Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Ensemble de matrices

1.1 Définitions et notations

Définition 1 *Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle une matrice A à n lignes et p colonnes (ou de type (n,p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$ de la forme:*

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i^{ème} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j^{ème} \text{ colonne} \end{array} & \end{array}$$

- *Les a_{ij} sont appelés les coeficients de la matrice A et on écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$.*
- *On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices du type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
- *A est une matrice nulle si $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$. On note souvent cette matrice $A = 0_{n,p}$.*
- *Si $p = 1$, les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés matrices colonnes.*
- *Si $n = 1$, les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés matrices lignes.*
- *Si $n = p$, la matrice A est dite matrice carrée d'ordre n.*
- *On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les coefficients a_{ii} de A, $1 \le i \le n$, forment ce qu'on appelle la diagonale de$A$.*

Remarque 2 *Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites égales si $\forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$.*
Attention: *on ne parle de matrices égales que lorsqu'elles sont de même type.*

Exemples 3 *1.* $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -4 & i \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée d'ordre* 2 *à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *est une matrice ligne de type* $(1,4)$.

Définition 4 *(Matrices carrées particulières) Soit* $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *La matrice* A *est dite diagonale si* $a_{ij}=0$ *pour* $i \neq j$: *c'est-à-dire*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple de matrice diagonale est la matrice identité I_n *d'ordre* n *donnée par*

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $I_n=(\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *avec* $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & si\ i\neq j \end{cases}$ *(symbole de Kronecker).*

(ii) *La matrice* A *est dite triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) si* $a_{ij}=0$ *si* $i>j$ *(resp. si* $i<j$*) : c'est-à-dire*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure — *est triangulaire inférieure*

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 5 *Soit* $A=(a_{ij})$ *et* $B=(b_{ij})$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle somme de* A *et* B, *la matrice* $C=(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *définie par:*

$$\forall\ i \in \{1,...,n\}\ , \forall\ j \in \{1,...,p\}, \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

On note $C=A+B$.

Attention !! On ne peut additionner que des matrices de même types.

Propriétés 6 *Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*

1. *$+$ est commutative: $A + B = B + A$.*
2. *$+$ est associative: $(A + B) + C = A + (B + C)$.*
3. *$0_{n,p}$ est l'élément neutre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour la loi $+$: $A + 0_{n,p} = A$.*
4. *Si $A = (a_{ij})$ alors l'élément symétrique de A pour loi $+$ est la matrice $-A = (-a_{ij})$.*

1.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 7 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle multiplication de la matrice A par le scalaire λ la matrice $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par:*

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ \forall\, j \in \{1, ..., p\},\quad d_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

On note $D = \lambda A$.

Propriétés 8 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a:*

1. *$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.*
2. *$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*
3. *$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$.*

Théorème 9 *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np.*
De plus, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donnée par $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ où E_{ij} est la matrice élémentaire d'indice (i, j) donnée par

$$\begin{array}{cc} E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & 1 & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} & \longleftarrow i^{\grave{e}me} \text{ ligne} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j^{\grave{e}me} \text{ colonne} \end{array} & \end{array}$$

Exemple 10 *$\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension 6. Expliciter sa base canonique.*

1.2.3 Produit de deux matrices

Définition 11 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle produit de A et B la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq q.$$

On note $C = AB$.
En pratique, pour calculer c_{ij} on considère la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B et on fait la somme de leurs produits terme à terme

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}.$$

Donc pour que le produit AB ait un sens, il faut que <u>le nombre de ligne de B soit égal au nombre de colonne de A</u>.
De plus, on a

$$\boxed{\text{Matrice de type}(n, \mathbf{p}) \times \text{Matrice de type}(\mathbf{p}, q) = \text{Matrice de type}(n, q)}$$

Exercice 12 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer si possible AB et BA.*

Propriétés 13

1. *Le produit matriciel est associatif: soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :*
$$A(BC) = (AB)C.$$

2. *Le produit est distributif par rapport à l'addition: si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a :*
$$A(B + C) = AB + AC$$
et si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a :
$$(A + B)C = AC + BC.$$

3. *L'élément unité: soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*
$$AI_n = I_nA = A.$$

Théorème 14 *$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un anneau. De plus, les éléments neutres pour la loi $+$ et la loi $.$ sont respectivement la matrice nulle 0_n et la matrice identité I_n.*

Remarque 15 *Pour $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni commutatif, ni intégre. En effet, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.4 Puissance d'une matrice carrée

Définition 16 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la puissance $k^{\text{ème}}$ de A est la matrice noté A^k définie par*

$$A^k = \underbrace{A.A...A}_{k\ fois} \ \ pour\ k \in \mathbb{N}^* \ et\ A^0 = I_n.$$

Exemple 17 *Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Propriétés 18 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p, q \in \mathbb{N}$, on a:*

$$A^p A^q = A^{p+q} \ \ et\ \ (A^p)^q = A^{pq}.$$

Si de plus, <u>A et B commutent</u> alors on a la formule de binôme de Newton suivante:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathcal{C}_p^k A^k B^{p-k}.$$

Exemple 19 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
On remarque que $N^2 = 0_3$. Puisque $I_3.N = N.I_3$ alors on en déduit d'après la formule de binôme de Newton que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k N^k = \mathcal{C}_n^0 I_3 + \mathcal{C}_n^1 N = I_3 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Matrices carrées inversibles

Définition 20 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice B est unique et s'appelle l'inverse de A. On note $B = A^{-1}$.

Notation 21 *On note par* $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices carrées inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et s'appelle* *le groupe linéaire d'ordre* n.

Propriétés 22 *Soit* $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *On a*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB *est inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A^p *est inversible et* $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

Exemple 23 *Soit* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *où les* λ_i, *pour* $1 \leq i \leq n$ *sont des scalaires non nuls alors* D *est inversible et*

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et soit $B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Un calcul montre que

$$A.B = B.A = (ad - bc)I_2.$$

Le scalaire $(ad - bc)$ est appelé le déterminant de A et est noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. De plus, on a le résultat suivant:

Théorème 24 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A \text{ est inversible } \iff \det A = ad - bc \neq 0.$$

Dans ce cas, l'inverse de A *est* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Preuve. " $\Longrightarrow$ " Supposons que $\det(A) \neq 0$. L'égalité précédemment établie $A.B = B.A = \det(A).I_2$ montre que A est inversible.
" $\Longleftarrow$ " Supposons que $\det(A) = 0$ et que A soit inversible. Alors en multipliant à gauche l'égalité $A.B = \det(A).I_2$ par A^{-1}, on obtient

$$B = A^{-1}(A.B) = A^{-1}[\det(A).I_2].$$

Puisque $\det(A) = 0$, alors la matrice B est nulle, ce qui contredit le faite que A soit inversible. ■

1.4 Transposée d'une matrice

Définition 25 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice, notée ${}^tA$, de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes. Ainsi*

$$\text{si} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \quad \text{alors} \quad {}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le i\le n}}.$$

Exemple 26 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 27

1. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.*
2. *Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a*
$$ {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB.$$
3. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a*
$$ {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA.$$
4. *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a*
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

Preuve.

1. Si la matrice $A = (a_{ij})_{n,p}$, alors ${}^tA = (a_{ji})_{p,n}$ et donc ${}^t({}^tA) = (a_{ij})_{n,p} = A$.
2. Si $A = (a_{ij})_{n,p}$ et $B = (b_{ij})_{n,p}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors la matrice $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{n,p}$. Ainsi
$$ {}^t(\lambda A + \mu B) = (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})_{p,n} = \lambda (a_{ji})_{p,n} + \mu (b_{ji})_{p,n} = \lambda {}^tA + \mu {}^tB.$$
3. Soit $A = (a_{ij})_{n,p}$ et $B = (b_{ij})_{p,q}$ alors $AB = (c_{ij})_{n,q}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Par conséquent $C = {}^t(AB)$ a pour terme général $c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}$.

   D'autre part, les matrices ${}^tA = (a'_{ij})_{n,p}$ et ${}^tB = (b'_{ij})_{p,q}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$ et $b'_{ij} = b_{ji}$. Ainsi la matrice $D = {}^tB\,{}^tA$ a pour terme général
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = c_{ji}.$$
   Ce qui prouve que $C = D$ ou encore ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

4. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$^tA.^t\left(A^{-1}\right) =^t (A^{-1}.A) =^t I_n = I_n$$

et

$$^t\left(A^{-1}\right).^tA =^t (A.A^{-1}) =^t I_n = I_n.$$

Donc $^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a $\left(^tA\right)^{-1} =^t \left(A^{-1}\right)$.

■

Définition 28 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *La matrice A est dite symétrique si $^tA = A$, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.*
2. *La matrice A est dite antisymétrique si $^tA = -A$, c'est-à-dire $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.*

   En particulier, si A est antisymétrique alors $a_{ii} = 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

Proposition 29 *L'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 30 *Montrer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2 Matrice d'une application linéaire

2.1 Définitions et remarques

Définition 31 *(Représentation matricielle d'une famille de vecteurs)*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E. Soit $S = (u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E et soit $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. On appelle la matrice de la famille S dans la base $\mathcal{B}$ et on note $M_{\mathcal{B}}(S)$ la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \textit{Les composantes de } u_j \end{array}$$

En particulier, si x est un vecteur de E tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ alors la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dans la suite, E et F désignent deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie respectivement égale à p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, .., e'_n)$ une base de F.

Définition 32 *(Représentation matricielle d'une application linéaire)*
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), ..., f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$. Ainsi si pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, on note $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e'_n \end{array}$$

- ▹ *Le nombre de colonnes de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est égal à la dimension de l'espace de départ et le nombre de lignes est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.*
- ▹ *Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est notée $M_{\mathcal{B}}(f)$.*

Exemples 33

1. *La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.*
2. *Soit id_E l'application linéaire identité de E et I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors*
$$M_{\mathcal{B}}(id_E) = I_p.$$
3. *Soit*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
alors la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Attention ! *la matrice dépend des bases choisies.*
En effet, soit $\mathcal{C}' = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ alors
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 34 *(Expression matricielle d'une application linéaire)*
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors, pour $x \in E$ on a

$$M_{\mathcal{C}}(f(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).M_{\mathcal{B}}(x)$$

Exercice 35 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ *de matrice* A *relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Déterminer* $f(P)$ *pour* $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Remarque 36 *Une application linéaire* f *est complètement déterminée, si on connait l'image de chaque vecteur de la base de l'ensemble de départ, par suite*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longmapsto & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est bijective. On peut exploiter dans les deux sens cette correspondance entre matrices et application linéaires. Plus précisément tout problème portant sur des applications linéaires en dimension finie peut avoir une traduction matricielle et réciproquement tout problème portant sur des matrices peut être interprété en terme d'applications linéaires.

2.2 Liens avec le calcul matriciel

Proposition 37 *Soit* f *et* g *deux éléments de* $\mathcal{L}(E,F)$ *et* $\lambda \in K$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) & = & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) \\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda.f) & = & \lambda.M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f). \end{array}$$

Conséquence 38 *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est linéaire comme elle est bijective, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np.$$

Proposition 39 *(Matrice de la composée de deux applications linéaires)*
Soit E, F *et* G *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie. Soit* B *une base de* E, $\mathcal{B}'$ *une base de* F *et* $\mathcal{B}''$ *une base de* G. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F,G)$, *alors on a*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g).M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

Proposition 40 *(Matrice d'un isomorphisme)*
Soit E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de même dimension. Soit* B *une base de* E, $\mathcal{C}$ *une base de* F *et* $f \in \mathcal{L}(E,F)$, *alors on a*

$$f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F \Longleftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas, $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = [M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]^{-1}$.

Preuve. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors .

$$f \circ f^{-1} = id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id_E.$$

Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = I_n.$$

On en déduit que $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$ est inversible et $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = [M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]^{-1}$.
Réciproquement, si $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible. Notons g l'unique application linéaire de F dans E pour laquelle $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. On a alors

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A^{-1}A = I_n = M_{\mathcal{B}}(id_E).$$

Alors $g \circ f = id_E$. De même, on montre que $f \circ g = id_F$. Par suite, f est bijective. ■

3 Rang d'une matrice

Définition 41 *On appelle rang de A et on note $\operatorname{rg} A$, le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de A. Ainsi si on note $(C_1, C_2, ..., C_p)$ les colonnes de la matrice A alors*

$$\operatorname{rg} A = rg(C_1, C_2, ..., C_p).$$

Remarque 42 *Supposons que A est la matrice d'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Comme la famille $f(\mathcal{B})$ forme les colonnes de A alors*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(f(B)) = \operatorname{rg} f.$$

Propriétés 43

1. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg} A \leq \inf(n, p)$.*
2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\operatorname{rg} A = n$.*
3. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}^t A = \operatorname{rg} A$.*

Conséquence 44 *La dernière propriété montre que pour calculer le rang d'une matrice, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes ou bien sur les lignes.*

4 Matrice de changement de bases

4.1 Définition et propriétés

Définition 45 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $P_{\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}'}$.*

Ainsi si $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,...,e'_n)$ et si pour $j\in\{1,...,n\}$, $(p_{1j},p_{2j},...,p_{nj})$ sont les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n_1} & p_{n_2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Exemple 46 *Soit $B=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B'=(e'_1,e'_2)$ avec $e'_1=2e_1+5e_2$, $e'_2=e_1+7e_2$. Alors*

$$P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 47 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.*

1. *$P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}=M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$.*
2. *$P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}'\hookrightarrow\mathcal{B}}$.*
3. *Soit x un vecteur de E, alors*

$$M_{\mathcal{B}}(x)=P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}.M_{\mathcal{B}'}(x).$$

Preuve. 1. La propriété 1 découle de la définition même de la matrice de passage et de $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$.
2. Comme l'application linéaire id_E est bijective, on en déduit que $P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}$ est inversible et on a

$$(P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'})^{-1}=(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E))^{-1}=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)=P_{\mathcal{B}'\hookrightarrow\mathcal{B}}.$$

3. En appliquant la proposition 34 pour $f=id_E$ alors pour tout $x\in E$, on a

$$M_{\mathcal{B}}(x)=M_{\mathcal{B}}\left(id_E(x)\right)=M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E).M_{\mathcal{B}'}(x)=P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}.M_{\mathcal{B}'}(x).$$

■

Exemple 48 *On considère l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et soit $\mathcal{B}'=(1,X-1,(X-1)^2)$.*
Il est clair que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Cherchons les coordonnées de $P=1-2X+3X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$. Un calcul simple montre que

$$P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad P_{\mathcal{B}'\hookrightarrow\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on note par $(\ a,\ \ b,\ \ c\ )$ les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D'où $P=2+4(X-1)+3(X-1)^2$.

4.2 Action d'un changement de base sur la matrice représentant une application linéaire

Théorème 49 *Soit E un $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on a la relation*

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P.$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dit que $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$ sont deux matrices semblables.

Preuve. Puisque $P = P_{\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$ et $P^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$, on trouve alors que

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}'} &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f \circ id_E) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}(f). \end{aligned}$$

■

Définition 50 *Deux matrices carrées A, B d'ordre n sont dites semblables, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$.*
En particulier, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$ sont deux matrices semblables.

Propriétés 51 *Soit A et B deux matrices semblables d'ordre n et soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$.*

1. *Les matrices A et B ont le même rang.*
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A = P^{-1}B^kP$.*