

Chiến lược rèn luyện tư duy đệ quy

Hệ thống bài tập Codeforces cấp độ Newbie và Pupil

Slide Learning CPP

Ngày 16 tháng 1 năm 2026

Tổng quan về Đệ quy

- Đệ quy là triết lý giải quyết vấn đề dựa trên việc chia nhỏ bài toán lớn thành các bài toán con đồng dạng.
- Quan trọng đối với cấp độ **Newbie (Rating 800-1100)**.
- Nền tảng cho: Quy hoạch động (DP), Quay lui (Backtracking), Đồ thị.

Cơ chế hoạt động

Dựa trên cấu trúc ngăn xếp (stack). Mỗi lời gọi hàm tạo ra một `stack_frame` mới. Cần kiểm soát để tránh **stack overflow**.

Phân loại năng lực Đệ quy

Rating	Đặc điểm tư duy
800 - 900	Đệ quy tuyến tính, mô phỏng vòng lặp
900 - 1000	Phân nhánh đơn giản, xử lý chuỗi
1100 - 1400	Quay lui cơ bản, duyệt cây
1500+	Kết hợp tối ưu hóa (DP, Chia để trị)

1. In ấn đệ quy (Print Recursion)

Link: CF - 223339A

Yêu cầu

Cho số nguyên N . In ra dòng chữ "I love Recursion" đúng N lần bằng đệ quy.

Chiến lược

- **Base case:** Nếu $N = 0$, kết thúc.
- **Thực hiện:** In dòng chữ trước, sau đó gọi đệ quy $N - 1$.

2. In số từ 1 đến N (Print from 1 to N)

Link: CF - 223339B

Yêu cầu

Cho số nguyên N , in các số từ 1 đến N , mỗi số trên một dòng.

Chiến lược

Đệ quy ngược: Đặt lệnh in sau lời gọi đệ quy $N - 1$. Quá trình giải phóng ngăn xếp (unwinding) sẽ in theo thứ tự từ 1 đến N .

3. In số từ N về 1 (Print from N to 1)

Link: CF - 223339C

Yêu cầu

Cho số nguyên N , in các số từ N về 1 trên cùng một dòng.

Chiến lược

In giá trị N hiện tại ngay lập tức, sau đó mới gọi đệ quy cho $N - 1$.

4. In các chữ số (Print Digits)

Link: CF - 223339D

Yêu cầu

Cho số nguyên không âm N , in ra các chữ số từ trái sang phải.

Chiến lược

Gọi đệ quy với $N/10$ để tiến tới chữ số đầu bên trái, sau đó in $N\%10$ khi hàm quay lui.

5. Chuyển đổi hệ cơ số (Base Conversion)

Link: CF - 223339E

Yêu cầu

In biểu diễn nhị phân của số nguyên N .

Chiến lược

Gọi đệ quy $N/2$ và in $N\%2$ để tự động đảo ngược thứ tự các số dư về đúng dạng nhị phân.

6. In mảng tại chỉ số chẵn (Print Even Indices)

Link: CF - 223339F

Yêu cầu

Cho mảng A , in các phần tử ở vị trí chỉ số chẵn theo thứ tự đảo ngược.

Chiến lược

Sử dụng đệ quy tiến tới cuối mảng. Khi quay lui, kiểm tra nếu chỉ số là chẵn thì thực hiện in.

7 & 8. Vẽ kim tự tháp (Pyramid)

Link: CF - 223339G & 223339H

Yêu cầu

Vẽ kim tự tháp thuận và ngược với độ cao N .

Chiến lược

- **Thuận:** In dòng hiện tại ($N - i$ khoảng trắng, $2i - 1$ dấu sao) rồi gọi đệ quy.
- **Ngược:** Gọi đệ quy đến dòng sâu hơn trước khi thực hiện in dòng hiện tại.

9. Đếm nguyên âm (Count Vowels)

Link: CF - 223339I

Yêu cầu

Đếm số lượng nguyên âm (a, e, i, o, u) trong chuỗi.

Chiến lược

Duyệt qua từng ký tự bằng chỉ số i . Nếu là nguyên âm trả về $1 +$ gọi đệ quy, ngược lại trả về $0 +$ gọi đệ quy.

10. Tính giai thừa (Factorial)

Link: CF - 223339J

Yêu cầu

Tính giá trị $N!$.

Chiến lược

Công thức truy hồi: $f(n) = n \times f(n - 1)$. Lưu ý dùng kiểu dữ liệu long long.

11 & 12. Max và Sum của mảng

Link: CF - 223339K & 223339L

Yêu cầu

Tìm phần tử lớn nhất và tính tổng các phần tử trong mảng.

Chiến lược

- **Max:** So sánh $A[i]$ với kết quả đệ quy của phần còn lại.
- **Sum:** Trả về $A[i] + \text{sum}(i + 1)$.

15. Số Fibonacci (Fibonacci)

Link: CF - 2233390

Yêu cầu

Tìm số Fibonacci thứ n .

Chiến lược

Sử dụng công thức $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$. Có thể thảo luận về **Memoization** để tối ưu.

18. Mảng đối xứng (Palindrome Array)

Link: CF - 223339R

Yêu cầu

Kiểm tra mảng có phải là Palindrome không.

Chiến lược

So sánh cặp $A[left]$ và $A[right]$. Nếu khác trả về NO, nếu giống tiếp tục thu hẹp vào bên trong.

20. Tổ hợp (Combination)

Link: CF - 223339T

Yêu cầu

Tính giá trị $C(n, r)$.

Chiến lược

Dựa trên tính chất tam giác Pascal:

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r).$$

Lời kết và Lộ trình

- **Giai đoạn 1:** Mô phỏng vòng lặp (In ấn).
- **Giai đoạn 2:** Xử lý mảng/chuỗi giá trị trả về.
- **Giai đoạn 3:** Đệ quy đa chiều Chia để trị.

Lời khuyên

Nắm vững đệ quy là chìa khóa để tiến tới Quy hoạch động và Đồ thị sau này.