

Phân tích Thuật toán Số học và Ứng dụng Sàng Eratosthenes

Giải mã 20 bài tập Codeforces Rating 800-1000

Slide-Codeforce

Ngày 22 tháng 1 năm 2026

Nội dung chính

- 1 Cơ sở Lý thuyết
- 2 Giải mã 20 Bài tập (Rating 800)
- 3 Giải mã 20 Bài tập (Rating 900)
- 4 Giải mã 20 Bài tập (Rating 1000)
- 5 Tổng kết

Tổng quan về Số học trong CP

Tầm quan trọng

Số học là kiến thức nền tảng quan trọng nhất để vượt qua rating 800-1000.

- **Ứng dụng:** Mã hóa (Hashing), Phân tích thừa số, Lý thuyết trò chơi.
- **Thách thức:** Giới hạn thời gian (1.0s - 2.0s) và bộ nhớ.

Độ phức tạp cho phép

- $N \leq 10^5 \rightarrow O(N \log N)$ hoặc $O(N)$.
- $N \leq 10^9 \rightarrow O(\sqrt{N})$.
- $N \leq 10^{18} \rightarrow O(\log N)$ hoặc $O(1)$.

Kiểm tra Nguyên tố: $O(\sqrt{N})$

Định lý

Nếu N là hợp số, nó có ít nhất một ước số $\leq \sqrt{N}$.

```
1 bool isPrime(long long n) {  
2     if (n <= 1) return false;  
3     if (n == 2) return true;  
4     if (n % 2 == 0) return false; // Bo so chan > 2  
5     // Chi duyet so le  
6     for (long long i = 3; i * i <= n; i += 2) {  
7         if (n % i == 0) return false;  
8     }  
9     return true;  
10 }  
11
```

Listing 1: Hàm kiểm tra nguyên tố tối ưu

Kiểm tra Nguyên tố: $O(\sqrt{N})$

Định lý

Nếu N là hợp số, nó có ít nhất một ước số $\leq \sqrt{N}$.

```
1 bool isPrime(long long n) {  
2     if (n <= 1) return false;  
3     if (n == 2) return true;  
4     if (n % 2 == 0) return false; // Bo so chan > 2  
5     // Chi duyet so le  
6     for (long long i = 3; i * i <= n; i += 2) {  
7         if (n % i == 0) return false;  
8     }  
9     return true;  
10 }  
11
```

Listing 2: Hàm kiểm tra nguyên tố tối ưu

Lưu ý

Dùng $i * i <= n$ thay vì $\text{sqrt}(n)$ để tránh sai số. Cần thận trọng số nếu i lớn.

Sàng Eratosthenes (Sieve)

Nguyên lý

Thay vì kiểm tra từng số, ta loại bỏ tất cả các bội số của các số nguyên tố đã biết.

```
1 const int MAXN = 10000005;
2 std::vector<bool> is_prime(MAXN, true);
3
4 void sieve() {
5     is_prime[0] = is_prime[1] = false;
6     for (int i = 2; i * i < MAXN; i++) {
7         if (is_prime[i]) {
8             // Bat dau tu i*i de toi uu
9             for (int j = i * i; j < MAXN; j += i) {
10                 is_prime[j] = false;
11             }
12         }
13     }
14 }
15
```

Listing 3: Cài đặt Sàng

1. Bachgold Problem (749A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên dương n . Biểu diễn n thành tổng của **nhiều số nguyên tố nhất** có thể.

1. Bachgold Problem (749A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên dương n . Biểu diễn n thành tổng của **nhieu số nguyên tố nhất** có thể.

Phân tích & Giải thuật

- Để số lượng số hạng là nhiều nhất \rightarrow chọn số nguyên tố nhỏ nhất.
- Số nguyên tố nhỏ nhất là 2.
- **Nếu n chẵn:** $n = 2 + 2 + \dots + 2$. Số lượng là $n/2$.
- **Nếu n lẻ:** Cần ít nhất một số lẻ để tổng là lẻ. Số lẻ nhỏ nhất là 3.
- $n = 3 + (n - 3)$. Phần $(n - 3)$ là chẵn \rightarrow chia hết cho 2.

Kết luận: In $n/2$ nếu chẵn. Nếu lẻ, in một số 3 và $(n - 3)/2$ số 2.

2. Design Tutorial: Learn from Math (472A) - Rating 800

Đề bài

Cho n ($n \geq 12$). Tìm hai **hợp số** x và y sao cho $x + y = n$.

2. Design Tutorial: Learn from Math (472A) - Rating 800

Đề bài

Cho n ($n \geq 12$). Tìm hai **hợp số** x và y sao cho $x + y = n$.

Phân tích & Giải thuật

- Hợp số là số có ước khác 1 và chính nó.
- **Nếu n chẵn:** Chọn $x = 4$ (hợp số nhỏ nhất). Vì $n \geq 12$ chẵn $\rightarrow y = n - 4$ là số chẵn lớn hơn 8 $\rightarrow y$ là hợp số.
- **Nếu n lẻ:** Chọn $x = 9$ (hợp số lẻ nhỏ nhất). Vì n lẻ $\rightarrow y = n - 9$ là số chẵn. Vì $n \geq 12 \rightarrow y \geq 3$, và y chẵn nên y là hợp số.

Độ phức tạp: $O(1)$.

3. Maximum GCD (1370A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên n . Tìm giá trị lớn nhất của $\gcd(a, b)$ với $1 \leq a < b \leq n$.

3. Maximum GCD (1370A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên n . Tìm giá trị lớn nhất của $\gcd(a, b)$ với $1 \leq a < b \leq n$.

Phân tích & Giải thuật

- Gọi $g = \gcd(a, b)$. Khi đó a và b đều là bội của g .
- Vì $a < b$, cặp bội số nhỏ nhất là $a = g$ và $b = 2g$.
- Để $b \leq n$, ta phải có $2g \leq n \Rightarrow g \leq n/2$.

Giải pháp: Giá trị lớn nhất là $\lfloor n/2 \rfloor$. In ra $n/2$.

4. EhAb AnD gCd (1325A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên x . Tìm a, b sao cho $\text{GCD}(a, b) + \text{LCM}(a, b) = x$.

4. EhAb AnD gCd (1325A) - Rating 800

Đề bài

Cho số nguyên x . Tìm a, b sao cho $\text{GCD}(a, b) + \text{LCM}(a, b) = x$.

Tư duy

- Ta biết $\text{GCD}(1, k) = 1$ và $\text{LCM}(1, k) = k$.
- Chọn $a = 1$. Phương trình trở thành:
$$1 + \text{LCM}(1, b) = x \Rightarrow 1 + b = x \Rightarrow b = x - 1.$$

Giải pháp: Luôn in ra cặp $(1, x - 1)$. Độ phức tạp $O(1)$.

5. Subtract or Divide (1451A) - Rating 800

Đề bài

Biến đổi n thành 1 với số bước ít nhất. Mỗi bước: giảm 1 hoặc chia cho ước số (khác 1, chính nó).

5. Subtract or Divide (1451A) - Rating 800

Đề bài

Biến đổi n thành 1 với số bước ít nhất. Mỗi bước: giảm 1 hoặc chia cho ước số (khác 1, chính nó).

Chiến lược tham lam

- $n \leq 3$: Xử lý thủ công ($n = 1 \rightarrow 0, n = 2 \rightarrow 1, n = 3 \rightarrow 2$).
- n chẵn (> 2): 1 bước chia cho $n/2$ để về 2, rồi 1 bước về 1. (Tổng: 2 bước).
- n lẻ (> 3): 1 bước trừ 1 để thành chẵn, sau đó áp dụng quy tắc chẵn. (Tổng: 3 bước).

6. Equation (1269A) - Rating 800

Đề bài

Tìm hai hợp số a, b sao cho $a - b = n$.

6. Equation (1269A) - Rating 800

Đề bài

Tìm hai hợp số a, b sao cho $a - b = n$.

Phân tích

- Ta biết $9k$ và $8k$ luôn là hợp số với $k \geq 1$.
- Hiệu của chúng: $9k - 8k = k$.
- Đặt $k = n$, ta có cặp số $9n$ và $8n$.
- Vì $n \geq 1 \rightarrow 9n > 9$ (chia hết cho 9) và $8n$ chẵn (chia hết cho 2).

Kết quả: In ra $9n$ và $8n$.

7. GCD Sum (1498A) - Rating 800

Đề bài

Tìm $y \geq n$ nhỏ nhất sao cho $\gcd(y, \text{sumDigits}(y)) > 1$.

7. GCD Sum (1498A) - Rating 800

Đề bài

Tìm $y \geq n$ nhỏ nhất sao cho $\gcd(y, \text{sumDigits}(y)) > 1$.

Nhận xét

- Cứ mỗi 3 số liên tiếp sẽ có một số chia hết cho 3.
- Nếu số chia hết cho 3 \rightarrow tổng chữ số cũng chia hết cho 3 \rightarrow GCD ít nhất là 3 (> 1).
- Khoảng cách từ n đến kết quả rất nhỏ (tối đa là 2).

Giải thuật: Duyệt i từ $n, n + 1, \dots$ và kiểm tra bằng vòng lặp. Sẽ tìm thấy đáp án rất nhanh.

8. Fair Division (1472B) - Rating 800

Đề bài

Chia kẹo (trọng lượng 1g, 2g) thành 2 phần bằng nhau.

8. Fair Division (1472B) - Rating 800

Đề bài

Chia kẹo (trọng lượng 1g, 2g) thành 2 phần bằng nhau.

Logic chắn lẻ

- Tổng trọng lượng S phải chẵn.
- Nếu có kẹo 1g ($cnt_1 > 0$) và S chẵn: Luôn chia được (kẹo 1g bù đắp phần lẻ).
- Nếu không có kẹo 1g ($cnt_1 = 0$): Số kẹo 2g (cnt_2) phải chẵn.

9. Sum of 2050 (1517A) - Rating 800

Đề bài

Biểu diễn n thành tổng các số dạng 2050×10^k với số hạng ít nhất.

9. Sum of 2050 (1517A) - Rating 800

Đề bài

Biểu diễn n thành tổng các số dạng 2050×10^k với số hạng ít nhất.

Giải thuật

- Nếu n không chia hết cho 2050 \rightarrow Không thể (in -1).
- Nếu $n = 2050 \times Q$, bài toán quy về biểu diễn Q thành tổng các 10^k .
- Số lượng số hạng chính là tổng các chữ số của Q .

10. Red and Blue Beans (1519A) - Rating 800

Đề bài

Chia r hạt đỏ, b hạt xanh vào các gói sao cho chênh lệch mỗi màu không quá d .

10. Red and Blue Beans (1519A) - Rating 800

Đề bài

Chia r hạt đỏ, b hạt xanh vào các gói sao cho chênh lệch mỗi màu không quá d .

Bất đẳng thức

- Giả sử $r < b$. Để tối ưu, mỗi gói chứa 1 hạt đỏ. Số gói tối đa là r .
- Để thỏa mãn điều kiện d , mỗi gói tối đa chứa $1 + d$ hạt xanh.
- Điều kiện: $b \leq r \times (1 + d)$.

Code: Kiểm tra $\min(r, b) \times (1 + d) \geq \max(r, b)$.

11. Almost Prime (26A) - Rating 900

Đề bài

Đếm số lượng số trong $[1, n]$ có đúng 2 ước nguyên tố phân biệt.
($n \leq 3000$).

11. Almost Prime (26A) - Rating 900

Đề bài

Đếm số lượng số trong $[1, n]$ có đúng 2 ước nguyên tố phân biệt.
($n \leq 3000$).

Phương pháp Sàng biến thể

- Dùng mảng count khởi tạo 0.
- Duyệt các số nguyên tố p từ 2 đến n .
- Với mỗi p , tăng $\text{count}[k]$ lên 1 cho mọi bội số k của p .
- Cuối cùng đếm các số có $\text{count}[i] == 2$.

Độ phức tạp: $O(N \log \log N)$.

12. Prime Square (1436B) - Rating 900

Đề bài

Tạo ma trận $n \times n$ gồm các hợp số (hoặc 1), nhưng tổng hàng/cột là số nguyên tố.

12. Prime Square (1436B) - Rating 900

Đề bài

Tạo ma trận $n \times n$ gồm các hợp số (hoặc 1), nhưng tổng hàng/cột là số nguyên tố.

Chiến lược xây dựng

- Điền số 1 vào đường chéo chính và đường chéo phụ (lệch 1).
- Mỗi hàng và cột sẽ có đúng hai số 1.
- Tổng hàng/cột = 2 (số nguyên tố). Các ô còn lại là 0.
- Ma trận: $A_{i,i} = 1$ và $A_{i,(i+1)\%n} = 1$.

13. Prime Subtraction (1238A) - Rating 900

Đề bài

Cho x, y ($x > y$). Có thể biến x thành y bằng cách trừ các số nguyên tố không?

13. Prime Subtraction (1238A) - Rating 900

Đề bài

Cho x, y ($x > y$). Có thể biến x thành y bằng cách trừ các số nguyên tố không?

Nhận định

- Tương đương việc biểu diễn $D = x - y$ thành tổng các số nguyên tố.
- Nếu $D = 1$: Không thể (không có số nguyên tố nào bằng 1).
- Nếu $D > 1$: Luôn có thể (dựa trên việc mọi số > 1 là tổng của các số 2 và 3).

Kết luận: In "YES" nếu $x - y > 1$, ngược lại "NO".

14. Odd Divisor (1475A) - Rating 900

Đề bài

Kiểm tra n có ước lẻ lớn hơn 1 không.

14. Odd Divisor (1475A) - Rating 900

Đề bài

Kiểm tra n có ước lẻ lớn hơn 1 không.

Bitwise Trick

- Số có ước lẻ $> 1 \Leftrightarrow$ Số đó KHÔNG phải là lũy thừa của 2.
- Nếu $n = 2^k$, ước duy nhất là các 2^j (chẵn, trừ số 1).

```
1 // Kiểm tra lũy thừa của 2
2 if ((n & (n - 1)) == 0) cout << "NO";
3 else cout << "YES";
4
```

Độ phức tạp: $O(1)$.

15. New Year's Number (1475B) - Rating 900

Đề bài

Kiểm tra $n = 2020x + 2021y$ với $x, y \geq 0$.

15. New Year's Number (1475B) - Rating 900

Đề bài

Kiểm tra $n = 2020x + 2021y$ với $x, y \geq 0$.

Biến đổi

- $n = 2020(x + y) + y$.
- Đặt $k = x + y$, ta có $n = 2020k + y$.
- Điều này tương ứng với phép chia n cho 2020: thương là k , dư là y .
- Điều kiện cần: $y \leq k$ (vì $x = k - y \geq 0$).

Code: `div = n / 2020; mod = n % 2020; Kiểm tra mod <= div.`

16. Strange Partition (1471A) - Rating 900

Đề bài

Gộp các phần tử mảng, tìm Min/Max của tổng $\lceil a_i/x \rceil$.

16. Strange Partition (1471A) - Rating 900

Đề bài

Gộp các phần tử mảng, tìm Min/Max của tổng $\lceil a_i/x \rceil$.

Tính chất hàm trần (Ceil)

- Gộp lại luôn làm tổng hàm trần nhỏ đi hoặc bằng.
- **Max:** Không gộp gì cả. $\sum \lceil a_i/x \rceil$.
- **Min:** Gộp tất cả. $\lceil (\sum a_i)/x \rceil$.

17. Orac and Factors (1350A) - Rating 900

Đề bài

Thực hiện k lần: $n \rightarrow n + f(n)$ với $f(n)$ là ước nhỏ nhất > 1 .

17. Orac and Factors (1350A) - Rating 900

Đề bài

Thực hiện k lần: $n \rightarrow n + f(n)$ với $f(n)$ là ước nhỏ nhất > 1 .

Phân tích

- **Nếu n chẵn:** $f(n) = 2$. Số mới là $n + 2$ (vẫn chẵn). Sau k bước: $n + 2k$.
- **Nếu n lẻ:** $f(n)$ là số lẻ p . Bước đầu: $n \rightarrow n + p$ (thành số chẵn). Các bước sau cộng 2.
- Kết quả: $n + p + 2(k - 1)$.

Lưu ý: Tìm p bằng vòng lặp $O(\sqrt{N})$.

18. Noldbach Problem (17A) - Rating 1000

Đề bài

Đếm số nguyên tố trong $[2, n]$ có dạng $1 + p_i + p_{i+1}$.

18. Noldbach Problem (17A) - Rating 1000

Đề bài

Đếm số nguyên tố trong $[2, n]$ có dạng $1 + p_i + p_{i+1}$.

Ứng dụng Sàng

- 1 Dùng Sàng Eratosthenes tạo list số nguyên tố.
- 2 Duyệt qua list: tính $S = p_i + p_{i+1} + 1$.
- 3 Kiểm tra nếu $S \leq n$ và S là số nguyên tố (tra bảng Sàng).
- 4 Đếm và so sánh với k .

19. Different Divisors (1474B) - Rating 1000

Đề bài

Tìm số x nhỏ nhất có ít nhất 4 ước, hiệu hai ước bất kỳ $\geq d$.

19. Different Divisors (1474B) - Rating 1000

Đề bài

Tìm số x nhỏ nhất có ít nhất 4 ước, hiệu hai ước bất kỳ $\geq d$.

Cấu trúc ước số

- Các ước số tối thiểu: $1, p, q, pq$.
- $p \geq 1 + d$. Tìm số nguyên tố đầu tiên thỏa mãn.
- $q \geq p + d$. Tìm số nguyên tố tiếp theo.
- Kết quả: $p \times q$.

20. Phoenix and Puzzle (1515B) - Rating 1000

Đề bài

Ghép n tam giác vuông cân thành hình vuông.

20. Phoenix and Puzzle (1515B) - Rating 1000

Đề bài

Ghép n tam giác vuông cân thành hình vuông.

Số chính phương

- Ghép 2 tam giác \rightarrow hình vuông nhỏ. Tổng quát: $n = 2 \times k^2$.
- Ghép 4 tam giác \rightarrow hình vuông nhỏ. Tổng quát: $n = 4 \times k^2$.
- **Kiểm tra:** Nếu n chia hết cho 2 và thương là số chính phương, HOẶC n chia hết cho 4 và thương là số chính phương.

Sai lầm thường gặp & Khắc phục

Các lỗi phổ biến

- **TLE:** Dùng $O(\sqrt{N})$ trong vòng lặp test case lớn thay vì Sàng trước.
- **Overflow:** Tính $i * i$ với i kiểu `int`.
- **Trường hợp biên:** Coi 1 là số nguyên tố.
- **Sai số:** Dùng `pow`, `sqrt` không kiểm soát.

Lời khuyên

Hãy luyện tập các bài trên để nắm vững tư duy số học trước khi học Modular Arithmetic!