &= R^T(\psi_m + \psi_{m-1}), \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi_m & -\sin \psi_m \\ \sin \psi_m & \cos \psi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{m-1} & -\sin \psi_{m-1} \\ \sin \psi_{m-1} & \cos \psi_{m-1} \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi_m \cos \psi_{m-1} - \sin \psi_m \sin \psi_{m-1} & -(\cos \psi_m \sin \psi_{m-1} + \sin \psi_m \cos \psi_{m-1}) \\ \sin \psi_m \cos \psi_{m-1} + \cos \psi_m \sin \psi_{m-1} & -\sin \psi_m \sin \psi_{m-1} + \cos \psi_m \cos \psi_{m-1} \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\psi_m + \psi_{m-1}) & -\sin(\psi_m + \psi_{m-1}) \\ \sin(\psi_m + \psi_{m-1}) & \cos(\psi_m + \psi_{m-1}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Usando esta propiedad de las matrices de rotación, se puede seguir el siguiente razonamiento, si  $N = 1$  entonces,

$$M = R^T(\rho)W_0R(\rho).$$

Si en cambio  $N = 2$  se tiene

$$\begin{aligned}
 M &= R^T(2\rho)W_0R(2\rho)R^T(\rho)W_0R(\rho), \\
 &= R^T(2\rho)W_0R(\rho)R(\rho)R^T(\rho)W_0R(\rho).
 \end{aligned}$$

Como  $R(\rho)R^T(\rho) = \mathbb{1}$  entonces,

$$\begin{aligned}
 M &= R^T(2\rho)W_0R(\rho)W_0R(\rho), \\
 &= R^T(2\rho)[W_0R(\rho)]^2.
 \end{aligned}$$

Y para  $N = 3$ :

$$\begin{aligned}
 M &= R^T(3\rho)W_0R(3\rho)R^T(2\rho)W_0R(2\rho)R^T(\rho)W_0R(\rho), \\
 &= R^T(3\rho)W_0R(3\rho)R^T(2\rho)[W_0R(\rho)]^2, \\
 &= R^T(3\rho)W_0R(\rho)R(2\rho)R^T(2\rho)[W_0R(\rho)]^2, \\
 &= R^T(3\rho)W_0R(\rho)[W_0R(\rho)]^2, \\
 &= R^T(3\rho)[W_0R(\rho)]^3.
 \end{aligned}$$

Ahora, para una cantidad arbitraria  $m$ :

$$\begin{aligned} M &= R^T(m\rho)W_0R(m\rho)R^T((m-1)\rho)[W_0R(\rho)]^{m-1}, \\ &= R^T(m\rho)W_0R(\rho)R((m-1)\rho)R^T((m-1)\rho)[W_0R(\rho)]^{m-1}, \\ &= R^T(m\rho)W_0R(\rho)[W_0R(\rho)]^{m-1}, \\ &= R^T(m\rho)[W_0R(m\rho)]^m. \end{aligned}$$

Y así se obtiene la matriz general del TN-LCD según Yariv y Yeh [45] en términos de dos matrices, una que cambia el estado de polarización y otra que simplemente lo rota

$$M = R^T(\phi) \left[ W_0R\left(\frac{\phi}{N}\right) \right]^N, \quad (2.20)$$

$$= R^T(\phi) \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{N} e^{i\beta/N} & \sin \frac{\phi}{N} e^{i\beta/N} \\ -\sin \frac{\phi}{N} e^{-i\beta/N} & \cos \frac{\phi}{N} e^{-i\beta/N} \end{pmatrix}^N. \quad (2.21)$$

La Eq. (2.21) puede ser simplificada aún mas como muestran Yeh y Claire [46] si se usa la identidad de Chebyshev para matrices unimodulares

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \frac{A \sin(mZ) - \sin(m-1)Z}{\sin Z} & \frac{B \sin(mZ)}{\sin Z} \\ \frac{C \sin(mZ)}{\sin Z} & \frac{D \sin(mZ) - \sin(m-1)Z}{\sin Z} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

con

$$Z = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2}(A + D) \right].$$

Si se saca el límite cuando ( $N \rightarrow \infty$ ) Saleh y Lu [39] muestran que se puede obtener la siguiente matriz,

$$M = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma + i\beta \frac{\sin \gamma}{\gamma} & \phi \frac{\sin \gamma}{\gamma} \\ -\phi \frac{\sin \gamma}{\gamma} & \cos \gamma - i\beta \frac{\sin \gamma}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

dónde

$$\gamma = \sqrt{\phi^2 + \beta^2}.$$

Ahora, la matriz de la Eq. (2.23) es la matriz que todos los autores referenciados en el estudio del estado del arte usan, y a partir de la cual se basan para caracterizar moduladores. La matriz que representa un SLM tal como se estudió en esta sección es la forma más simple de representar un cristal líquido del tipo twisted nematic y se conoce como el modelo de Saleh y Lu [39]. Este modelo parte de asumir las siguientes aproximaciones:

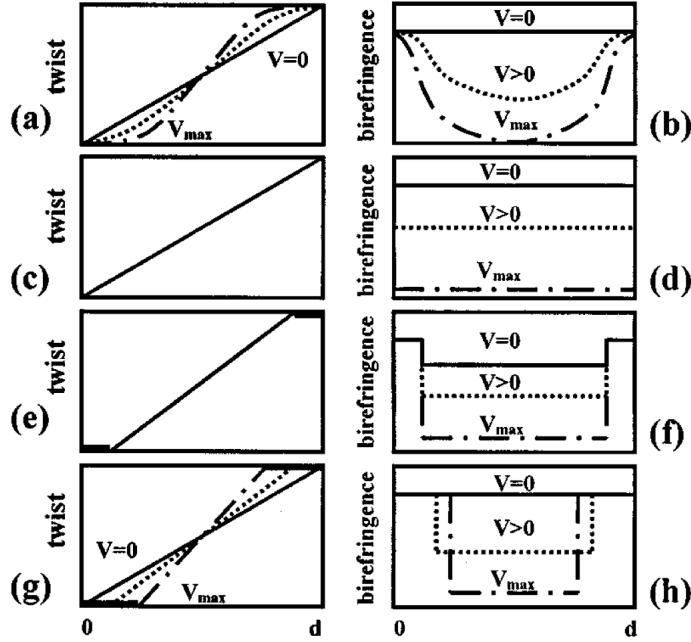
- El TN-LCD se comporta como una sucesión de láminas retardadoras en las cuales la orientación del vector director varía gradualmente desde un ángulo a la entrada hasta un ángulo a la salida y formando un ángulo de rotación conocido como twist angle.
- El ángulo de rotación (twist angle) es una función lineal proporcional a la profundidad en el cristal tal y como se expresa en la Eq. (2.19).
- El ángulo de inclinación (tilt angle) se produce cuando se introduce un campo eléctrico que hace rotar las moléculas para alinearlas en su dirección. Éste ángulo se asume constante a lo largo del cristal para un voltaje específico. Si la birrefringencia es proporcional al ángulo de inclinación, entonces al variar el voltaje ésta variará linealmente con respecto al voltaje.

En modelos posteriores como los de Coy et al. [6] y Marquez et al. [30] se construyen matrices para el LCD que corrigen comportamientos no lineales no previstos por Lu y Saleh. El principal factor a corregir en un LCD es la tendencia de las moléculas cercanas a las paredes del cristal a conservar la dirección de pulido de los vidrios que las contienen como se ilustra en la Fig. 2.15. Este efecto hace que el ángulo de rotación no sea una función lineal lo largo de la profundidad y que la birrefringencia no sea una función lineal del voltaje.

### 2.3 Revisión de la literatura

Se realizó una revisión de la literatura en el contexto de calibración de moduladores basados en TN-LCD y se encontró que para poder utilizar una pantalla de cristal líquido como un modulador de sólo fase se debe caracterizar el dispositivo como si fuera un elemento óptico que afecta tanto la polarización como la fase de la luz. La mayoría de los autores usan el cálculo de Jones para representar el efecto del SLM sobre la luz como la operación de la matriz del SLM sobre un vector de polarización a la entrada. Sin embargo, algunos autores como Yu et al. [47], [?] y Durán et al. [13] utilizan también la medida de parámetros de Stokes y matrices de Muller para obtener curvas de calibración de los dispositivos. El reto en ambos casos es encontrar una matriz que modele con precisión el comportamiento del modulador para diferentes valores de voltaje aplicado.

Hay dos formas básicas de caracterizar el SLM, por una parte se puede seguir el camino riguroso y analizar el TN-LCD desde el punto de vista físico como se hizo en la sección anterior. Para este caso se deben encontrar los parámetros físicos que determinan la matriz



**Fig. 1** Sketch of the behavior of the twist angle and the birefringence as a function of the depth in the modulator: (a) and (b) Berreman model, (c) and (d) Lu and Saleh model, (e) and (f) Coy et al. model, and (g) and (h) our model.

Figura 2.15: Modelos de TN-LCD tomado de Marquez et al. [30].

que se presentó en la Eq. (2.23), es decir, la birrefringencia como función del voltaje, el ángulo de rotación de las moléculas a la entrada del modulador, y el ángulo de rotación total que experimentan las moléculas hasta la salida del modulador. Estos parámetros son encontrados en la mayoría de los casos por medio de ajuste de curvas con medidas experimentales de la transmision. La otra forma en la que se obtiene la matriz de Jones es asumiendo que el sistema es como una caja negra que debe cumplir reglas menos exigentes. En la Fig. 2.16 se ilustra por medio de dos columnas la cantidad y fecha en las cuales se han publicado artículos científicos en donde se usa uno u otro método para caracterizar los moduladores. Adicionalmente, se identificaron los grupos que más han publicado sobre el tema. De la Fig. 2.16 y de las fechas en los artículos de la bibliografía se puede observar que la investigación en TN-LCD para aplicación en procesamiento óptico tuvo su auge entre 1990 y 2010 aproximadamente, esto se debe como afirman Kirsch et al. [20] a que a finales de los 80s las pantallas de LC para televisores portátiles resultaron interesantes a los investigadores como dispositivos para generación dinámica de máscaras de amplitud

y fase. El declive en cambio, se debe a que los moduladores de reflexión han ido reemplazando a los de transmisión por no necesitar de una caracterización y tener mejores prestaciones. También se ha concluido que los artículos que buscaban encontrar todos los parámetros del modulador como el de Marquez et al. [30] y el de Zhisheng et al. [49] en 1998 preceden en el tiempo a los artículos donde se busca simplificar el modelo y asumir el comportamiento del LCD como una caja negra, como el de Moreno et al. [32] en 2003, o como los dos artículos de Ma et al. [26, 27] en 2010 y 2011, que son en los cuales nos hemos inspirado para caracterizar nuestros SLMs. Los autores de estas últimas referencias identificaron una necesidad de simplificar el proceso de caracterización, y entre sus argumentos están la simplicidad matemática y número reducido de medidas necesarias. El principal

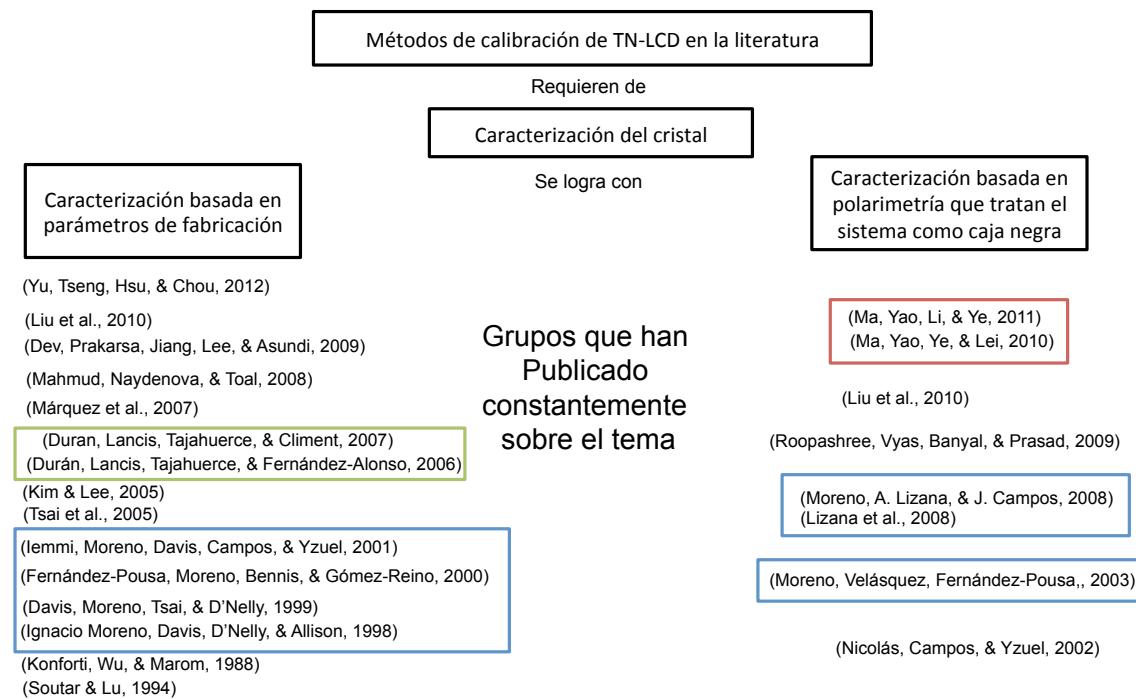


Figura 2.16: Tabla de publicaciones en relación con caracterización de moduladores tipo TN-LCD. Los rectángulos representan los grupos que han publicado más en el tema y que resultan de mayor interés para este trabajo.

resultado del estudio del estado del arte fue encontrar un patrón en la evolución del tema en la literatura desde los primeros métodos para pantallas de televisor [33] hasta campos dónde se modula la polarización producidos por moduladores [34]. Este patrón tiene como columna vertebral al investigador Ignacio Moreno que, junto con otros investigadores en universidades de España y California ha dirigido los avances en aplicaciones científicas de

pantallas TN-LCD.

En lo que sigue de este capítulo presentaremos el resultado de la caracterización de un SLM modelo LC2002 de marca Holoeye con el método de Ma et al. [27]. Veremos que la implementación de este método y los resultados obtenidos involucraron no solo el análisis de datos experimentales sino también el diseño y construcción de un sistema automatizado para la toma de medidas que se describe en la sección 3.3.2.1 y el apéndice A. También se mostrará un método alternativo propuesto por nosotros que requiere más medidas y permite obtener resultados más veraces.

Una vez caracterizado el SLM se identificó una combinación de estados de polarización a la entrada y la salida del SLM que permiten una modulación de solo fase con la cual se pueden emular elementos difractivos digitales tales como máscaras espiral de fase, prismas, lentes de Fresnel e inclusive aberraciones. Los elementos difractivos producidos de forma digital, y en particular, las máscaras espiral son la clave para producir haces Laguerre-Gauss.

---

CAPÍTULO  
3

# Caracterización de TN-SLM

Como se mencionó antes, en la caracterización del SLM se pretende encontrar estados de polarización a la entrada y salida del modulador que produzcan modulaciones de solo fase, con buena transmitancia y con un rango amplio de valores de fase. Por ende es necesario medir las modulaciones de amplitud y de fase. En las siguientes secciones se muestra cómo medimos las modulaciones de amplitud y fase.

## 3.1 Medida de la modulación de amplitud

En la Fig. 3.1 se presenta un esquema del sistema óptico usado para medir la modulación de amplitud. Si el haz tiene una polarización lineal y se propaga en la dirección de  $z$ , la combinación de un HWP y un primer QWP, conocida como **generador de estados de polarización (PSG)**, permite producir estados de polarización arbitrarios a la entrada del SLM. Luego, el haz llega al SLM y la modulación de amplitud se debe a que las moléculas de LC en el SLM cambian el estado de polarización dependiendo del valor de voltaje aplicado. Cuando se añade un **detector de estados de polarización (PSD)** compuesto por un segundo QWP y un polarizador, la amplitud del campo a la salida del polarizador (P) dependerá de la matriz de Jones del SLM para el nivel de gris actual y de los vectores de Jones asociados al PSG y PSD. A la salida del PSD hay un estado con polarización lineal cuya intensidad puede ser medida usando un fotodetector, o una cámara.

Desde el punto de vista matemático, el campo a la salida ( $Out$ ) se puede obtener multiplicando un vector de entrada  $In$  por cada uno de los elementos del sistema

$$Out = (\mathbf{P} \ QWP_2) \ SLM \ (QWP_1 \ HWP) \ In. \quad (3.1)$$

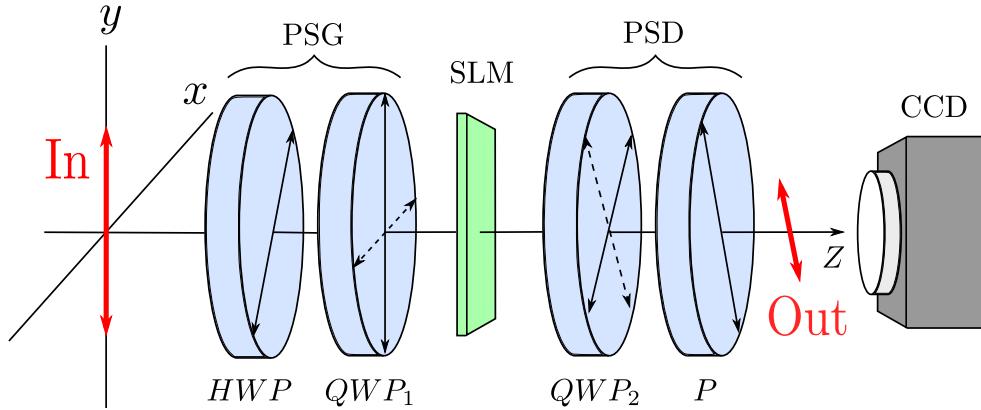


Figura 3.1: Esquema general de un sistema óptico para caracterización de modulación de intensidad de un TN-SLM.

La intensidad medida por la cámara no es más que el módulo cuadrado de este campo,

$$I = |Out|^2 = Out^\dagger Out. \quad (3.2)$$

Luego, en la Fig. 3.2 se presenta una curva de modulación de amplitud que se consigue graficando los valores de intensidad normalizada cuando se varían los niveles de gris discretos del SLM de 0 a 255. Como se mencionó antes, el nivel de gris es proporcional al voltaje sobre las celdas de CL y corresponde a 0 cuando el ángulo de inclinación de las moléculas es de  $90^\circ$  con respecto a la dirección de propagación. La Fig. 3.2 es especialmente interesante porque muestra el comportamiento del SLM marca Holoeye modelo LC2002 en la configuración típica de pantallas LCD para proyección, es decir, cuando el PSG genera un estado de polarización a la entrada vertical y el PSD detecta un estado horizontal. Como es de esperarse, en esta configuración el SLM modula amplitud en un rango de 0 a 1 y con una pendiente relativamente suave y lineal. Este tipo de modulaciones sirven para proyectar imágenes en niveles de gris y se pueden lograr con dos polarizadores como PSG y PSD que generen estados lineales ortogonales entre si. No obstante, nuestro objetivo es encontrar una combinación de estados de polarización que resulten en una baja modulación de amplitud y buena transmitancia.

La curva de la Fig. 3.2 caracteriza la modulación de amplitud del SLM para una sola combinación de PSG y PSD. Una forma de buscar buenas combinaciones de PSG y PSD consiste en plantear muchos estados distintos y medir la modulación hasta encontrar un estado que produzca los efectos deseados. Hacer esto experimentalmente es un proceso engorroso y requiere de mucho tiempo porque hay muchas combinaciones posibles que

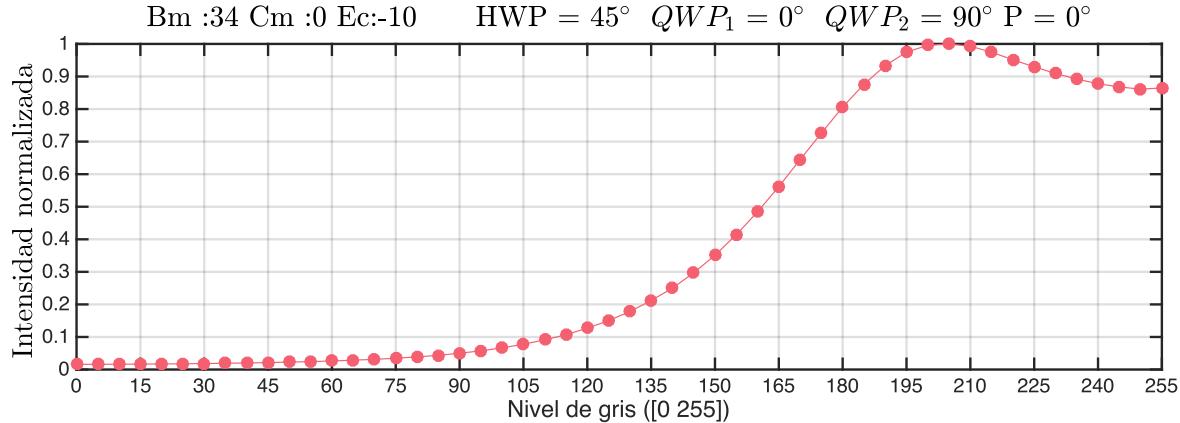


Figura 3.2: Medida de la intensidad normalizada del SLM Holoeye LC-2002 en la configuración típica de pantallas LCD para proyección. Los primeros tres valores de la parte superior indican la configuración de brillo (Bm) y contraste (Cm) del SLM, así como la exposición de la cámara (Ec). Los siguientes 4 indican las posiciones de los elementos ópticos usados para generar y detectar estados de polarización.

implican rotar elementos ópticos de forma precisa y con alta repetibilidad. En cambio, vamos a medir experimentalmente sólo 6 combinaciones de PSG y PSD propuestas por Ma et al. [27] y con ellas alimentaremos un modelo analítico y otro modelo numérico con los cuales se obtienen los parámetros de la matriz de Jones para cada nivel de gris por medio de operaciones aritméticas simples en el caso del primero, y funciones de minimización en el segundo. Una vez conocido el modelo del SLM se puede buscar el estado que mejor satisface las condiciones de operación haciendo simulaciones con las cuales sí es práctico hacer una búsqueda entre múltiples estados.

A continuación se introducirá una notación alternativa para la representación de estados de polarización que es de uso generalizada en las referencias consultadas [27, 32] (entre otras) y que facilita la representación de las combinaciones de PSG y PSD para medidas de intensidad.

### 3.1.1 La notación de Dirac

De forma similar a cómo sucede en la mecánica cuántica, los estados de polarización arbitrarios generados por un PSG se pueden representar en la notación de BraKets de Dirac como Ket's:

$$|J\rangle = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = (\mathbf{QWP}_1 \mathbf{HWP}) |In.\rangle \quad (3.3)$$

Y siguiendo esta interpretación, el PSD correspondiente a un PSG dado es el Bra, es decir, el vector que es complejo conjugado de un Ket

$$\langle J | = | J \rangle^\dagger = \begin{pmatrix} J_x^* & J_y^* \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Por otra parte, la matriz de Jones del SLM cumple el papel que tendría un operador en la mecánica cuántica. Si los Bra y Ket representan vectores normalizados, la intensidad del campo a la salida puede ser obtenida como el módulo cuadrado del valor esperado del operador del SLM (Eq. 2.16) cuando la base del PSG es proyectada sobre la del PSD [27, 32].

$$\begin{aligned} I &= | \langle J | \mathbf{SLM} | J \rangle |^2 = \begin{pmatrix} J_x & J_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} J_x & J_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + iY & Z + iW \\ -Z + iW & X - iY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La intensidad es una variable que se puede medir con una cámara o fotodiodo, y los vectores correspondientes a los estados producidos por el PSG y el PSD son conocidos. Como los vectores de Jones que utilizamos están normalizados, lo más adecuado es normalizar también las medidas de intensidad. Una forma de normalizar las medidas consiste en medir no solo el BraKet deseado sino también un Braket en el cual el Bra o PSD es un vector ortogonal al PSD original. La intensidad medida con el PSD ortogonal es entonces un complemento de la original y su suma debe ser un valor constante. Si se divide cualquiera de las dos intensidades experimentales sobre la suma de las dos, obtenemos un valor que ha sido normalizado y que es equivalente a aquellos obtenidos usando del producto analítico de la Eq. 3.5,

$$\hat{I} = \frac{I}{I + I^\perp}, \quad \hat{I}^\perp = \frac{I^\perp}{I + I^\perp}.$$

### 3.2 El método de Ma et al. para la caracterización del SLM

Según Ma et al. [27], hay tres combinaciones de PSD y PSG a partir de las cuales se pueden encontrar los valores X,Y,Z, y W de la matriz de Jones de un SLM. Si para normalizar cada una de ellas requerimos medir otra en la cual el Bra es el vector ortogonal

del Bra original, se requiere de las siguientes 6 medidas,

$$I_1 = | \langle \mathbf{H} | SLM | \mathbf{H} \rangle |^2, \quad I_2 = | \langle \mathbf{CD} | SLM | \mathbf{CD} \rangle |^2, \quad I_3 = | \langle 45^\circ | SLM | 45^\circ \rangle |^2,$$

$$I_1^\perp = | \langle \mathbf{V} | SLM | \mathbf{H} \rangle |^2, \quad I_2^\perp = | \langle \mathbf{CI} | SLM | \mathbf{CD} \rangle |^2, \quad I_3^\perp = | \langle -45^\circ | SLM | 45^\circ \rangle |^2.$$

Dónde el símbolo  $\perp$  denota ortogonalidad, y básicamente se está midiendo qué tan transparente es el SLM ante los estados vertical, circular derecho, y lineal a  $45^\circ$ . Estas tres medidas son interesantes porque se puede encontrar una relación entre la intensidad medida y los valores desconocidos de la matriz de Jones. A continuación se muestra el procedimiento matemático expuesto por Ma et al. que relaciona cada una de las intensidades con los valores de la matriz de Jones. Analizar la transmitancia ante el estado lineal horizontal entrega un valor de intensidad que es función de  $X$  y  $Y$ ,

$$I_1 = | \langle \mathbf{H} | SLM | \mathbf{H} \rangle |^2 = X^2 + Y^2,$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + iY & Z + iW \\ -Z + iW & X - iY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2,$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + iY \\ -Z + iW \end{pmatrix} \right|^2,$$

$$= |X + iY|^2 = X^2 + Y^2.$$

Y analizar la transmitancia ante un estado circular derecho entrega un valor de intensidad función de  $X$  y  $Z$ .

$$I_2 = | \langle \mathbf{CD} | SLM | \mathbf{CD} \rangle |^2 = X^2 + Z^2,$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + iY & Z + iW \\ -Z + iW & X - iY \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^2,$$

$$= \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + iY + iZ - W \\ -Z + iW + iX + Y \end{pmatrix} \right|^2,$$

$$= \left| \frac{1}{2} (X + iY + iZ - iW + iZ + W + X - iY) \right|^2 = X^2 + Z^2.$$

Como en los casos anteriores, se muestra que la intensidad medida cuando se genera y detecta un estado inclinado a  $45^\circ$  depende ahora de  $X$  y  $W$ .

$$\begin{aligned}
 I_3 &= |<45^\circ|SLM|45^\circ>|^2 = X^2 + W^2, \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X+iY & Z+iW \\ -Z+iW & X-iY \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2, \\
 &= \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X+iY+Z+iW \\ -Z+iW+X-iY \end{pmatrix} \right|^2, \\
 &= \left| \frac{1}{2} (X+iY+Z+iW - Z+iW+X-iY) \right|^2 = X^2 + W^2.
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, de la Eq. 2.14 podemos deducir la siguiente condición de normalización que está relacionada con el hecho de ser una matriz unitaria y por ende unimodular,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 1.$$

Con esta última relación tenemos 4 ecuaciones para 4 incógnitas, y tras realizar operaciones simples de sustitución podemos despejar  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$  y  $W^2$  en función de  $I_1$ ,  $I_2$ , y  $I_3$ ,

$$\begin{aligned}
 X^2 &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + I_3 - 1), & Y^2 &= \frac{1}{2} (I_1 - I_2 - I_3 + 1), \\
 Z^2 &= \frac{1}{2} (I_2 - I_1 - I_3 + 1), & W^2 &= \frac{1}{2} (I_3 - I_1 - I_2 + 1).
 \end{aligned}$$

Nosotros medimos estas tres intensidades para 52 de los 255 niveles de gris del SLM y obtuvimos curvas muy similares a las de Ma et al. [25]. La comparación entre las medidas de intensidad normalizadas y las de Ma se observa en la Fig. 3.3. Asimismo, calculamos los valores de los cuadrados de los parámetros de Jones siguiendo las ecuaciones mencionadas y obtuvimos los resultados presentados en la Fig. 3.4. Una primera dificultad que identificamos aplicando el método de Ma fue la ausencia de un mecanismo para definir el signo de la raíz cuadrada de  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$  y  $W^2$ . Por otra parte, observamos que aproximadamente a partir del nivel 200 la curva de  $Y^2$  cambia de dirección sugiriendo un cambio de signo en  $Y$  y aparecen valores negativos en la curva del parámetro  $W^2$ . Lo segundo produce raíces complejas no permitidas por la teoría, y puede ser debido a variaciones leves en la intensidad registrada por la cámara. La presencia de valores negativos no es discutida en los

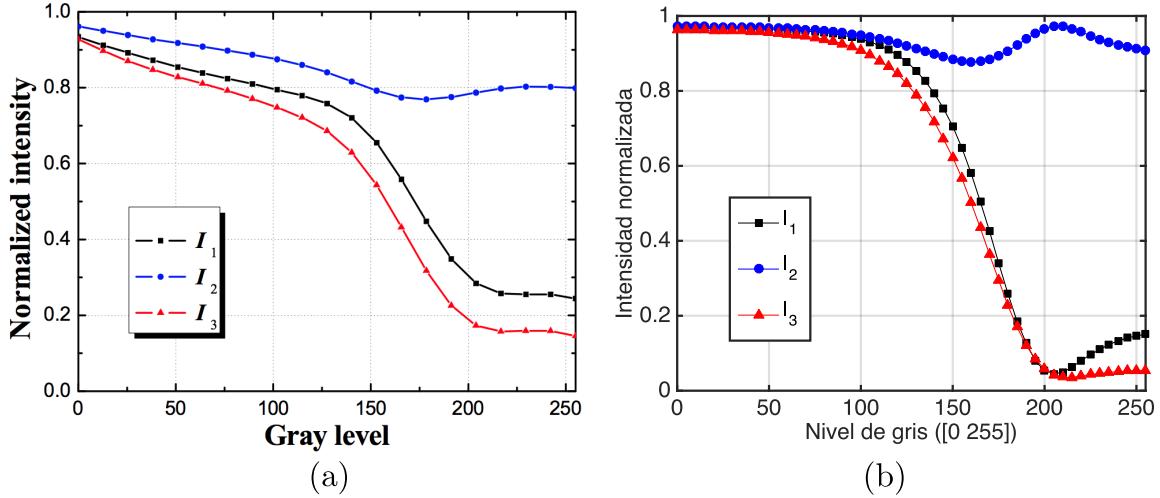


Figura 3.3: Comparación entre las tres intensidades para calibración medidas por Ma et al. [25] (a) y por nosotros (b).

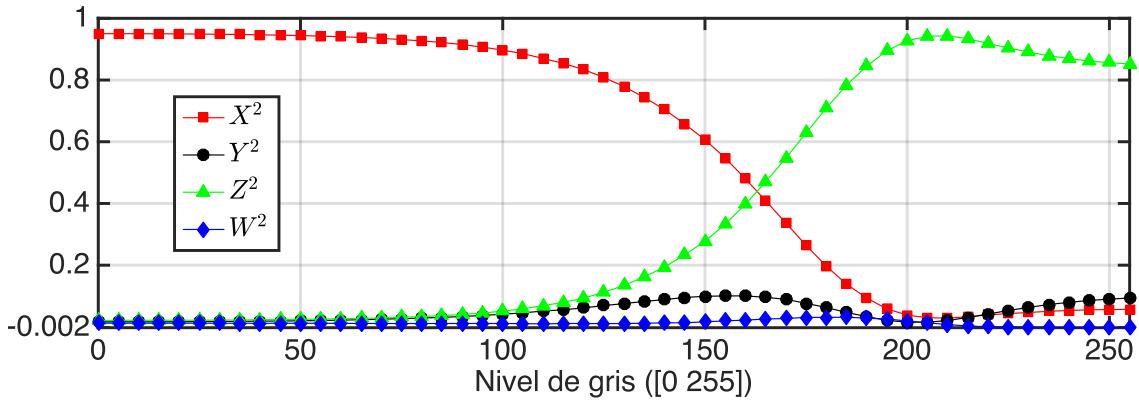


Figura 3.4: Valores de  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$  y  $W^2$  encontrados por nosotros utilizando el método de Ma et al.

artículos consultados y no hemos identificado una restricción teórica que impida observar este fenómeno al hacer las restas de las intensidades. Con el fin de obtener un resultado similar al de Ma et al. [25] asumimos que  $Z$  y  $W$  son negativos y calculamos el parámetro  $W$  como  $W = \sqrt{|W^2|}$  para evitar valores complejos. Nuestros resultados se comparan con los de Ma et al en la Fig. 3.5. En primera medida, en la Fig. 3.5 se observa que las curvas de los parámetros  $X$ , y  $Y$  siguen la misma tendencia descendente que la encontrada por Moreno et al. [32], dónde la matriz comienza siendo muy similar a una matriz identidad con  $X$  cercano a uno y el resto de parámetros tendientes a cero. Por otra parte, y también

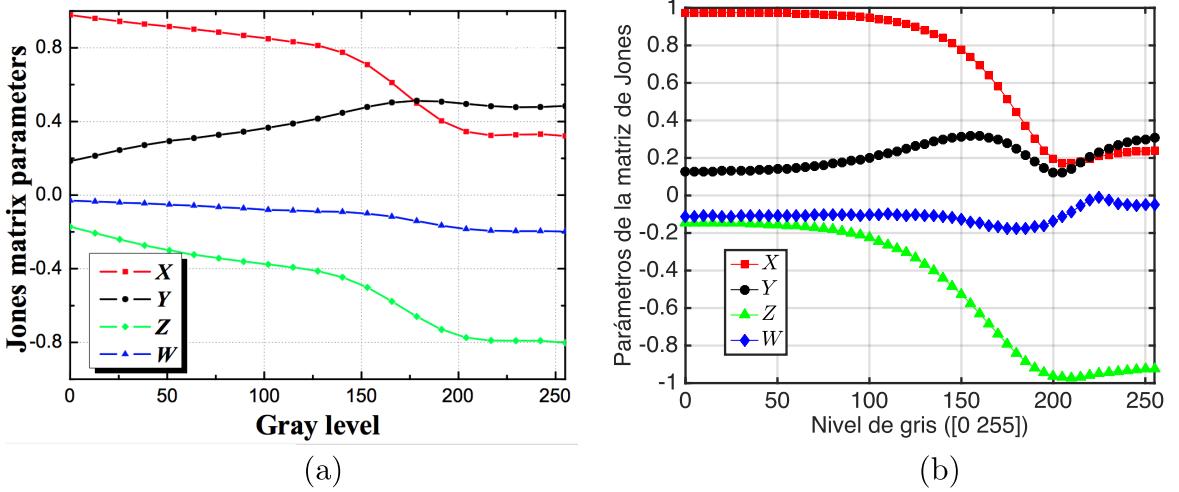


Figura 3.5: Comparación entre los valores de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y  $W$  encontrados por Ma et al. [25] (a) y por nosotros (b). Dado que no queda explícito cómo encontrar el signo de los parámetros en ninguna de sus publicaciones, asumimos que  $Z$  y  $W$  son negativos como ellos lo presentan.

de acuerdo con otros autores [30, 39] se observan valores de  $W$  cercanos a cero y valores de  $Y$  que aumentan proporcionalmente al nivel de gris. El hecho de que  $W$  sea muy cercano a cero es consistente con el modelo basado en los parámetros físicos del modulador de Marquez et al. [30] y con la Eq. 2.23 derivada en la sección 2.2.4 de este documento.

### 3.2.1 Comprobación experimental con 100 medidas

Hemos comparado las intensidades predichas por las matrices obtenidas y encontramos que el modelo emula con muy buena exactitud tanto las 3 medidas de entrada como las 3 medidas ortogonales. Para cada uno de los 6 estados el error absoluto promedio es menor a  $2 \times 10^{-4}$ . Se calcula el error absoluto promedio para cada estado como,

$$error_i = \sum_{n=1}^{52} \frac{|I_n^e - I_n^s|}{52}.$$

No obstante, observamos que la predicción del modelo no tiene una exactitud igual de buena para estados distintos a los estados usados para la caracterización. Con el fin de comprobar que las matrices obtenidas eran un modelo adecuado del SLM se hicieron 100 medidas nuevas de modulación de amplitud y se compararon con las simuladas. En esas medidas se hicieron todas las combinaciones posibles entre 10 vectores Ket y Bra usando la

numeración que se esquematiza en la Fig. 3.6. Entre los estados se incluyeron dos parejas

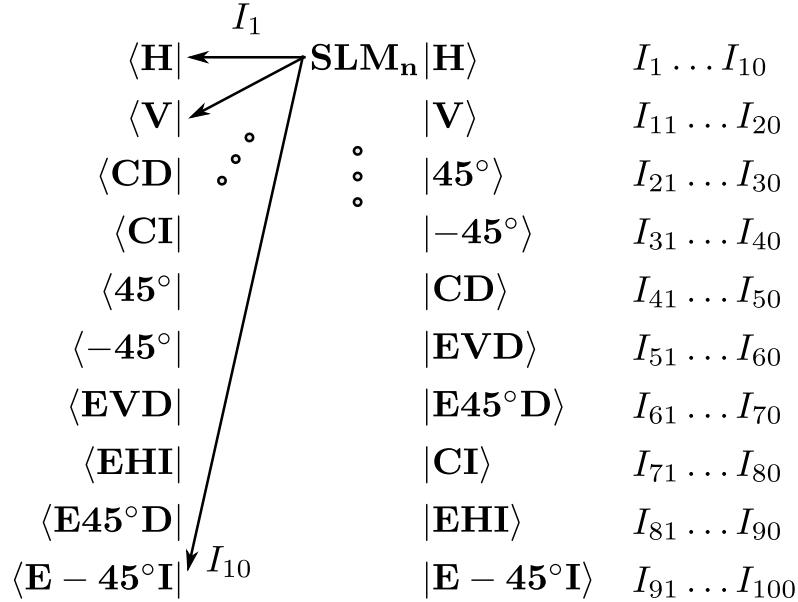


Figura 3.6: Numeración de medidas experimentales de modulación para corroboración del modelo del SLM. Por cada Ket hay 10 Bra y la numeración se hace entre parejas en orden descendente con los pares representados en la figura.

de estados elípticos ortonormales no usados como entrada del algoritmo de minimización. Los estados elípticos corresponden a polarizaciones elípticas horizontal, vertical, a  $45^\circ$  y a  $-45^\circ$  con ángulo de elipticidad  $\theta = 22,5^\circ$  como se muestra en la Fig. 3.7.

Para saber cómo ubicar los elementos ópticos que generan y detectan estados de polarización elípticas arbitrarios usamos un software desarrollado y registrado por nosotros en el Grupo de Óptica Aplicada y presentado como una ponencia de póster en el evento **FOCUS Latinoamérica** en Noviembre del 2014. El póster junto con la interfaz gráfica y las librerías pueden ser descargadas sin costo en el siguiente vínculo web:

[https://github.com/bebopsan/Ellipsometry\\_for\\_dummies.git](https://github.com/bebopsan/Ellipsometry_for_dummies.git) .

Aún cuando la imprecisión del método se hace evidente de forma cualitativa, se midió un error promedio global para los 100 estados como medida cuantitativa,

$$\text{error}_g = \sum_{i=1}^{100} \frac{\text{error}_i}{100},$$

y se obtuvo un valor de  $\text{error}_g = 0,085628$ . Es decir que con intensidades normalizadas

la diferencia entre la medida y la simulación es de alrededor de 8 %. Cuatro de los 100 resultados que incluyen estados elípticos se muestran en la Fig. 3.8 y el resto de medidas se han puesto al alcance del lector como un notebook de iPython en un repositorio alojado también en GitHub en el enlace: <http://goo.gl/69kSu2>. Ese vínculo dirige a una copia del archivo que usamos para cargar y calcular los parámetros de las matrices de Jones del SLM usando el método de Ma et al. Allí se incluye tanto el código de nuestra implementación como las figuras de los resultados. Los resultados de la Fig. 3.8 hacen evidente que el

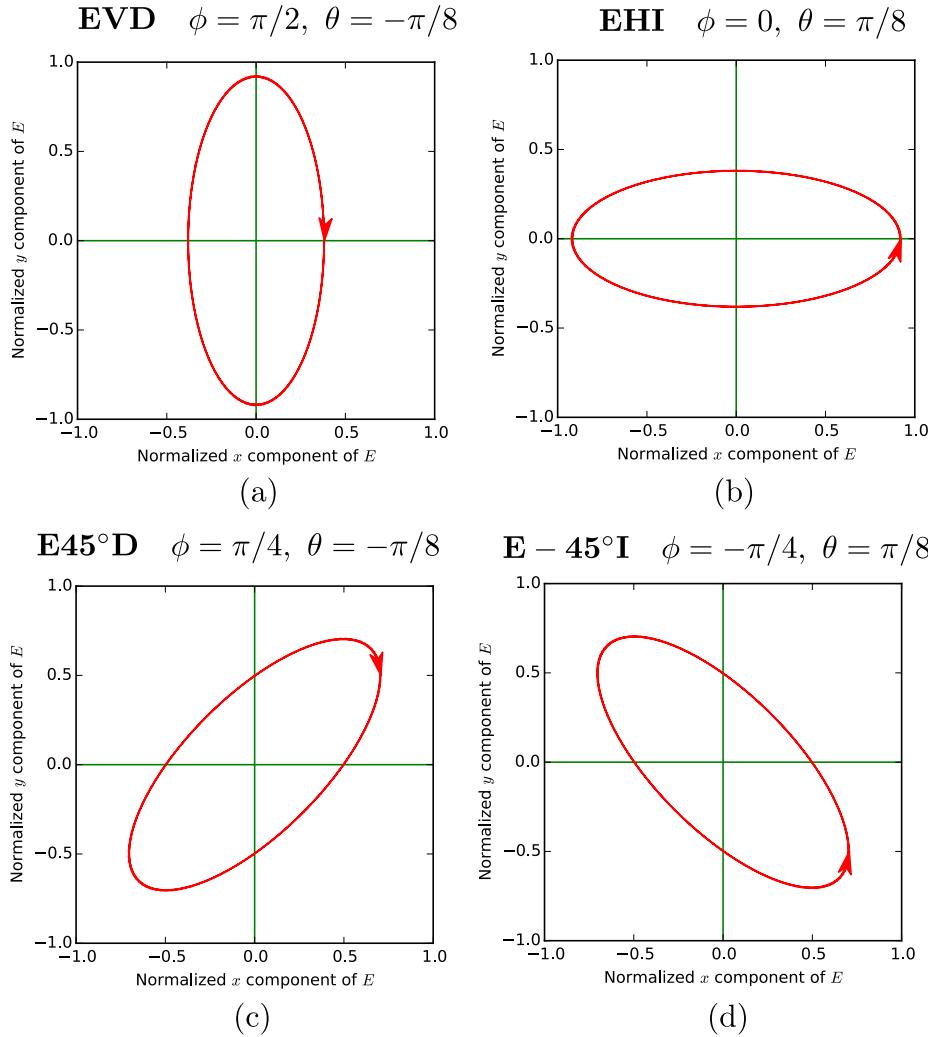


Figura 3.7: Dos pares de estados de polarización elípticos ortonormales con ángulo de elipticidad  $\theta = 22,5^\circ$ . (a) Polarización Eliptica Vertical Derecha, (b) Eliptica Horizontal Izquierda, (c) Eliptica a  $45^\circ$  Derecha, y (d) Eliptica a  $-45^\circ$  Izquierda.

método de Ma et al falla en reproducir el comportamiento del SLM para algunos estados.

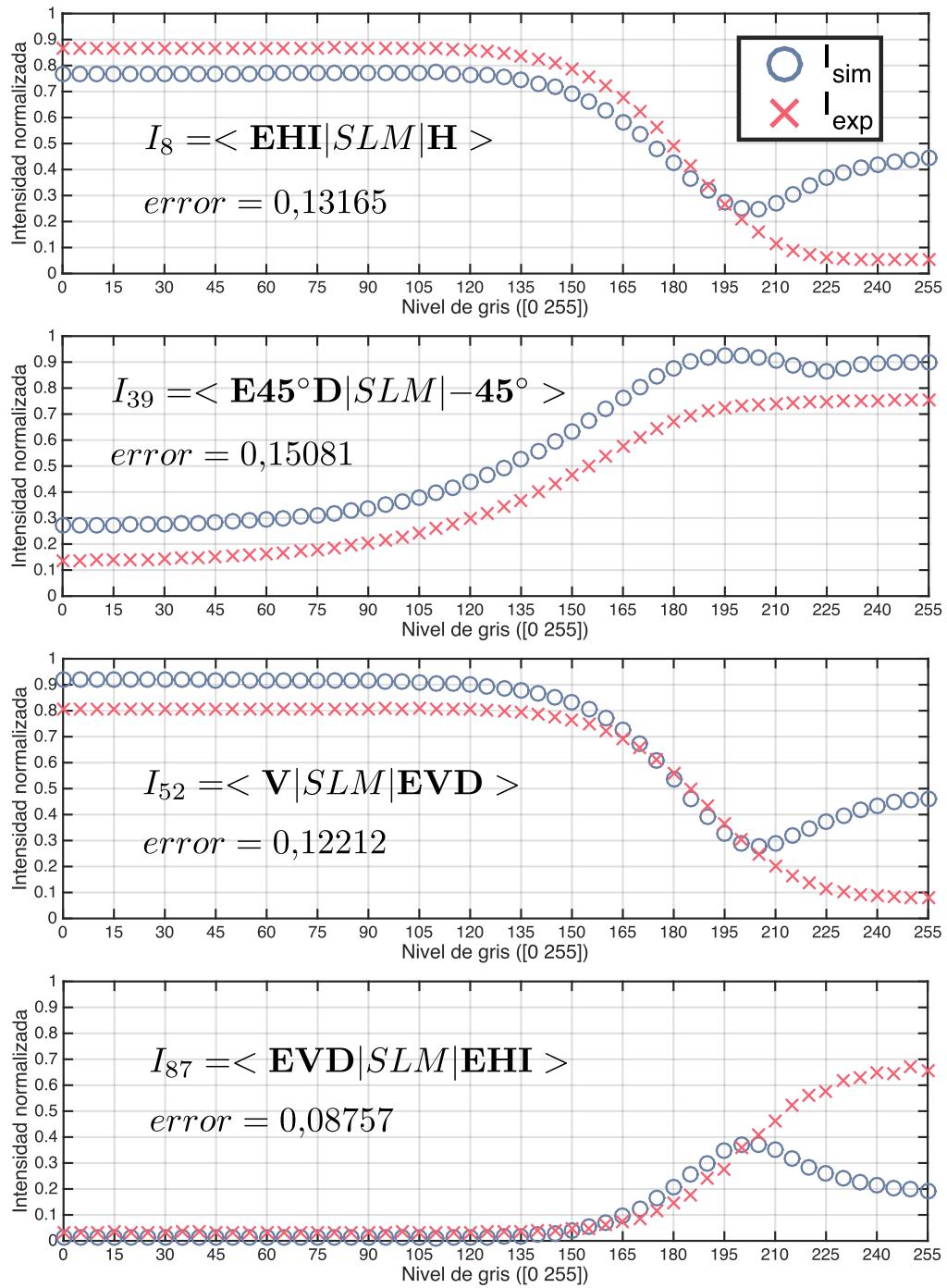


Figura 3.8: Curvas de modulación experimentales de 4 de las 100 medidas comparadas con sus equivalentes simuladas usando la matriz recuperada con el método de Ma et al.

Más aún, si se revisan las 100 medidas se observa que el método sólo acierta a reproducir la modulación de los 12 estados [1, 2, 11, 12, 25, 26, 35, 35, 43, 44, 73, 74] que están estrechamente ligados a los estados usados para la construcción de las matrices. Observamos que la divergencia del método se hace muy notoria a partir del nivel de gris 200 y esto puede estar relacionado con el cambio de pendiente que sufre la curva del parámetro  $Y^2$  en la Fig. 3.4 que posiblemente se debe a un cambio de signo de  $Y$ . Creemos que este error está asociado con la falta de un criterio para la selección de signos y que en vez de adivinar signos hasta tener un modelo adecuado conviene proponer un método de caracterización que no dependa explícitamente de  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$  y  $W^2$ .

### 3.3 Un método basado en minimización de parámetros

Encontrar los números complejos  $A$  y  $B$  (o reales  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W$ ) necesarios para ensamblar la matriz de Jones puede ser interpretado como un problema de minimización desde el punto de vista de ingeniería inversa. Desde esta perspectiva, se puede tratar el SLM realmente como una caja negra y conservar sólo la condición de unicidad de la matriz como restricción de la minimización. En primera medida, usamos el mismo conjunto de 6 medidas del método de caracterización de Ma et al. [27], que son también los estados de polarización degenerados (lineales  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\pm 45^\circ$  y circulares), que según la teoría de polarización de Jones y de Stokes brindan la información suficiente para caracterizar los cambios de polarización introducidos por un elemento óptico [5]. Las curvas de modulación correspondientes a cada una de las medidas en la notación de Ma y en notación la de la Fig. 3.6, pueden verse en la Fig. 3.9. Se puede observar que la modulación de amplitud

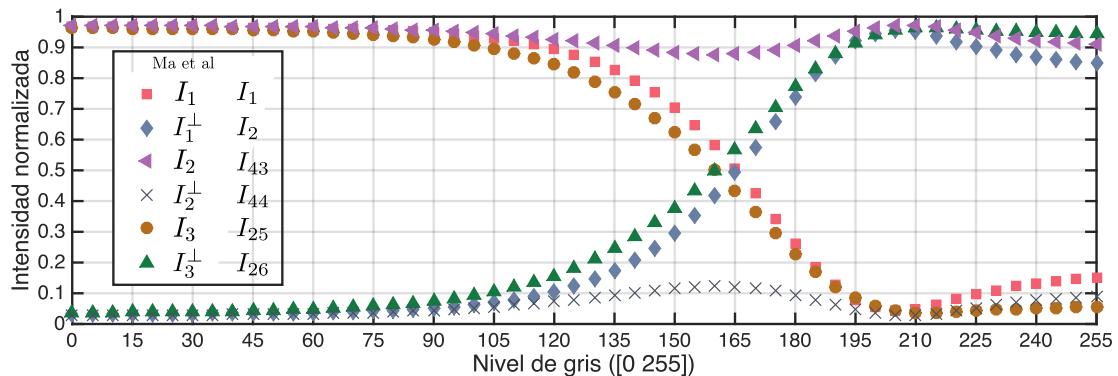


Figura 3.9: Curvas de modulación que sirven de entrada para el ajuste de parámetros de la matriz de Jones del SLM. La leyenda indica la equivalencia entre las 6 curvas del método de Ma et al y la notación usada para las 100 medidas de comprobación.

es muy similar entre polarizaciones lineales y que, como sería de esperarse, hay complementariedad entre estados ortogonales. Por otra parte, se observa claramente que el SLM es cercano a ser transparente en un amplio rango de niveles cuando se genera y detecta polarización circular derecha, y opaco cuando se genera polarización circular derecha y se detecta circular izquierda. A continuación se describe la el funcional usado para la función de minimización y la implementación del método.

### 3.3.1 Funcional a minimizar

Una matriz de Jones que represente correctamente al SLM, encontrada por métodos de minimización, debería en principio poder emular al menos estas 6 medidas para lograr resultados tan buenos como los del método de Ma et al. Nosotros planteamos un funcional a minimizar ( $\mathcal{L}$ ) que actúa como una medida de la similitud entre intensidades simuladas e intensidades adquiridas experimentalmente. El funcional sirve como un criterio de selección para evaluar si los parámetros propuestos (( $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ )) en alguna de las iteraciones de la rutina de minimización son parámetros que reproduzcan las medidas experimentales.

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \sum_{ng=0}^{255} \sum_{i=1}^6 |I_{ng,i} - |\langle \mathbf{J}_i | \mathbf{SLM}_{ng} | \mathbf{J}_i \rangle|^2|^2. \quad (3.6)$$

El funcional de la Eq. 3.6 consiste en la suma de las diferencias cuadradas entre intensidades para cada nivel de gris ( $n$ ) y para cada combinación de PSG y PSD ( $i$ ). Los argumentos del funcional son vectores que representan el conjunto de números reales  $X_n, Y_n, Z_n, W_n$  que componen a los elementos complejos  $A$  y  $B$  de la matriz de Jones del SLM (ver Eq. 2.16) para un  $n$  dado,

$$\mathbf{X} = \sum_{n=0}^{255} X_n, \quad \mathbf{Y} = \sum_{n=0}^{255} Y_n, \quad \mathbf{Z} = \sum_{n=0}^{255} Z_n, \quad \mathbf{W} = \sum_{n=0}^{255} W_n.$$

El funcional 3.6 puede ser minimizado variando los 1024 ( $256 \times 4$ ) posibles valores de  $X, Y, Z, W$  dentro del rango  $-1 : 1$  en un algoritmo de minimización. La minimización de los datos presentados en la Fig. 3.9 se llevo a cabo usando la función,

`scipy.optimize.fmin_l_bfgs_b`,

del paquete de calculo científico **Scipy** del lenguaje de programación **Python**. Ésta función conocida como **L-BFGS-B** implementa una versión de memoria limitada del método quasi Newton conocido como Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shano y permite la definición de condiciones de frontera sobre los argumentos de entrada. La implementación en el lenguaje

```
def min_sq(x0, I_exp):
    """ Calculates squared differences for a minimization procedure.

    Given the experimental measures of intensity and arbitrary values for
    the parameters of an SLM Jones Matrix, this function gives a value to
    minimize. That value tells how close is the estimation of x, y, z, w
    to the value that correctly models the SLM.

    :param x,y,z,w: Are a guess of real scalars that conform the Joung Matrix
    for the SLM.
    :param I_exp: Is a dictionary containing intensities for every
    polarization state.
    """
    # brakets is a dictionary containing each pair of Jones vectors
    brakets = {1:translate_Ellipse_to_Jones([ 0,      0],      [0,0]), \
               2:translate_Ellipse_to_Jones([ pi/2,0],      [0,0]), \
               3:translate_Ellipse_to_Jones([ pi/4, 0],      [pi/4,0]), \
               4:translate_Ellipse_to_Jones([-pi/4, 0],      [pi/4,0]), \
               5:translate_Ellipse_to_Jones([ pi/4,-pi/4],      [pi/4,-pi/4]), \
               6:translate_Ellipse_to_Jones([-pi/4,pi/4],      [pi/4,-pi/4])}

    [x,y,z,w] = x0
    M = matrix([[ x + y*1j, z + w*1j], \
                [-z + w*1j, x - y*1j]])
    min_sum = 0
    I_sim = {}
    for i in range(1,nMeasures):
        Out, In = brakets[i]
        I_sim[i] = (In.H*M.H*Out * Out.H*M*In)
        min_sum += ((I_sim[i]-I_exp[i])**2)[0,0].real
    return min_sum
```

---

Figura 3.10: Funcional a minimizar para el ajuste de parámetros basado en 6 medidas de modulación de amplitud.

Python de la función a minimizar se muestra en la Fig. 3.10, y la llamada a la función de minimización se hace como se muestra en la Fig. 3.11. En este caso usamos un valor semilla para los valores de entrada muy cercano a cero, utilizamos la opción de aproximación del gradiente por medio de diferencias finitas y definimos la tolerancia de convergencia como criterio de parada cuando el valor del funcional no cambie menos de  $1e^{-5}$ . Los detalles sobre las variables, preprocesamiento, y los resultados se han subido a internét en un repositorio de GitHub y se pueden observar en la siguiente página web:

<http://goo.gl/FLIGE0>.

En la figura 3.12 se presentan los valores de  $X, Y, Z, W$  obtenidos luego de ejecutar la minimización. Contrario a lo que pensábamos, resultó que aún cuando el método de mi-

```

bnds = ((-1, 1), (-1, 1), (-1, 1), (-1, 1))
x,y,z,w = [0.0001, 0.0001, -0.0001, -0.0001]
res_f = []
for g in range(52):
    I_exp = I_list[g]
    res = fmin_l_bfgs_b(min_sq, [x,y,z,w], fprime = None,\n
                          approx_grad = 1, args = (I_exp, brakets),\n
                          pgtol=1e-05, bounds = bnds)
    x,y,z,w = res[0]
    res_f[g] = res[0]
    print(res[0])

```

Figura 3.11: Condiciones de frontera, argumentos iniciales y llamado de la función de minimización (`fmin_l_bfgs_b`) para cada nivel de gris.

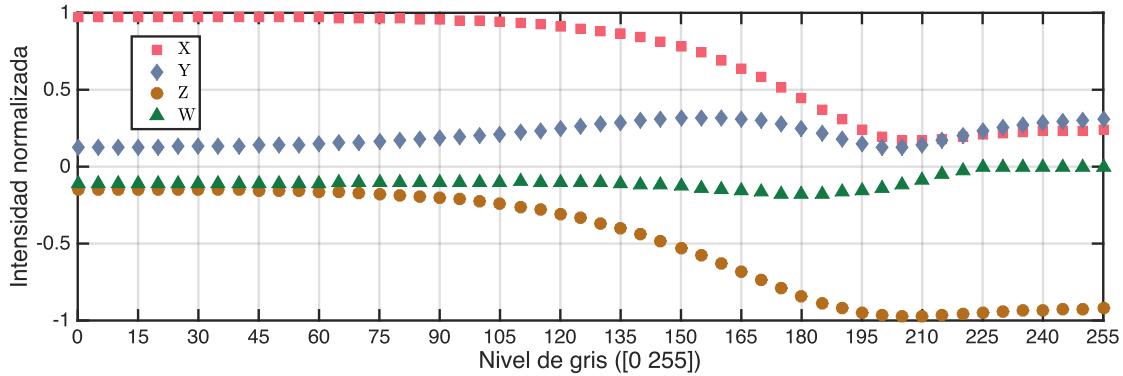


Figura 3.12: Parámetros reales que conforman la matriz de Jones del SLM encontrados por medio de minimización con 100 entradas.

nimización se basa directamente en los valores  $X, Y, Z$ , y  $W$ , y no en sus cuadrados, los resultados son casi idénticos a los que obtuvimos en la sección anterior con el método de Ma et al. Las curvas de los parámetros del modulador siguen la misma tendencia y producen los mismos valores de intensidad en las simulaciones. Las 4 medidas con estados elípticos que se presentaron en la Fig. 3.8 se repitieron para el nuevo método y se presentan junto con el valor del error relativo promedio porcentual en la Fig. 3.13. El error en las 6 medidas usadas como entrada es en este caso menor a  $2 \times 10^{-4}$ , y el error absoluto global es de  $error_g = 0,077673$ , que es un poco menor que el anterior. Sin embargo, sigue ocurriendo que la exactitud se pierde a partir del nivel de gris 200 en la mayoría de los estados. Es decir, que con estas medidas como entrada nuestro método es tan bueno como el de la literatura pero no significativamente mejor.

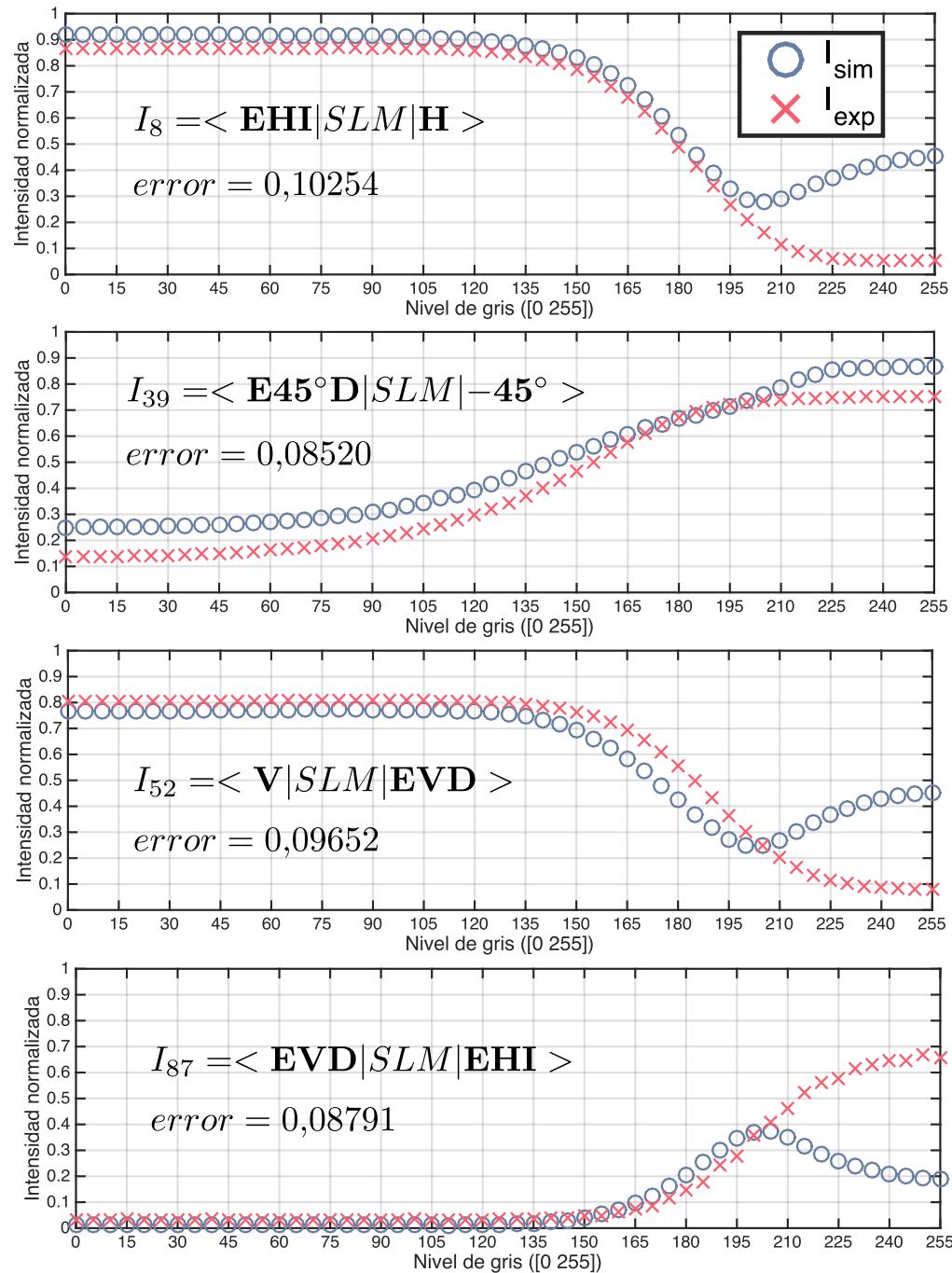


Figura 3.13: Curvas de modulación experimentales, y error de 4 de las 100 medidas comparadas con sus equivalentes simuladas usando la matriz recuperada con el método de minimización con 6 medidas.

### 3.3.2 Una ampliación de la función de minimización

El funcional de minimización puede ser modificado fácilmente para incluir como valores de entrada cuantos BraKet's distintos se deseen siempre y cuando se conozcan los vectores de Jones correspondientes al PSG y PSD de cada uno. Siguiendo la idea de utilizar la información extra de la que disponemos, modificamos la función para recibir no 6 sino 100 estados de entrada y ejecutamos de nuevo el algoritmo de minimización. Los parámetros de Jones para cada nivel de gris del método de minimización extendido se presentan en la Fig. 3.14, e inmediatamente se puede observar un cambio importante en el comportamiento de las curvas  $X$ ,  $Y$ , y  $W$  en comparación con las figuras 3.5 y 3.12. Como se había supuesto, se

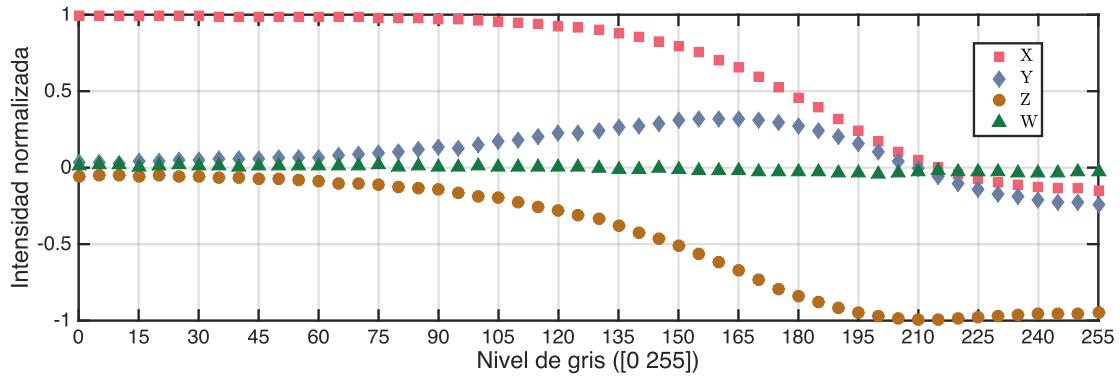


Figura 3.14: Parámetros reales que conforman la matriz de Jones del SLM encontrados por medio de minimización con 100 entradas.

puede ver que los valores de  $Y$  para los niveles más allá del 200 son negativos, y que  $W$  es virtualmente cero para todo el rango de niveles. Además, se observa que  $X$  también adquiere valores negativos para niveles de gris por encima de 200. Con respecto a las medidas de intensidad, se obtuvo una mejoría cuantitativa significativa con un error absoluto global de  $error_g = 0,024162$  que es 3.5 veces menor que el obtenido con el método de Ma et al. No obstante, la calidad de la solución se hace más evidente cuando se comparan los resultados cualitativamente, y se observa que los cambios de dirección que surgían a partir del nivel de gris 200 han desaparecido. Como antes, se presentan 4 de las medidas con estados elípticos en la Fig. 3.15 y los resultados completos han sido alojados en <http://goo.gl/kZjVGU>. En conclusión, lo que muestran los resultados es que se logró una muy buena aproximación, y que el modelo de la matriz de Jones del SLM efectivamente reproduce la modulación de amplitud del elemento real.

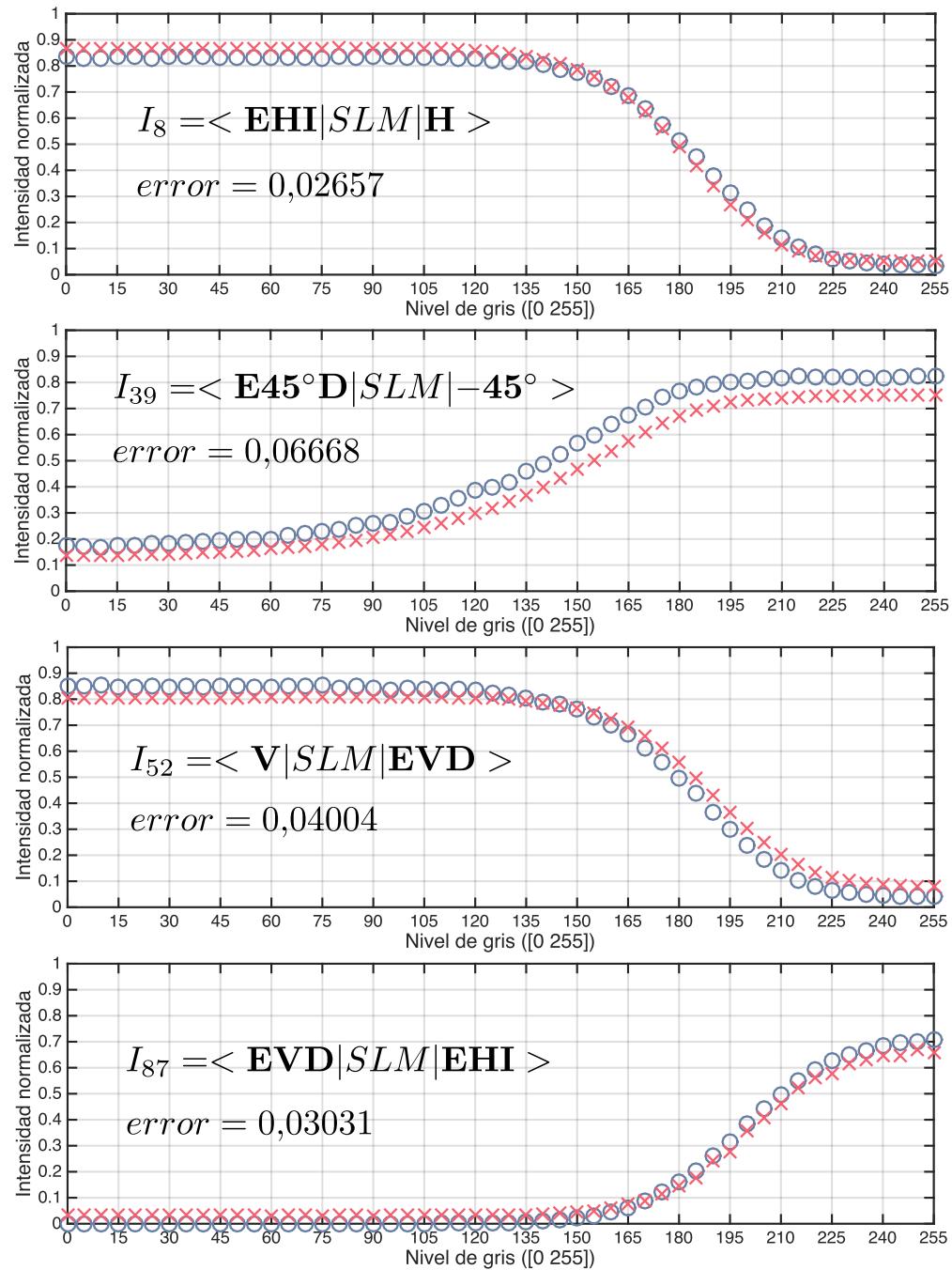


Figura 3.15: Curvas de modulación experimentales, y error de 4 de las 100 medidas comparadas con sus equivalentes simuladas usando la matriz recuperada con el método de minimización con 100 medidas de entrada.

### 3.3.2.1 Instrumento para la automatización del proceso de medida.

Ahora bien, cualquiera que haya tenido experiencia con la caracterización de SLMs se sorprenderá por la cantidad de medidas que hemos hecho. La toma de cientos de medidas y todo el proceso de aprendizaje sobre la polarimetría fue posible sólo porque usamos un instrumento mecatrónico desarrollado por nosotros antes y durante este trabajo de grado. El Instrumento se muestra en la Fig. 3.16 y consiste en cuatro rotadores ópticos motorizados manipulados por un computador a través de la tarjeta de prototipado rápido **Arduino Leonardo**. La interfaz de usuario del instrumento para toma de medidas y calibración

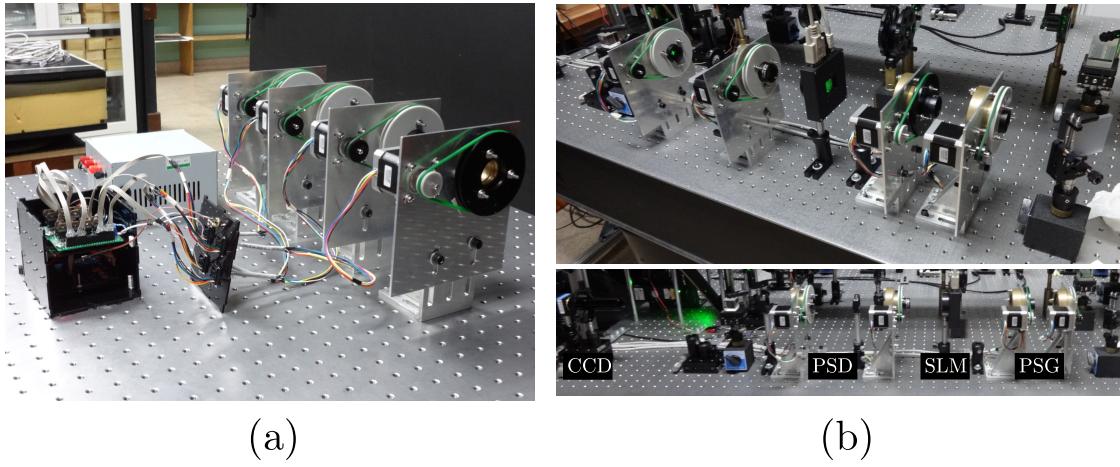


Figura 3.16: (a) Hardware del instrumento de polarimetría que se compone de 4 rotadores ópticos, una fuente de voltaje, y una caja de circuitos electrónicos en donde está el Arduino y la electrónica de potencia. (b) Montaje experimental correspondiente a la implementación de la Fig. 3.1.

de motores fue programada como un instrumento virtual del entorno de programación gráfica LabView, y los comandos de movimiento para los motores son enviados al Arduino a través de una librería de comunicación serial implementada en Python. Las componentes mecánicas y electrónicas del instrumento se describen a profundidad en el apéndice A, y los programas de interfáz de usuario y comunicación serial se describen en el apéndice B. El proceso de toma de cientos de medidas que a una persona podría llevarle varios días de trabajo se hace con la interfaz en cuestión de una o dos horas sin necesidad de supervisión.

### 3.4 Medida de la modulación de fase

El paso siguiente en la caracterización del SLM consiste en medir la modulación de fase y comprobar si la matriz de Jones encontrada es capaz de predecir el comportamiento de este SLM. La fase del frente de onda se midió usando el interferómetro **Mach–Zehnder** de la Fig. 3.17. En este montaje la fuente de iluminación es un láser de estado sólido de

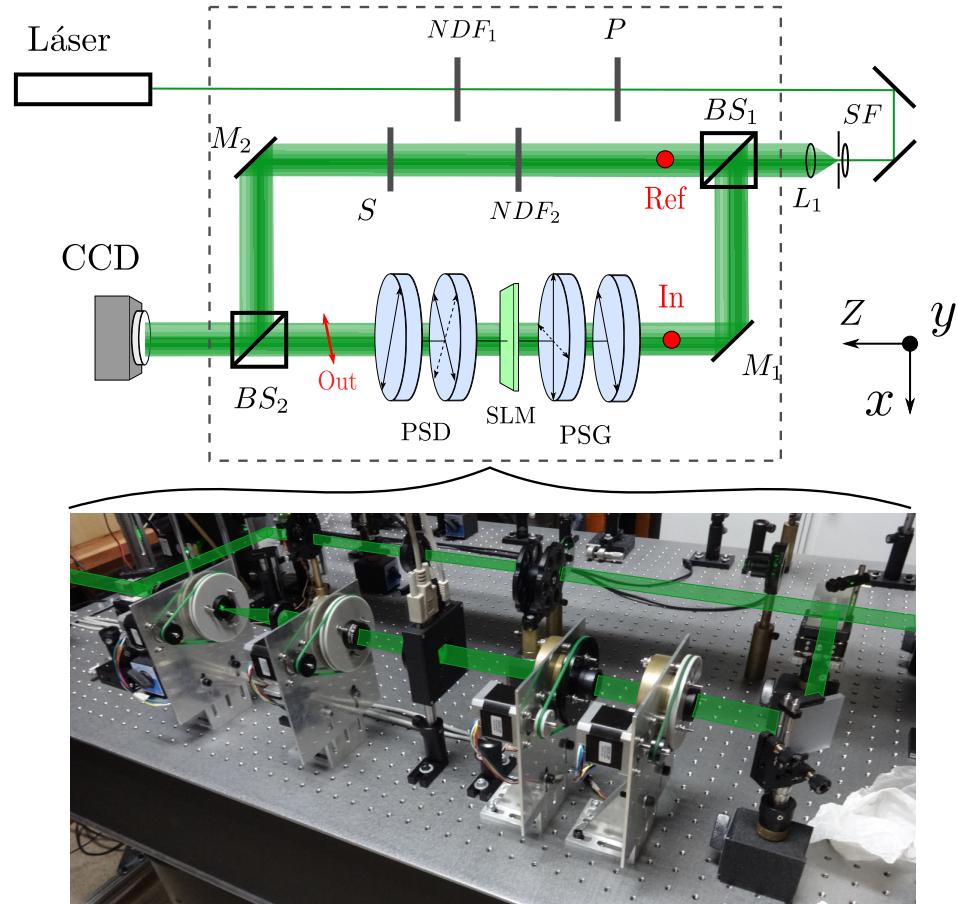


Figura 3.17: Interferómetro Mach-Zehnder para caracterización de curvas de modulación de fase.

diodo bombeado (DPSS) de longitud de onda 532nm y potencia nominal 50mW. El haz pasa por un filtro de densidad neutra ( $NDF_1$ ) que sirve como atenuador, y luego por un polarizador (P) de recubrimiento de nanopartículas que garantiza una polarización lineal vertical con relación 10.000:1. Este polarizador es usado porque el estado de polarización a la salida del diodo láser es ligeramente elíptica y no está perfectamente alineada con

la vertical de la mesa óptica. Luego de ser redireccionado, el haz es filtrado, expandido y colimado por medio de un filtro espacial (SF) en combinación con una lente ( $L_1$ ). Una vez colimado, el haz pasa por un cubo divisor de haz no polarizador ( $BS_1$ ) que lo divide en un haz de referencia en la parte superior y uno objeto en la parte inferior que ilumina al SLM. El haz de entrada es reflejado en el espejo de primera superficie  $M_1$  y pasa a través del PSG, el SLM, y el PSD para luego reencontrarse con el haz de referencia en un segundo cubo ( $BS_2$ ) y continuar su camino hasta la cámara CCD. A diferencia del haz objeto, el haz de referencia sólo pasa por un segundo NDF que sirve para compensar la relación entre intensidades de los dos haces. El elemento  $S$  es un obturador que se controla desde el computador y sirve para cambiar del modo de medida de modulación de amplitud a modulación de fase.

Al haber recorrido un camino que contiene elementos polarizadores y birrefringentes, el haz objeto sufre cambios en su fase y en su estado de polarización. Estos cambios se ven reflejados en la posición y contraste de las franjas de los interferogramas registrados por la cámara. En la figura 3.18 se pueden observar dos interferogramas que se han tomado cuando a la salida del PSD hay (a) un estado vertical, y (b) un estado horizontal.

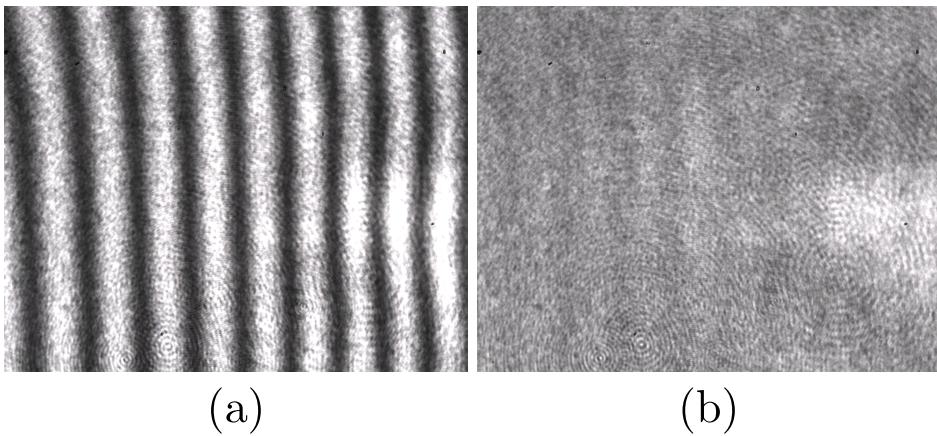


Figura 3.18: Interferogramas obtenidos en el montaje experimental para caracterización de modulación de fase. (a) Franjas de interferencia cuando la polarización en los dos brazos es igual, y (b) cuando son estados ortogonales.

La caracterización de las curvas de modulación de amplitud está asociada al cambio de contraste, y la modulación de fase es proporcional al desplazamiento de las franjas. Un cambio de fase de  $\pi$  radianes hace que las franjas se desplazan hasta un punto en el cual las que eran brillantes son ahora oscuras, y viceversa. Caracterizar la modulación consiste en medir los desplazamientos de las franjas para cada nivel de gris de la pantalla

del SLM, y dado que cualquier vibración puede mover las franjas es preferible capturar simultáneamente imágenes con las franjas en una posición de referencia e imágenes con franjas desplazadas. Para ello, varios autores como Moreno et al. [32] y Ma et al. [27] han proyectado al SLM una máscara con dos secciones rectangulares, una con un nivel de gris constante (255) y otra en la que el nivel de gris varía de 0 a 255. La máscara usada y el interferograma resultante se muestran en la Fig. 3.19.

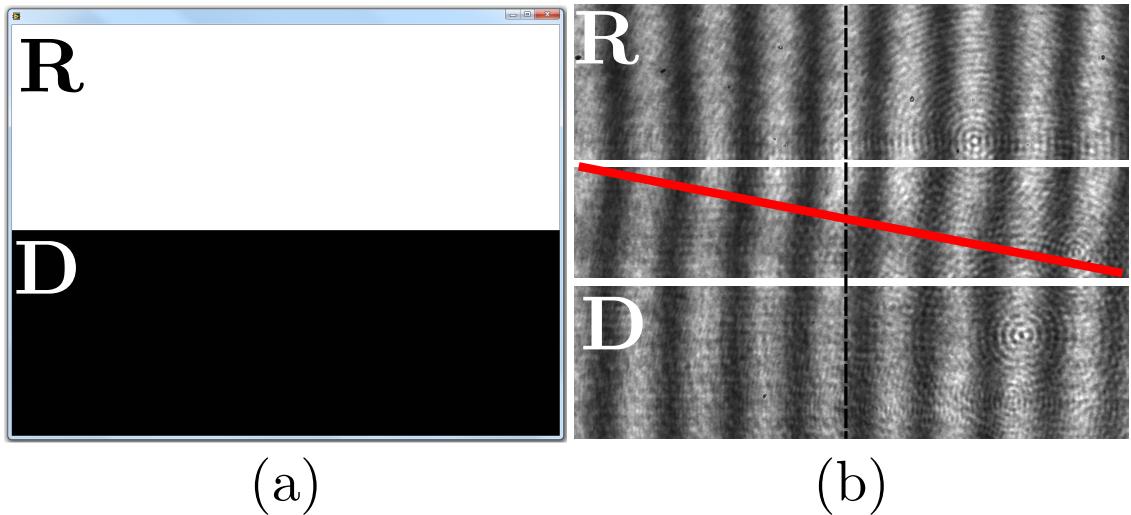


Figura 3.19: (a) Máscara dividida y (b) interferograma registrado para caracterización de modulación de fase. En esta combinación de PSG y PSD se logró una modulación de aproximadamente  $\pi/2$  que se puede identificar con la línea de referencia punteada. La linea roja indica que esa parte del interferograma se desecha.

El interferograma de la Fig. 3.19(b) se descompone en 3 imágenes, la imagen central se desecha, pues presenta un efecto de borde indeseado que resulta de la difracción producida por el escalón entre un nivel de gris y otro. Las imágenes superior e inferior corresponden a las franjas de referencia y desplazadas respectivamente, y se conservan para extraer la fase entre ellas. Para visualizar mejor las crestas promediamos el valor de las primeras y últimas 100 filas y generamos dos curvas en 1D de la intensidad normalizada por píxel como se observa en la Fig. 3.20. La diferencia de fase  $\Delta\phi$  puede ser extraída de los interferogramas midiendo el periodo ( $P$ ) y la distancia entre crestas ( $\Delta S$ ) de la imagen de referencia y la imagen desplazada haciendo el siguiente cálculo [27],

$$\Delta\phi = 2\pi\Delta S/P.$$

Extraer la fase de esta forma resulta bastante directo e intuitivo, pero se aprovecha muy

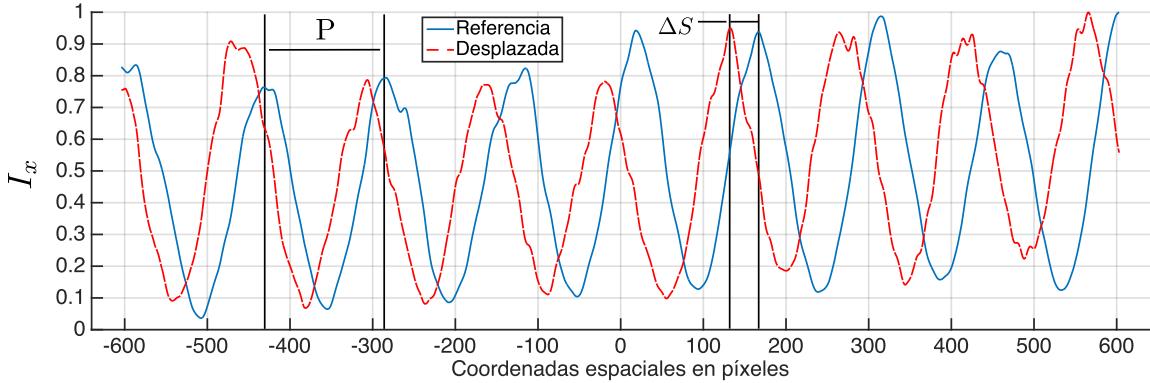


Figura 3.20: Patrones de interferencia 1D suavizados de los interferogramas con y sin desfase de la Fig. 3.19. La imagen original tiene 1208 píxeles y se tomó la mitad como cero.

poca información de la señal y se pierde precisión en comparación con otras alternativas. Además, este método resulta difícil de programar en forma de un algoritmo.

Otra forma de extraer la fase consiste en aplicar una **Transformada de Fourier** (FT) a las señales e identificar los picos correspondientes a la función seno o coseno asociada al patrón de interferencia. La fase de cada interferograma es la fase o ángulo del número complejo correspondiente al mayor pico de la FT una vez se ha filtrado el delta de Dirac central correspondiente a la FT de la intensidad de fondo. Los picos se pueden identificar calculando el valor absoluto de la FT de la señal y buscando el elemento más grande. La representación gráfica de la FT se ilustra en la Fig. 3.21 con respecto a las coordenadas de frecuencia espacial, y se observa claramente que se ha filtrado el pico central y que la información de la FT se encuentra alrededor de los picos en las frecuencias 8 y -8. Nosotros adaptamos una implementación en Matlab de este método que fue inicialmente propuesta para esta aplicación por el profesor Alberto Lencina del Centro de Investigaciones Ópticas de Argentina. En la figura 3.22, se muestra un pequeño script que ilustra cómo se haría el cálculo de la fase del interferograma de referencia. Si se realiza este proceso para cada una de las dos imágenes se pueden restar las fases de ambos interferogramas y obtener la diferencia de fase introducida por un nivel de gris particular. A diferencia del mencionado anteriormente, este proceso es más preciso y mucho más fácil de implementar en forma de un algoritmo que calcule la modulación para cada nivel de gris.

### 3.4.1 Resultados de la medida de modulación de fase

Implementando el método de transformadas de Fourier como uno de los pasos en la caracterización automatizada del SLM, se obtuvieron curvas de modulación de fase para

60 de los 100 estados mencionados en la sección 3.2.1, correspondientes a las polarizaciones de entrada lineales y circulares. Las 60 curvas se han puesto al alcance del lector en el siguiente vínculo web en forma de un notebook de IPython: <http://goo.gl/RtRCX0>.

Con estos datos, y con las curvas de modulación de amplitud pudimos seleccionar una combinaciones de PSD y PSG que tiene condiciones suficientes para usar el SLM dentro del rango de operación deseado. Observamos que tal y como se ha reportado en la literatura, estos moduladores acoplan la modulación de fase con la modulación de amplitud, y que al menos con nuestro SLM no es posible encontrar estados en los cuales el SLM sea transparente al variar niveles de gris y al mismo tiempo permita modulaciones de fase de rango superior a  $1,3\pi$ . Encontramos que el estado 6 (Fig. 3.23) produce modulaciones de fase con rango de modulación muy alto, de casi  $1,9\pi$  radianes, y que, sin embargo, está acoplado a una modulación de intensidad de muy mala calidad en la cual la transmitancia máxima es de un 60 % y se reduce hasta un 10 %. Asimismo encontramos varios BraKets en los cuales hay transmitancia máxima con modulación de amplitud mínima, pero sufren de una muy mala modulación de fase. Ejemplo de ellos es el BraKet 43 (Fig. 3.24), que tiene alta transmitancia, alrededor de 10 % de modulación de amplitud y una modulación de fase casi nula. Es decir que este SLM es básicamente transparente ante la generación y detección estados circulares.

A diferencia de estos puntos extremos, en la configuración que seleccionamos para la generación de OVs hay un compromiso de uno de los dos fenómenos. El BraKet seleccionado es el número 10 de la Fig. 3.6 que corresponde a un estado horizontal **H** a la entrada y elíptico a  $-45^\circ$  a la salida, las posiciones de los elementos ópticos que lo generan y las curvas de modulación se presentan en la Fig. 3.25. En este estado la transmitancia es baja ( 45 %) y la modulación de amplitud es relativamente baja (< 20 %), pero el rango de modulación de fase es de casi  $1,6\pi$  radianes, cosa que como veremos adelante, resulta suficientemente alta para la generación de OVs.

En un principio se pensó que una forma efectiva de encontrar un estado óptimo podía ser usando un método de minimización similar al que se usó para encontrar los parámetros de la matriz de Jones. Tál método se implementó con una función de minimización inspirada en la propuesta por Moreno et al. [32] que buscaba simultáneamente una alta tramitancia, baja modulación de amplitud y alto rango de modulación de fase. Este planteamiento tiene varios problemas, uno de ellos es que el espacio de valores de la función para cada combinación de posibles estados PSG y PSD no es convexo. Es decir que dependiendo de la semilla usada uno puede obtener un BraKet que minimice la función de forma local, y que aún así tenga desempeño regular. Esto se vio en diferentes ocasiones cuando medimos experimentalmente

los BraKets propuestos por las simulaciones. Otro problema, es que el tiempo invertido tratando de proponer manualmente valores de peso que den mayor o menor importancia a la sensibilidad de los parámetros con respecto a su efecto sobre la modulación de fase o la de amplitud es excesivo. Generalmente ocurre que la minimización converge a estados circulares que tienen muy buena transmitancia y baja modulación de amplitud pero mínima modulación de fase. Y si se modifican ligeramente los factores de peso, la minimización retorna modulaciones de fase de menos de  $1,3\pi$  con modulaciones de amplitud de entre 15 y 40 %. Esto no es mejor al resultado de la Fig. 3.25. Por último, encontramos que las modulaciones de fase predichas por medio de simulaciones con las matrices encontradas no predicen con suficiente exactitud muchas de las modulaciones de fase registradas en el laboratorio. Esto sucede porque los cambios de estado de polarización introducidos por el SLM afectan el contraste de las franjas debido a la interferencia destructiva que sucede con el haz de referencia del interferómetro Mach-Zehnder. Ante interferogramas como el de la Fig. 3.18(b) el algoritmo de reconstrucción de fase no tiene como detectar la diferencia de fase entre medidas porque se pierden las franjas.

Al final, dado que el interés fundamental de este proyecto radicaba en generar OVs, y no en desarrollar métodos de caracterización, nos resultó mejor seleccionar el mejor de los 100 estados disponibles (encontrados sin dificultad por el instrumento de automatización), que manipular funciones de peso hasta encontrar un estado simulado con las condiciones deseadas.

En adelante se mostrará la aplicación que desarrollamos para proyectar máscaras de fase arbitrarias al SLM, y se mostrarán los OVs que se pueden generar con un SLM calibrado para la modulación de fase.

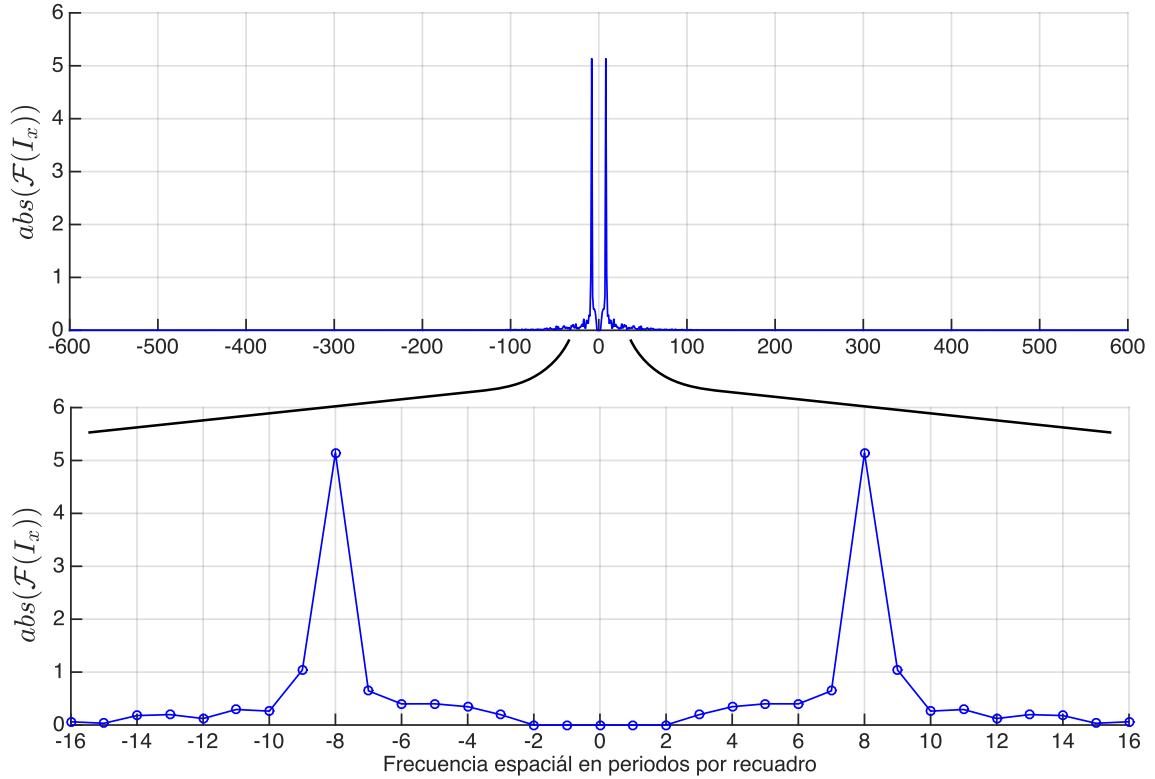


Figura 3.21: Transformada de Fourier del patrón de interferencia de referencia de la Fig. 3.20. Como es de esperarse para señales sinusoidales hay dos picos simétricos ambos lados de la coordenada frecuencial 0. Estos picos señalan correctamente que hay 8 períodos en el interferograma.

```
% Reference image
imaref=mean(imaref,1);
% FT scaled
TFimaref=ifftshift(fft(ifftshift(imaref)));
fac=sqrt(1/(size(TFimaref,2)*size(TFimaref,1)));
TFimaref=TFimaref.*fac;
% Filtering of background peak
radio_mask=2;
TFimaref(:, floor(size(TFimaref,2)/2)+1-radio_mask : floor(size(TFimaref,2)/2)
+1+radio_mask)=0;
% Position of max value
[~, IX] = sort(abs(TFimaref), 'descend');
% Phase
fase_ref =atan2(imag(TFimaref(1,IX(1))), real(TFimaref(1,IX(1))));
```

---

Figura 3.22: Script para el cálculo de la fase de un interferograma usando FT.

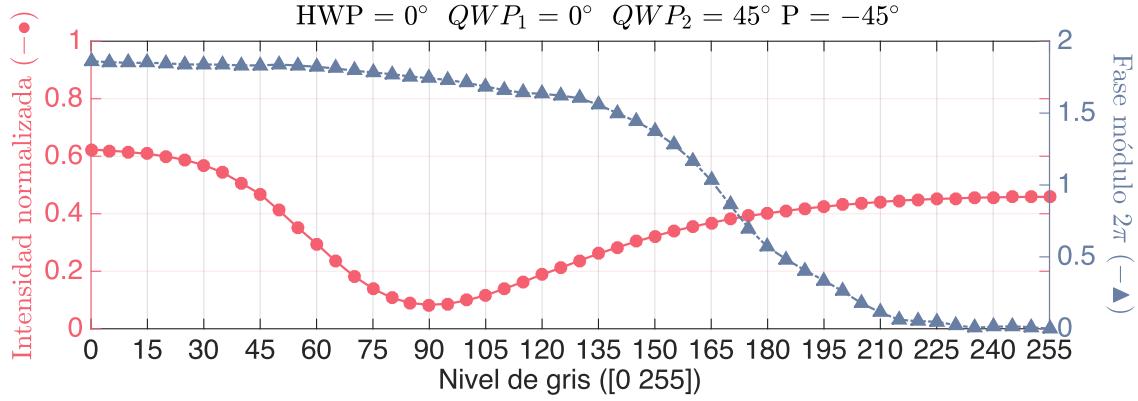


Figura 3.23: Posición de elementos ópticos y curvas de modulación de amplitud y fase del BraKet 6 que es el estado con máximo rango de modulación fase encontrado.

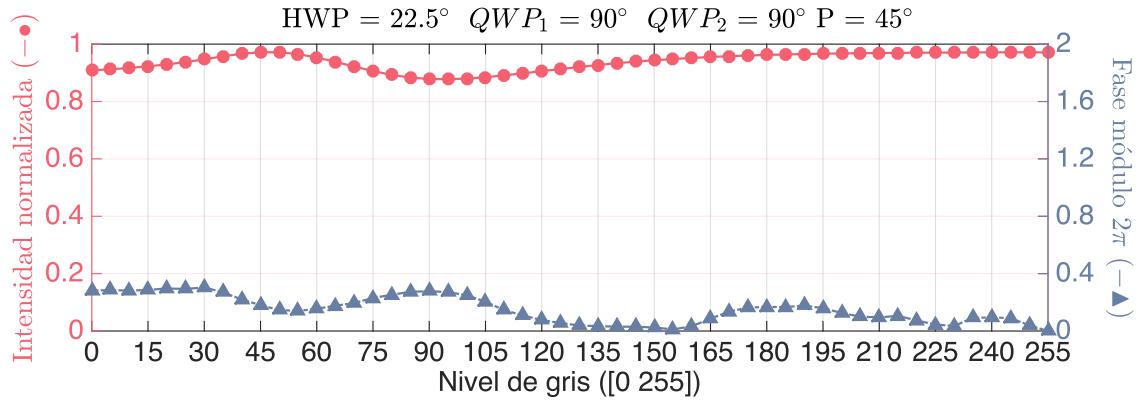


Figura 3.24: Posición de elementos ópticos y curvas de modulación de amplitud y fase del BraKet 43 que es uno de los estados con mínimo rango de modulación amplitud.

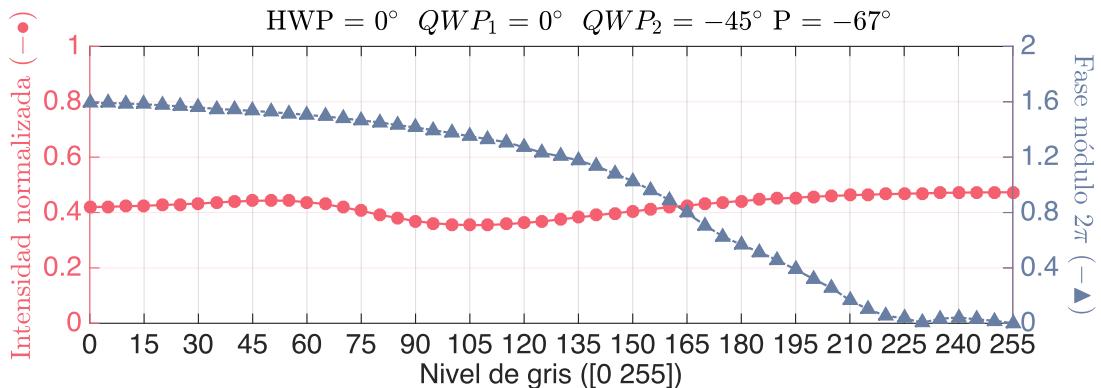


Figura 3.25: Posición de elementos ópticos y curvas de modulación de amplitud y fase del BraKet 10 que se identificó como la configuración óptima para la generación de OVs.

---

CAPÍTULO  
4

# Generación de Vórtices Ópticos

## 4.1 Introducción

La mayoría de las fuentes láser tienen cavidades que no son perfectamente cilíndricas y los campos ópticos que producen o que prevalecen oscilan en modos transversales y longitudinales que son solución de la ecuación de onda en coordenadas cartesianas, dónde las distribuciones de amplitud y fase del campo óptico pueden ser descritas por una combinación de polinomios de Gauss y de Hermite [40]. Esta familia de haces es conocida como Hermite-Gauss y forma una base completa con la cual se puede describir cualquier distribución del campo óptico. Asimismo, estos modos son estructuralmente estables, esto quiere decir que su amplitud y fase relativa permanecen constantes en la medida en que se propagan en el campo lejano. Sin embargo, las soluciones Hermite-Gauss de la ecuación de onda describen solo haces con frentes de onda planos o esféricos, y no dan cuenta de los frentes de onda helicoidales en los cuales la fase varía de forma azimutal; fenómeno macroscópico que está asociado con la presencia del OAM portado por los fotones que componen el haz [36].

Los haces con frente de onda helicoidal también son estructuralmente estables y han sido producidos desde principios de los 90s. Estos se pueden describir analíticamente usando las soluciones a la ecuación de onda paraxial en coordenadas cilíndricas que se presentan

en la Eq. (4.1) [36],

$$u(r, \phi, z) \propto \frac{z_R}{(z_R^2 + z_R^2)} \left[ \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right]^l L_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( \frac{-r^2}{w^2(z)} \right) \\ \times \exp \left( \frac{-ikr^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} \right) \exp(-il\phi) \exp \left[ i(2p + l + 1) \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \right] \quad (4.1)$$

Dónde  $L_p^l$  es un **polinomio de Laguerre generalizado** con índices  $p$  y  $l$ ,  $w(z)$  es el ancho del haz a lo largo de  $z$  y  $z_R$  es el rango de Rayleigh<sup>1</sup>. La primera línea de la Eq. (4.1) denota la amplitud de los haces LG, y la segunda su fase. La combinación de una componente Gaussiana con los polinomios de Laguerre produce distribuciones de intensidad que consisten en anillos concéntricos como los que se muestran en la Fig. 4.1.

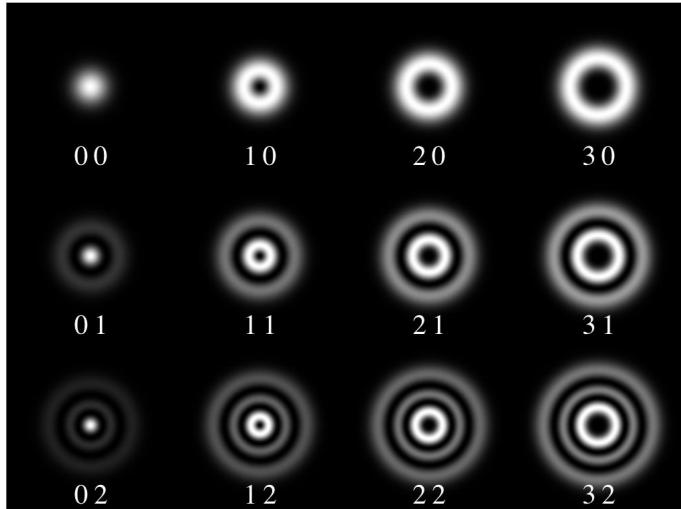


Figura 4.1: Primeros 12 modos LG, el caso 0,0 es equivalente al modo 0,0 de la base Hermite-Gauss. En adelante se considerarán solamente los VOs con un sólo anillo es decir, número  $p = 0$ . Imagen con licencia **CC-BY-SA-3.0** tomada de Wikimedia, autor original Ziofil.

En cuanto a la fase, se puede identificar que además de la fase asociada a frentes de onda esféricos que depende de  $r$ , hay dos términos exponenciales complejos nuevos que tienen como argumento los índices  $l$  y  $p$ . El último exponencial describe las variaciones de la fase a lo largo de la dirección de propagación, y el primero, que hemos resaltado en verde, y depende del número  $l$  solamente, describe los cambios azimutales de la fase. Nos referiremos a la expresión  $\exp(-il\phi)$  como la fase espiral, y además de ser la responsable de las distribuciones de fase helicoidal de los haces LG, está asociada al **OAM** que portan sus fotones. El número  $l$  se conoce como la **carga topológica** de la singularidad en el VO y determina la cantidad de veces que la fase varía de 0 a  $2\pi$  alrededor del eje óptico. La

<sup>1</sup>Posición en  $z$  en la cual se cumple la relación  $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$  siendo  $w_0$  la cintura del spot en el plano focal.

representación de las fases espirales y los perfiles de amplitud de haces LG con diferentes cargas topológicas se ilustran en la Fig. 4.2, y se puede observar que los VOs de mayor carga topológica tienen mayor tamaño y una región oscura más grande.

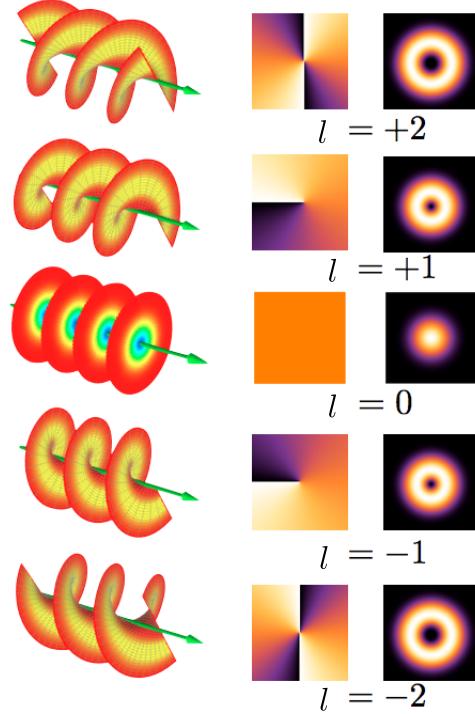


Figura 4.2: Propagación de la fase, y mapas de intensidad y frente de onda de haces LG con carga topológica  $l = -2 : 2$  y número  $p = 0$ . El signo de  $l$  determina tanto el sentido de giro de la fase como el signo del OAM que porta el haz. VOs con mayor  $l$  tienen anillos más grandes. Imágen con licencia **CC-BY-SA-3.0** tomada de Wikimedia, autor original E-karimi.

Como se mencionó en la Sección 2.2, para generar un haz Laguerre-Gauss sólo basta propagar un haz gausiano por una máscara de fase espiral como la de la Fig. 1.1b) para que adquiera las distribuciones de fase de la Fig. 4.2. Haciendo esto, los perfiles de intensidad de la primera línea de la Fig. 4.1 pueden ser observados en un plano imagen como una **función de dispersión de punto (PSF)** si se añade una lente al brazo objeto del montaje de la Fig. 1.1.

En este capítulo presentaremos una plataforma computacional que desarrollamos en el contexto de este proyecto para generar máscaras de fase que al ser proyectadas en un SLM con suficiente rango de modulación de fase, convierten un haz Gausiano en un haz LG.

## 4.2 Plataforma computacional para la generación de máscaras de fase

Con el objetivo de facilitar la creación y manipulación de máscaras de fase se agruparon en una sola aplicación gráfica los algoritmos para generación de máscaras de amplitud y fase

desarrollados durante el transcurso de este proyecto. Esta aplicación ha sido desarrollado en el entorno Matlab y se encuentra en proceso una aplicación de registro de software ante la Dirección Nacional de Derecho de Autor. Una captura de pantalla del panel de control de la aplicación se muestra en la Fig. 4.3, y la generación de máscaras espiral de fase, como la que se ve en el recuadro izquierdo del recorte, se logra haciendo click en el botón “Generate mask” previamente seleccionado un valor de carga topológica en la primera casilla titulada “SpiralMask”.

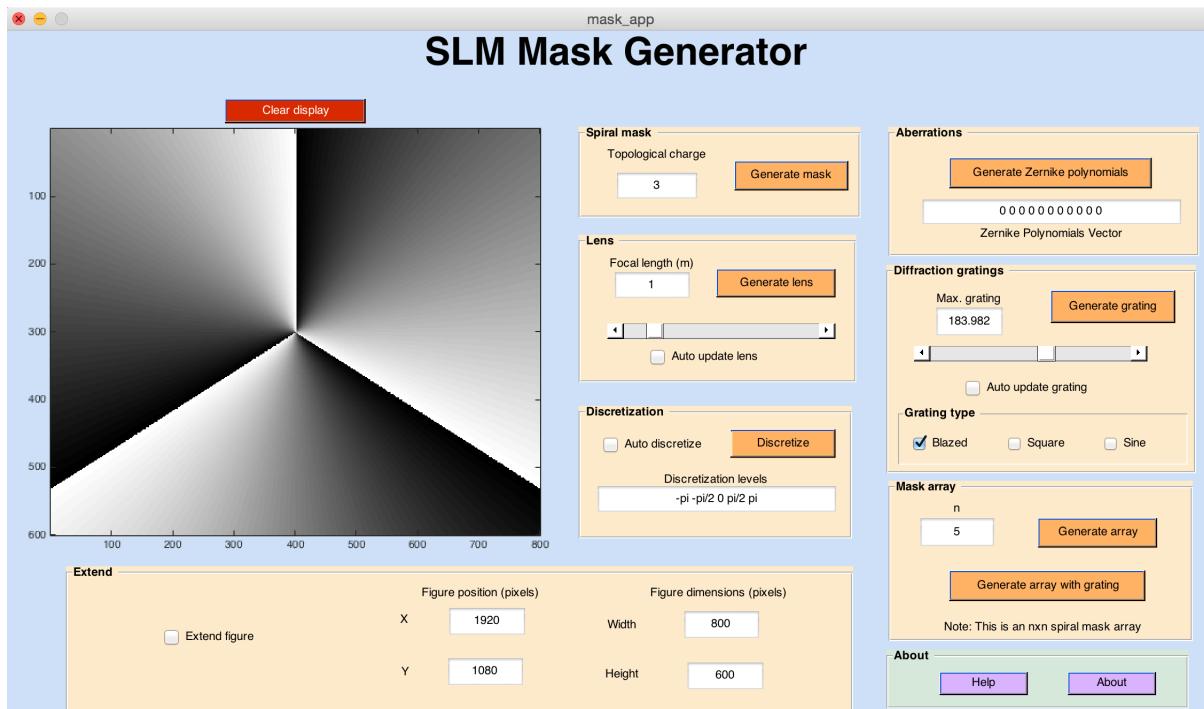


Figura 4.3: Plataforma para la generación de máscaras de fase a ser proyectadas en un SLM. Desarrollada y registrada por el grupo de Óptica Aplicada de la Universidad EAFIT.

Los SLMs que han sido conectados a un computador actúan como una segunda pantalla y para llevar la máscara generada a la región del escritorio correspondiente al LCD del SLM se usa el recuadro titulado “Extend” ubicado en la parte inferior de la aplicación. La máscara espiral de fase de carga  $l = 3$  que ha sido previsualizada en el recuadro izquierdo de la Fig. 4.3 puede ser proyectada o extendida al SLM haciendo click en la casilla titulada “Extend figure” y seleccionando el tamaño y posición en píxeles donde se desea ubicar la imagen.

Además de generar máscaras espiral, la aplicación permite reducir el número de niveles de gris de la modulación para implementar métodos como los de Londoño et al. [21] o Rueda

et al. [24] y simular otros tipos de elementos de fase como: lentes de Fresnel, aberraciones parametrizadas en la base de polinomios de Zernike<sup>2</sup>, rejillas de difracción de tres tipos distintos, e inclusive arreglos de máscaras.

A continuación se muestran los resultados de la propagación de haces Gaussianos a través de máscaras espiral de fase de distinto  $l$  proyectadas en el SLM.

### 4.3 Resultados de los Vórtices Ópticos obtenidos

En la Fig. 4.4 se presentan las distribuciones de intensidad correspondientes a la generación de OVOS con máscaras de fase espiral de carga topológica  $l = 1 : 5$  usando el SLM con la combinación de PSG y PSD del BraKet 10 que tiene las modulaciones de la Fig. 3.25. De inmediato se puede ver que sólo el primero de ellos tiene la topología típica de un VO,

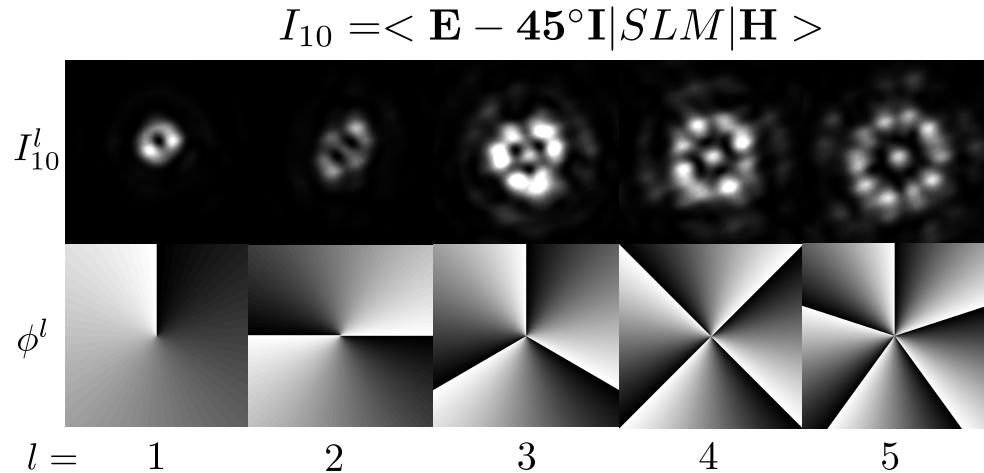


Figura 4.4: Vórtices ópticos de carga topológica  $l = 1 : 5$  obtenidos en la configuración en linea usando los estados PSG y PSD del BraKet 10.

y que a lo largo del anillo varía la intensidad con unas partes más intensas que otras. El hecho de que sólo se pueda producir el VO con  $l = 1$  se debe en parte a las aberraciones ópticas del sistema que destruyen las singularidades de carga alta y en parte al hecho de que no se lograron rangos de modulación de  $2\pi$  con el SLM<sup>3</sup>. En particular se puede notar que la forma de la aberración presente en el VO con carga topológica  $l = 2$  indica que hay una componente importante de astigmatismo, muy similar al comportamiento de las

<sup>2</sup>Ver apéndice C dónde se introducen los polinomios de Zernike y la composición de aberraciones en su base

<sup>3</sup>El estudio de estos fenómenos hace parte de un trabajo de grado de Ingeniería Física en curso de un integrante del Grupo de Óptica Aplicada.

reportadas por Singh et al. [41]. Por otra parte, la no uniformidad de la intensidad en el anillo se debe a que la modulación de amplitud no es constante para todos los niveles de gris.

Ahora bien, cabe notar que estos resultados se han logrado con el estado que tiene la mejor combinación de modulación de amplitud plana y fase de rango amplio. Hemos observado que si se usara el SLM con estados de polarización diferentes no se obtendría ni siquiera el VO de  $l = 1$ . Como ejemplo, en la Fig. 4.5 se presentan las distribuciones de intensidad equivalente cuando se usan los estados de polarización del BraKet 6. En

$$I_6^l = \langle -45^\circ | SLM | \mathbf{H} \rangle$$

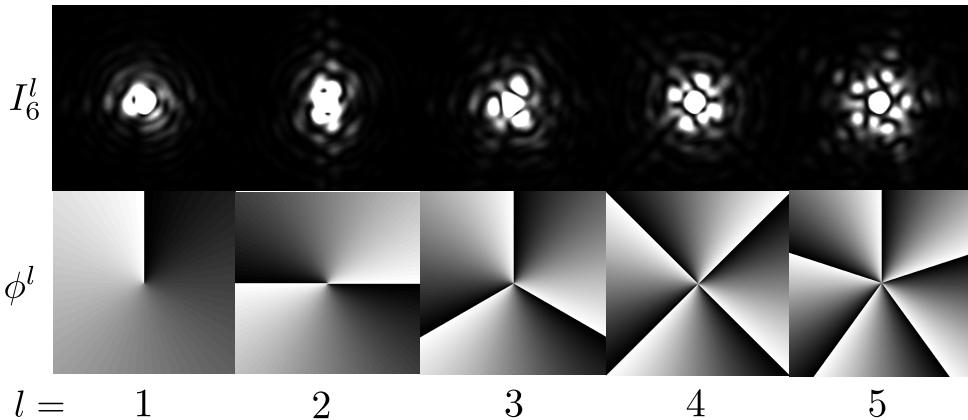


Figura 4.5: Vórtices ópticos de carga topológica  $l = 1..,5$  obtenidos en la configuración en eje usando los estados PSG y PSD del BraKet 6.

este caso, la distribución de la intensidad se asemeja a la PSF de un sistema con grandes aberraciones y predomina la intensidad de la luz que no fue difractada por la máscara de fase.

Sin embargo, hay una forma de mejorar la calidad de la modulación de ambos estados que consiste en agregar una red de difracción a la máscara espiral. A continuación se describe este método y se presentan los VOs generados al utilizar esta modificación.

### 4.3.1 Vórtices Ópticos obtenidos usando máscaras tipo tenedor

En la literatura, los VOs generados con máscaras espiral se conocen como “en eje” [14]. Esto quiere decir que toda la luz que pasa por el SLM se observa en el plano imagen. Esto es positivo si el SLM tiene un muy buen rango de modulación, si es importante tener una buena cantidad de luz o si el diseño del instrumento que genera VOs no permite sacar el haz de eje. Sin embargo, en la práctica rara vez es usada esta configuración pues sacar

los VOs de eje usando una red de difracción de tipo tenedor mejora sustancialmente la calidad óptica al reducir la interferencia con la luz no difractada[14]. Según Leach et al. [22], igual que con elementos difractivos convencionales, las imperfecciones en la linealidad de la fase y otros fenómenos que disminuyen la eficiencia (como: efectos de difracción en los saltos de fase, el área no efectiva de las celdas o la periodicidad de los píxeles), producen un número significativo de ordenes de difracción en la luz que atraviesa el SLM. Si estos ordenes se superponen, como es el caso del haz observado en un montaje *en eje* resulta una versión deteriorada del haz esperado. Esto puede explicar los resultados presentados en las Fig. 4.4 y en la Fig. 4.5. Es por esto que autores clásicos de los inicios del estudio de VOs como Bazhenov et al. [2], Leach et al. [22], y Dennis *et al.* [4] han propuesto usar máscaras de fase conocidas como *máscaras tenedor* que se ilustra en la Fig. 4.6(c) y son rejillas de difracción con dislocaciones en su centro. Las máscaras del tipo tenedor resultan de la combinación de una máscara espiral y un plano inclinado o rejilla de difracción y el efecto que tienen sobre un haz Gaussiano de entrada es el de producir VOs de carga topológica  $m \times l$  difractados a un ángulo fuera de eje que depende del órdenes de difracción  $m$  donde se observe, de la longitud de onda y de la distancia.

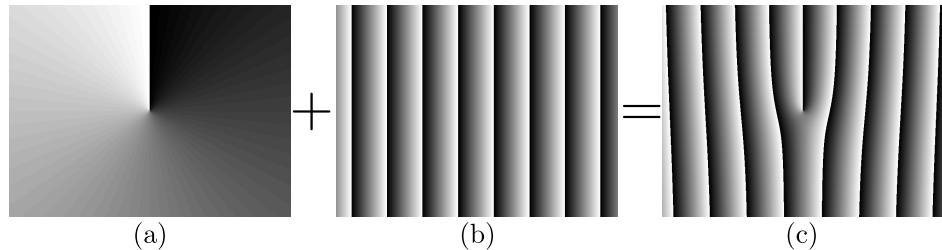


Figura 4.6: La suma de una máscara espiral de fase (a) con una máscara de una rejilla de difracción (b) produce una máscara del tipo tenedor (c) con una dislocación del mismo valor que la carga topológica de la espiral original.

En un principio, una rejilla de difracción como la de la Fig. 4.6(b) emula una cuña delgada y es capaz de difractar toda la energía incidente en el primer orden[4]. Sin embargo, en la práctica este nunca es el caso y una fracción de la energía queda en los otros ordenes, esto implica una menor eficiencia y la necesidad de filtrar o seleccionar sólo el orden de difracción deseado que porta el VO a ser detectado. Aunque hay un gran incremento en la calidad de los VOs generados con rejillas de este tipo algunos posibles inconvenientes son: la necesidad de trabajar con luz monocromática para evitar aberración cromática [14], y las limitantes geométricas que implica el tener que sacar el haz de eje y filtrar las otras componentes.

En nuestro caso, usamos el montaje fuera de eje para mejorar la calidad de los VOs

obtenidos. Los resultados de VOs generados con rejillas del tipo tenedor para las configuraciones de polarización de los BraKets 10 y 6 se presentan en la Fig. 4.7. El montaje con el cual fueron generados es un sistema formador de imagen del tipo 4F que se ilustra en la Fig. 5.10 y se discute en el siguiente capítulo en la Sección 5.4.2.1.

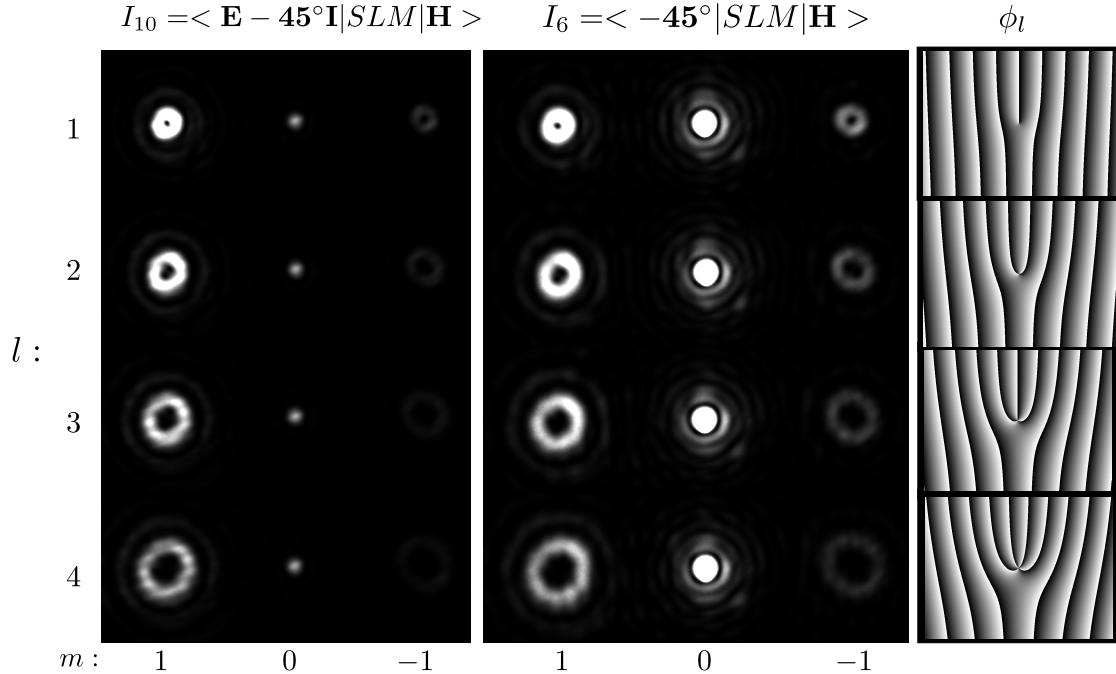


Figura 4.7: Comparación de Vórtices ópticos de carga topológica  $l = 1..,4$  obtenidos en la configuración fuera de eje al usar una máscara tipo tenedor cuando se ubican los elementos ópticos que generan los estados PSG y PSD de los BraKets 10 y 6.

Se observa inmediatamente que con las máscaras tenedor se forman VOs con estructuras aceptables en ambas configuraciones, y para todos los valores de carga topológica. Además, se confirma que el BraKet 10 es una combinación de estados de polarización con muy alta eficiencia de difracción ya que la mayor parte de la luz es difractada en el orden 1. En cambio, los VOs en el orden 1 obtenidos en la configuración 6 tienen una intensidad que es menor a la de la luz no difractada que se concentra en el orden 0. Intensidad que es típica de un sistema formador de imagen sin máscaras. Ambos estados comparten la característica de tener altos rangos de modulación de fase ( $> 1,5$ ) pero sólo con el que tiene buena modulación de amplitud es posible lograr VOs en eje.

Una característica de los VOs de cargas mayor a 1 es que tienden a separarse en varios VOs de carga 1 ante la presencia de aberraciones. Esto se puede observar con claridad en los VOs de carga  $l = 2$  de las Fig. 4.4 y 4.7 dónde se hace evidente que hay al menos una

componente de astigmatismo.

En la siguiente parte de esta disertación se presenta un método de caracterización y corrección de aberraciones con el cual es posible mejorar la calidad de VOs producidos en sistemas formadores de imagen.

## Bibliografía

- [1] A. N. Alekseev, K. N. Alekseev, O. S. Borodavka, A. V. Volyar, y Yu A. Fridman. Conversion of hermite-gaussian and laguerre-gaussian beams in an astigmatic optical system. 1. experiment. *Technical Physics Letters*, 24(9):694–696, 1998. doi:10.1134/1.1262248.
- [2] V Yu Bazhenov, MV Vasnetsov, y MS Soskin. Laser beams with screw dislocations in their wavefronts. *Jetp Lett*, 52(8):429–431, 1990.
- [3] Alicia V. Carpentier, Humberto Michinel, Jose Salgueiro, y David Olivieri. Making optical vortices with computer-generated holograms. *American Journal of Physics*, 76(10):916, 2008. ISSN 00029505. doi:10.1119/1.2955792.
- [4] Patricia Cladis y Peter Palffy-Muhoray. *Dynamics and Defects in Liquid Crystals: A Festschrift in Honor of Alfred Saupe*. CRC Press, Amsterdam, 1998. ISBN 9789056996499.
- [5] Edward Collett. *Field Guide to Polarization*. SPIE Press, 2005. ISBN 9780819458681.
- [6] Julio A. Coy, Diego F. Grosz, y Oscar Eduardo Martí. Characterization of a liquid crystal television as a programmable spatial light modulator. *Optical Engineering*, 35(1):15–19, 1996. doi:10.1117/1.600886.
- [7] Jeffrey A. Davis, Don M. Cottrell, Brandon C. Schoonover, Johnathan B. Cushing, Jorge Albero, y Ignacio Moreno. Vortex sensing analysis of radially and pseudo-radially polarized beams. *Optical Engineering*, 52(5):050502–050502, 2013. doi:10.1117/1.OE.52.5.050502.
- [8] Jeffrey A. Davis, Dylan E. McNamara, Don M. Cottrell, y Tomio Sonehara. Two-dimensional polarization encoding with a phase-only liquid-crystal spatial light modulator. *Applied Optics*, 39(10):1549–1554, 2000. doi:10.1364/AO.39.001549.
- [9] Jeffrey A. Davis, Ignacio Moreno, Philbert Tsai, y Kevin G. D'Nelly. Simple technique for determining the extraordinary axis direction for twisted-nematic liquid crystal spatial light modulators. *Optical Engineering*, 38(5):929–932, 1999. doi:10.1117/1.602052.
- [10] Jeffrey A. Davis, Maria J. Yzuel, Juan Campos, Ignacio Moreno, Andres Marquez, y Josep Nicolas. Review of operating modes for twisted nematic liquid crystal displays

- for applications in optical image processing. En *Optical Science and Technology, SPIE's 48th Annual Meeting*, págs. 120–131. International Society for Optics and Photonics, 2003. doi:10.1117/12.510257.
- [11] Kapil Dev y Anand Asundi. Mueller–stokes polarimetric characterization of transmissive liquid crystal spatial light modulator. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(4):599–607, 2012. ISSN 01438166. doi:10.1016/j.optlaseng.2011.10.004.
  - [12] V. Durán, J. Lancis, E. Tajahuerce, y M. Fernández-Alonso. Phase-only modulation with a twisted nematic liquid crystal display by means of equi-azimuth polarization states. *Optics express*, 14(12):5607–5616, 2006. doi:10.1364/OE.14.005607.
  - [13] Vicente Duran, Jess Lancis, Enrique Tajahuerce, y Vicent Climent. Poincaré sphere method for optimizing the phase modulation response of a twisted nematic liquid crystal display. *Journal of Display Technology*, 3(1):9–14, 2007. ISSN 1551-319X. doi:10.1109/JDT.2006.890710.
  - [14] Georges Friedel. The mesomorphic states of matter. *Ann. phys.*, 18:273–474, 1922. URL [http://www.personal.southampton.ac.uk/tim/crystals\\_that\\_flow/georges\\_friedel1922.pdf](http://www.personal.southampton.ac.uk/tim/crystals_that_flow/georges_friedel1922.pdf).
  - [15] P. G. de Gennes y J. Prost. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford University Press, Oxford, 2 edition edición., 1995. ISBN 9780198517856.
  - [16] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 4 edition edición., 2001. ISBN 9780805385663.
  - [17] Claudio Iemmi, Ignacio Moreno, Jeffrey A. Davis, Juan Campos, y María J. Yzuel. Quantitative prediction of the modulation behavior of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model. *Optical Engineering*, 40(11):2558–2564, 2001. doi:10.1117/1.1412228.
  - [18] Chen Jun, Kuang Deng-Feng, Gui Min, y Fang Zhi-Liang. Generation of optical vortex using a spiral phase plate fabricated in quartz by direct laser writing and inductively coupled plasma etching. *Chinese Physics Letters*, 26(1):014202, 2009. doi:10.1088/0256-307X/26/1/014202.
  - [19] Hyun Kim y Yeon H. Lee. Unique measurement of the parameters of a twisted-nematic liquid-crystal display. *Applied optics*, 44(9):1642–1649, 2005. doi:10.1364/AO.44.001642.

- [20] James C. Kirsch, Don A. Gregory, Melissa W. Thie, y Brian K. Jones. Modulation characteristics of the epson liquid crystal television. *Optical Engineering*, 31(5):963–970, 1992. doi:10.1117/12.56170.
- [21] Naim Konforti, S.-T. Wu, y E. Marom. Phase-only modulation with twisted nematic liquid-crystal spatial light modulators. *Optics letters*, 13(3):251–253, 1988. doi:10.1364/OL.13.000251.
- [22] Jonathan Leach, Eric Yao, y Miles J Padgett. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam. 6:71–71. ISSN 1367-2630. doi:10.1088/1367-2630/6/1/071.
- [23] Jan Liesener y Wolfgang Osten. Wavefront optimization using piston micro mirror arrays. En Professor Dr Wolfgang Osten, ed., *Fringe 2005*, págs. 150–157. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-26037-0, 978-3-540-29303-3. URL [http://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-29303-5\\_17](http://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-29303-5_17).
- [24] Meng-Han Liu, Wen-Chuan Kuo, Hsiang-Chun Wei, Chien-Chung Tsai, Chih-Jen Yu, Bau-Jy Liang, y Chien Chou. Cell parameter measurement of a twisted nematic liquid crystal device using interferometric polarimeter under normal incidence. *Optics express*, 18(9):8759–8766, 2010. doi:10.1364/OE.18.008759.
- [25] Baiheng Ma, Fei Peng, Mingwu Kang, y Jiawu Zhou. Optimize the modulation response of twisted-nematic liquid crystal displays as pure phase spatial light modulators. pág. 929606. 2014. doi:10.1117/12.2069918.
- [26] Baiheng Ma, Baoli Yao, Ze Li, y Tong Ye. Improvement of the performance of the twisted-nematic liquid-crystal display as a phase modulator. *Applied optics*, 50(17):2588–2593, 2011. doi:10.1364/AO.50.002588.
- [27] Baiheng Ma, Baoli Yao, Tong Ye, y Ming Lei. Prediction of optical modulation properties of twisted-nematic liquid-crystal display by improved measurement of jones matrix. *Journal of Applied Physics*, 107(7):073107, 2010. ISSN 00218979. doi:10.1063/1.3361238.
- [28] Mohammad Sultan Mahmud, Izabela Naydenova, y Vincent Toal. Implementation of phase-only modulation utilizing a twisted nematic liquid crystal spatial light modulator. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 10(8):085007, 2008. ISSN 1464-4258, 1741-3567. doi:10.1088/1464-4258/10/8/085007.

- [29] Andrés Márquez, Sergi Gallego, David Méndez, Mariela L. Álvarez, Elena Fernández, Manuel Ortúño, Augusto Beléndez, y Inmaculada Pascual. &lt;title&gt;characterization and optimization of liquid crystal displays for data storage applications&lt;/title&gt;, págs. 658715–658715–12. 2007. doi:10.1117/12.722647.
- [30] Andres Marquez, Ignacio Moreno, Jeffrey A. Davis, y Claudio Iemmi. Characterization of edge effects in twisted nematic liquid crystal displays. *Optical Engineering*, 39(12):3301–3307, 2000.
- [14] C. Maurer, A. Jesacher, S. Bernet, y M. Ritsch-Marte. What spatial light modulators can do for optical microscopy. 5(1):81–101. ISSN 18638880. doi:10.1002/lpor. 200900047.
- [32] I. Moreno, P. Velaśquez, C. R. Fernández-Pousa, M. M. Saánchez-López, y F. Mateos. Jones matrix method for predicting and optimizing the optical modulation properties of a liquid-crystal display. *Journal of Applied Physics*, 94(6):3697, 2003. ISSN 00218979. doi:10.1063/1.1601688.
- [33] Ignacio Moreno, Jeffrey A. Davis, Kevin G. DÑelly, y David B. Allison. Transmission and phase measurement for polarization eigenvectors in twisted-nematic liquid crystal spatial light modulators. *Optical Engineering*, 37(11):3048–3052, 1998. doi:10.1117/1.601976.
- [34] Ignacio Moreno, Claudio Iemmi, Juan Campos, y María J. Yzuel. Jones matrix treatment for optical fourier processors with structured polarization. *Optics express*, 19(5):4583–4594, 2011. doi:10.1364/OE.19.004583.
- [35] Ignacio Moreno, María J. Yzuel, Juan Campos, y Asticio Vargas. Jones matrix treatment for polarization fourier optics. *Journal of Modern Optics*, 51(14):2031–2038, 2004. ISSN 0950-0340, 1362-3044. doi:10.1080/09500340408232511.
- [36] M. J. Padgett y L. Allen. The angular momentum of light: optical spanners and the rotational frequency shift. *Optical and quantum electronics*, 31(1):1–12, 1999. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1006911428303>.
- [37] J. L. Pezzaniti y R. A. Chipman. Phase-only modulation of a twisted nematic liquid-crystal TV by use of the eigenpolarization states. *Optics letters*, 18(18):1567–1569, 1993. doi:10.1364/OL.18.001567.

- [38] M. B. Roopashree, Akondi Vyas, Ravinder Kumar Banyal, y B. Raghavendra Prasad. Phase characteristics of reflecting and transmitting type twisted nematic spatial light modulators. *arXiv preprint arXiv:0911.0817*, 2009.
- [39] Bahaa EA Saleh y Kanghua Lu. Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator. *Optical Engineering*, 29(3):240–246, 1990. URL <http://opticalengineering.spiedigitallibrary.org/article.aspx?articleid=1066772>.
- [40] Anthony E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, Calif, new edition edition ed<sup>ón</sup>., 1986. ISBN 9780935702118.
- [41] Rakesh Kumar Singh, P. Senthilkumaran, y Kehar Singh. Focusing of linearly-, and circularly polarized gaussian background vortex beams by a high numerical aperture system afflicted with third-order astigmatism. *Optics Communications*, 281(24):5939–5948, 2008. ISSN 00304018. doi:10.1016/j.optcom.2008.09.036.
- [42] Colin Soutar y Kanghua Lu. Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell. *Optical engineering*, 33(8):2704–2712, 1994. doi: 10.1117/12.173544.
- [43] Nestor Uribe-Patarroyo. *Optical Space Applications of Liquid Crystals: Polarimetry and Photon Orbital Angular Momentum in Remote Sensing*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Laboratorio de Instrumentación Espacial Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, 2011.
- [44] Lei Wu, S. Dooley, E.A. Watson, Paul F. McManamon, y Huikai Xie. A tip-tilt-piston micromirror array for optical phased array applications. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 19(6):1450–1461, 2010. ISSN 1057-7157. doi:10.1109/JMEMS.2010.2076777.
- [45] Amnon Yariv y Pochi Yeh. *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J., 2002. ISBN 9780471430810.
- [46] Pochi Yeh y Gu Claire. Optics of liquid crystal displays. 1999.
- [47] Chih-Jen Yu, Yao-Teng Tseng, Kuei-Chu Hsu, y Chien Chou. Full-field characterization of a twisted nematic liquid-crystal device using equivalence theorem of a unitary optical system. *Applied optics*, 51(2):238–244, 2012. doi:10.1364/AO.51.000238.

- [48] Zheng Zhang, Guowen Lu, y T. S. Francis. Simple method for measuring phase modulation in liquid crystal televisions. *Optical Engineering*, 33(9):3018–3022, 1994. doi:10.1117/12.177518.
- [49] Yun Zhisheng, Li Yulin, Liu Jifang, y He Zhengquan. Measurement of the phase modulation of liquid-crystal televisions by a noninterferometric technique. *Applied optics*, 37(14):3069–3075, 1998. doi:10.1364/AO.37.003069.

---

## **Parte II**

# **Caracterización y corrección de aberraciones de VO**

# Caracterización de aberraciones en Vórtices Ópticos

## 5.1 Introducción

En capítulos anteriores ha quedado claro que para producir **VOs** es necesario contar con un sistema óptico en el cual sea posible manipular con precisión la fase de un frente de onda. Asimismo, se presentó un montaje experimental en el cual logramos generar VOs a partir del uso de dispositivos difractivos conocidos como SLMs. No obstante, los VOs obtenidos distan de ser de suficiente calidad como para ser usados en aplicaciones científicas o tecnológicas.

Esta segunda parte de la tesis abarca el trabajo que se realizó para mejorar la calidad óptica de nuestro montaje con el fin de mejorar los VO que se obtuvieron en el capítulo anterior.

### 5.1.1 Aberraciones ópticas

Los sistemas ópticos formadores de imagen que se encuentran en aplicaciones de la vida real están sujetos a aberraciones de fase que limitan su resolución. Es por ello que en la industria y en laboratorios se hace un gran esfuerzo para detectar aberraciones y corregirlas vía Óptica Adaptativa (**AO**) [12] o por medio de técnicas digitales posteriores a la adquisición [11].

Las aberraciones ópticas en un sistema formador de imagen pueden proceder de fuentes intrínsecas tales como imperfecciones en el diseño, los materiales, la manufactura o la alineación de los elementos que los componen. O de fuentes extrínsecas como variaciones en el

índice de refracción de muestras microscópicas y turbulencia atmosférica en imágenes capturadas usando telescopios. Adicionalmente, y siguiendo con el tema del capítulo anterior, los SLMs de transmisión basados en pantallas de LC introducen otras fuentes de aberraciones. En primera medida, los LCDs son dispositivos discretos en dos de los sentidos de la palabra; por un lado, son discretos espacialmente y las señales de control son asignadas a subdivisiones del cristal de tamaño finito conocidas como píxeles. El arreglo rectangular de todos los píxeles genera efectos de difracción similares a los de rejillas verticales y horizontales combinadas. Esto quiere decir que el SLM separa los órdenes de difracción de la luz que pasa a través de él. Asimismo, el hecho de ser una cuadrícula discreta hace que el modulador no pueda generar distribuciones de fase en regiones infinitamente pequeñas como sería deseado alrededor de una singularidad óptica. Como ejemplo, en la Fig. 5.1 a) se muestra una imagen de la región donde resultaría una singularidad óptica en una máscara de fase espiral enviada al SLM. Como se puede ver, la máscara de fase discreta resulta muy distinta a la máscara ideal presentada en la figura 1.1b), y por lo tanto introduce deformaciones en el haz Laguerre-Gauss que resulta a la salida del SLM.

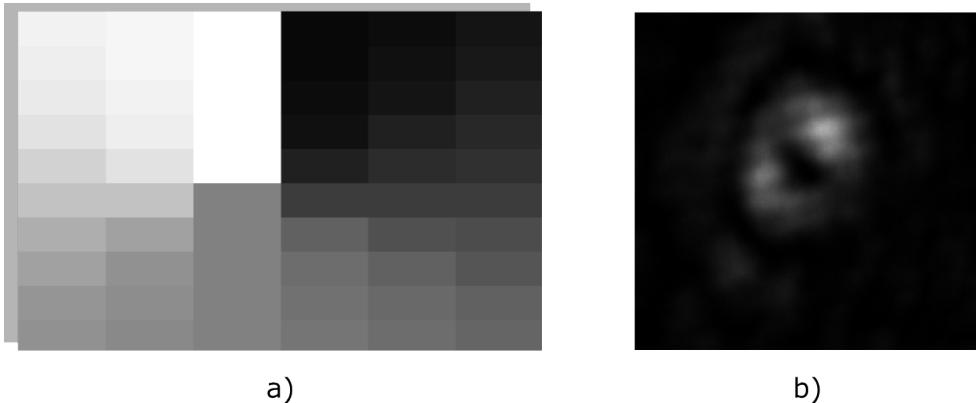


Figura 5.1: a) Magnificación de una máscara de fase espiral típica proyectada al SLM. b) Imagen de un VO de poca calidad producido con un SLM de transmisión modelo Holoeye LC2002.

Por otra parte, el SLM es discreto en la medida que sólo puede asignar niveles de voltaje discretos (0-255 divisiones de 5V) a cada una de las celdas. Este fenómeno también es observable en la Fig. 5.1a) y puede introducir efectos indeseados. Más aún, si el modulador no llega a una modulación de sólo fase, o si tiene una modulación que no llega al rango de  $2\pi$  radianes. Todas las posibles fuentes de error mencionadas anteriormente se combinan para generar haces Laguerre-Gauss de poca calidad como el que se muestra en la Fig. 5.1 b).

Así tengan orígenes distintos, las fuentes de distorsión en la fase del frente de onda pueden ser identificadas y corregidas como una sola aberración usando métodos de reconstrucción de fase. A continuación presentamos un novedoso método de reconstrucción de fase no interferométrico por medio del cual logramos identificar las aberraciones de nuestro montaje óptico y corregirlas para generar VOs de calidad.

### 5.1.2 Las técnicas de reconstrucción de fase no interferométricas

La presencia de aberraciones extrínsecas en imágenes adquiridas por telescopios terrestres, y la dificultad de modificar estos sistemas para incluir brazos de referencia han sido las motivaciones principales para el desarrollo de varias **técnicas de Sensado de Fase no Interferométricas (NI-WFS)**. La técnica de Diversidad de Fases o **Phase Diversity (PD)** pertenece a una familia de NI-WFS conocida como de Reconstrucción de Fase o phase retrieval. A diferencia de técnicas directas que requieren de óptica y sensores adicionales como los sistemas que usan sensores Shack-Hartman, las implementaciones del PD consisten en rutinas iterativas por medio de las cuales se logra determinar la fase de una función compleja a partir de medidas de su magnitud usando información a priori de la función o de su transformada [6]. Una posible clasificación de las implementaciones del PD, se da en la forma en la cual se lleva a cabo el proceso iterativo. Por un parte, están los algoritmos en los cuales la fase se encuentra luego de simular múltiples propagaciones, y por el otro las aplicaciones en las cuales se encuentra la fase por medio de algoritmos de minimización basados en la búsqueda del gradiente o **Gradient Search Algorithms (GSAs)** [5]. En términos generales, el tipo de implementación a usar depende de la fuente a analizar; las aberraciones presentes en sistemas que hacen imagen de fuentes distantes (como las estrellas) son caracterizadas con implementaciones de PD que se basan en múltiples propagaciones siguiendo esquemas como el método de **Gerchberg-Saxton (GS)** [17]. Por otra parte, las implementaciones basadas en GSAs son usadas para mejorar la resolución de sistemas que hacen imagen de fuentes incoherentes y dispersas como por ejemplo la superficie del sol [1]. La técnica de PD ha sido usada exitosamente en el contexto de sistemas de AO para incrementar la resolución de sistemas ópticos tales como el Telescopio Espacial Hubble [6], y en post procesamiento de imágenes de astronomía en las cuales la resolución es crítica. Dos casos muy relevantes son el estudio de manchas solares y la detección de planetas extrasolares [11, 13, 18, 19]. Así como con otras técnicas desarrolladas para aplicaciones en astronomía, los métodos de reconstrucción de fase como el GS y el PD han migrado a aplicaciones en el laboratorio, y más específicamente a aplicaciones en microscopía de fase [2, 8, 10]. Tal es el caso del trabajo de Jesacher *et al.* [8] que imple-

mentó una versión del método GS mejorada con VOs para la optimización de sistemas de generación de pinzas ópticas en un montaje de microscopía de contraste de fase espiral. Ellos mostraron que el uso de VOs a la entrada del sistema óptico era más adecuado que los haces con fase plana para la caracterización de aberraciones porque las singulardades ópticas que portan tienen mayor sensibilidad a la presencia de aberraciones.

En este capítulo se presenta un método novedoso de reconstrucción de fase del tipo PD, que se encuentra en el proceso de publicación en la revista Optics Letters. Éste método fue desarrollado por el Grupo de Óptica Aplicada en colaboración con el investigador Nestor Uribe Patarroyo de la Universidad de Medicina de Harvard y es una variación del PD tradicional basada en GSAs, en la cual se asume iluminación coherente a la entrada. Como en el método de Jesacher *et al.* [8], éste también es mejorado con VOs y la introducción de una nuevo funcional permite determinar con gran exactitud las aberraciones de sistemas ópticos formadores de imagen como es el caso de sistemas 4F. Específicamente, con este método logramos corregir las aberraciones ópticas de un sistema formador de imagen en el cual se introducen las diversidades con el SLM ubicado en un plano de Fourier. La técnica que propusimos consiste en tomar imágenes con multiples diversidades de fase introducidas por el SLM, y minimizar un funcional para obtener las aberraciones del sistema óptico. Creemos que una vez caracterizado, un sistema óptico formador de imagen simple como el que presentamos, puede ser usado como una herramienta para caracterizar aberraciones en sistemas formadores de imagen generales; ya que al ser ubicado a la entrada de estos permite introducir máscaras de diversidad de fase con efectos conocidos con las cuales se puede ejecutar de nuevo el proceso de caracterización sobre el sistema combinado. Se espera que por medio de un convenio de colaboración con el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial de España (INTA) se pueda probar esta conjeta en sistemas ópticos complejos para uso en astrofísica.

A continuación, se presenta el marco teórico que soporta la implementación del método. En la sección 5.3 se presenta el montaje óptico y se describe el algoritmo general para la reconstrucción de fase. Luego, en la sección 5.4 se presentan los resultados de simulaciones y experimentos que permiten corroborar la efectividad del método para la corrección de aberraciones.

## 5.2 Marco Teórico

Los métodos de reconstrucción de fase no interferométricos dependen de la medida de la intensidad del campo óptico que se propaga a través de un sistema formador de imagen. Si el sistema formador de imagen se caracteriza por su **función de dispersión de punto**

(PSF), la intensidad a la salida puede ser descrita como una convolución entre la imagen a la entrada y la PSF tal y como se ilustra en la Eq. (5.1).

$$d(\vec{x}) = d_{obj}(\vec{x}) \otimes s(\vec{x}). \quad (5.1)$$

En este caso hemos usado la notación de Paxman *et al.* [16] donde la PSF se representa como  $s$ ,  $d_{obj}$  es la intensidad del objeto a la entrada y  $d$  es la intensidad de la imagen a la salida, todas ellas evaluadas en el espacio de coordenadas naturales ( $\vec{x}$ ). El teorema de convolución permite representar la operación de la Eq. (5.1) como un simple producto punto entre las **Transformadas de Fourier** (FTs) de la intensidad a la entrada y la PSF como se muestra a continuación.

$$D(\vec{u}) = D_{obj}(\vec{u})S(\vec{u}). \quad (5.2)$$

En la Eq. 5.2 el término  $S$  denota la **Función de Transferencia Óptica** (OTF) del sistema formador de imagen, y así como con los otros términos, letras mayúscula denotan una transformada de Fourier sobre la función con notación minúscula.

$$S(\vec{u}) = \mathcal{F}\{s(\vec{x})\}, \quad D(\vec{u}) = \mathcal{F}\{d(\vec{x})\}, \quad D_{obj}(\vec{u}) = \mathcal{F}\{d_{obj}(\vec{x})\}.$$

Hasta el momento hemos trabajado únicamente con funciones reales que representan la intensidad del campo punto a punto en los planos objeto e imagen de un sistema óptico. Este tipo de notación es de gran utilidad para las aplicaciones clásicas del método PD que hacen imagen de objetos extendidos, y con fuentes de iluminación no coherentes. Sin embargo, en sistemas ópticos con fuentes de iluminación coherentes, como el que se presentó en la primera parte de este documento para la generación de VO, tenemos la ventaja de trabajar con campos complejos que proporcionan información de amplitud y fase. Para adaptar el método clásico de PD a una versión de iluminación coherente es necesario trabajar con campos complejos. Es bien sabido que la OTF y la PSF forman un par de Fourier en el dominio no coherente, y cada una de ellas tiene un equivalente en el dominio de la luz coherente. De un lado, la contraparte coherente de la PSF es la Función de Respuesta al Impulso en amplitud o PSF de amplitud y de aquí en adelante se denotará como  $h(\vec{x})$ . La PSF es el módulo cuadrado de la **PSF de amplitud** (APSF),

$$s(\vec{x}) = |h(\vec{x})|^2. \quad (5.3)$$

Y así como la PSF relaciona intensidades de campo a la entrada y salida de un sistema por medio de una convolución, la APSF relaciona los campos ópticos complejos,

$$u(\vec{x}) = u_{obj}(\vec{x}) \otimes h(\vec{x}). \quad (5.4)$$

Por otra parte, el equivalente coherente de la OTF es la Función de Transferencia Óptica de amplitud, o **Pupila Generalizada** (GP) del sistema y por ser el par de Fourier de la APSF se cumple la Eq. (5.5).

$$H(\vec{u}) = \mathcal{F}\{h(\vec{x})\} = A(\vec{u})e^{i\phi(\vec{u})} \quad (5.5)$$

En la Eq. (5.5) se observa que fuera de ser la FT de la APSF, la GP es una función compleja que describe tanto la forma y tramitancia de la apertura  $A(\vec{u})$  como la fase introducida por sistema óptico  $\phi(\vec{u})$  en un plano de Fourier. La fase  $\phi$  generalmente es sinónimo de las aberraciones del sistema y se describe matemáticamente de forma parametrizada como una combinación de polinomios de Zernike <sup>1</sup> [16]. Finalmente, la OTF de un sistema formador de imagen con iluminación coherente se puede obtener mediante la autocorrelación normalizada de la GP como se muestra a continuación,

$$S(\vec{u}) = \frac{H(\vec{u}) * H(\vec{u})}{|H(\vec{u})|^2}. \quad (5.6)$$

Todo lo mencionado anteriormente ha sido ingeniosamente condensado por Uribe-Patarroyo [43] en una versión de la Fig. 5.2. Ahora bien, las expresiones (5.3) y (5.6) nos permiten llevar sistemas ópticos descritos por campos complejos a la notación tradicional del PD. A continuación se describen los aspectos generales de la reconstrucción de fase con PD, en la sección 5.2.2 se describirán las modificaciones que hacemos al PD tradicional para aprovechar el tipo de iluminación no coherente, y en la sección 5.2.3 se explica el efecto de introducir máscaras espiral como diversidades de fase.

### 5.2.1 Phase Diversity tradicional

Si la GP del sistema es modificada por un cambio conocido en la fase o diversidad de fase de la forma,

$$H_\Delta = e^{\phi_1(\vec{u})},$$

---

<sup>1</sup>El anexo ?? hace referencia a los polinomios de Zernike y a la composición de aberraciones en esta base.

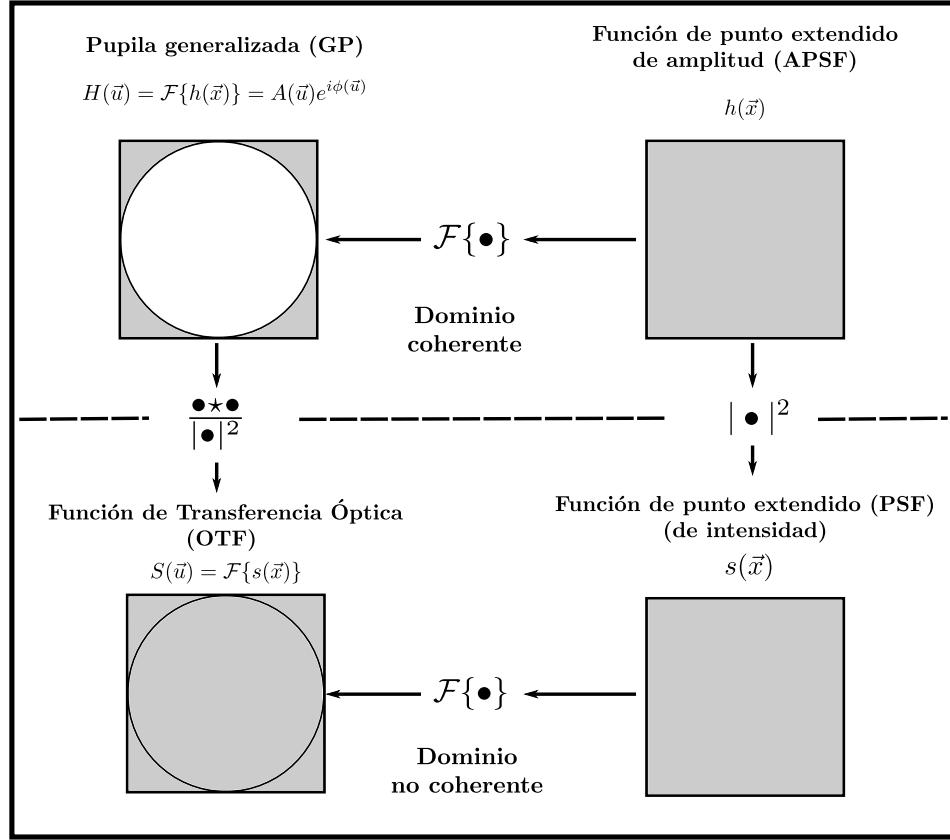


Figura 5.2: Relaciones entre funciones de transferencia ópticas y sus transformadas de Fourier en los dominios coherente y no coherente. Inspirado en una versión similar de Uribe-Patarroyo [43].

obtenemos una nueva GP que se puede describir como el producto entre la GP original ( $H_0$ ) y la GP con el cambio o diversidad de fase ( $H_\Delta$ ). Estas diversidades son generalmente desenfoques introducidos al cambiar el camino óptico de haces esféricos, o pueden ser otro tipo de distribuciones de fase fácilmente parametrizables en polinomios de Zernike como el astigmatismo. Tomando la autocorrelación normalizada de la GP con diversidad como se muestra en la Eq. (5.7),

$$S_1 = \frac{H_1 \star H_1}{|H_1|^2} = \frac{H_0 H_\Delta \star H_0 H_\Delta}{|H_0 H_\Delta|^2}, \quad (5.7)$$

obtenemos una OTF con diversidad  $\phi_1$  que nos permitirá predecir cómo son las imágenes registradas a la salida del sistema cuando se introduce un cambio de fase,

$$D_1 = D_{obj}S_1.$$

La tarea de encontrar las aberraciones del sistema óptico en el PD tradicional consiste entonces en encontrar una distribución de fase inicial  $\phi(\vec{u})$  que en combinación con la función pupila  $A(\vec{u})$  componga una OTF capaz de modelar el sistema. Esta OTF debe predecir, a partir de una entrada dada ( $D_{obj}$ ) no solo la imagen nominal ( $D_0$ ), sino también las imágenes distorsionadas  $D_{1\dots k}$  que resultan de la adición de  $k$  diversidades de fase distintas. Y la adición de más de una diversidad de fase es lo que diferencia al método PD de métodos similares, en particular, la inclusión de diversidades implica que la fase del frente de onda recuperado debe ser una solución para un conjunto de sistemas y no sólo para uno, esto le otorga al método una mayor exactitud. Las implementaciones de PD basadas en GSAs, como por ejemplo la de Paxman *et al.* [16], usan métodos de búsqueda de la mayor pendiente para minimizar funcionales de la forma,

$$L(\bar{D}_{obj}, \phi) = \sum_{j=0}^K \sum_{u,v}^{M,N} |D_j - \bar{D}_{obj}S_j|^2. \quad (5.8)$$

Dónde  $\bar{D}_{obj}$  es la FT del objeto a la entrada limitada por las frecuencias de corte establecidas en la apertura, y  $D_j$  es la FT de la intensidad medida experimentalmente por una cámara en el pixel con coordenadas  $\vec{u}$  luego de introducir una diversidad de fase conocida con índice  $j$ . Este funcional actúa como una medida de la similitud entre la intensidad de un objeto que se propaga por un sistema modelado por  $S_j$  y la medida real de su imagen. Obtener un valor mínimo al evaluar el funcional para todas las diversidades  $j$  implica que el objeto a la entrada y la OTF del sistema se conocen de forma suficientemente precisa como para emular el sistema real.

Es importante fijarse en que el funcional clásico de PD de la Eq. (5.8) debe solucionarse simultáneamente con respecto a dos variables. Esto se debe a que en aplicaciones de PD para sensado remoto se desconoce tanto la fase introducida por el sistema, como las propiedades del objeto a la entrada [1]. Puesto que solucionar un funcional simultáneamente para dos funciones resulta complejo y muy costoso computacionalmente, desde los inicios de la técnica autores como Gonsalves [7] han propuesto una transformación de la Eq. (5.8) que permite describir el funcional sólo en términos de la fase del frente de onda. Esta transformación está descrita de forma muy completa y generalizada en el trabajo de

Paxman *et al.* [16]. No obstante, ha sido demostrado que la forma reducida del funcional es mucho más susceptible a devolver mínimos locales en la presencia de ruido Gaussiano, y por tanto, se ha propuesto el uso de métodos de regularización y metaheurísticos para incrementar la convergencia Paxman *et al.* [16].

En la siguiente sección se propone traer los conceptos del PD tradicional a sistemas que pueden ser iluminados con fuentes coherentes como aquellos donde son aplicables métodos de propagaciones iterativas como el método de GS.

### 5.2.2 PD con iluminación coherente

La variación de PD que nosotros proponemos puede llamarse PD con iluminación coherente, e implica asumir un frente de onda a la entrada del sistema. Como se mencionó antes, el sistema óptico a caracterizar es un sistema 4F compuesto por dos lentes. La razón por la que se escogió este tipo de sistemas formadores de imagen es porque a futuro se espera utilizar los VOs generados para aplicaciones en microscopía de fase dónde ubicar un SLM en un plano de Fourier puede permitir la introducción de filtros y máscaras que mejoren el contraste de muestras biológicas transparentes [14]. Dado que usamos una fuente láser para generar VOs, podemos asumir que el campo óptico a la entrada,  $u_{obj}$ , se puede representar como un haz de luz coherente con perfil Gaussiano,

$$u_{obj} = e^{\frac{-(x^2+y^2)}{\sigma}}.$$

Ese sería el campo óptico en el plano objeto, es decir, a una distancia focal de la primera lente. La FT del objeto,  $U_{obj}$  puede ser observada en el plano focal de la primera lente (2F), que es también el plano de Fourier del sistema. Es allí donde se ubica el SLM para proyectar máscaras de fase con diversidades. Luego, el campo a la salida del sistema, que ha sido modificado por las distintas aperturas y aberraciones del sistema se puede observar en el plano imagen a 4 distancias focales del plano objeto. Si se define la GP como el producto entre la GP asociada a las aberraciones del sistema ( $H_0$ ) y a las diversidades introducidas por el SLM ( $H_j$ ), usando la Eq. 5.4 el campo a la salida se puede expresar en términos del campo a la entrada como se muestra en la Eq. 5.9.

$$u_j(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{U_{obj}H_0(\vec{u})H_j(\vec{u})\}. \quad (5.9)$$

Con la Eq. (5.9) se puede plantear un equivalente coherente del funcional de la Eq. (5.8) en el cual la única incógnita son las aberraciones ( $\phi$ ) introducidas por el sistema óptico,

$$L_j(\phi) = \sum_{j=0}^K \sum_{u,v}^{M,N} |d_j - |u_j|^2|^2. \quad (5.10)$$

Si la apertura es circular y el objeto es un haz Gaussiano, las distribuciones de intensidad a la salida para cada diversidad ( $d_j$ ) son patrones de Airy distorsionados, y localizados en el centro de la imagen. Es importante notar que a diferencia del PD tradicional, nosotros comparamos las imágenes en coordenadas naturales en vez del dominio de frecuencia espacial. Esto se debe a que analizamos las distribuciones de intensidad que produce un sistema formador de imágenes cuando se introducen las máscaras con diversidades en un plano de Fourier. Otra diferencia muy importante es que podemos saber cómo será la fase a la salida, cosa que no se podría hacer con iluminación no coherente. Esto es esencial si queremos garantizar un perfil de fase específico como por ejemplo una vorticidad particular.

### 5.2.3 Máscaras espirales como diversidades de fase

Como se mencionó en la introducción, Jesacher *et al.* [8] propusieron el uso de máscaras espirales para mejorar el desempeño en la reconstrucción de aberraciones por medio del método GS en un sistema formador de imagen. El GS es un método iterativo de reconstrucción de fase que funciona con sólo una imagen como entrada. En ese trabajo mostraron que si el sistema óptico se ilumina con haces portadores de OAM 1, la imagen a la salida (que tiene forma de dona) responde con mucha mayor sensibilidad a aberraciones que las imágenes observadas cuando la iluminación es de fase plana (OAM 0). Ese incremento en la sensibilidad se ve traducido en una mayor precisión, y en un aumento en la convergencia que hacen del método una alternativa atractiva para la optimización de sistemas ópticos en los cuales se necesita control preciso de la fase.

Nosotros también proponemos el uso de VOs para mejorar la exactitud de la reconstrucción, pero llevamos la idea más adelante al proponer el uso VOs no como una fuente de iluminación sino como una nueva familia de diversidades que se combina con las diversidades usadas tradicionalmente en el PD como el desenfoque y el astigmatismo. La introducción de estas nuevas diversidades al método de PD con iluminación coherente se logra si se modifica el funcional de la Eq. (5.10) para recibir diversidades de fase que introduzcan OAM al haz de entrada. Estas diversidades son máscaras espiral de fase parametrizadas

por el valor de su carga topológica  $l$  y definidas como:

$$\psi_l = \arg(\exp(il\theta)),$$

tál y como se mostró en el capítulo 4.

Al incluir las máscaras espiral en un plano de Fourier del sistema, la fase del frente de onda se puede representar aproximadamente como la suma de:

- Las aberraciones inherentes al sistema ( $\phi$ ) representadas como una combinación ponderada de polinomios de Zernike. En nuestro caso la combinación se hace con los primeros 15 coeficientes siguiendo la convención de numeración de Noll [15].
- La diversidad de fase espiral  $\psi_l$ .
- La diversidad de fase de aberración  $\phi_j$  que consiste en un solo elemento de la base de Zernike, como desenfoque o astigmatismo.

El campo complejo a la salida del sistema cuando se introduce una diversidad de aberración  $j$  y una diversidad de espiral de fase  $l$  en un plano de Fourier es entonces,

$$u_j^l = \mathcal{F}^{-1}\{U_{obj}Ae^{i(\phi+\psi_l+\phi_j)}\}. \quad (5.11)$$

Finalmente, usando la Eq. (5.11) se puede definir el funcional de PD coherente mejorado con VOs que se muestra en la Eq. (5.12).

$$L(\phi) = \sum_{l=0}^L \sum_{j=0}^K \sum_{u,v}^{M,N} \left| d_j^l - |u_j^l|^2 \right|^2. \quad (5.12)$$

Con este funcional se puede plantear una metodología de solución para el problema de reconstrucción de fase como se ilustra en el diagrama de flujo de la Fig. 5.3. A continuación, en lo que resta de este capítulo se ahondará en los detalles de la metodología, y se presentarán los resultados obtenidos.

### 5.3 Metodología

Como se mencionó en la Sección 5.2.2, para poder generar imágenes simuladas  $|u_j^l|^2$  nuestro método se basa en la premisa de conocer el campo óptico a la entrada del sistema formador de imagen. Es decir que si usamos un láser de buena calidad para obtener las imágenes del brazo izquierdo del diagrama en la Fig. 5.3 podemos asumir que el campo a

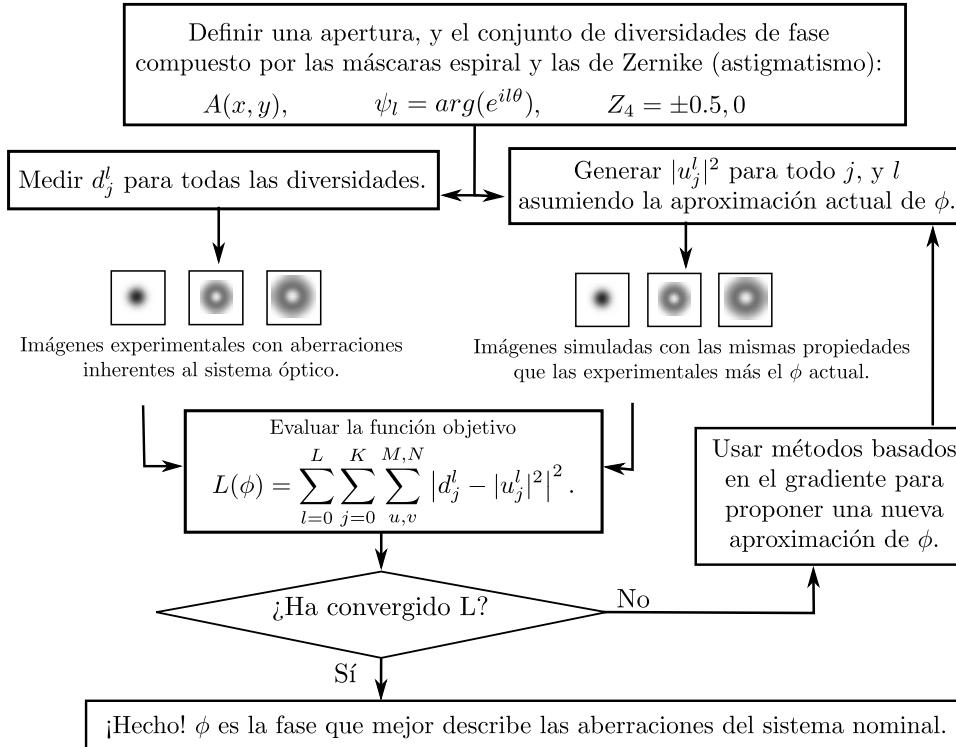


Figura 5.3: Diagrama de flujo de una implementación de PD con iluminación coherente mejorado con VOs.

la entrada del sistema simulado ( $u_{obj}$ ), tiene las características ópticas de una fuente láser coherente, es decir: amplitud Gaussiana, perfil de fase plano, y que además está limitado por una apertura circular correspondiente a la geometría de las lentes.

Como el nuestro es un sistema formador de imagen y vamos a introducir las máscaras de diversidades en un plano de Fourier para simular la autocorrelación, se debe obtener la transformada de Fourier del campo mencionado anteriormente y colimar el haz para evitar que siga divergiendo. En adelante haremos referencia a la Fig. 5.4 para ilustrar las diferentes partes del sistema de reconstrucción de fase como si se tratara de un sistema 4F. Suponiendo que el frente de onda ya ha sido transformado al dominio de Fourier y que se encuentra colimado, representamos en el extremo izquierdo de la Fig. 5.4 la FT del campo a la entrada ( $U_{obj}$ ) como un haz circular que incide sobre el SLM. Dado que el campo ha sido colimado luego de obtener su FT, se puede asumir que todos los planos desde que se colima el haz hasta que vuelve a pasar por una lente son equivalentes al plano de Fourier de un sistema 4F, y eso nos brinda un espacio adecuado para introducir el SLM como se muestra en el recuadro azul de la Fig. 5.4.

Si se trabaja en aplicaciones de microscopía, en las cuales los objetos son de tamaños micrométricos, sus transformadas de Fourier son campos ópticos más extensos y la información en coordenadas de frecuencia espacial puede dispersarse en tamaños comparativamente más grandes. Una ventaja significativa de modificar el PD para que las diversidades de fase se introduzcan en un plano de Fourier es el hecho de que se pueden aprovechar más píxeles, y por ende se aumenta la resolución espacial de la modulación de fase.

El uso de dispositivos de modulación espacial de la fase para aplicaciones en PD se ha extendido en la literatura [2, 9, 11, 21] debido a la flexibilidad con la que se pueden generar máscaras de fase arbitrarias como diversidades de fase, a diferencia de métodos tradicionales como desenfoques que dependen de desplazamientos y alineación muy precisos de elementos ópticos. Más aún, el uso de elementos de la base de Zernike (diferentes al desenfoque) como diversidad de aberración tiene la ventaja de producir distorsiones más grandes y más fácilmente detectables en la distribución de intensidad del plano imagen. Esto es particularmente cierto cuando las distribuciones pertenecen a objetos altamente sensibles a aberraciones como es el caso de los OVs. Adicionalmente, polinomios de Zernike como los dos correspondientes al astigmatismo primario han sido usados por Kner [10] como diversidad de aberración en PD para reconstrucción de fase de objetos tridimensionales en aplicaciones de microscopía donde el desenfoque es usado para muestrear en la dirección del propagación y no añade información sobre las aberraciones.

Cuando el campo  $U_{obj}$  llega al SLM se encuentra con una combinación de tres máscaras de fase que han sido asignadas a los píxeles del LCD. La primera de estas máscaras, visible en la Fig. 5.4(a) es una máscara de espiral de fase con carga topológica  $l$  que, como se vio en el Capítulo 4, introduce una singularidad de fase de orden  $l$  al campo. La segunda máscara (Fig. 5.4(b)) corresponde a una rejilla de difracción del tipo blazed que representa una cuña delgada, y se usa para separar la luz que ha sido difractada al primer orden del resto. Esta rejilla mejora de forma significativa la calidad de los vórtices ópticos porque evita efectos de interferencia causados por partes del campo que no son correctamente difractadas por el modulador. La poca eficiencia de difracción se debe a la no linealidad de la modulación y al hecho de que los TN-SLM de transmisión no logran modulaciones de  $2\pi$ . Finalmente, la tercera máscara (Fig. 5.4(c)) introduce la diversidad de fase de aberración, en este caso, y en adelante, corresponde al polinomio de Zernike de astigmatismo primario (De índice 4 en la notación de Noll). La suma de las tres máscaras tal y como se le presenta al SLM en el montaje experimental se muestra en la Fig. 5.5 superpuesta a una apertura circular que corresponde al tamaño del haz en el SLM.

Luego de atravesar el SLM el haz encuentra el resto del sistema óptico y se enfoca para

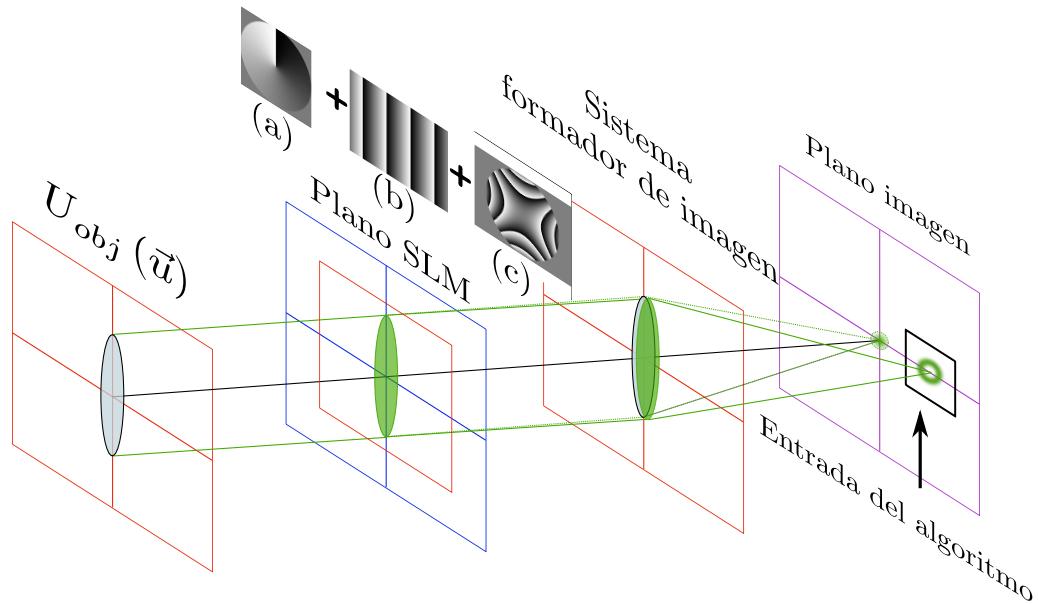


Figura 5.4: Un SLM es usado para introducir diversidades de fase en un plano de Fourier. La máscara que se asigna al SLM es una combinación de: (a) Máscara espiral de fase con OAM 1, (b) rejilla de difracción tipo Blazed, y (c) +0.5 astigmatismo primario como diversidad de aberración. El primer orden de difracción producido por la rejilla es usado como portador de los haces Laguerre-Gauss con OAM1 enfocados en el plano imagen.

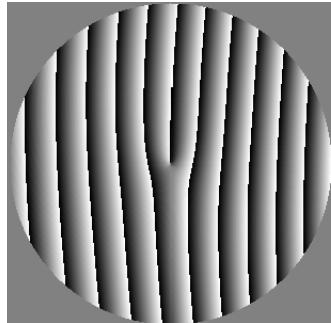


Figura 5.5: Ejemplo de una máscara tenedor que resulta de combinar una máscara de espiral con  $l = 1$ , con una red de difracción y una máscara de diversidad de aberración con astigmatismo primario de  $Z_4 = 0,5\lambda$ . Se muestra sólo la parte de la imagen que tiene el tamaño del haz proyectado en el SLM.

formar imagen ( $|u_j^l|^2$ ) en el plano de observación o plano imagen. Como se puede ver en el extremo derecho de la figura 5.4, los perfiles de intensidad que se usan como entrada para el algoritmo de la figura 5.3 corresponden sólo a una pequeña parte de la imagen en la cual está el orden +1 de la rejilla de difracción. Dado que los spots tienen un tamaño

microscópico, para observar sólo el orden 1 en el plano de enfoque usamos un objetivo de microscopio de magnificación 10x y una cámara **CCD** marca Imaging Source.

*En conclusión, para realizar la reconstrucción de fase de un sistema óptico formador de imagen usando nuestro método, se deben registrar varias de las imágenes que éste forma cuando se le introducen cambios conocidos en la fase. Los cambios en la fase se introducen a partir de máscaras de fase localizadas en uno de sus planos de Fourier por medio de un TN-SLM. Introducir las máscaras de fase genera distorsiones en la distribución a la salida que además dependen de las aberraciones ópticas desconocidas del sistema en cuestión. El hecho de generar varias combinaciones de diversidades y registrar varias imágenes con distorsiones distintas, lleva a limitar el espacio de soluciones posibles y acerca el método a una solución única. Esta es la gran ventaja del PD sobre otros métodos de reconstrucción de fase.*

Adicionalmente, el hecho de usar la familia de diversidades de espiral, aumenta la sensibilidad del método ante aberraciones ya que los haces portadores de OAM tienen cambios más drásticos en sus distribuciones de intensidad cuando hay aberraciones. Aumentar la sensibilidad tiene un efecto positivo sobre la exactitud de la solución porque se encuentra de forma más precisa el valor y tipo de aberraciones que producen una distribución particular.

El conjunto de imágenes tomadas experimentalmente ( $d_j^l$ ), y las condiciones particulares con las cuales fueron producidas, tales como: la forma de la apertura, el tipo de iluminación y la selección de diversidades, son el argumento de la rutina de PD. En el interior de la rutina de PD, simulamos el sistema óptico y producimos imágenes artificiales ( $|u_j^l|^2$ ) que son comparadas píxel a píxel con las imágenes experimentales. Así como las distorsiones en las imágenes experimentales son función de las aberraciones que desconocemos, las distorsiones de las imágenes artificiales van a ser función de una fase conocida y parametrizada ( $\phi$ ) que vamos a variar hasta que el funcional de la Eq. 5.12 retorne un mínimo. Cuando acabe el esquema de búsqueda de un mínimo, y la fase propuesta ( $\phi$ ) produzca imágenes artificiales ( $|u_j^l|^2$ ) idénticas a las imágenes experimentales, y siempre y cuando las condiciones de la simulación sean idénticas a las condiciones del laboratorio, significará que hemos identificado las aberraciones del sistema óptico correctamente. Adicionalmente, el inverso de las aberraciones encontradas puede ser proyectado en el SLM para corregirlas y así mejorar la resolución del sistema.

Una vez presentado el método, procedemos a describir los resultados logrados.

## 5.4 Resultados

El método de PD coherente mejorado con VOs fue probado extensivamente con el fin de validar nuestras premisas y evaluar su comportamiento ante diversas entradas. En esta sección se describen las pruebas simuladas y experimentales que se realizaron, y se muestran los resultados para cada una.

### 5.4.1 Resultados de simulaciones

En primera medida se requería simular el método para corroborar que funcionaba en sistemas ideales. La simulación de reconstrucción de fases consiste en reemplazar el conjunto de imágenes de referencia  $d_j^l$  por un conjunto de imágenes artificiales que han sido afectadas por una aberración conocida inherente al sistema óptico simulado. La aberración conocida será nuestra fase de referencia, es decir, la fase con la cual compararemos la exactitud de la reconstrucción. Una vez comprobamos que nuestra implementación del PD reconstruía de forma precisa aberraciones simples, procedimos a probarlo con aberraciones generadas aleatoriamente, y luego con aberraciones aleatorias de diferente magnitud. Asimismo, comparamos el desempeño del PD contra el método GS con y sin VOs, y contra sí mismo con conjuntos diferentes de diversidades con y sin VOs.

#### 5.4.1.1 Preparación de las fases de referencia

Si las aberraciones se conforman como una combinación lineal de elementos de la base de Zernike como se muestra en la Eq. 5.13; un frente de onda aleatorio puede ser fácilmente compuesto asignando valores aleatorios a los coeficientes  $a_i$ .

$$\phi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{N=15} a_i Z_i(\vec{u}). \quad (5.13)$$

Para generar los coeficientes utilizamos la función **normrnd** de Matlab® que produce una lista de números aleatorios pertenecientes a una distribución Gaussiana con media y desviación estándar definidas por el usuario. En nuestro caso se quería una misma probabilidad para coeficientes positivos y negativos así que se asignó la media como  $0\lambda$ . La desviación estándar se asignó como  $0,5\lambda$  como valor tentativo previo al escalamiento. La exactitud de los métodos de reconstrucción de fase en algunos casos está ligada a la magnitud de las aberraciones. Aberraciones de magnitud muy pequeña pueden producir resultados similares a aberraciones de igual magnitud pero distinta forma. Esto es un problema si los métodos no son lo suficientemente sensibles como para distinguirlas. Asimismo,

aberraciones de magnitudes muy altas pueden introducir distorsiones tan grandes en las imágenes de entrada que impiden que los métodos converjan a un mínimo global, o incluso pueden causar divergencia [8]. Con el fin de evaluar el desempeño de nuestro PD ante magnitudes variables, generamos aberraciones aleatorias en diferentes escalas. Se tomó como métrica de la escala el valor de la **media cuadrática (RMS)** [20] del frente de onda, que para una base normalizada como la de Zernike es,

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^{N=15} a_i^2}.$$

Los coeficientes aleatorios que entrega la función **normrnd** fueron escalados en una rutina de minimización hasta obtener una combinación con RMS definido. Se corrió la rutina de PD para 6 escalas distintas  $\sum_{i=1}^6 \sigma_i$  desde  $RMS = 1/14\lambda$  (límite de difracción) hasta  $RMS = 1\lambda$ . Y cada una de las reconstrucciones de una escala particular ( $i$ ) fue repetida con fases distintas 15 veces para que el resultado fuera estadísticamente significativo. Es decir que en total se hicieron 90 reconstrucciones de fase por cada método a evaluar. Se evaluó el método de GS con y sin VOs, y el método de PD de iluminación coherente sin VOs, y con VOs bajo dos combinaciones distintas de diversidades haciendo un total de 450 reconstrucciones de fase. Los resultados de estas simulaciones se han condensado en la Fig. 5.6 y se discuten en adelante.

#### 5.4.1.2 Descripción y análisis de resultados simulados

Comenzamos por describir brevemente los datos que componen las curvas de la Fig. 5.6(a). De un lado está la curva con marcas cuadradas rojas que representan el error para cada escala cuando se reconstruyen las aberraciones usando el método GS tradicional. Los rombos azules son también resultado de la reconstrucción con GS y representan la solución cuando se añaden VO de OAM1 a la entrada, tal y como lo presenta Jesacher *et al.* [8]. En ambos casos el GS se ejecuto por 60 iteraciones. Por otra parte, del lado de PD con iluminación coherente, los datos con cruces verdes representan el método PD coherente cuando no ha sido mejorado con diversidades de fase espiral. En ese caso se usaron sólo tres imágenes como entrada, la nominal y dos con diversidades. No se usaron máscaras espiral ( $l = 0$ ), y las diversidades de aberración consisten en los siguientes dos valores de astigmatismo  $j = Z_4 : \pm 0,5$ . Tanto los datos con triángulos dorados como los que tienen círculos púrpura representan resultados del método de PD con iluminación coherente mejorado con VO y fueron obtenidos con nueve imágenes. Las diversidades de aberración para estos casos

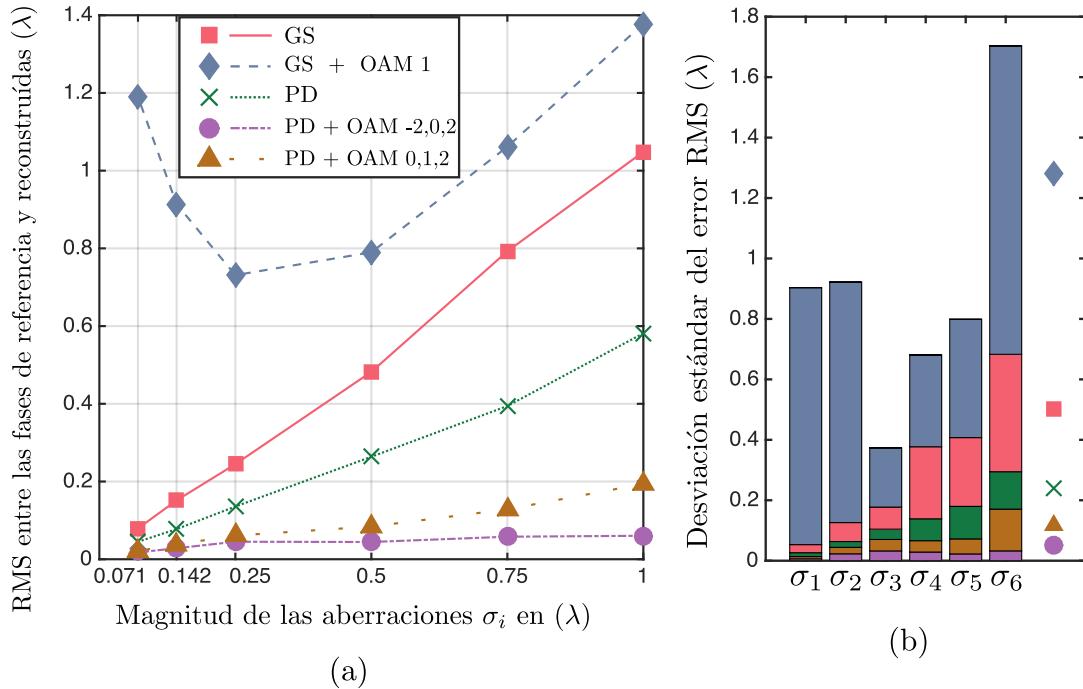


Figura 5.6: (a) Las marcas en el eje  $x$  denotan la magnitud de la aberración para cada escala  $\sigma_i$  como el error RMS con respecto a un frente de onda plano. El eje  $y$  denota el promedio de los errores RMS entre las 15 réplicas de aberración de referencia y fase reconstruida. (b) Desviación estándar del error para cada método y para cada  $\sigma_i$ .

son las mismas y se añaden las diversidades de espiral  $l = 0, 1, 2$  para el primer caso y  $l = -2, 0, 2$  para el segundo.

En la Fig. 5.6 se puede observar claramente que el método de PD coherente supera en exactitud al GS por al menos un orden de magnitud en cualquiera de las selecciones de diversidades. La precisión de la aproximación con PD también se evidencia cuando se comparan las fases重建adas y los pesos de los coeficientes recuperados para un frente de onda particular como se muestra en la Fig. 5.7. En ese caso se compararon las fases de la réplica número 10 para la reconstrucción de un perfil de fase con aberraciones de  $1/14\lambda$  RMS, y se ve que la reconstrucción de los pesos con PD es casi exacta. Después de un cuidadoso análisis de los resultados, se pudo concluir que hacer un incremento en la redundancia aumentando la cantidad de imágenes de entrada tiene un efecto positivo sobre la precisión. Eso se ve reflejado en la mejor reconstrucción de PD de 9 imágenes con respecto al de tres, y la mejor reconstrucción de este último con respecto al GS de una sola imagen. Asimismo, identificamos que el desempeño del método mejora cuando se usan VO con cargas topológicas de orden más alto, y que la combinación de diversidades espiral de

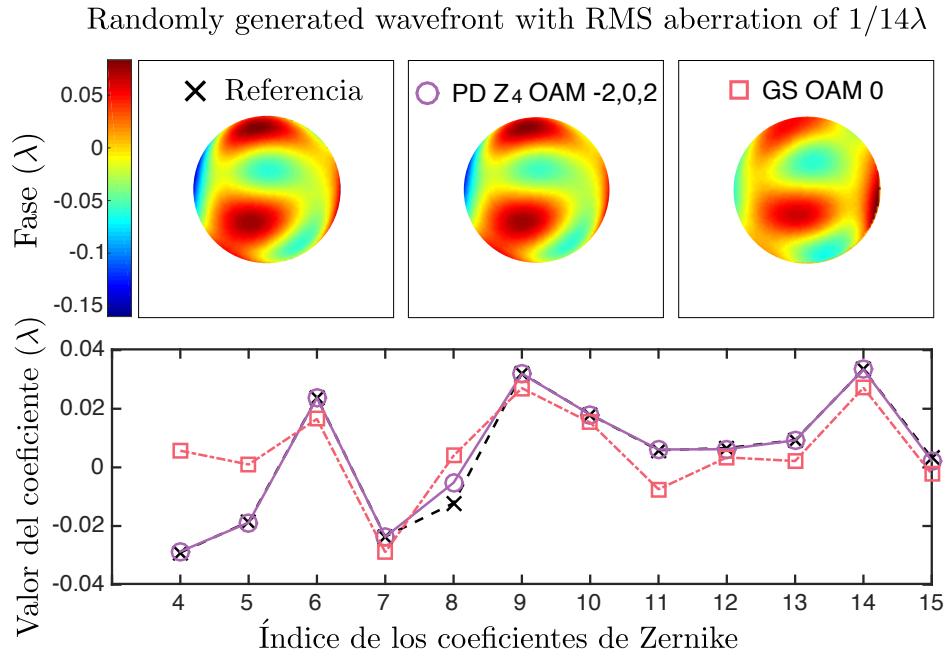


Figura 5.7: Comparación visual y de coeficientes entre uno de los frentes de onda aleatorios de escala  $1/14\lambda$  y las fases reconstruidas con PD y GS.

mismo valor pero signo contrario es preferible a una variedad de cargas de mismo signo. Creemos que una razón importante por la cual los resultados con vórtices de  $l = 2$  son mejores que los de  $l = 1$  y estos a su vez mejores que los haces Gaussianos  $l = 0$  es el hecho de que tienen un tamaño mayor. Al ocupar una parte mayor de la imagen los cambios en el perfil debidos a las aberraciones son más evidentes y pueden ser muestreados con una mayor cantidad de píxeles. Adicionalmente, se demostrado que las singularidades de VOs con cargas topológicas mayores a 1 son altamente inestables y tienden a dividirse en varios VOs de carga menor ante la presencia de aberraciones [3, 4]. Por otra parte, pensamos que incluir VO con carga negativa y positiva es preferible ya que se le introducen al método máscaras de diversidad cuya redundancia puede “desenvolver” aberraciones simétricas. Una aberración simétrica puede afectar de distinta forma vórtices ópticos cuya fase se envuelve en sentido derecho, y vórtices cuya fase se envuelve hacia la izquierda.

#### 5.4.1.3 Discusión sobre el método Gerchberg-Saxton

Analizar correctamente los resultados de la Fig. 5.6 depende de entender las diferencias entre la reconstrucción con GS y la reconstrucción con PD. Comenzaremos por identificar algunas propiedades de la reconstrucción con el método GS.

El método GS es un algoritmo cíclico de una sola imagen en el cual se llega a encontrar la fase de un frente de onda haciendo múltiples propagaciones hacia adelante y hacia atrás del sistema óptico. En este caso el sistema consiste en la segunda lente de un 4F y las propagaciones suceden entre el plano de Fourier donde está el SLM y el plano imagen donde se registran con la CCD. El algoritmo que implementamos se ilustra de forma gráfica en la Fig. 5.8 y se describe a continuación. Se parte de un campo complejo conocido en un plano

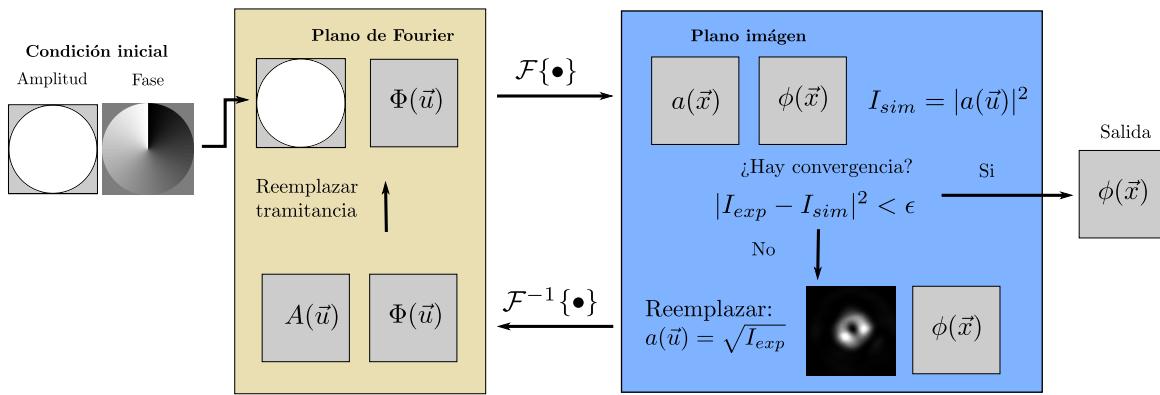


Figura 5.8: Diagrama de flujo de nuestra implementación del método de múltiples propagaciones de Gerchberg-Saxton.

de Fourier, que se debe propagar por medio de una FT a través del sistema para obtener el campo en el plano imagen. La amplitud del campo resultante se reemplaza por la raíz cuadrada de la intensidad medida experimentalmente, y el resultado se propaga en sentido contrario a través del sistema por medio de una FT inversa. De nuevo en el plano de Fourier, la amplitud del campo se reemplaza por una equivalente a la que habría en la entrada del sistema y se repite el ciclo hasta que la fase converja a la aberración del sistema que produce intensidades a la salida iguales a las intensidades tomadas experimentalmente. Si el campo óptico propuesto en el plano de Fourier del sistema es tal que su imagen resulta similar a la imagen de entrada, la convergencia es casi segura, el error desciende en cada iteración y se necesita de muy pocas iteraciones para alcanzar convergencia. Este es el caso del ejemplo que mostramos en la Fig. 5.7. En estos casos podemos suponer que el algoritmo ha returned un mínimo global. Sin embargo, aberraciones de mayor magnitud, o con formas complejas, pueden hacer que el error aumente antes de comenzar a descender, y entregar resultados que, aunque generan intensidades similares a las imágenes experimentales, no tienen fases similares a la fase de referencia. Estos serían entonces mínimos locales, y no representarían una solución aceptable a la hora de comparar con una métrica como el RMS del frente de onda. Este fenómeno ha sido estudiado ya por varios autores [8, 16]

que han mostrado que la unicidad de la solución no está garantizada cuando se ejecutan métodos de propagación como el GS. La presencia de mínimos locales y la imprecision pueden entenderse si se observa que, a diferencia de métodos basados en búsqueda del gradiente, en los cuales la fase se compone de forma parametrizada, el proceso cíclico del GS retorna la fase como una imagen por el simple hecho de propagar campos complejos en forma iterativa. Como resultado se corre el riesgo de obtener distribuciones de fase que no representan adecuadamente el sistema. Un ejemplo muy bueno de situaciones en las cuales se presenta ese fenómeno es el que se ilustra en la Fig. 5.9. Esta figura muestra el resultado de la reconstrucción de fase con varios métodos cuando las aberraciones son grandes ( $RMS > 1\lambda$ ) y se puede ver claramente que PD sigue siendo altamente preciso, y que la solución con el método de GS (cuadrados rojos) llegó a un mínimo que no corresponde a la referencia. En este caso se muestra además que la solución con el método de GS mejorado con VOs devuelve una fase espiral aberrada que no corresponde a la fase espiral de referencia. Además hemos visto que en algunos casos las múltiples propagaciones producen singularidades de fase adicionales no ubicadas en el centro de la imagen. Más aún, las propagaciones del GS pueden propiciar la aparición de aberraciones del tipo Pistón ( $Z_0$ ) o plano inclinado ( $Z_{1,2}$ ) que no afectan la forma de la distribución de intensidad pero si distorsionan la máscara espiral aberrada y que pueden invalidar la comparación con la fase de referencia. A fin de que la comparación entre el método de GS y el PD sea justa se sustrajeron las máscaras espiral cuando estaban presentes y la fase del frente de onda se proyectó al equivalente en la base Zernike tal y como muestra en el Capítulo 5 de [20]. Con esto se pudieron extraer los coeficientes correspondientes a los datos de cuadros rojos y triángulos azules de la figura 5.9. En términos generales, se observó que aún cuando el método de GS encontraba distribuciones de fase que llevaban a intensidades similares a las intensidades esperadas, estas fases no eran suficientemente cercanas a la fase de referencia que se esperaba. Esto se evidencia cuantitativamente en los altos valores del error RMS y su desviación estandar en las curvas y barras de las Fig. 5.6(a) y (b).

#### 5.4.1.4 Sobre las limitantes del método

La superioridad del método PD viene con la desventaja de implicar un mayor tiempo de procesamiento. Mientras que las reconstrucciones con GS pueden tardar alrededor de 30 segundos, la reconstrucción con el PD de 3 imágenes tarda 6 minutos y la de PD con 9 tarda 22 minutos. Esto se debe a que el algoritmo es más complejo y las funciones de minimización que buscan la mayor pendiente necesitan de una mayor cantidad de evaluaciones de los funcionales de la Eq. (5.10) y la Eq. (5.12) para poder ensamblar el gradiente

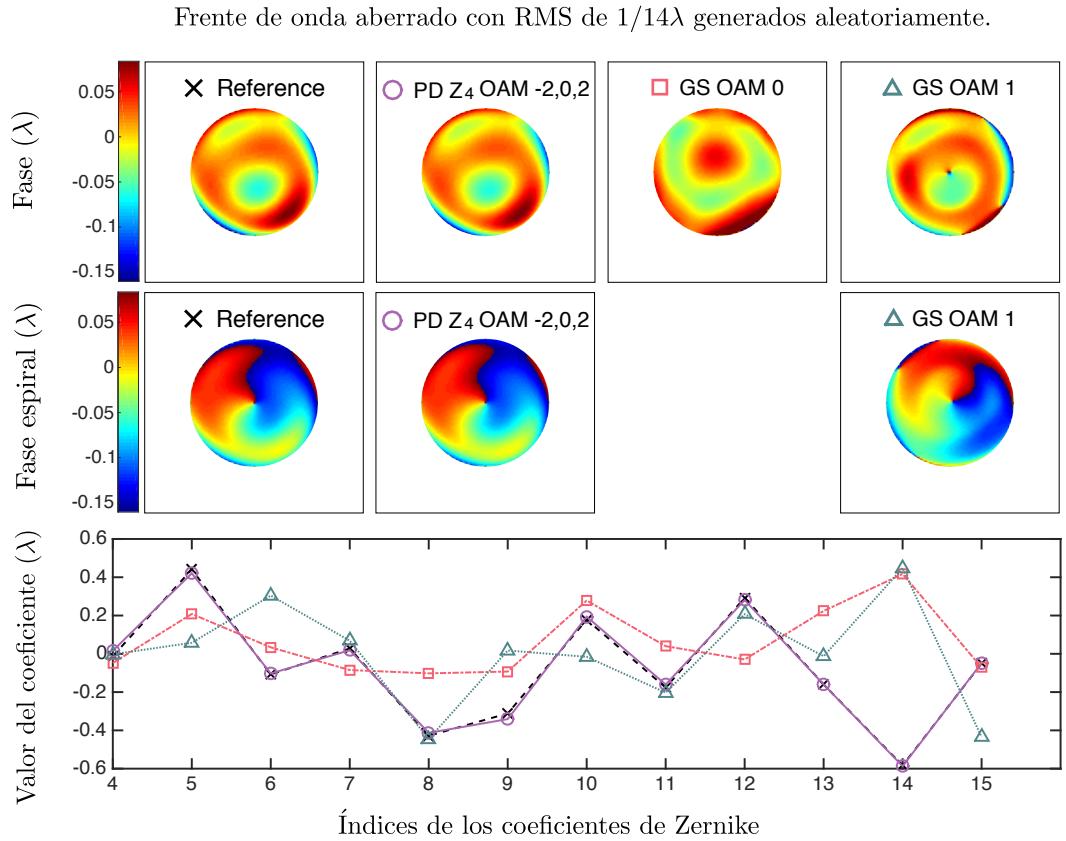


Figura 5.9: Comparación visual y de coeficientes entre uno de los frentes de onda aleatorios de escala  $1\lambda$  y las fases重建adas con PD y GS. En este caso se incluye también el resultado del GS con VOs porque al restar la fase espiral y proyectar a la base de Zernike se obtuvieron mejores resultados que sin VOs.

numéricamente. Todos los resultados fueron obtenidos a partir de código programado en el lenguaje de programación Matlab® y no han sido optimizados para mejorar la velocidad de procesamiento. Futuras implementaciones paralelizadas de los algoritmos podrían sacar provecho de lenguajes de programación de bajo nivel como **C++** y de una **Unidad de Procesamiento Gráfico (GPU)** para mejorar los tiempos de reconstrucción y hacer del método una alternativa viable en aplicaciones donde la velocidad sea importante.

#### 5.4.2 Resultados experimentales

El método de PD con iluminación coherente mejorado con VOs también fue probado con aberraciones inducidas en sistemas ópticos reales. A continuación se describe el montaje óptico, el experimento planteado y se muestran los resultados.

### 5.4.2.1 Montaje óptico

El montaje experimental usado para la caracterización de aberraciones se puede observar en la Fig. 5.10. Como fuente de iluminación se ha utilizado una fuente laser de 532nm con polarización vertical y modo  $TEM_{0,0}$  que puede observarse en la parte derecha de la imagen. Este láser de estado sólido produce un haz con polarización ligeramente elíptica; con el fin de garantizar un estado de polarización lineal vertical hemos introducido un polarizador (P1) con recubrimiento delgado a base nanopartículas que tiene una alta relación de extinción (10.000:1) marca THORLABS referencia LPVISB050. Una vez seleccionado el estado de polarización, el haz continúa su recorrido hasta el extremo izquierdo de la mesa óptica donde cambia de dirección para luego pasar por un filtro espacial (SF) que se ilustra a la izquierda de la Fig. 5.10. El SF permite eliminar contenidos con altas frecuencias como speckle y obtener un perfil bien definido que pueda ser aproximado por una función Gaussiana. La lente L1 cuya distancia focal de 10 cm coincide con la distancia hasta el pinhole del SF, y colima el haz que diverge a causa del objetivo de microscopio de 20x en el SF.

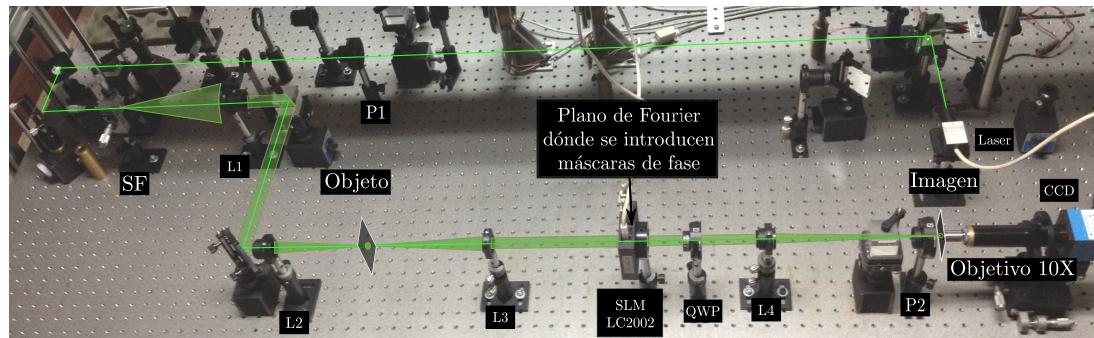


Figura 5.10: Montaje experimental para la caracterización de aberraciones en VO.

Una vez colimado, el haz queda de un diámetro de aproximadamente 2cm y continúa su recorrido hasta la lente L2. La lente L2 de distancia focal 10cm enfoca el haz en un plano que en adelante llamaremos plano objeto y que está a una distancia de 15cm de L3. Los elementos que se encuentran a partir de este punto conforman el sistema formador de imagen a ser analizado. El sistema formador de imagen que implementamos es un sistema 4F conformado por las lentes L3 y L4. El plano objeto del sistema está a una distancia de L3 que coincide con su distancia focal, y asimismo el SLM está a una distancia focal a la derecha de L3. Esta configuración asegura que las diversidades de fase introducidas al modulador actúen exactamente en el plano donde se encuentra la FT del objeto. Por otra parte, la distancia focal de L4 coincide con la distancia entre el plano del SLM y la

lente L4. Esto hace que el haz tenga un mismo tamaño entre L3 y L4 y que la distribución de intensidades que se observa en el plano imagen corresponda a una antitransformada del campo a la salida del SLM. Con esta configuración hemos emulado el montaje que se ilustró en la figura 5.4 en la sección anterior.

Las imágenes que sirven de entrada al algoritmo son capturadas por un ocular de microscopio marca Newport con aumento de 10x acoplado a una cámara CCD de resolución 1280x960 marca *Imaging Source* modelo DMK 41BU02.H. Con el fin de capturar con alta precisión las imágenes que corresponden al primer orden de difracción en el plano imagen, hemos ubicado la cámara sobre una base con libertad de movimiento en X y Y controlada con desplazadores micrométricos. El desplazador que actúa en la dirección perpendicular al haz permite ubicar el ocular ligeramente desplazado del haz de tal manera que sólo entre la luz correspondiente al primer orden de difracción.

#### 5.4.2.2 Análisis de resultados

El montaje en su totalidad tiene aberraciones ópticas que se deben tanto a la alineación y calidad de los elementos ópticos como a la capacidad de modulación del TN-SLM. Esas aberraciones son las responsables de que los VOs sin corrección presentados en el capítulo anterior tengan una mala calidad. En esta sección mostraremos uno de los resultados obtenidos con el montaje descrito anteriormente. Con el fin de evaluar la capacidad del método para recuperar aberraciones conocidas y no solo las aberraciones inherentes al sistema hemos añadido una aberración tipo trébol de magnitud  $1\lambda$  a todas las imágenes. Las aberraciones tipo trébol corresponden al polinomio 10 de la base de Zernike y su perfil de fase se puede observar en la Fig. 5.11.

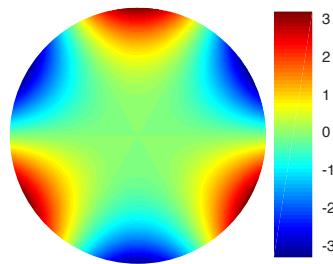


Figura 5.11: Mapa de fase de una aberración tipo trébol de valor  $1\lambda$ .

La introducción de una aberración conocida se hace por medio del mismo SLM sumando la máscara de la aberración tipo trébol a las máscaras originales usadas en la simulación. Esta aberración no solo nos permite probar el método en una condición extrema, sino que también permite evaluar su capacidad para encontrar aberraciones conocidas. La

Fig. 5.12(a) muestra tres grupos de imágenes, en la primera fila de cada grupo, se resaltan dentro de un rectángulo verde 3 de las 9 imágenes de entrada ( $d_j^l$ ) adquiridas cuando la diversidad espiral es  $l = 0, 1, 2$ , las diversidades de aberración son  $j = 0\lambda, 0,5\lambda$ , y  $-0,5\lambda$  de astigmatismo, y se ha sumado a todas la aberración tipo trébol.

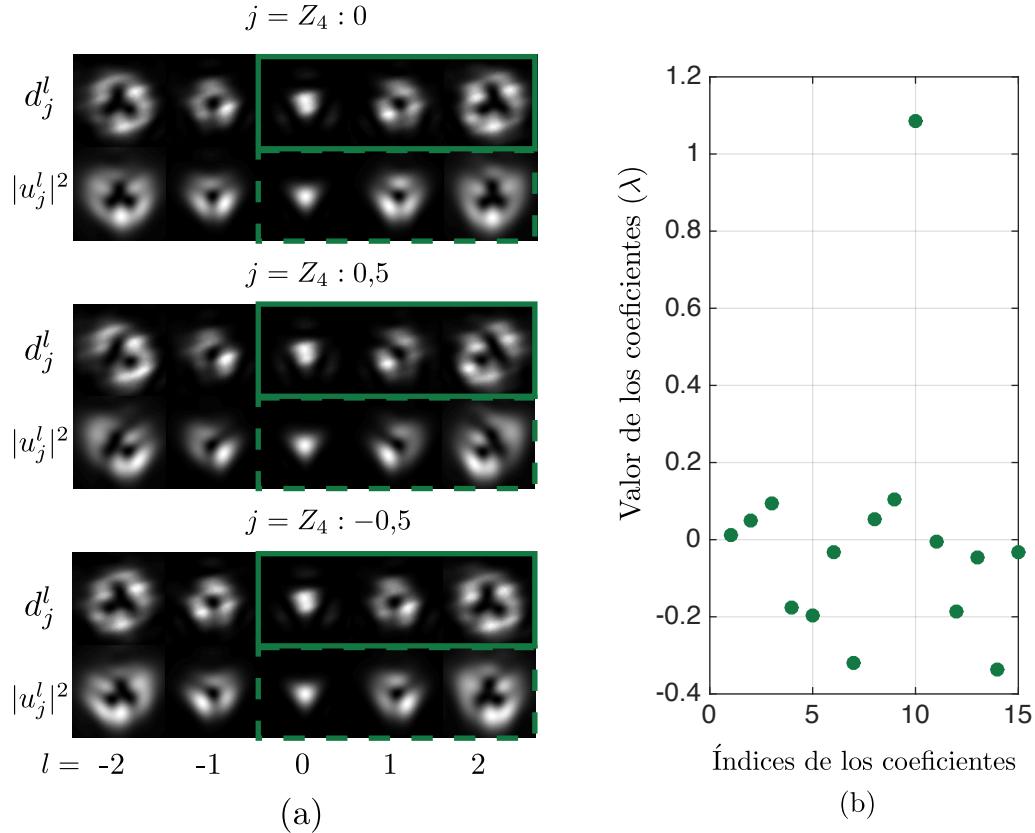


Figura 5.12: (a) Imágenes experimentales de entrada  $d_j^l$  vs imágenes simuladas  $|u_j^l|^2$  cuando el PD ha alcanzado convergencia y se han encontrado las aberraciones del sistema  $\phi$ . (b) Coeficientes de Zernike que componen  $\phi$ .

Las nueve imágenes dentro de recuadros con línea sólida son la entrada al algoritmo de PD y las imágenes en recuadros con líneas discontinuas corresponden a las imágenes sintéticas ( $|u_j^l|^2$ ) obtenidas cuando el método de búsqueda del gradiente ha alcanzado su punto de convergencia. Se puede observar que las imágenes recuperadas por nuestro método no sólo emulan con alta precisión las imágenes usadas como entrada ( $l = 0, 1, 2$ ) sino, también otras imágenes que no fueron incluidas. En este caso las no incluidas corresponden a diversidades de fase espiral  $l = -2, -1$ . El hecho de que logremos emular el comportamiento del montaje experimental en casos que no fueron usados por el método es un buen indicador

de que se obtuvo una solución global, y que la aberración del sistema es precisamente la recuperada. Luego, la Fig. 5.12(b) muestra los valores de los 15 coeficientes de Zernike que componen la aberración recuperada y lo primero que se puede observar es un pico con valor de  $1,08\lambda$  en el coeficiente número 10, muy distinto a las otras componentes de magnitudes menores a  $0,4\lambda$ , que comprueba la exactitud de la solución.

Finalmente, la Fig. 5.13 muestra VOs de calidad mejorada obtenidos luego de compensar el frente de onda recuperado al frente de onda nominal  $j = Z_4 : 0$ .

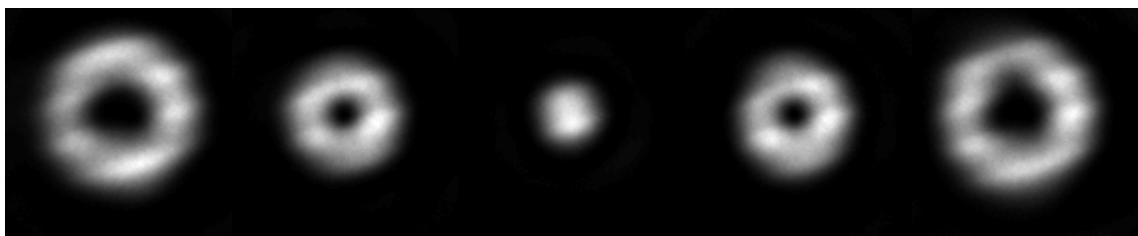


Figura 5.13: Imágenes de VO tomadas luego de restar las aberraciones reconstruidas con PD.

Este resultado demuestra que se logró implementar un método para caracterizar y corregir VOs mediante el uso de un SLM. Cosa que junto con los resultados de la **Parte I** en donde se mostró la generación de VOs, completa los requerimientos para el cumplimiento del objetivo general del trabajo de grado. Fuera de eso, y dado que los VOs tienen gran sensibilidad ante ciertas aberraciones, el método desarrollado puede ser propuesto como la base para una herramienta de metroología óptica que tenga aplicación en la caracterización de sistemas formadores de imagen. Esto requeriría el diseño de un sistema óptico 4F portátil, previamente calibrado y con un SLM en su plano de Fourier, cuyas imágenes se puedan poner a la entrada de sistemas ópticos más complejos en los cuales se desea caracterizar las aberraciones introducidas al frente de onda. Dicho sistema introduciría haces de entrada con diversidades de fase que alimentarían el método PD que se ha presentado en este trabajo.

En el marco del proyecto de grado se generó una publicación científica que ha sido enviada a la revista Optics Letters y está en proceso de revisión. En esta publicación se propone nuestra implementación y se muestran estos resultados como una posible alternativa para la caracterización de sistemas formadores de imagen que puedan ser iluminados con fuentes coherentes.

## Bibliografía

- [1] J. A. Bonet, I. Marquez, R. Muller, M. Sobotka, y Th. Roudier. Phase diversity restoration of sunspot images: II. dynamics around a decaying sunspot. *Astronomy and Astrophysics*, 430(3):1089–1097, 2005. ISSN 0004-6361, 1432-0756. doi:10.1051/0004-6361:20041356.
- [2] Luis Camacho, Vicente Micó, Zeev Zalevsky, y Javier García. Quantitative phase microscopy using defocusing by means of a spatial light modulator. *Optics express*, 18(7):6755–6766, 2010. doi:10.1364/OE.18.006755.
- [3] Mark R. Dennis y Jörg B. Götte. Topological aberration of optical vortex beams: determining dielectric interfaces by optical singularity shifts. *Physical review letters*, 109(18):183903, 2012. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.183903>.
- [4] Mark R. Dennis, Kevin O'Holleran, y Miles J. Padgett. *Chapter 5 Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities*, tomo 53, págs. 293–363. Elsevier. ISBN 9780444533609. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0079663808002059>.
- [5] J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. 21(15):2758–2769. doi: 10.1364/AO.21.002758.
- [6] J. R. Fienup. Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system. *Applied Optics*, 32(10):1737–1746, 1993. doi:10.1364/AO.32.001737.
- [7] Robert A. Gonsalves. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, 21(5):215829–215829, 1982. URL <http://opticalengineering.spiedigitallibrary.org/article.aspx?articleid=1222372>.
- [8] A. Jesacher, A. Schwaighofer, S. Fürhapter, C. Maurer, S. Bernet, y M. Ritsch-Marte. Wavefront correction of spatial light modulators using an optical vortex image. *Optics express*, 15(9):5801–5808, 2007. doi:10.1364/OE.15.005801.
- [9] Vladimir Katkovnik y Jaakko Astola. Phase retrieval via spatial light modulator phase modulation in 4f optical setup: numerical inverse imaging with sparse regularization for phase and amplitude. *JOSA A*, 29(1):105–116, 2012. doi:10.1364/JOSAA.29.000105.
- [10] Peter Kner. Phase diversity for three-dimensional imaging. *Journal of the Optical Society of America A*, 30(10):1980–1987, 2013. doi:10.1364/JOSAA.30.001980.

- [11] Visa Korkiakoski, Christoph U. Keller, Niek Doelman, Rufus Fraanje, y Michel Verhaegen. Joint optimization of phase diversity and adaptive optics: demonstration of potential. *Applied optics*, 51(1):102–113, 2012. doi:10.1364/AO.51.000102.
- [12] Joel A. Kubby, ed. *Adaptive Optics for Biological Imaging*. CRC Press, Boca Raton, 1 edition ed<sup>icón</sup>., 2013. ISBN 9781439850183.
- [13] M. G. Löfdahl y G. B. Scharmer. Wavefront sensing and image restoration from focused and defocused solar images. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 107:243–264, 1994. ISSN 0365-0138. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994A%26AS..107..243L>.
- [14] C. Maurer, A. Jesacher, S. Bernet, y M. Ritsch-Marte. What spatial light modulators can do for optical microscopy. *Laser & Photonics Reviews*, 5(1):81–101, 2011. ISSN 18638880. doi:10.1002/lpor.200900047.
- [15] Robert J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 66(3):207–211, 1976. doi:10.1364/JOSA.66.000207.
- [16] Richard G. Paxman, Timothy J. Schulz, y James R. Fienup. Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity. *JOSA A*, 9(7):1072–1085, 1992. doi:10.1364/JOSAA.9.001072.
- [17] W. O. Saxton R W Gerchberg. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35:237–250.
- [18] J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, y C. Petit. Calibration and pre-compensation of non-common path aberrations for extreme adaptive optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(8):2334, 2007. ISSN 1084-7529, 1520-8532. doi:10.1364/JOSAA.24.002334.
- [19] J.-F. Sauvage, L. Mugnier, Baptiste Paul, y Rémi Villecroze. Coronagraphic phase diversity: a simple focal plane sensor for high-contrast imaging. *Optics letters*, 37(23):4808–4810, 2012. doi:10.1364/OL.37.004808.
- [20] Jason D. Schmidt. *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in MATLAB*. SPIE, 1000 20th Street, Bellingham, WA 98227-0010 USA, 2010. ISBN 9780819483263. URL <http://ebooks.spiedigitallibrary.org/book.aspx?doi=10.1117/3.866274>.

- [21] Néstor Uribe-Patarroyo, Alberto Alvarez-Herrero, y Tomás Belenguer. Measurement of the quantum superposition state of an imaging ensemble of photons prepared in orbital angular momentum states using a phase-diversity method. *Physical Review A*, 81(5):053822, 2010. doi:10.1103/PhysRevA.81.053822.

---

CAPÍTULO  
6

## Conclusiones y perspectivas

En el marco de esta tesis se implementó un sistema para la generación de vórtices ópticos por medio de SLMs de trasmisión y un método para la caracterización y corrección de aberraciones ópticas en haces Laguerre-Gausianos. La combinación de ambos cumple con los objetivos del proyecto de grado y de los proyectos internos del grupo de investigación en Óptica Aplicada de la Universidad EAFIT. Asimismo, le deja al laboratório de Fotónica un conjunto de herramientas para el desarrollo de técnicas de micoscopía basadas en iluminación con haces portadores de OAM. Específicamente,

- Se mostró el resultado de una labor investigativa con la cual fue posible establecer un marco conceptual y teórico para la caracterización y puesta a punto de un modulador espacial de luz de trasmisión basado en cristales líquidos del tipo twisted nematic.
- Se presentó un sistema automatizado para la caracterización de pantallas de cristál líquido que se compone de una parte física, que involucra cuatro rotadores ópticos mecatrónicos, y una parte de software que adquiere los datos y los procesa para obtener las matrices de Jones que describen el elemento birrefringente para cada nivel de gris.
- Asimismo, se desarrolló y puso en proceso de registro una aplicación de software en la plataforma Matlab® para la generación de máscaras de fase arbitrarias a ser proyectadas en el SLM. Esta aplicación permite:
  - Crear máscaras de fase espiral de carga entera arbitraria sumadas a:
    - Lentes.
    - Rejillas de difracción de varios tipos.

- Aberraciones ópticas compuestas a partir de polinomios de Zernike.
- Discretizar las máscaras de fase en la cantidad de niveles deseados, y asignando valores predeterminados a cada uno.
- Utilizando una configuración de estados de polarización que producen alta modulación de fase y baja modulación de amplitud se generaron VOs en un sistema óptico 4F usando dos tipos distintos de máscaras de fase. Se concluyó que para obtener VOs de calidad es preferible usar máscaras del tipo tenedor sobre máscaras espiral y se detectó que aún con buena modulación no se corrigen del todo las aberraciones.
- Dado lo anterior se desarrolló un método traído de aplicaciones en astronomía para la detección y corrección de aberraciones ópticas en haces con vorticidad óptica.
- Este método fue validado mediante numerosas simulaciones, y experimentos y se propuso como la base para un instrumento que puede ser usado en aplicaciones metrológicas.

Finalmente, concluimos que hemos desarrollado la capacidad para detectar y corregir aberraciones ópticas en sistemas formadores de imagen iluminados con haces portadores de OAM. Adicionalmente, esto abrió una línea de trabajo conjunto con el Laboratorio de Instrumentación Espacial (LINES) del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial de España (INTA), en la cual, se espera implementar el método desarrollado en una posible plataforma para la caracterización de aberraciones en sistemas formadores de imagen complejos, típicos de la industria aeroespacial. Nuestra hipótesis es que el método de PD mejorado con VOs puede desempeñarse mejor que otras alternativas no interferométricas para el sensado de aberraciones.

## 6.1 Productos desarrollados en el transcurso del proyecto

En el transcurso del proyecto titulado *Aberraciones ópticas en haces Laguerre-Gaussianos: corrección y aplicaciones metrológicas* se desarrollaron los siguientes productos:

- El lanzamiento de un artículo científico del tipo “Letters” a una revista de alto impacto en el cual se describe un método novedoso para la detección y corrección de aberraciones. Este artículo se titula: **Optical Vortex-Enhanced coherent illumination phase diversity for phase retrieval on general imaging systems**.
- Un programa con interfáz gráfica, desarrollado en Python para la visualización de estados de polarización arbitrarios y la traducción entre distintas notaciones. Este

programa fue presentado en el evento internacional FOCUS Latinoamérica como una ponencia de Poster y se encuentra en proceso de registro de software ante la Dirección Nacional de Derecho de Autor.

- Una plataforma computacional desarrollada en el entorno Matlab® para la generación de Máscaras de fase arbitrarias a ser proyectadas en un SLM que se encuentra en proceso de registro de software ante la Dirección Nacional de Derecho de Autor.
- Un sistema automatizado de toma de medidas para la caracterización de elementos ópticos birrefringentes que consiste en:
  - Cuatro monturas motorizadas de elementos polarizadores controladas desde un microcontrolador Arduino.
  - Una plataforma de software desarrollada en el entorno LabView para la calibración y control de rotadores ópticos motorizados.
  - Una plataforma de software para la ejecución de rutinas de caracterización que involucran la medida de modulación de amplitud y de fase de un SLM ante múltiples estados de polarización.
- Un nuevo método para la caracterización de SLMs basado en funciones de minimización y una selección flexible de argumentos de entrada que aún no ha sido publicado.
- Un programa, desarrollado en Python para la simulación de propagación de la propagación de estados de polarización representados como vectores de Jones a través de matrices arbitrarias.

## 6.2 Trabajo futuro

Los métodos y herramientas desarrollados tanto en la caracterización de elementos birrefringentes, como en la generación y caracterización de VOs, permiten que los proyectos del Grupo de Óptica Aplicada cuenten con las capacidades para adelantar la investigación en la construcción de un microscopio de fase usando VOs y la corrección de aberraciones para sistemas de escritura punto a punto en aplicaciones de holografía.

Como trabajo futuro se propone estudiar la generación y caracterización, vía PD, de VOs en sistemas con iluminación parcialmente coherente

Adicionalmente, tenemos en curso investigaciones derivadas de la caracterización de SLMs con las cuales se plantea hacer un sistema de polarimetría-interferométrica para otros tipos de aplicaciones.

---

CAPÍTULO  
**A**

## Apéndice Planos de rotadores

El ensamble de la Fig. A.1 muestra los tres elementos diseñados y fabricados en el contexto del proyecto de grado, y en seguida se adjuntan los planos de fabricación de cada uno. Estos son, (a) la placa metálica sobre la cual se soportan los otros elementos, (b) la montura sobre la cual está empotrado un rodamiento de bolas, y (c) un buje de bronce que entra a presión en el rodamiento y sobre el cual se atornillan las monturas de placas retardadoras y polarizadores.

Appendix A. Planos de las piezas de rotadores.

---

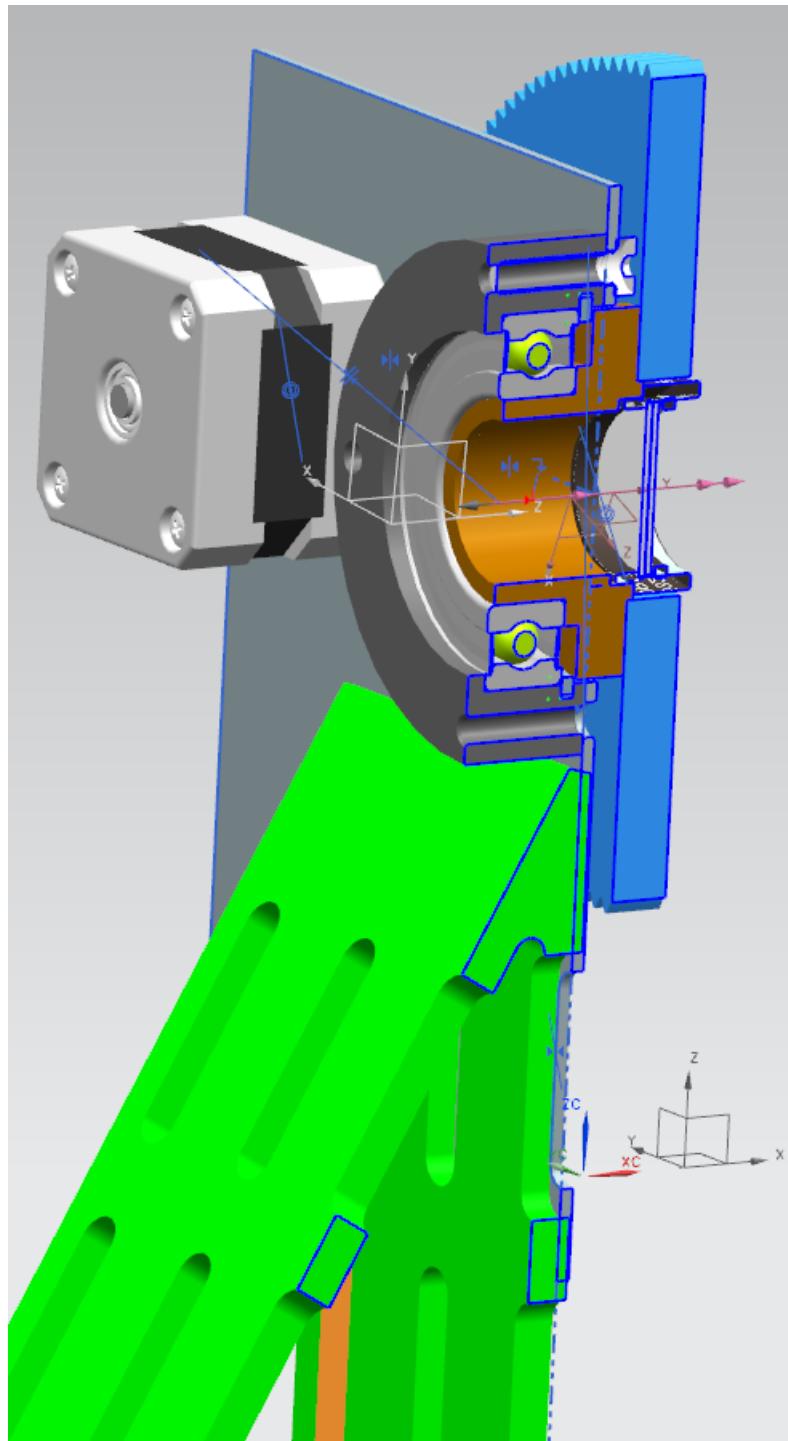
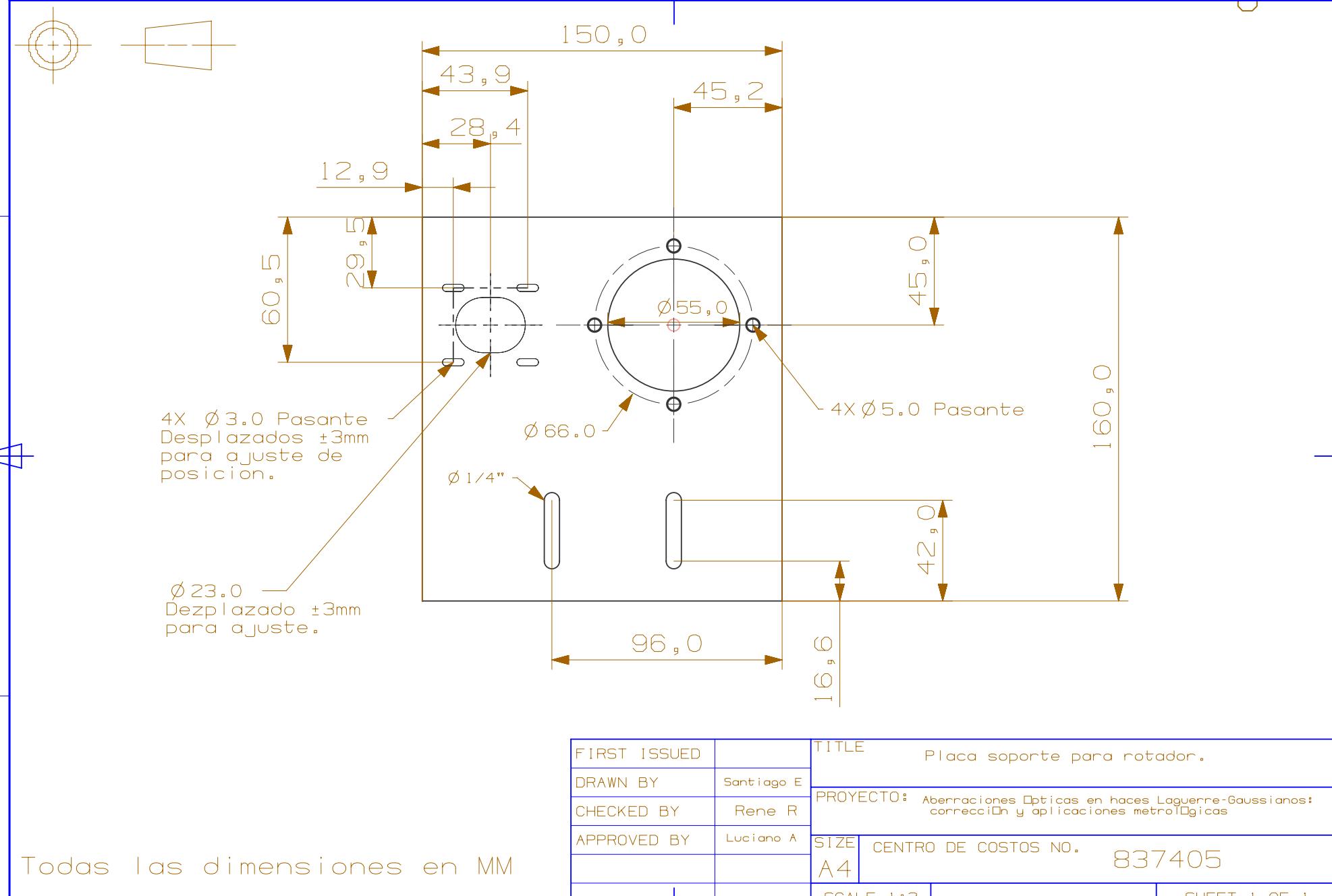


Figura A.1: Corte transversal del ensamblaje de los rotadores de elementos ópticos. (a) Placa soporte en lámina de aluminio calibre 11, (b) montura para rodamiento en bronce, y (c) buje roscado para monturas de polarizadores y retardadores.



1

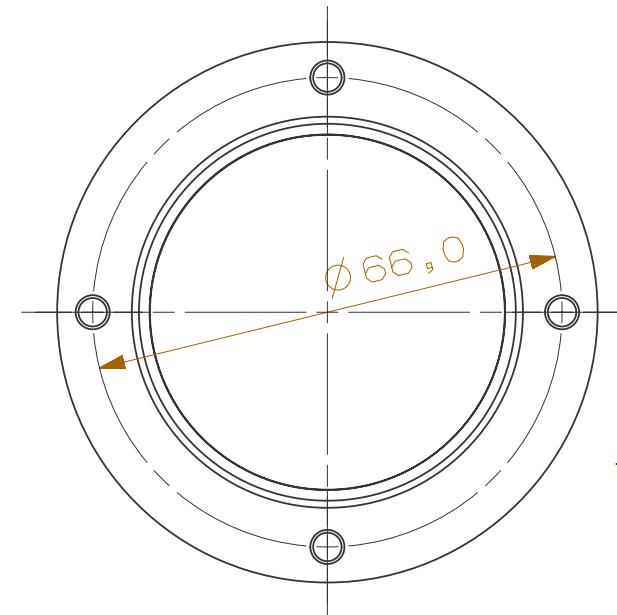
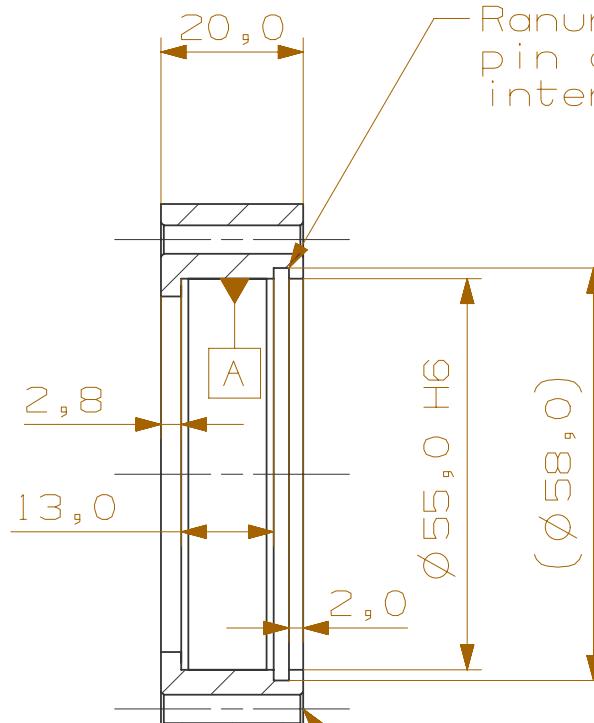
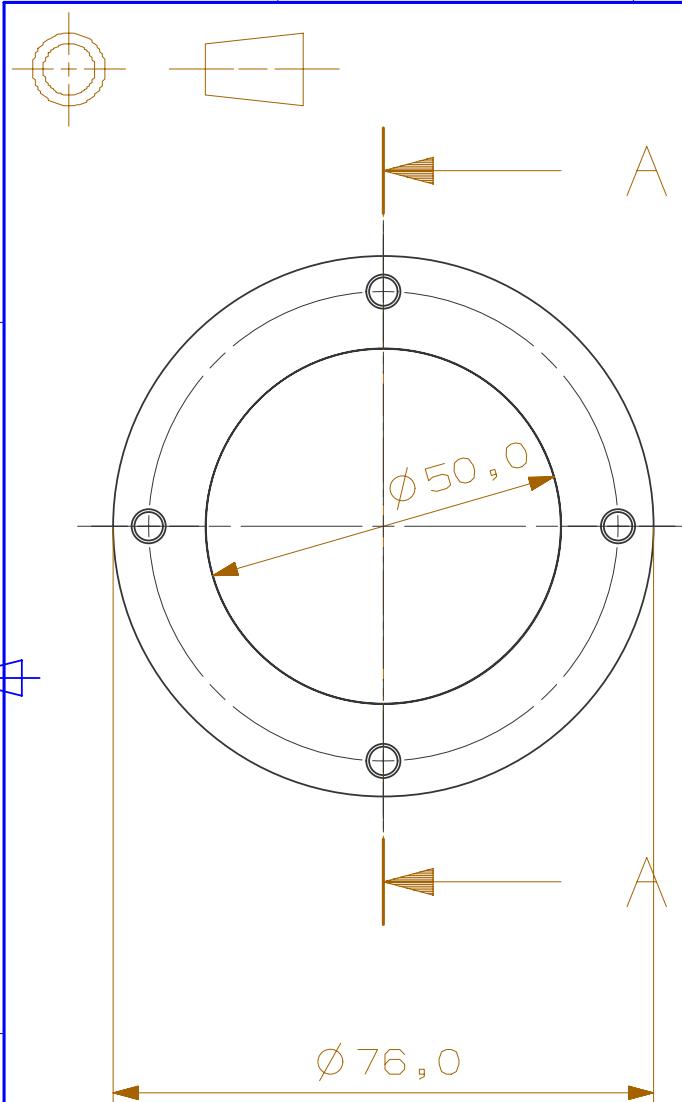
2

3

4

5

6



ALL DIMENSIONS IN MM  
3D CAD MASTER PART NAME:

FIRST ISSUED		TITLE	Montura para sujetar rodamiento	
DRAWN BY	Santiago E	PROYECTO:	Aberraciones Ópticas en haces Laguerre-Gaussianos: corrección y aplicaciones metroológicas	
CHECKED BY	Rene R			
APPROVED BY	Luciano A	SIZE	CENTRO DE COSTOS NO.	REV
		A4	837405	
		SCALE	1:1	
				SHEET 1 OF 1

1

2

3

4

5

6

1

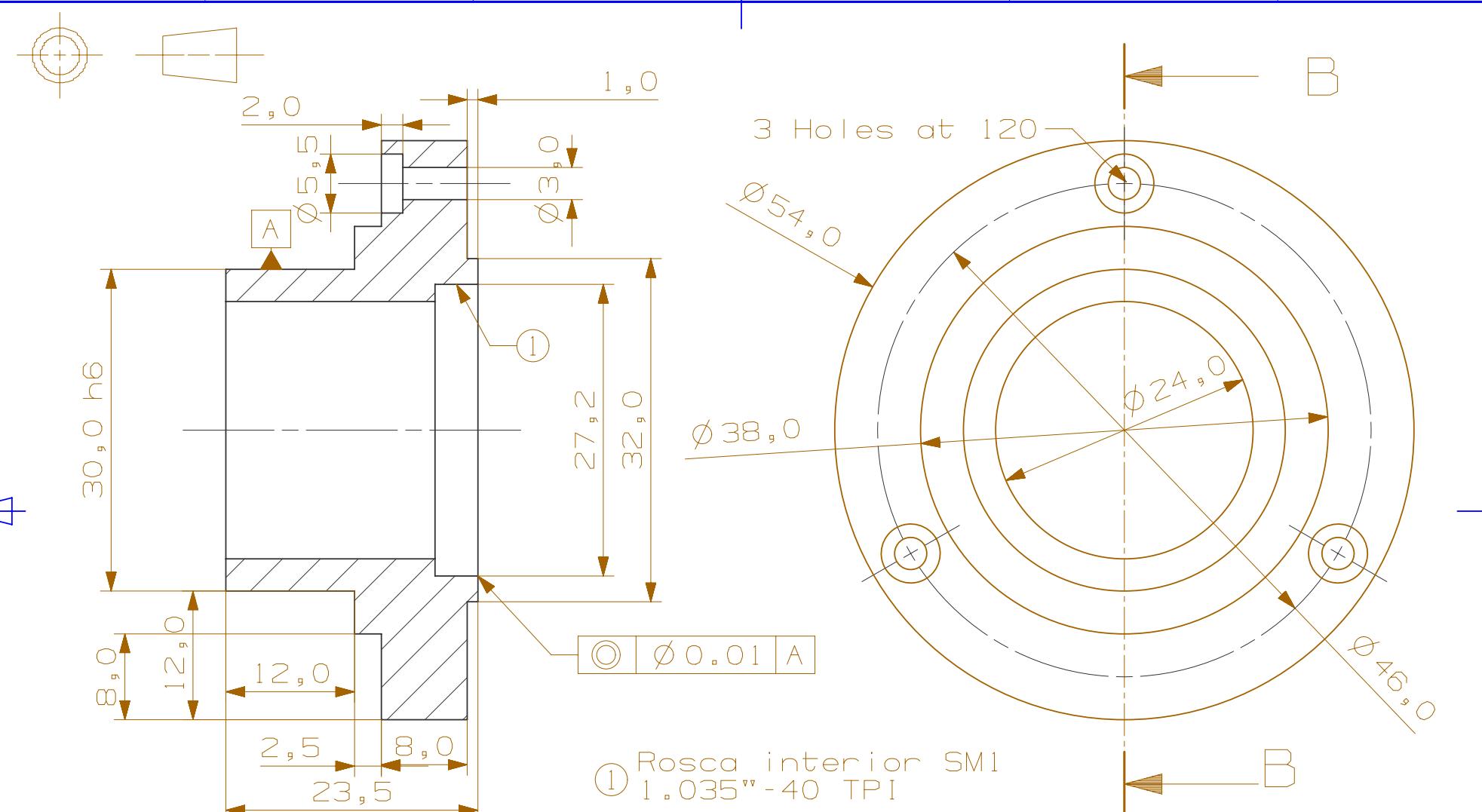
2

3

4

5

6



ALL DIMENSIONS IN MM  
3D CAD MASTER PART NAME:

FIRST ISSUED	BY	TITLE		REV
DRAWN BY	Santiago E	Buje montura para engranaje.		
CHECKED BY	Rene R	SIZE DRG NO.		
APPROVED BY	Rene R	A4	Buje_2	
		SCALE 2:1		SHEET 1 OF 1

---

CAPÍTULO  
B

# Interfáz y programas del instrumento de calibración

En este Anexo se presentan los programas por medio de los cuales se utiliza el instrumento de caracterización de SLMs.

## B.1 Interfaz de calibración de motores

Antes de realizar la caracterización de un SLM es necesario calibrar y poner a punto los rotadores de elementos ópticos. Esto implica ajustar el elemento óptico sobre el buje de cada rotador. Como no hay ninguna garantía de que los ejes rápidos de los retardadores y polarizadores hallan quedado alineados con la posición cero de su rotador respectivo, se ubica un polarizador antes de la cámara en posición vertical como analizador y se realiza una calibración de cada rotador en la cual el instrumento rota el elemento óptico hasta encontrar un mínimo de intensidad y reinicializa el contador de pasos del motor. Luego se procede a medir la cantidad de pasos por vuelta de cada motor para saber la relación entre pasos y grados de rotación que es esencial para establecer un PSG o PSD determinado.

La Fig. B.1 muestra un recorte de pantalla del instrumento de calibración de motores y cada una de sus secciones. En el recuadro (a) del instrumento se encuentra la dirección del directorio en el cual está alojada la librería de comunicación serial (copiada en la sección B.4) que envía los comandos al Arduino. Adicionalmente se muestran, en dos recuadros, los comandos seriales que están siendo enviados a la terminal de python, y los que están siendo retornados como respuesta. Luego, en el recuadro (b) hay botones para cada una de las acciones que se pueden ejecutar sobre un motor dado, y se incluyen dos botones

Appendix B. *Interfáz y programas del instrumento de calibración.*

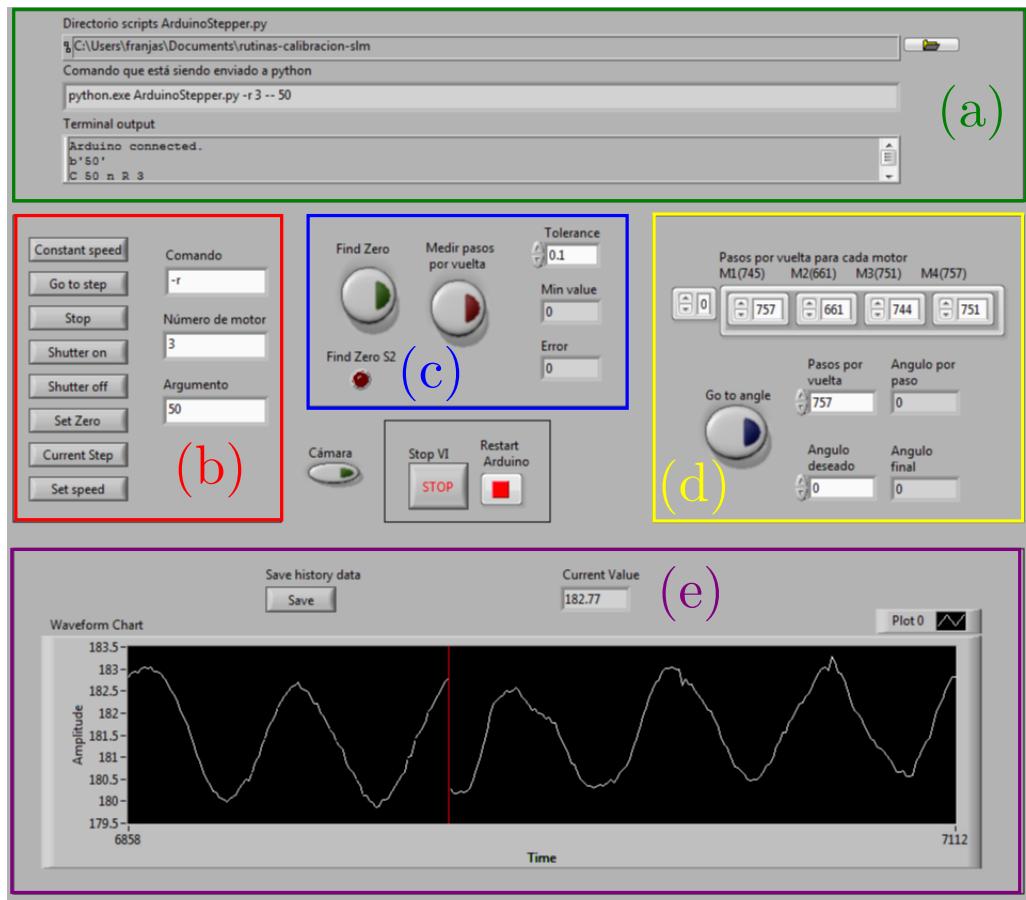


Figura B.1: Instrumento virtual para calibración de rotadores. (a) Directorios donde se aloja la rutina de comunicación serial e información enviada, (b) panel de control para usar cada función de los rotadores, y (c) botones para encontrar el cero de un rotador y para medir pasos por vuelta. (d) Permite especificar los pasos por vuelta de cada rotador, y enviar un rotador dado a una posición deseada y (e) permite visualizar la evolución de la intensidad medida por la cámara.

que controlan un obtulador que también es activado por el instrumento. Las casillas de esta sección permiten definir el número del motor al cual se está enviando el comando y el argumento asociado si aplica. En el caso que quedó registrado se estaba enviando la orden de movimiento continuo a una velocidad de 50 pasos por minuto al motor 3. Esta sección del instrumento es útil para controlar de forma manual los motores y hacer pruebas de calibración fina. A diferencia de la anterior, la sección (c) permite hacer medidas automatizadas que implican una sucesión de órdenes sobre un motor en particular. El botón de la izquierda permite medir el cero de un rotador una vez se ha ajustado el elemento óptico, y el botón de la derecha mide la distancia entre dos ceros para determinar el número de pasos que se necesita mover el motor para completar una rotación de  $360^\circ$ . Las casillas superior permite definir la tolerancia que se usa para determinar cuando se ha llegado a un valle, y las otras dos retornan el valor mínimo sensado y el error obtenido. La sección (d) del instrumento se usa una vez son conocidos los pasos por vuelta de cada motor y simplemente permite mover los rotadores usando ángulos y no pasos como argumento de entrada. Finalmente, la sección (e) contiene una gráfica que actúa como indicador e historial de la intensidad promedio medida por la cámara CCD. Este indicador permite confirmar que efectivamente cada rotador ha sido alineado con respecto al cero de su elemento óptico.

## B.2 Interfaz para toma de medidas

El instrumento para toma de medidas integra las rutinas de movimiento de rotadores mencionadas en la sección anterior con los algoritmos de medida de modulación implementados en Matlab para automatizar la medida de múltiples estados. Siendo así es un instrumento virtual con múltiples pestañas y aplicaciones que permiten tanto un control fino para medidas y observaciones simples como funciones para automatización y la toma de conjuntos de medidas.

En las Fig. B.2 y B.3 se muestran casi todas las pestañas y recuadros del instrumento virtual para tomas de medidas. De forma similar al instrumento anterior, la pestaña de directorios B.2(a) permite al usuario especificar los directorios en los cuales se han almacenado los archivos para comunicación serial escritos en Python y los de adquisición de curvas de modulación escritos en Matlab. En esta misma sección se puede seleccionar el archivo .txt que contiene la lista de medidas a realizar en un proceso automatizado de medida. El contenido de dicho archivo es una lista de configuraciones de polarizador y retardadores que generan todos los PSG y PSD. El recuadro B.2(b) muestra la pestaña en la cual se encuentra el botón para ejecutar el conjunto de medidas listadas en el archivo mencionado anteriormente. Adicionalmente, ésta contiene una casilla para escribir el

## Appendix B. Interfáz y programas del instrumento de calibración.

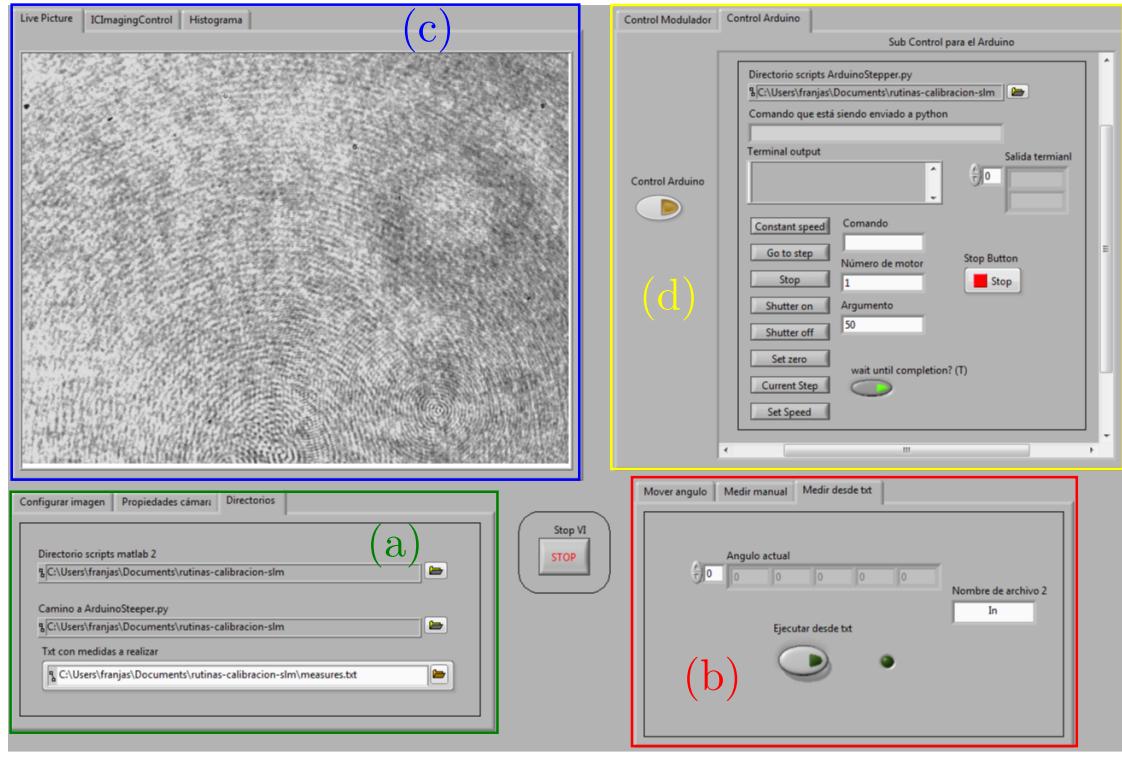


Figura B.2: Instrumento virtual para toma de medidas. (a) Directorios donde se alojan las rutinas de comunicación serial, y de medición de modulación, así como los archivos .txt con la lista de combinaciones de PSG y PSD. (b) Sección para ejecutar un conjunto de medidas de forma automatizada. (c) Monitor que muestra las imágenes detectadas por la cámara, y (d) panel de control para usar cada función de los rotadores.

nombre del archivo de salida que contiene las curvas de modulación para cada medida, y 4 casillas de lectura que indican el ángulo actual de cada rotador. El recuadro B.2(c) resalta la pestaña que contiene la ventana para visualizar las imágenes adquiridas por la cámara, y el recuadro B.2(d) es un inserto del instrumento para controlar rotadores. La ventana de visualización es de particular interés para observar y calibrar los patrones de franjas en medidas de modulación de fase.

Por otra parte, el recuadro B.3(a) contiene los botones usados para la configuración de propiedades de la cámara como ganancia, brillo y tiempo de exposición. La pestaña de B.3(b) tiene botones y casillas que permiten medir curvas de modulación de amplitud y fase de forma manual y a diferencia de la pestaña B.2(b) en ésta se pueden especificar los ángulos de cada rotador para una medida específica sin necesidad de cargar un archivo de texto. Finalmente, el recuadro B.3(c) contiene un deslizador que permite proyectar al

## Appendix B. Interfáz y programas del instrumento de calibración.

SLM una imagen con dos rectángulos, uno homogéneo con nivel de gris constante como referencia y otro con diferentes valores de gris.

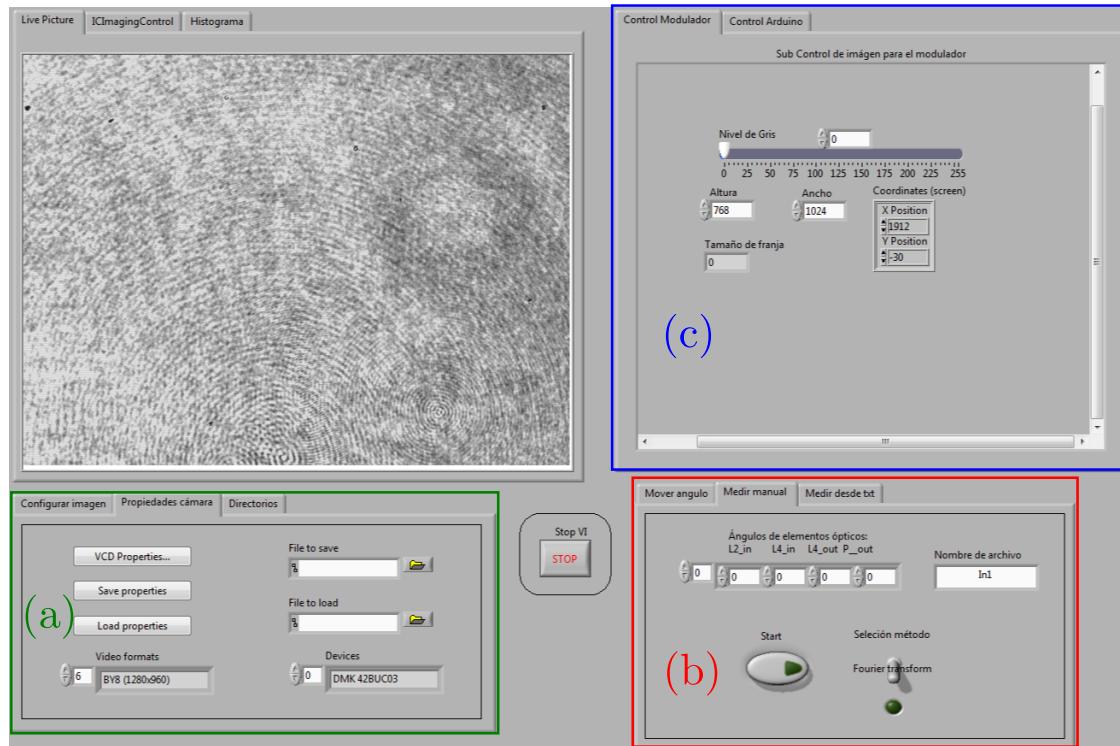


Figura B.3: Otras pestañas del Instrumento virtual para toma de medidas. (a) Configuración de las propiedades de la cámara, (b) sección para realizar medidas de modulación de forma manual y (c) pánel de control para cambiar de forma manual las imágenes proyectadas en el SLM para modulación de fase.

A continuación, en las siguientes secciones se presenta el código usado para la programación del microcontrolador Arduino Leonardo, y el de comunicación entre el computador y el microcontrolador implementado en el lenguaje Python.

### B.3 Programa del Arduino para control de motores de paso

El programa que se graba en el microcontrolador Arduino permite el control de hasta 4 motores de paso con rampas de aceleración y selección de velocidades vía comunicación serial con el computador. Los comandos que se pueden enviar al arduino hacen posible consultar, cambiar o reiniciar la posición y la velocidad de cada motor. El código se ha alojado en un repositorio en el siguiente vínculo web:

[https://goo.gl/09HFQe.](https://goo.gl/09HFQe)

### B.4 Programa de Python para comunicación serial

El programa de Python para comunicación serial es un script ejecutable que permite enviar los comandos seriales de operación del Arduino de forma simple desde una terminal. Se decidió programar esta aplicación en el lenguaje Python en vez de hacerlo directamente en el lenguaje de bloques de LabView para poder distribuir el código de forma libre y que cualquiera pudiera operar motores stepper desde arduino sin la necesidad de tener o usar un programa tan grande y pesado como LabView. Esta implementación puede servir para, en un futuro controlar los rotadores desde sistemas embebidos como las plataformas de desarrollo Raspberry Pi.

La librería que contiene los programas para comunicación con el arduino se han alojado en un repositorio de GitHub en el siguiente vínculo:

<https://goo.gl/9lNWwC>

---

CAPÍTULO  
C

# Descripción de los polinomios de Zernike

Éste apéndice ha sido tomado (previa autorización) de la tesis doctoral del profesor René Restrepo Goméz. En él se espera dar a conocer los polinomios de Zernike y mostrar cómo se puede llevar a cabo la composición de aberraciones ópticas en la base de Zernike. Además se expone una tabla con la notación de los índices de los polinomios usados en la implementación de nuestro método de PD.

Las aberraciones ópticas, conocidas como la diferencia entre la superficie del frente de onda teórico y la superficie del frente de onda real, pueden ser descritas a partir de una serie polinomial cualquiera, la más común son los llamados polinomios de Zernike<sup>3</sup> [2, 4]. Éstos son utilizados para reconstruir los mapas de frente de onda. Los polinomios de Zernike se definen a partir de la Eq. C.1 y la Eq. C.2,

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) G^m(\theta), \quad (\text{C.1})$$

$$Z_j(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) G^m(\theta) & m \neq 0 \\ R_n^0(\rho) & m = 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

donde  $n$  y  $m$  denotan la variación radial y la frecuencia azimutal respectivamente. El

---

<sup>3</sup>Los polinomios de Zernike fueron desarrollados por el holandés Fritz Zernike a quien le fue otorgado el premio Nobel de Física en 1953.

índice  $j$  se calcula con las variables  $m$  y  $n$  a partir de la Eq. C.3,

$$j = \frac{n^2 + 2n + m}{2}. \quad (\text{C.3})$$

Y, las funciones radial y azimutal están definidas como puede observarse en la Eq. C.4 y la Eq. C.5, respectivamente,

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)! r^{n-2k}}{k! ((\frac{n+m}{2}) - k)! ((\frac{m-n}{2}) - k)!}, \quad (\text{C.4})$$

$$G^m(\theta) = \begin{cases} \sin(m\theta) & \text{si } j \text{ es par} \\ \cos(m\theta) & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Por último, debe cumplirse la relación de la Eq. C.6, es decir, los polinomios están normalizados sobre el círculo unitario,

$$|Z_j(\rho, \theta)| \leq 1. \quad (\text{C.6})$$

La razón por la cual se puede describir cualquier frente de onda en términos de la Eq. C.1, se debe a que dichos polinomios son linealmente independientes entre sí, dado que resultan del producto de dos funciones, una de las cuales varía en función del radio de una circunferencia unitaria, mientras que la otra varía en función del meridiano de la misma, y en consecuencia resultan ser ortogonales e independientes linealmente [1].

La Tabla C.1 muestra los primeros 36 polinomios de Zernike. Para la construcción de la tabla, se ha utilizado la convención de Noll [3]. La fase puede ser parametrizada a través del frente de onda usando los polinomios de Zernike, y está descrita matemáticamente como en la Eq. C.7,

$$\phi(\rho, \theta) = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j(\rho, \theta). \quad (\text{C.7})$$

Una aberración típica parametrizada a través de los polinomios de Zernike es mostrada en la Fig. C.1.

Appendix B. *Interfáz y programas del instrumento de calibración.*

---

<b>Z<sub>j</sub></b>	<b>Nombre</b>	<b>Z<sub>n</sub><sup>m</sup>(ρ, θ)</b>	<b>Índice n</b>	<b>Índice m</b>
Z <sub>1</sub>	piston	1	0	0
Z <sub>2</sub>	x tilt	$2\rho \cos \theta$	1	1
Z <sub>3</sub>	y tilt	$2\rho \sin \theta$	1	1
Z <sub>4</sub>	defocus	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	2	0
Z <sub>5</sub>	y primary astigmatism	$\sqrt{6}\rho^2 \sin(2\theta)$	2	2
Z <sub>6</sub>	x primary astigmatism	$\sqrt{6}\rho^2 \cos(2\theta)$	2	2
Z <sub>7</sub>	y primary coma	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	3	1
Z <sub>8</sub>	x primary coma	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	3	1
Z <sub>9</sub>	y trefoil	$\sqrt{8}\rho^3 \sin(3\theta)$	3	3
Z <sub>10</sub>	x trefoil	$\sqrt{8}\rho^3 \cos(3\theta)$	3	3
Z <sub>11</sub>	primary spherical	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	4	0
Z <sub>12</sub>	x secondary astigmatism	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos(2\theta)$	4	2
Z <sub>13</sub>	y secondary astigmatism	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin(2\theta)$	4	2
Z <sub>14</sub>	x tetrafoil	$\sqrt{10}\rho^4 \cos(4\theta)$	4	4
Z <sub>15</sub>	y tetrafoil	$\sqrt{10}\rho^4 \sin(4\theta)$	4	4
Z <sub>16</sub>	x secondary coma	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	5	1
Z <sub>17</sub>	y secondary coma	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$	5	1
Z <sub>18</sub>	x secondary trefoil	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos(3\theta)$	5	3
Z <sub>19</sub>	y secondary trefoil	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \sin(3\theta)$	5	3
Z <sub>20</sub>	x pentafoil	$\sqrt{12}\rho^5 \cos(5\theta)$	5	5
Z <sub>21</sub>	y pentafoil	$\sqrt{12}\rho^5 \sin(5\theta)$	5	5
Z <sub>22</sub>	secondary spherical	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	6	0
Z <sub>23</sub>	y tertiary astigmatism	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \sin(2\theta)$	6	2
Z <sub>24</sub>	x tertiary astigmatism	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \cos(2\theta)$	6	2
Z <sub>25</sub>	y secondary tetrafoil	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4) \sin(4\theta)$	6	4
Z <sub>26</sub>	x secondary tetrafoil	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4) \cos(4\theta)$	6	4
Z <sub>27</sub>		$\sqrt{14}\rho^6 \sin(6\theta)$	6	6
Z <sub>28</sub>		$\sqrt{14}\rho^6 \cos(6\theta)$	6	6
Z <sub>29</sub>	y tertiary coma	$4(35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho) \sin \theta$	7	1
Z <sub>30</sub>	x tertiary coma	$4(35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho) \cos \theta$	7	1
Z <sub>31</sub>		$4(21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3) \sin(3\theta)$	7	3
Z <sub>32</sub>		$4(21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3) \cos(3\theta)$	7	3
Z <sub>33</sub>		$4(7\rho^7 - 6\rho^5) \sin(5\theta)$	7	5
Z <sub>34</sub>		$4(7\rho^7 - 6\rho^5) \cos(5\theta)$	7	5
Z <sub>35</sub>		$4\rho^7 \sin(7\theta)$	7	7
Z <sub>36</sub>		$4\rho^7 \cos(7\theta)$	7	7
Z <sub>37</sub>	tertiary spherical	$3(70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1)$	8	0

Cuadro C.1: Los primeros 36 polinomios de Zernike

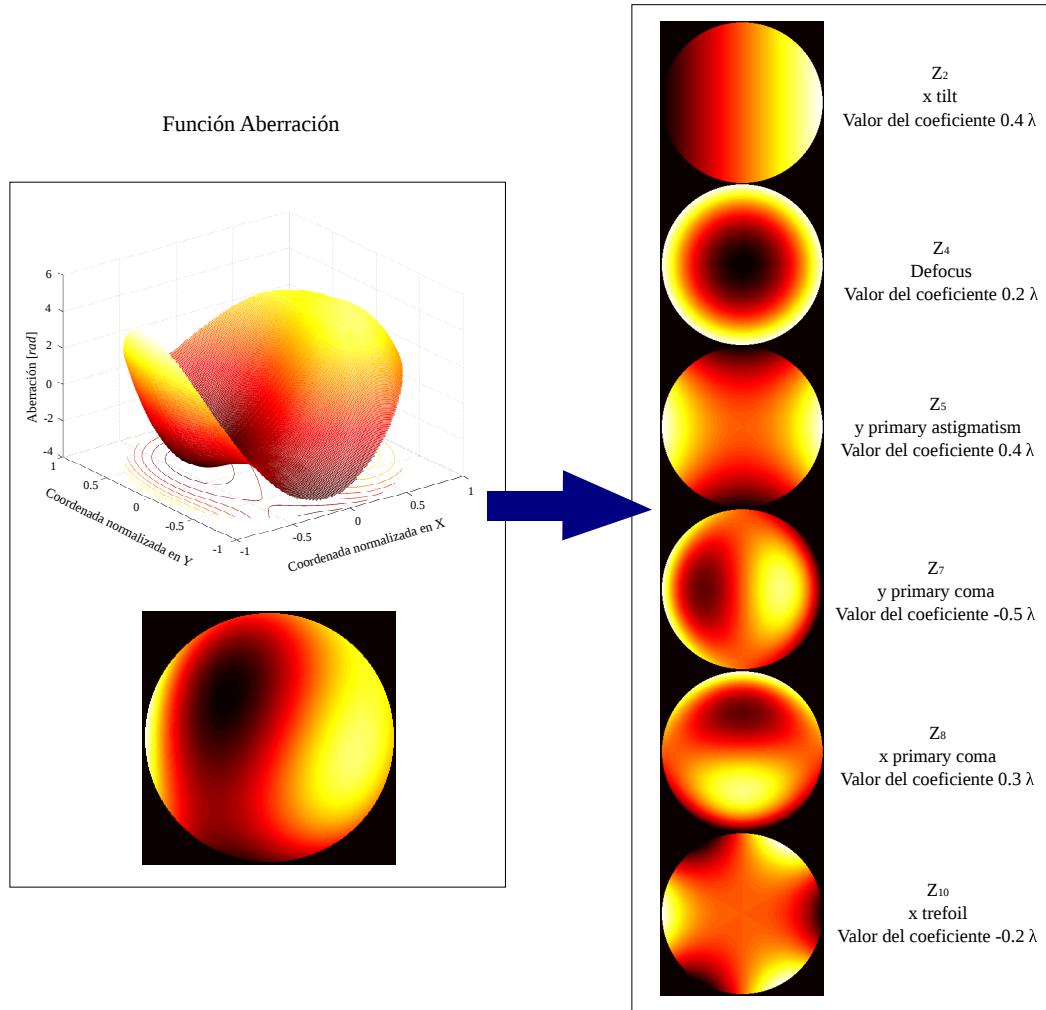


Figura C.1: Ejemplo de una aberración del frente de onda parametrizada, a través de la suma de unos Polinomios de Zernike, cada uno con diferente peso.

## Bibliografía

- [1] G. Ming Dai. *Wavefront Optics for Vision Correction*. SPIE Press, 1st ed.<sup>ón</sup>, 2008.
- [2] V. N. Mahajan. *Aberration theory made simple*. SPIE Press, 2nd ed.<sup>ón</sup>, 2011.
- [3] R. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 66:207, 1976.
- [4] J. D. Schmidt. *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation*. SPIE Press, 1st ed.<sup>ón</sup>, 2010.