

Experimentalphysik VI

Kerne und Teilchen

Prof. Dr. Thomas Müller
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Wagner

SS 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	4
1.1 Grundbegriffe	4
1.1.1 Größenordnungen der Kern- und Teilchenphysik	4
1.1.2 Nomenklatur in der Kernphysik	5
2 Grundlagen der Kernphysik	7
2.1 Kerne und ihre Eigenschaften	7
2.1.1 Elektrische Ladung	7
2.1.2 Massenspektroskopie	8
2.1.3 Bindungsenergie	11
2.2 Parametrisierung der Bindungsenergie	15
2.3 Grundlagen von Streuexperimenten	19
2.3.1 Klassifikationen von Streuprozessen	19
2.3.2 Wirkungsquerschnitt	21
2.3.3 Die Goldene Regel	26
2.4 Rutherfordstreuung	28
2.5 Elektronstreuung an Kernen, Formfaktor	33
2.5.1 Energie des gestreuten Elektrons	33
2.5.2 Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung	35
2.6 Elektronstreuung an Nukleonen	42
3 Grundlagen der Teilchenphysik	45
3.1 Tiefinelastische Streuung	45
3.1.1 Proton-Resonanzen	45
3.1.2 Strukturfunktionen	46
3.1.3 ep-Wirkungsquerschnitt jenseits des Resonanzbereichs, Skaleninvarianz	48
3.1.4 Das Partonmodell	51
3.2 Symmetrien und Erhaltungssätze	56
3.2.1 Parität	58
3.2.2 Ladungskonjugation	62
3.2.3 Zeitumkehr	63
3.3 Der Teilchenzoo	64
3.3.1 Elementarteilchen im Standardmodell	64

3.3.2	Mesonen	67
3.3.3	Baryonen	71
3.3.4	Der Farbfreiheitsgrad	75
3.3.5	Baryonenzahlerhaltung	76
3.3.6	Schwere Hadronen	77
4	Experimentelle Methoden:	
	Detektoren und Beschleuniger	79
4.1	Wechselwirkung von Strahlung mit Materie	79
4.1.1	Elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen	79
4.1.2	Wechselwirkung von Photonen mit Materie	84
4.1.3	Hadron-Wechselwirkungen mit Kernen	85
4.1.4	Strahlenwirkung, Dosimetrie	87
4.2	Detektoren	88
4.2.1	Ionisationsdetektoren	89
4.2.2	Gasdetektoren	91
4.2.3	Halbleiterdetektoren	95
4.2.4	Szintillations-Detektoren	96
4.2.5	Elektromagnetisches Kalorimeter	99
4.2.6	Hadron-Kalorimeter	101
4.2.7	Experimente	101
4.2.8	Teilchenbeschleuniger	102
5	Das Standardmodell	106
5.1	Phänomene der schwachen Wechselwirkung	106
5.1.1	Schwache Zerfälle	107
5.1.2	Inverser β -Zerfall	111
5.1.3	Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung	113
5.1.4	Schwache Wechselwirkung von Quarks	114
5.2	Phänomene der starken Wechselwirkung	118
5.2.1	Farbe, Gluonen, Confinement	118
5.2.2	Die laufende Kopplungskonstante der QCD	120
5.2.3	Die OZI-Regel	121
5.2.4	Existenz des Gluons	124
5.2.5	Hadronproduktion in Elektron-Positron-Vernichtung	124

5.3	Elektroschwache Vereinigung	128
5.3.1	Grundbegriffe in Feldtheorien	128
5.3.2	Dirac-Lagrangedichte	130
5.3.3	Lokale Eichinvarianz	130
5.3.4	Schwache Wechselwirkung	132
5.3.5	Das Glashow-Weinberg-Salam-Modell	133
5.3.6	Spontane Symmetriebrechung	134
5.3.7	Spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie	136
5.3.8	Der Higgs-Mechanismus	137
5.4	Entdeckungen der modernen Teilchenphysik	140
5.4.1	Entdeckung des top-Quarks	140
5.4.2	Neutrinooszillationen	142
6	Anwendungen der Kern- und Teilchenphysik	147
6.1	Radioaktivität	147
6.1.1	Zerfallsgesetz	147
6.1.2	Anwendungen der Radioaktivität	151
6.1.3	Sonderfälle von Kernübergängen	152
6.2	Kernspaltung (Fission)	157
6.3	Kernfusion	162
6.3.1	Energiegewinnung	162
6.3.2	Energiegewinnung in Sternen	163

1 Einleitung

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Größenordnungen der Kern- und Teilchenphysik

1. Längeneinheit:

∅ H-Atom (2· Bohrscher Radius) $\approx 1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ „Angström“

∅ Proton $\approx 2 \text{ fm} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ „Fermi“

∅ Quark, Lepton, Eichboson: $d \leq 10^{-19} \text{ m} (!)$

Plankskala: $l_{Pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m}$

Das ist die Dimension, bei der Quanteneigenschaften der Gravitation berücksichtigt werden müssen.

2. Energie/Masse/Impuls: $1 \text{ eV} = 1,60277 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Energie:

1 eV ist die kinetische Energie, die ein einfach geladenes Teilchen nach einer Beschleunigung in einer Potentialdifferenz von 1 V besitzt.

Masse:

$$1 \frac{\text{eV}}{\text{c}^2} = 1,78266 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$$

Beispiele:

Elektron: $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$

Pion: $m_{\pi^\pm} = 139,57 \text{ MeV}/c^2$

Proton: $m_p = 938,27 \text{ MeV}/c^2$

Neutron: $m_n = 939,57 \text{ MeV}/c^2$

γ : $m_\gamma < 2 \cdot 10^{-16} \text{ eV}/c^2$

Z: $m_Z = 91,187 \text{ GeV}/c^2$

t: $m_t = 178 \pm 4 \text{ GeV}/c^2$

Masseneinheit in der Kernphysik:

$$m_u = 1 \text{ } u = \frac{1}{12} \text{ } m(^{12}_6C) = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ } kg = 931,494 \text{ } MeV/c^2$$

Bemerkung:

Offensichtlich ist $m(^{12}_6C) < 6 \cdot m_p + 6 \cdot m_n + 6 \cdot m_e$ und zwar um 0,8 % \Rightarrow Massendefekt durch Bindungsenergie.

Impuls:

Der Zusammenhang mit der Gesamtenergie und der Masse ist gegeben durch:

$$E_{ges} = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$$

$$1 \text{ } eV/c = 5,34 \cdot 10^{-28} \frac{kg \cdot m}{s}$$

3. Drehimpuls:

$$1\hbar = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ } MeV \cdot s = 1,97 \cdot 10^{-11} \text{ } MeV \frac{cm}{c}$$

Ebenfalls wichtig ist die Beziehung $\hbar c = 197 \text{ } MeV \text{ } fm$

4. Ladung:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ } C$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$$

1.1.2 Nomenklatur in der Kernphysik

Kernphysik: Physik der Nukleonen n und p im Verbund: Nuklide.

Schreibe dafür:



X : chemisches Elementsymbol

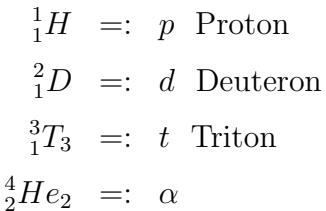
n^+ : Ionisierungszahl, falls nicht vollständig ionisiert

A : Massenzahl

Z : Ladungszahl

N : Neutronenzahl

Die leichten Kerne bilden jedoch eine Ausnahme:



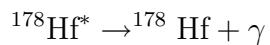
Außerdem werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Isotope: Kerne gleicher Ladungszahl. p, d und t haben zum Beispiel Z=1.

Isotone: Kerne gleicher Neutronenzahl. 2_2He_1 und d haben N=1.

Isobare: Kerne gleicher Massenzahl. 2_2He_1 und t haben A=3.

Isomere: Kerne mit gleichen Z und N auf unterschiedlichen Energieniveaus, zum Beispiel:



Spiegelkerne: Kerne mit vertauschbaren N und Z. ${}^1_6C_7 \leftrightarrow {}^1_7N_6$

2 Grundlagen der Kernphysik

2.1 Kerne und ihre Eigenschaften

- Elektrische Ladung
- Masse
- Bausteine
- Ausdehnung
- Spin, magnetische Momente

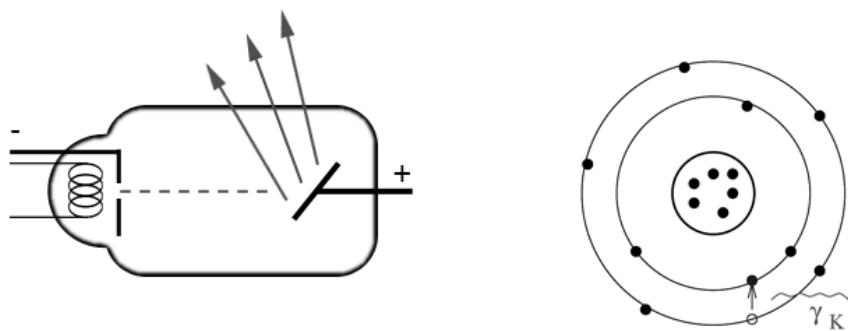
2.1.1 Elektrische Ladung

1. Bestimmung der Kernladung durch Rutherfordstreuung (siehe Kapitel 2.4)

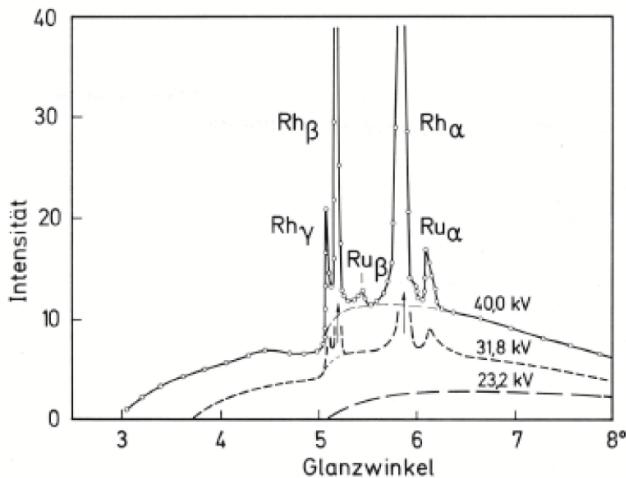
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4 \cdot E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

Dabei ist z die Ladungszahl des streuenden Teilchens, Z die Kernladungszahl und Θ der Streuwinkel.

2. Moseley-Gesetz Die Lage der Linien im Röntgenspektrum ist charakteristisch für die Ordnungszahl eines Elements. Dabei wird ein Elektron aus einer inneren Schale herausgeschlagen. Die entstehende Lücke wird durch ein äußeres Elektron gefüllt.



Jenachdem welches innere Elektron herausgeschlagen wird, beobachtet man verschiedene Serien von Spektrallinien: K,L,M,N



Linienspektrum einer Rh-Antikathode, die mit Ru verunreinigt ist. Die Linien sind dem Bremspektrum überlagert. Statt der Wellenlänge ist der Glanzwinkel des Kristallspektrometers als Abszisse aufgetragen

Quelle: Haken, Wolf,
Atom- und Quantenphysik,
Kap. 18

Die dabei auftretenden Frequenzen sind gegeben durch das Moseley-Gesetz:

$$\bar{\nu}_K = Ry \cdot \underbrace{(Z - s)^2}_{Z_{eff}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Dabei ist $n_1^2 = 1$, da der Übergang in den Grundzustand geht. In diesem Fall ist $s \approx 1$. Dies beschreibt den Effekt der Abschirmung durch die innere Atomhülle, das heißt für die K-Serie schirmt nur das 1s Elektron den Kern ab. Für die L-Serie hingegen ist $s \approx 7,4$.

Die Kernladung ist ein Vielfaches der Elementarladung e.

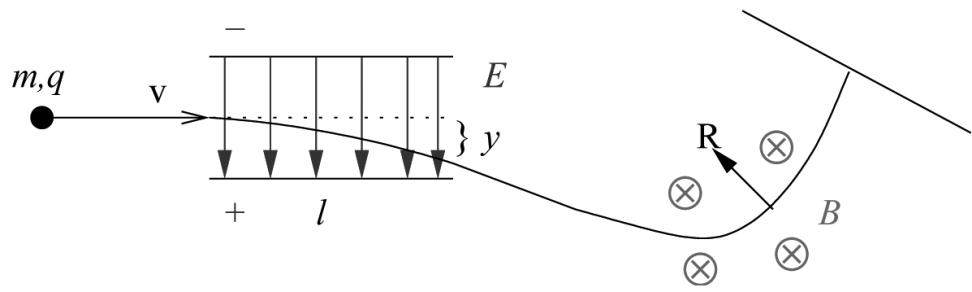
Außerdem sind Atome neutral! Die Abweichung zwischen Proton- und Elektronladung wurde an SF_6 gemessen:

$$\frac{|q_p + q_e|}{e} < 10^{-21} \text{ [PDG2006]}$$

Die Frage warum dies so ist ist noch offen. Gibt es eine Symmetrie zwischen Quarks (Bausteine von Proton und Neutron) und Leptonen?

2.1.2 Massenspektroskopie

Prinzip: Gleichzeitige Bestimmung der Energie E_{kin} und des Impulses p eines Ions mit Ladung Q und Masse M durch elektrische und magnetische Felder.



Ablenkung in \vec{E} -Feld:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot Q}{m} \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 \text{ mit } E_{kin} = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{Q \cdot E \cdot l^2}{e \cdot E_{kin}} \Rightarrow \text{"Energiefilter"}$$

Ablenkung in \vec{B} -Feld:

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{F}_{zent.}$$

$$Q \cdot v \cdot B = \frac{M \cdot v^2}{R}$$

$$\Rightarrow p = Q \cdot B \cdot R \Rightarrow \text{"Impulsfilter"}$$

$$\text{Masse: } M = \frac{p^2}{2 \cdot E_{kin}} = Q \frac{1 \cdot B^2 R^2 y}{E \cdot l^2}$$

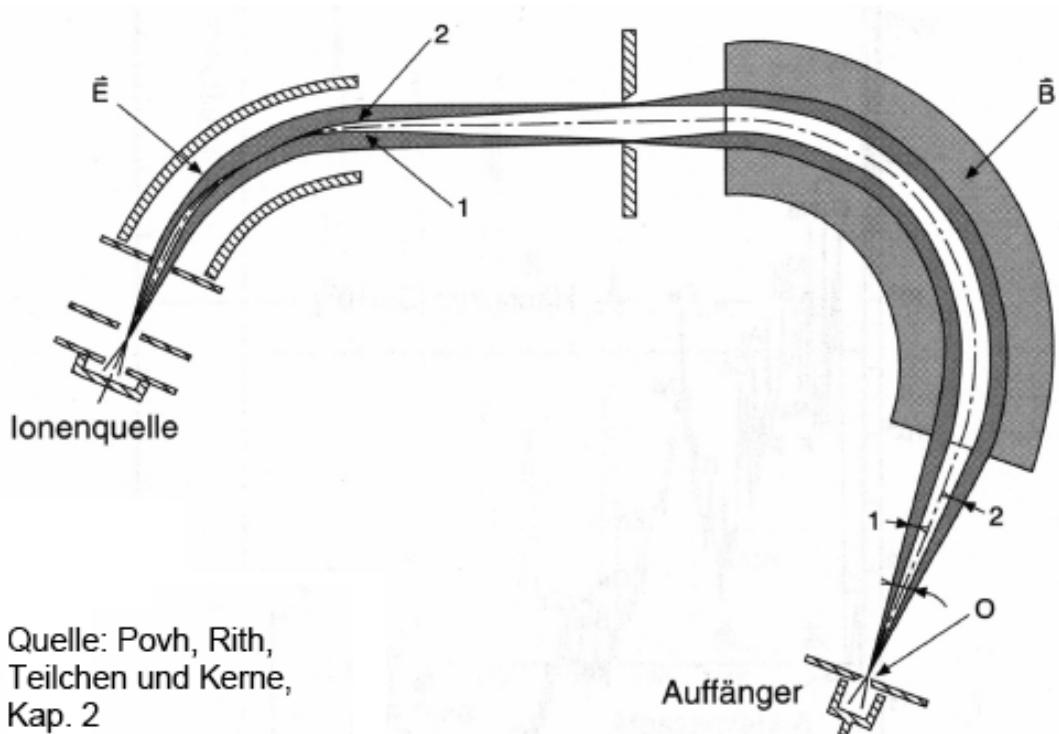
Nur Verhältnis zwischen Q und M kann gemessen werden

Verbesserung: doppelt fokussierendes Spektrometer

Dabei laufen die Ionen im Zylinderkondensator auf einer Kreisbahn.

$$|\vec{E}| \cdot Q = \frac{m \cdot v^2}{r_E} \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} |\vec{E}| \cdot Q \cdot r_E$$

$$\text{Magnetfeld: } p = Q \cdot B \cdot r_M$$



Problem:

Ionen treten unter verschiedenen Richtungswinkeln und mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus der Ionenquelle aus. Daraus resultiert eine Abweichung von der Referenzbahn, beziehungsweise den Weigenschaften des Normalbündels.

Außerdem muss man neben einer guten Massenauflösung auch eine ausreichende Intensität am Auffänger erreichen.

Lösung:

1.) Richtungsfokussierung:

Die Ionen werden auf den Auffänger fokussiert, deren Emissionswinkel bezüglich der Mittelebene der Quelle nicht zu groß ist.

2.) Geschwindigkeitsfokussierung:

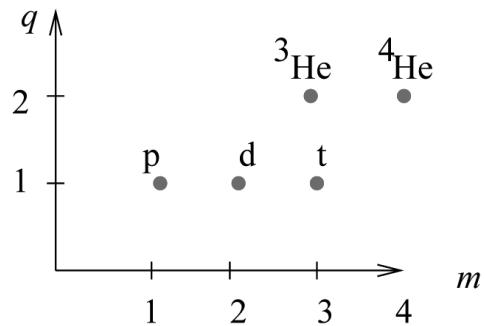
Fokussierung von Ionen mit Δv an der Quelle bezüglich des Normalenbündels.

⇒ Doppelfokussierend!

Massenspektrograph: Alle Massen in einem bestimmten Bereich werden gleichzeitig in Form eines Linienspektrums aufgenommen, zum Beispiel mit einer Photoplatte.

Massenspektrometer: Detektor mit Blende → sehr kleines Massenfenster. Das Massenspektrum wird durch Veränderung der Felder ermittelt (scan).

Beobachtung: Die Ladung des Kerns ist ein Vielfaches der Elementarladung e und immer positiv. Die Masse des Kerns ist ein Vielfaches der Protonmasse m_p .



Offensichtlich gibt es im Kern einen weiteren Baustein neben dem Proton:
Neutron: $m_n \approx m_p$ und $Q_n = 0$

2.1.3 Bindungsenergie

Warum binden sich Proton (und Neutron) trotz großer Coulombabstößung auf so kleinen Raum?

Es müssen Bindungskräfte auftreten:

$$F_K \gg F_{Coulomb}$$

⇒ Große Bindungsenergie: $E_B \approx O(\text{MeV})$

Zum Vergleich: atomare Bindungsenergie $O(\text{eV})$

Bindungsenergie aus Massendefekt:

$$m_{Kern} = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - \frac{E_B}{c^2}$$

Beschreibung der Kerne bezüglich ihrer Zusammensetzung:

- Kernladungszahl Z (Anzahl der Protonen)
- Neutronenzahl N
- Massenzahl $A = Z + N$

Verschiedene Kombinationen von Z und N werden als Nuklide bezeichnet. Dargestellt werden die Nuklide in der Form ${}^A_Z X$ wobei X das Symbol des chemischen Elements ist. Als Beispiel seien die Kohlenstoffisotope ${}^12_6 C$ und ${}^13_6 C$ aufgeführt.

Nuklide gleicher Massenzahl A: Isobare

Nuklide gleicher Ladungszahl Z: Isotope

Nuklide gleicher Neutronenzahl N: Isotone

Massenstandard:

Der Massenstandard basiert auf ${}^{12}C$. Es ist gut zur Masseneichung geeignet, da es mit großer Häufigkeit auftritt.

Atomare Masseneinheit u :

$$1 \text{ } u = \frac{1}{12} M({}^{12}C) \approx 931,494 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Die Bindungsenergie B wird über die Masse der Atome definiert, da diese präziser messbar sind.

$$B(A, Z) = (Z \cdot M({}^1H) + (A - Z)M_n - M(A, Z)) \cdot c^2$$

Dabei ist $M({}^1H)$ die Masse des Wasserstoffatoms und $M(A, Z)$ die Atommasse. Die Ruhemassen von Proton und Neutron wurden bestimmt zu:

$$m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_n = 939,566 \text{ MeV}/c^2$$

Zum Vergleich, die Masse des Elektrons beträgt lediglich $0,511 \text{ MeV}/c^2$.

Beispiel: Bindungsenergie von ${}^{12}C = 6p + 6n$

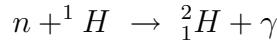
$$B(6, 12) = \left(6 \cdot [938,272 + 0,511] \frac{\text{MeV}}{c^2} + 6 \cdot 939,566 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 12 \cdot 931,494 \frac{\text{MeV}}{c^2} \right) \cdot c^2$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon ergibt sich dann zu $\frac{B}{A} = 7,68 \text{ MeV}$. Im Vergleich dazu, die Bindungsenergie des Elektrons im Wasserstoffatom beträgt im Grundzustand lediglich $13,6 \text{ eV}$.

Die Rechnung setzt eine sehr genaue Vermessung der Atommassen voraus. \Rightarrow Genaue Massenspektroskopie.

Bindungsenergie aus Kernreaktionen

Einfang thermischer Neutronen ($E_{kin} \approx 1/40 \text{ eV}$) in Wasserstoff:



Die Energie des γ -Quants kann gemessen werden. Dabei muss auch die Rückstoßenergie des Kerns berücksichtigt werden.

$$E({}^2_1H) = \frac{p^2}{2M({}^2_1H)}$$

Impulserhaltung: $|\vec{p}({}^2H)| = |\vec{p}(\gamma)|$

γ -Quant: $pc = E_\gamma$

Daraus erhält man die Energie des Deuterons zu

$$E({}^2_1H) = \frac{E_\gamma^2}{2M({}^2_1H)}$$

Die Bindungsenergie ergibt sich schließlich aus der Summe der Photonenergie und der kinetischen Energie des Deuterons:

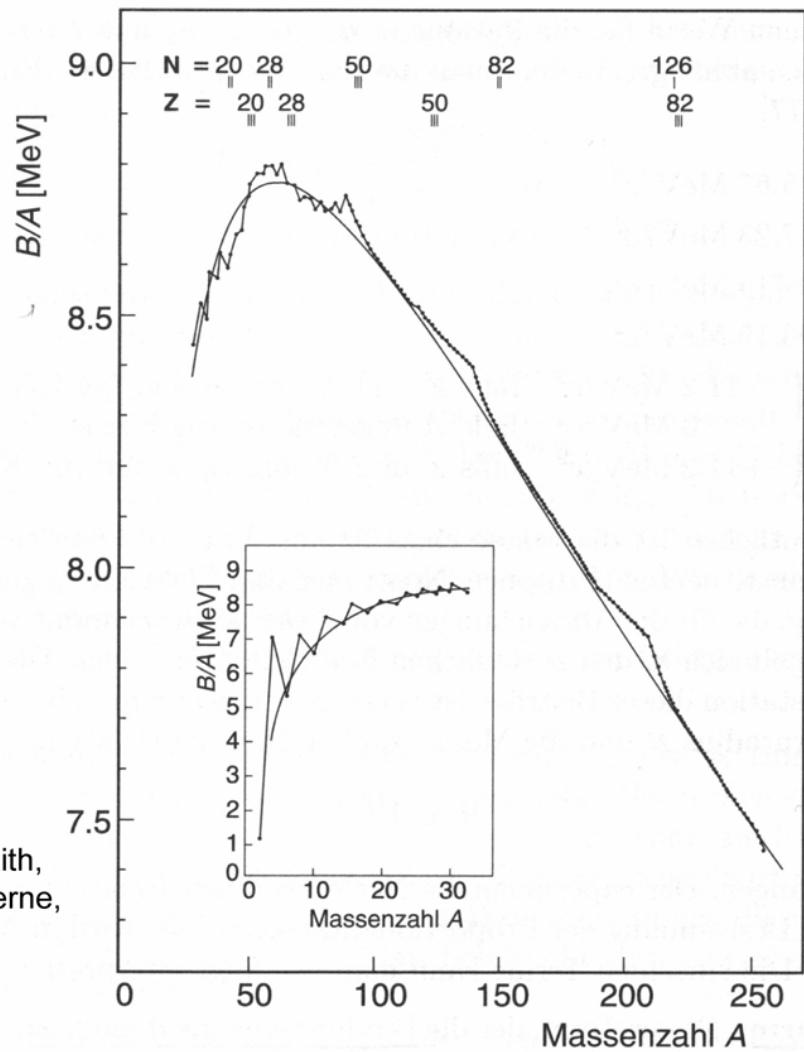
$$B = (m_n + M({}^2_1H)) \cdot c^2 = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2 \cdot M({}^2_1H)c^2}$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon $\frac{B}{A}$ ist nicht konstant. Sie variiert

- stark bei leichten Kernen
 - leicht bei schweren Kernen
- $\frac{B}{A}$ liegt im Bereich $7,5 - 8,5 \text{ MeV}$ (\approx konstant)

Verursacht durch den Sättigungseffekt der Kernkräfte, das heißt die Nukleonen wechselwirken nur mit den nächsten Nachbarn, nicht mit allen Nukleonen im Kern \Leftrightarrow Gegensatz zur elektromagnetischen Wechselwirkung.

Quelle: Povh, Rith,
Teilchen und Kerne,
Kap. 2



Das Maximum erreicht die Bindungsenergie pro Nukleon bei $A \approx 60$ (^{56}Fe). Das hat Konsequenzen für die Energiegewinnung aus Kernumwandlungen:

- ⇒ Fusion leichter Kerne
- ⇒ Spaltung schwerer Kerne

Kernfusion: Energieproduktion in den Sternen. Fusion von H zu He (mehr in Kapitel 6)

Kernspaltung: Technisch nutzbar ab $A > 230$. Spaltung in zwei ungefähr gleichgroße Kerne bevorzugt. $\Delta E \approx 1 MeV$

2.2 Parametrisierung der Bindungsenergie

Tröpfchenmodell: Bethe, Weizsäcker 1955

Die Kernmaterie verhält sich wie ein Tropfen einer inkompressiblen Flüssigkeit, die durch kurzreichweite Kräfte mit Sättigungscharakter zusammengehalten wird.

Motivation: Kernradius $R \propto a^{\frac{1}{3}}$ (aus Streuexperimenten, siehe Kapitel 2.3)

Das Tröpfchenmodell erklärt den Verlauf der Bindungsenergien und damit der Kernmassen.

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$$

1. Volumenterm

Jedes Nukleon liefert den gleichen Beitrag.

$$B_1 = a_v \cdot A \cdot c^2 \quad a_v = 15, 67 \frac{MeV}{c^2}$$

Die Reichweite der Kernkraft ist kurz, ungefähr wie der Abstand zweier Nukleonen (Sättigung). Würde jedes Nukleon mit jedem anderem wechselwirken, wäre die Bindungsenergie proportional zu $A \cdot (A - 1)$.

2. Oberflächenterm

Die Nukleonen an der Oberfläche des Tropfens (Kerns) haben weniger Bindungspartner und daher eine reduzierte Bindungsenergie. Folglich ist der Oberflächenterm negativ und proportional zur Oberfläche des Tropfens.

$$B_2 = -a_s \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot c^2 \quad a_s = 17, 23 \frac{MeV}{c^2}$$

3. Coulombterm

Die elektrische Abstoßung zwischen den Protonen reduziert die Bindungsenergie des Terms. Die Coulombenergie einer gleichmäßig geladenen Kugel mit Radius R und Ladung Q ist:

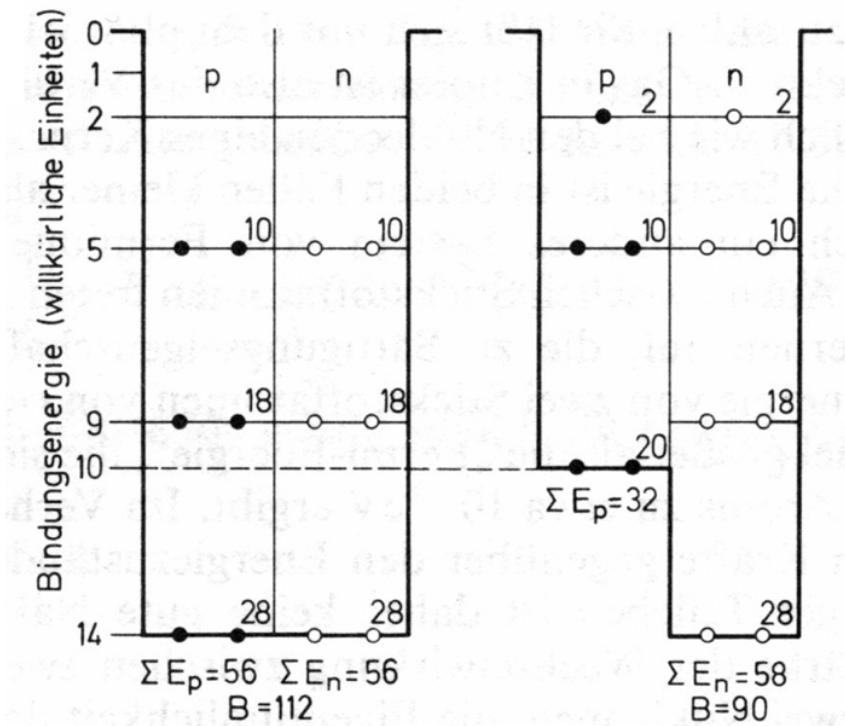
$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$$

Für den Kern gilt $Q^2 = e^2 Z^2$ und $R \propto A^{-\frac{1}{3}}$

$$B_3 = -a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \cdot c^2 \quad a_c = 0, 714 \frac{MeV}{c^2}$$

4. Asymmetrieterm

Bei schweren Kernen wird die Coulombabstößung durch die Anhäufung von Neutronen reduziert. Folglich ergibt sich eine Asymmetrie zwischen der Zahl der Neutronen und Protonen im Kern, zum Beispiel ^{208}Pb mit $N - Z = 44$ Neutronen mehr als Protonen. Dies führt zu einer Verringerung der Bindungsenergie. Verständlich wird diese Korrektur erst im Fermigasmodell.



Quelle: Mayer-Kuckuk,
Kernphysik, Kap. 2.3

Die Abstände zwischen den Niveaus werden nach oben hin kleiner. Im asymmetrischen Fall sind die Neutronenniveaus dichter gedrängt. Die Summe der Bindungsenergien nimmt ab.

$$B_4 = -a_a \cdot \frac{(N - Z)^2}{4 \cdot A} \cdot c^2 \quad a_a = 93, 15 \frac{MeV}{c^2}$$

5. Paarungsterm

Kerne mit geradzahliger Proton- und geradzahliger Neutronenzahl besitzen eine erhöhte Bindungsenergie (siehe $\frac{B}{A}$ -Kurve). Dies ist eine empirische Korrektur die sich im

Rahmen des Tröpfchenmodells nicht erklären lässt. Die Erklärung erfolgt durch das Schalenmodell. Es ist energetisch günstiger, wenn 2 Nukleonen die gleiche Ortswellenfunktion haben und sich die Gesamtdrehimpulse zu Null addieren:

$$l_1 = l_2, m_a = -m_2 \text{ und } \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{0}$$

Die Nukleonen verhalten sich also anders als die Elektronen in der Atomphysik. Dort ist es energetisch günstiger, zwei Elektronen in verschiedenen Orbitalen zu haben als zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin im selben Orbital. Der Grund dafür ist die elektrostatische Abstößung. In der Kernphysik hingegen wirkt zwischen den Nukleonen im Mittel eine anziehende Kraft.

⇒ Paarung von Nukleonen gleicher Sorte vorteilhafter.

$$B_5 = -\frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}} \cdot c^2 \quad \delta = \begin{cases} -11,2 \frac{\text{MeV}}{c^2} & \text{falls Z und N gerade} \\ 0 & \text{falls Z gerade und N ungerade oder umgekehrt} \\ 11,2 \frac{\text{MeV}}{c^2} & \text{falls Z und N ungerade} \end{cases}$$

Die A-Abhängigkeit kommt dadurch zustande, dass der Überlapp der Ortswellenfunktionen bei größeren Kernen abnimmt.

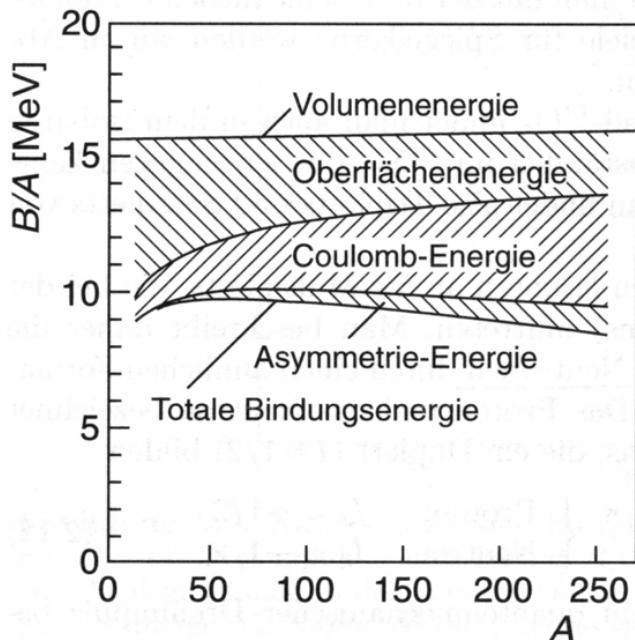


Abbildung 2.5. Die verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon, aufgetragen gegen die Massenzahl A . Die waagerechte Linie bei ca. 16 MeV zeigt den Beitrag der Volumenenergie, der durch die Oberflächen-, die Asymmetrie- und die Coulomb-Energie auf die effektive Bindungsenergie von ca. 8 MeV (*untere Linie*) reduziert wird. Mit wachsendem A steigen die Beiträge von Asymmetrie- und Coulomb-Term stark an, während der Beitrag des Oberflächenterms kleiner wird.

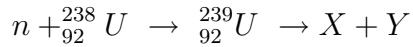
Quelle: Povh, Rith, Teilchen und Kerne, Kap. 2

Das Tröpfchenmodell ermöglicht die Berechnung der Bindungsenergien und damit die Be-rechnung der Kernmassen.

Weizsäcker-Massenformel

$$M(A, Z) = N \cdot M_n + Z \cdot (M_p + M_e) - a_v \cdot A + a_s \cdot A^{\frac{2}{3}} + a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \cdot \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

Anwendungsbeispiel der Massenformel: Uranspaltung



$$m(X) = m(Y) = m\left(\frac{U}{2}\right)$$

Spaltenergie

$$E_s = M(Z, A) \cdot c^2 - 2 \cdot M\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \cdot c^2$$

Übrig bleibt also nur die Änderung der Bindungsenergie

$$E_s = \Delta B = a_s \cdot A^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{\frac{2}{3}}) + a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) = 182 \text{ MeV}$$

Frage: Warum gibt es keinen stabilen nn-Bindungszustand?

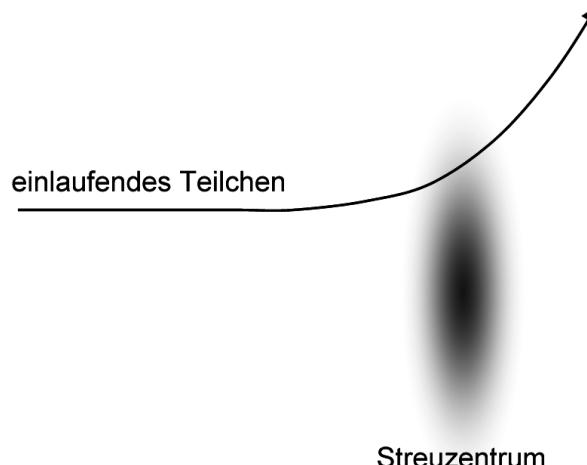
In der nachfolgenden Tabelle sind die einzelnen Beiträge zu Bindungsenergie von Di-Nukleon-Zuständen aufgeführt.

	B(nn) [MeV]	B(pp) [MeV]	B(np) [MeV]
1 Volumenterm	31,34	31,34	31,34
2 Oberflächenterm	-27,35	-27,35	-27,35
3 Coulombterm	0	-2,27	-0,57
4 Asymmetrieterm	-46,58	-46,58	0
5 Paarungsterm	7,92	7,92	0
B_{ges}	-34,67	-36,94	3,42

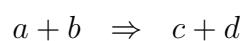
Offensichtlich ist die Bindungsenergie auf Grund des Asymmetrieterms nur bei der *pn*-Bindung größer Null, womit das der einzige stabile Di-Nukleon-Zustand ist.

2.3 Grundlagen von Streuexperimenten

Schema der Streuung eines Teilchens an einem Streuzentrum:

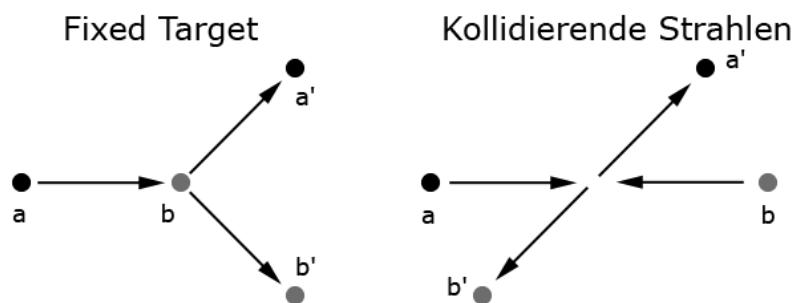


Reaktion zwischen Projektil und Target



2.3.1 Klassifikationen von Streuprozessen

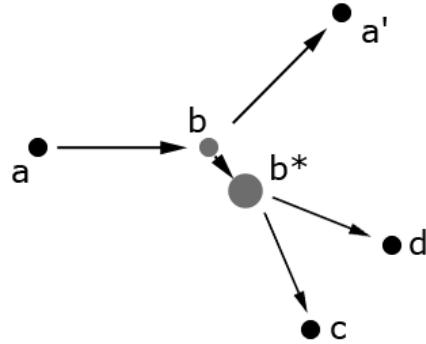
1. Elastische Streuung: Teilchen sind vor und nach der Reaktion identisch, sie werden nicht zerstört.



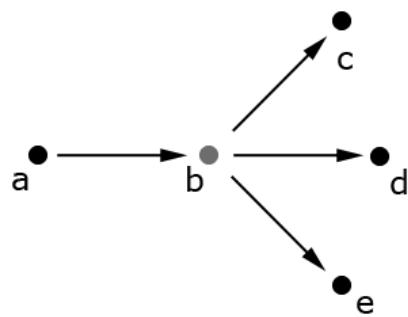
Die Teilchen im Anfangs- und Endzustand unterscheiden sich in Energie und Impuls. Der Streuwinkel und die Energie von a' und b' sind eindeutig korreliert. Die Messung gibt Rückschluss auf die Ausdehnung der streuenden Objekte.

2. Inelastische Streuung

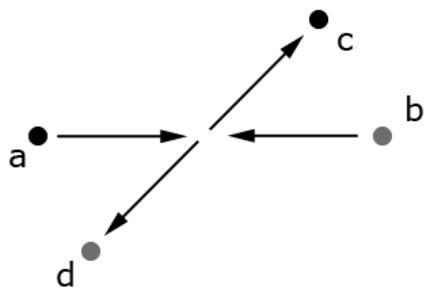
Anregung



Erzeugung neuer Teilchen



Erzeugung neuer Teilchen in Reaktionen kollidierender Strahlen (Collider).



Auflösungsvermögen:

Die de Broglie-Wellenlänge λ eines Projektils der Masse m ist durch die relativistische Energie gegeben. Mit $E_{ges} = E_{kin} + mc^2$ und $p_\mu p^\mu = m^2 c^4$ folgt:

$$p^2 c^2 = (E_{kin} + mc^2)^2 - m^2 c^4 = E_{kin}^2 + 2mc^2 \cdot E_{kin}$$

Damit erhält man die de Broglie-Wellenlänge in Abhängigkeit der Energie.

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar \cdot c}{\sqrt{E_{kin}^2 + 2mc^2 \cdot E_{kin}}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}} & \text{falls } E_{kin} \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_{kin}} & \text{falls } E_{kin} \gg mc^2 \end{cases}$$

Heisenberg'sche Unschärferelation:

Um ein Objekt auflösen zu können, muss die de Broglie-Wellenlänge des Projektils kleiner sein als die Ausdehnung des zu untersuchenden Objekts.

$$\lambda \leq \Delta x$$

Aus der Unschärferelation ergibt sich somit der benötigte Impuls des Projektils:

$$pc \geq \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} + m}{\Delta x}$$

Beispiele für die benötigten Impulse:

Objekt	Ausdehnung	Impuls
Kerne	einige fm	10-100 MeV/c
Nukleonen	$\approx 0,8 \text{ fm}$	$\approx 100 \text{ Mev/c}$
Quarks	punktförmig!?	$>>\text{GeV/c}$

2.3.2 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt σ ist eine physikalische Größe zur Beschreibung von Streuvorgängen. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines einfallenden Teilchens am Streuzentrum. Eine anschauliche Erklärung ist die effektive Streufläche.

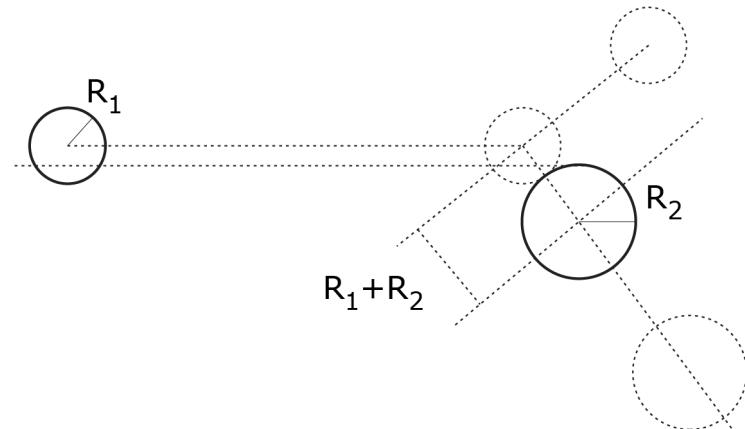
Entsprechend ist auch die Dimension des Wirkungsquerschnitts eine Fläche. Dieser wird üblicherweise in cm^2 angegeben. Für Kernreaktionen hat sich die Einheit *barn* eingebürgert:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

Die Bezeichnung *barn* (engl: Scheune) wurde während des Manhattenprojekts für sehr große Wirkungsquerschnitte eingeführt und ist eine Anspielung auf die Redewendung „as big as a barn“ (deutsche Entsprechung: „groß wie ein Scheunentor“) gewesen. In der

Teilchenphysik liegen die Wirkungsquerschnitte üblicherweise zwischen *nanobarn*: $nb = 10^{-9} \text{ barn}$ und *picobarn*: $pb = 10^{-12} \text{ barn}$.

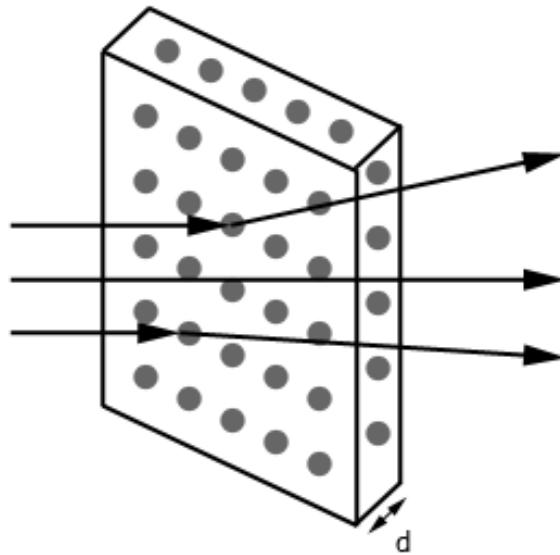
Illustration: feste Kugeln



$$\text{Abstand } R = R_1 + R_2 \text{ zum Zeitpunkt der Streuung} \Rightarrow \sigma = \pi R^2$$

Ein Strahl monoenergetischer Teilchen trifft auf ein Target mit gleichmäßig verteilten Streuzentren.

Geometrischer Wirkungsquerschnitt
(vereinfachtes Modell)



- A : Querschnittsfläche des einfallenden Teilchenstrahls

- n_a : Teilchendichte im Strahl
- \dot{n}_a : Rate aller einfallenden Teilchen
- Φ_a : Fluss, also die Zahl der pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit auf das Target treffende Teilchen

$$\Phi_a = \frac{\dot{N}_a}{A} = n_a \cdot v_a$$

- v_a : Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen
- N_b Gesamtzahl der Targetteilchen innerhalb des Strahlquerschnitts A

Damit lässt sich die Reaktionsrate schreiben als

$$\dot{N} = \frac{\dot{N}_a N_b \sigma_b}{A}$$

wobei

$$\frac{N_b \sigma_b}{A} \stackrel{\text{gesamte Streufläche}}{=} \frac{\text{Gesamtfläche des Strahls}}{\text{Gesamtfläche des Strahls}} = \text{Wahrscheinlichkeit}$$

$$\boxed{\dot{N} = \Phi_a \cdot N_b \cdot \sigma_b}$$

Diese Formel gilt jedoch nur, wenn die Streuzentren nicht räumlich überlappen (\rightarrow dünnes Target). Diese geometrische Überlegung liefert die Motivation für die allgemeine Definition des totalen Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma \equiv \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der Strahlteilchen/Zeit} \cdot \text{Zahl der Streuzentren/ Fläche}}$$

Mit den obigen Größen lässt sich der Wirkungsquerschnitt nun schreiben als

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\dot{N} \cdot n_b \cdot d}$$

Beispiele:

$$\sigma_{pp}(10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ mb}$$

$$\sigma_{\nu p}(10 \text{ GeV}) \approx 7 \cdot 10^{-14} \text{ b} = 70 \text{ fb}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die **Luminosität** \mathcal{L} .

$$\mathcal{L} \equiv \Phi_a \cdot N_b$$

Sie hat die Dimension Fläche⁻¹ · Zeit⁻¹ und wird in Einheiten von $cm^{-1}s^{-1}$ angegeben. Die Rate eines bestimmten Prozess ist dann gegeben durch

$$\boxed{\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma}$$

Kollidierende Teilchenstrahlen:

Zwei Teilchensorten (a und b) in jeweils j Teilchenpaketen mit N_a und N_b Teilchen, zum Beispiel Protonen und Antiprotonen.

Beispiel Tevatron:

$$\begin{aligned} j \cdot N_p &= 8000 \cdot 10^9 \\ j \cdot N_{\bar{p}} &= 1500 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

Die Umlauffrequenz eines Pakets ist $\tilde{f} = \frac{v}{u}$. Somit ist die Kollisionsfrequenz am Wechselwirkungspunkt $f = j \cdot \tilde{f}$. Mit dem Strahlquerschnitt A lässt sich die Luminosität nun schreiben als:

$$\mathcal{L} = \frac{N_a N_b \cdot f}{A}$$

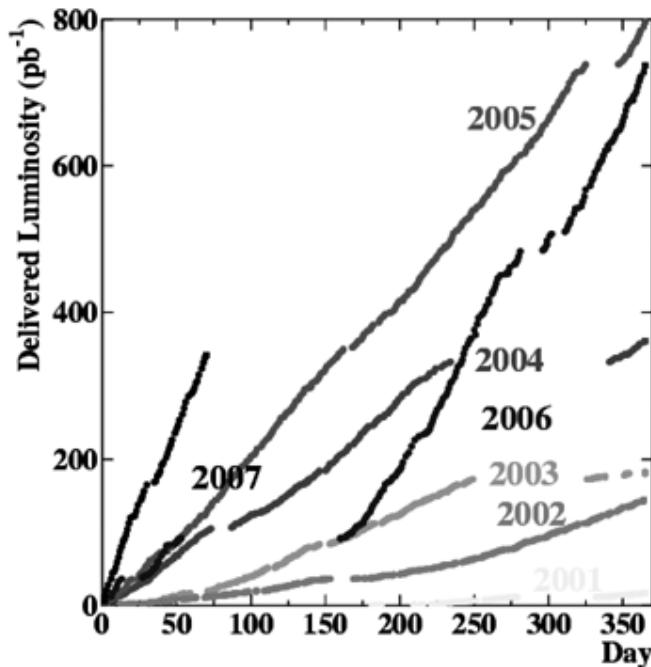
Annahme: Das Strahlprofil ist gaußförmig in x und y mit den Standardabweichungen σ_x und σ_y ($\rightarrow A = 4\pi\sigma_x\sigma_y$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \frac{N_a N_b f}{\sigma_x \sigma_y}$$

Die integrierte Luminosität ist beim Betrieb eines Speicherrings über mehrere Jahre ein Maß für die bisher aufgezeichnete Datenmenge.

$$\mathcal{L}_{int} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \cdot dt$$

Auf der folgenden Abbildung ist die integrierte Luminosität der einzelnen Betriebsjahre des Tevatrons abgebildet.



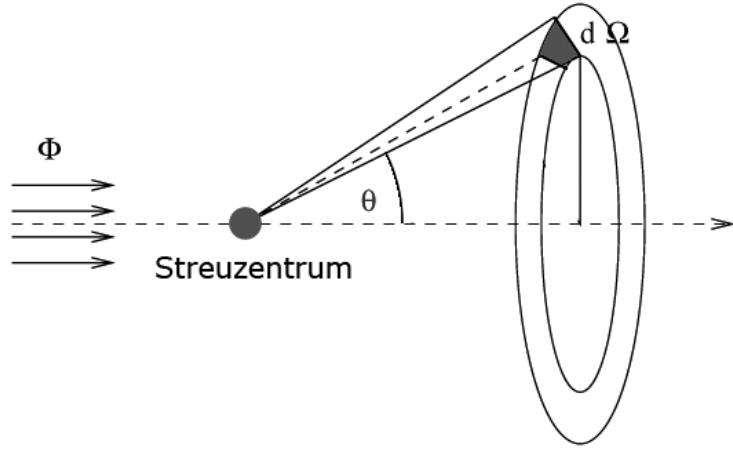
Differentieller Wirkungsquerschnitt:

Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird in Abhängigkeit verschiedener Variablen angegeben, zum Beispiel:

- Raumwinkel Ω
- Polarwinkel θ
- Transversalimpuls $p_t = |\vec{p}| \cdot \cos \theta$
- Energie E

Die Bestimmung erfolgt durch Messung der Winkel- beziehungsweise Energieverteilung.

Beispiel: Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit des Raumwinkels Ω . Betrachte dazu das Raumwinkelement $d\Omega$ zwischen θ und $\theta + d\theta$ sowie φ und $\varphi + d\varphi$



$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Die Reaktionsrate lässt sich dann schreiben als

$$\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \Delta\Omega$$

Diese Schreibweise ist zum Beispiel bei der Coulombstreuung sinnvoll, da der totale Wirkungsquerschnitt divergiert ($\sigma_{tot} \rightarrow \infty$). Das lässt sich damit erklären, dass die Reichweite des Coulombpotentials unendlich ist.

Der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt ist in Abhängigkeit von zwei Variablen gegeben, meist Ω und E' (Energie des gestreuten Projektils)

$$\frac{d\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega dE'}$$

2.3.3 Die Goldene Regel

Nun stellt sich jedoch die Frage, wie sich der Wirkungsquerschnitt theoretisch berechnen lässt. Die Antwort darauf gibt uns die Quantenmechanik.

1. Beschreibung der Wechselwirkung durch einen Hamiltonoperator \mathcal{H} . Das Übergangsmatrixelement M_{fi} überführt den Anfangszustand i (initial) in den Endzustand f (final) und gibt gerade die Übergangswahrscheinlichkeit von i nach f an.

$$M_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H} \psi_i dV$$

2. Die Reaktionsrate hängt auch von der Anzahl der möglichen Endzustände f im Phasenraum ab.

Phasenraum:

Der Phasenraum ist ein 6-dimensionaler Orts- und Impulsraum. Nach der Heisenbergschen Umschärferektion besetzt jedes Teilchen das Phasenraumvolumen

$$h^3 = (2\pi\hbar)^3$$

Betrachte die Streuung eines Teilchens im Volumen V und Impulsbereich p' und $p' + dp'$
 \Rightarrow Kugelschale im Impulsraum $4\pi p'^2 dp'$.

$$dn(p') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'$$

Aus $E = \frac{p^2}{2m}$ folgt $dE' = v' \cdot dp'$. Damit ergibt sich die Dichte der Endzustände im Energieintervall dE' :

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v'(2\pi\hbar)^3}$$

Die Verbindung zwischen M_{fi} und dem Phasenraum $\rho(E')$ ist gegeben durch **Fermi's Goldene Regel** (Quantenmechanik: Näherung für zeitabhängige Probleme).

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \cdot \rho(E')$$

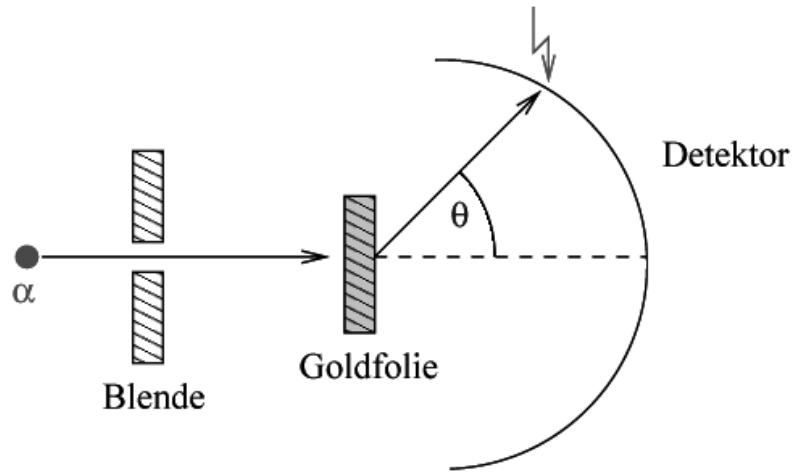
Dabei ist W die Reaktionsrate pro Targetteilchen und pro einfallendes Teilchen.

$$W = \frac{\dot{N}}{N_b N_a} = \frac{\Phi_a N_b \sigma}{N_b N_a} = \frac{\sigma \cdot v_a}{V}$$

Somit kann man den Wirkungsquerschnitt berechnen:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \cdot |M_{fi}|^2 \rho(E') \cdot V$$

2.4 Rutherfordstreuung



Die gestreuten α -Teilchen lassen sich als Lichtblitze auf einem Zinnsulfidschirm beobachten.
Die verwendete Foldfolie muss dünn sein, da man nur einmalige Streuung des α -Teilchens an einem Atomkern beobachten möchte, keine mehrfach Wechselwirkung.

Die beobachtete Größe ist die Anzahl der Lichtblitze pro Raumwinkelement

$$\left. \frac{d\dot{N}}{d\Omega} \right|_{\theta}$$

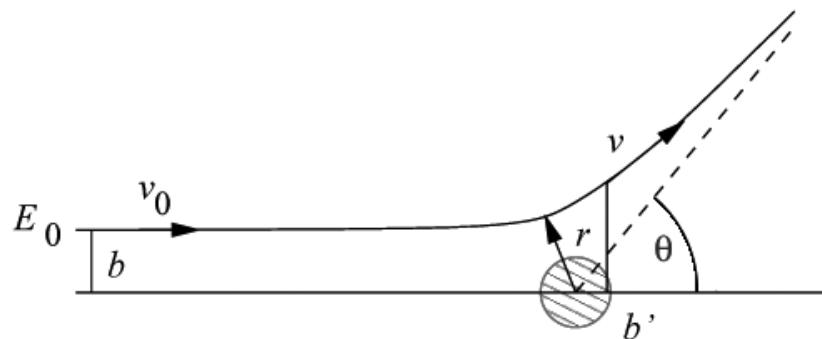
Interpretation:

Elastische Streuung an Coulombpotential.

$$\vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z'Ze^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Nun stellt sich die Frage, ob wir $\frac{d\dot{N}}{d\Omega}$ vorhersagen können?

1. Stoßparameter b :

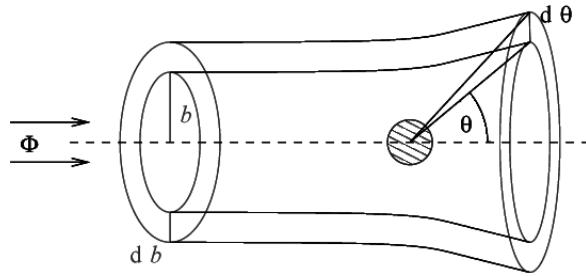


b: senkrechter Abstand zwischen Teilchen und Streuzentrum.

\vec{F}_c ist eine Zentralkraft. Daraus resultiert eine vollständige Symmetrie um die Achse des einfallenden Strahls (Azimutal-Symmetrie)

$$\Rightarrow d\Omega = 2\pi \sin \theta \cdot d\theta$$

Betrachte nun ein Kreissegment des einfallenden Strahls, das in das Winkelsegment $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreut wird.



Elastische Streuung: Erhaltung der Teilchenzahl, die Teilchenzahlrate durch das Kreissegment ist also gleich der Teilchenzahlrate im Winkelsegment nach der Streuung.

$$\dot{N}_a = \frac{2\pi b \cdot db}{A} = \dot{N}(\theta, d\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega \cdot L$$

Mit $L = \Phi_a \cdot N_b$ und nur einem Streuzentrum ($N_b = 1$) erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu:

$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right|}$$

Das Betragszeichen stellt sicher, dass der Wirkungsquerschnitt nie negativ wird. Diese Gleichung gilt allgemein für die Streuung an einem Zentralpotential. Beispiel: Streuung an harten Kugeln.

- Zusammenhang zwischen b und θ für Coulombpotential: Bahnkurve (klassische Mechanik: Keplerproblem)

$$m_{Kern} \gg m_\alpha$$

Das heißt wir haben in guter Näherung ein Einkörperproblem. Andernfalls müsste man mit der reduzierten Masse rechnen.

\Rightarrow Streuung an einem statischen Potential

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$ (Zentralkraft)

Wähle nun das Koordinatensystem so, dass $\vec{L} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow$ Bahn in ebenen Polarkoordinaten: r, φ (anders als in unserem Streuproblem). In den neuen Koordinaten ist der Drehimpuls nun $mr^2\dot{\varphi} = l$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Durch ersetzen von $\dot{\varphi}$ durch den Drehimpuls, Separation der Variablen und anschließende Integration erhalten wir:

$$\varphi(r) = \pm \frac{l}{m} \int_{r_0}^r \frac{\dot{r}'^2 dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{l^2}{2mr^2}}}$$

Die Lösung des Integrals für $V = k \cdot \frac{1}{r}$ findet man in den Büchern der klassischen Mechanik.

$$r = \frac{l^2}{m \cdot (1 + \epsilon \cos \varphi)} \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{m \cdot k^2}$$

Mit $l = b \cdot p = b\sqrt{2mE}$ erhalten wir:

$$\Rightarrow \epsilon^2 = 1 + \frac{4E^2b^2}{m \cdot k^2}$$

Beziehung zwischen φ und θ ?

Für $r = \infty$ ist $a + \epsilon \cdot \cos \varphi_\infty = 0$. Nun kann man die Symmetrie der Hyperbel ausnutzen und die Drehachse für φ in das Streuzentrum legen. Damit ist $\varphi_\infty = \pm \frac{\Psi}{2}$, wobei Ψ der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel ist. Aus der Relation $\Psi + \theta = \pi$ folgt $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$.

$$\Rightarrow b = \frac{k}{2E} \cdot \cot \frac{\theta}{2}$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{db}{d\theta} \right) \\ \frac{db}{d\theta} &= \frac{k}{2E} \cdot \frac{d}{d\theta} \cot \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{k^2}{4E^2} \cdot \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

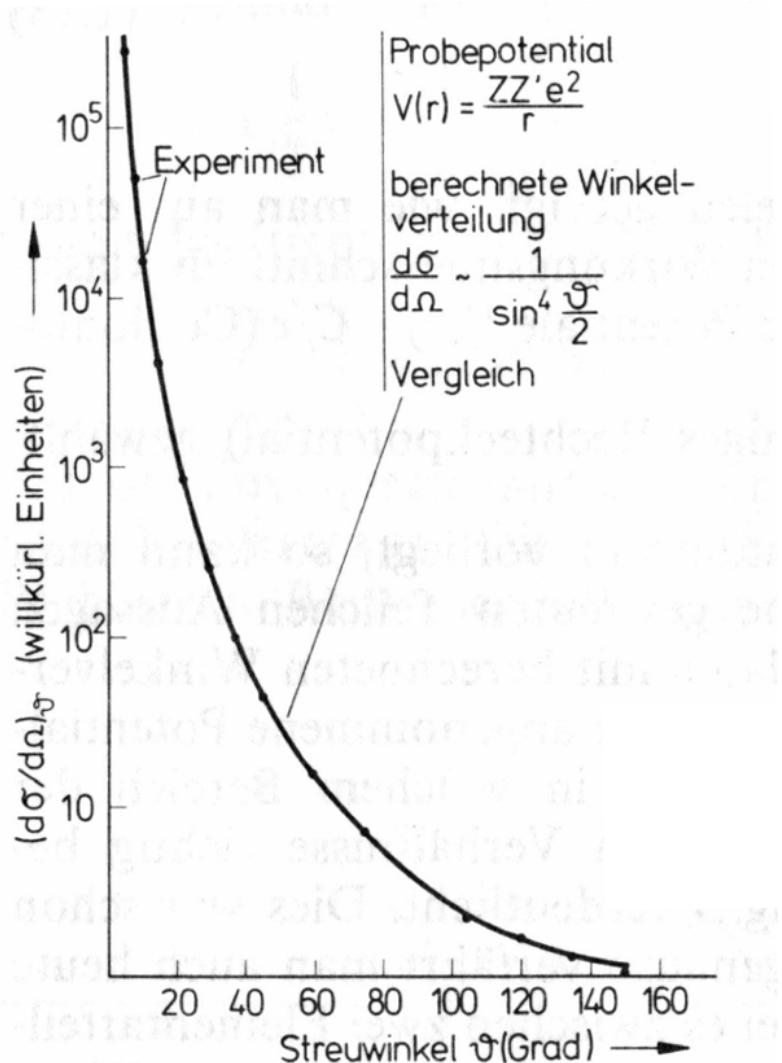
Mit $k = \frac{Z'Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0}$ erhalten wir schließlich:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Z'Z \cdot e^2}{4E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Bemerkung:

σ_{tot} divergiert für das Coulombpotential, da die Felder nicht auf Null gehen. Die Reichweite der Coulombkraft ist also unendlich. In der Realität schirmen die Elektronen der Atomhülle das Potential jedoch ab.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Vergleich zwischen den Vorhersagen der Theorie und den experimentellen Ergebnissen der Rutherfordstreuung.



Quelle: T. Mayer-Kuckuck, Kernphysik

Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment, aber unter bestimmten Bedingungen treten Abweichungen, nämlich dann, wenn kleinste Abstände erreicht werden, bei

1. großen Energien

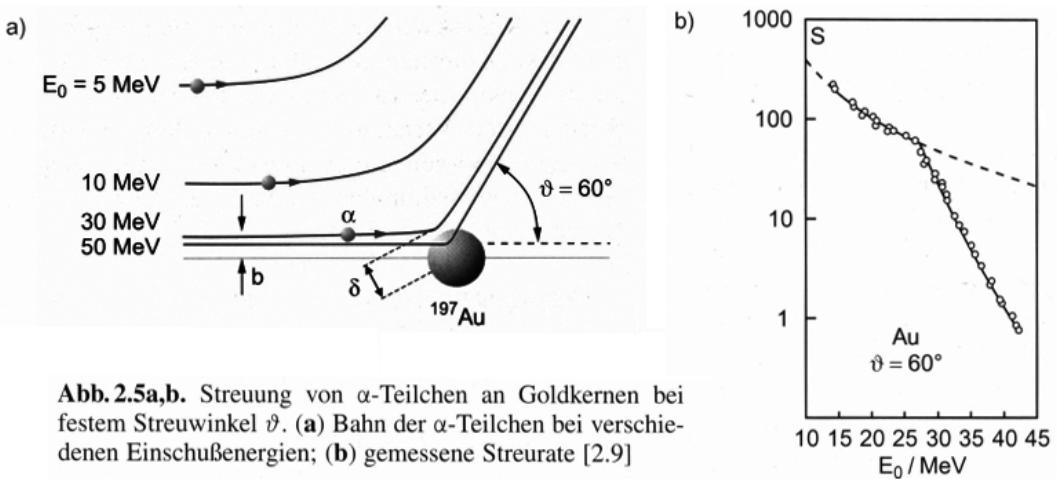


Abb. 2.5a,b. Streuung von α -Teilchen an Goldkernen bei festem Streuwinkel ϑ . (a) Bahn der α -Teilchen bei verschiedenen Einschussenergien; (b) gemessene Streureate [2.9]

2. großen Streuwinkeln (extrem: zentraler Stoß)

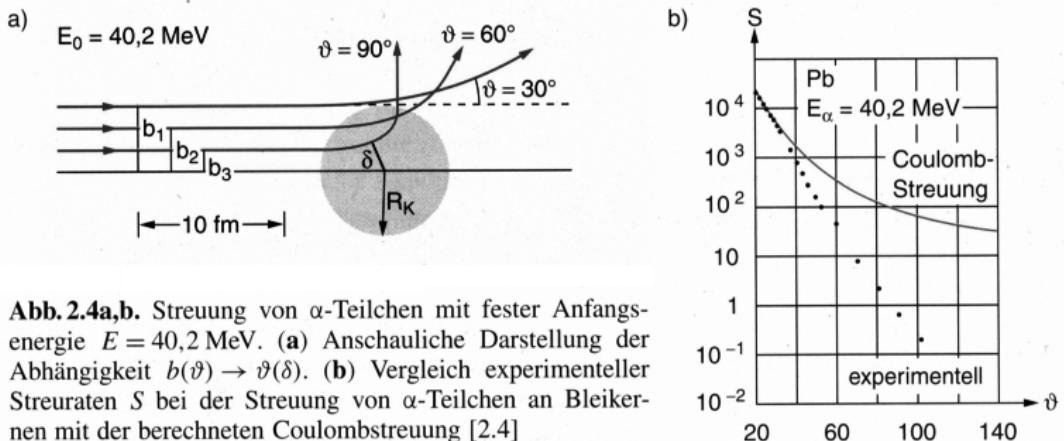
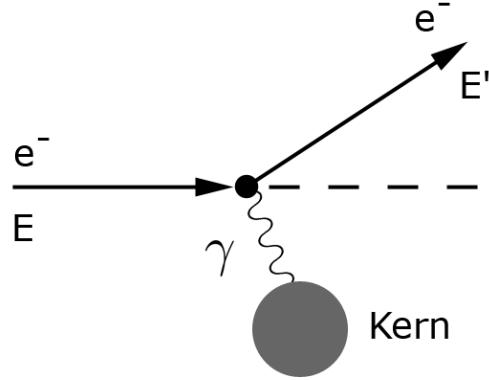


Abb. 2.4a,b. Streuung von α -Teilchen mit fester Anfangsenergie $E = 40,2 \text{ MeV}$. (a) Anschauliche Darstellung der Abhängigkeit $b(\vartheta) \rightarrow \vartheta(b)$. (b) Vergleich experimenteller Streureaten S bei der Streuung von α -Teilchen an Bleikerernen mit der berechneten Coulombstreuung [2.4]

Quelle: W. Demtröder, Experimentalphysik 4

2.5 Elektronstreuung an Kernen, Formfaktor



Bei der Elektronstreuung an einem Kern wird ein virtuelles Photon ausgetauscht. Dabei wird kinetische Energie auf den Kern übertragen: $E_{\text{rück}} = E - E'$.

2.5.1 Energie des gestreuten Elektrons

Zur Erinnerung: Viererimpuls $p = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$

Der Impuls des Elektrons sei vor der Streuung p und nach der Streuung p' . Analog dazu die Impulse des Kerns P_k und P'_k . Aus der Impulserhaltung folgt nach quadrieren

$$p^2 + 2pP_k + P_k^2$$

Bei der elastischen Streuung ist der Betrag des Viererimpulses erhalten, also

$$p^2 = p'^2 = M_e^2 c^2$$

$$P_k^2 = P'_k^2 = M_k^2 c^2$$

Nachweisen kann man jedoch nur das gestreute Elektron. Der Kernimpuls ergibt sich zu $P'_k = p + P_k - p'$.

$$\Rightarrow pP_k = p' \cdot (p + P_k - p') = p'p + p'P_k - M_e^2 c^2$$

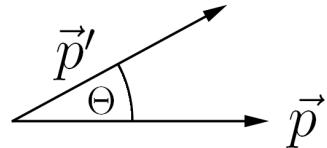
Im Laborsystem gilt:

$$p = (\frac{E}{c}, \vec{p}), p' = (\frac{E'}{c}, \vec{p}'), \text{ und } P_k = (M_k c, 0), P'_k = (\frac{E'_k}{c}, \vec{P}_k)$$

Wenn man dies in die Gleichung einsetzt und mit c^2 multipliziert erhält man:

$$EM_k c^2 = E \cdot E' - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E' M_k c^2 - M_e^2 c^4$$

Da $E \gg M_e c^2$ kann man diesen Term vernachlässigen. Außerdem ist $E \approx |\vec{p}| \cdot c$ und $E' \approx |\vec{p}'| \cdot c$



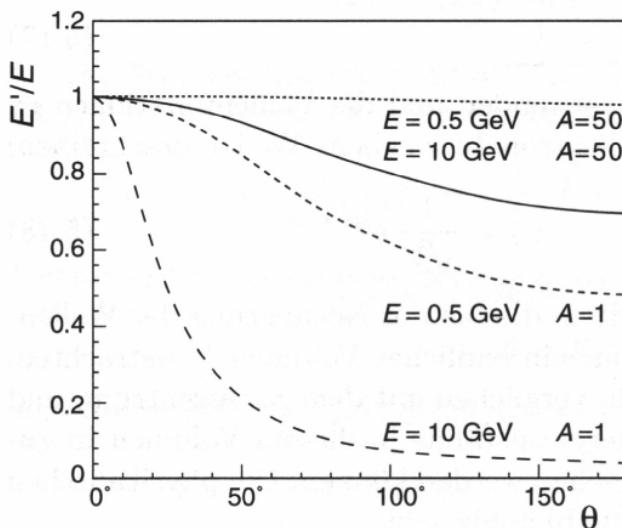
$$\cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{|\vec{p}| |\vec{p}'|}$$

$$\Rightarrow EM_k c^2 = EE' \cdot (1 - \cos \theta) + E' M_k c^2$$

Somit ergibt sich die Energie des gestreuten Elektronen:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M_k c^2} \cdot (1 - \cos \theta)}$$

Bei der elastischen Streuung erhalten wir also eine eindeutige Beziehung zwischen dem Streuwinkel θ und der Energie des gestreuten Elektrons.

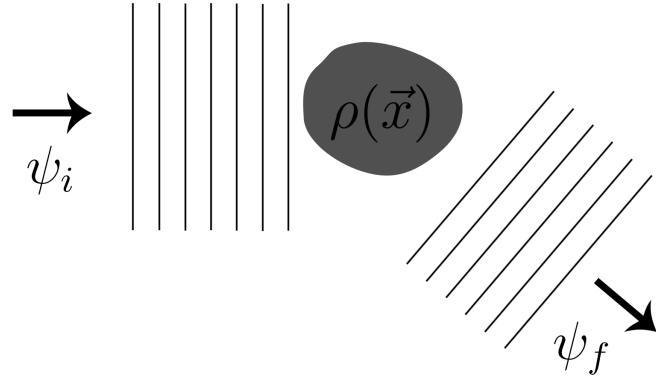


Quelle:
Povh, Rith, Teilchen
und Kerne, Abb. 5.2

Abbildung 5.2. Winkelabhängigkeit der auf die Strahlenergie normierten Elektronstreuenergie E'/E bei elastischer Elektron-Kern-Streuung. Die Kurven zeigen diesen Zusammenhang für zwei verschiedene Strahlenergien (0.5 GeV und 10 GeV) und zwei unterschiedlich schwere Kerne ($A = 1$ und $A = 50$).

2.5.2 Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

Bisher haben wir die Ausdehnung des Kerns nicht berücksichtigt. Die störungstheoretische Behandlung des Problems liefert die Born'sche Näherung ($Z \cdot \alpha \ll 1$)



Den einfallenden Elektronenstrahl kann man als ebene Welle beschreiben durch die Wellenfunktion

$$\psi_i = \frac{1}{V} \cdot e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}$$

Ebenso das gestreute Elektron entsprechend

$$\psi_f = \frac{1}{V} \cdot e^{i\vec{p}\vec{x}'/\hbar}$$

Die Wellenfunktion ist normiert auf ein endliches Volumen, wobei dieses viel größer als das Streuzentrum ist.

$$\int_V |\psi_i|^2 dV = n_a \cdot V$$

Dabei ist n_a die Teilchendichte. Nach der Goldenen Regel (siehe Abschnitt 2.3.3) ist der Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_e} \cdot |M_{fi}|^2 \rho(E') \cdot V$$

Die Zustandsdichte ist gegeben durch

$$\rho(E') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v'(2\pi)^3}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch Division durch 4π . Für relativistische Elektronen gilt: $v_e = v' = c$ und $p'c = E'$. Das Übergangsmatrixelement ist gegeben

durch $M_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 \cdot (\hbar c)^4} \cdot |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

Berechnung von $\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle$:

Der Wechselwirkungsoperator ist in diesem Fall gegeben durch das Coulombpotential: $\mathcal{H}_{int} = e \cdot \Phi$. Das Übergangsmatrixelement berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{i\vec{p}'\vec{x}/\hbar} \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Der Impulsübertrag \vec{q} ist gegeben durch $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$. Damit lässt sich das Matrixelement nun schreiben als:

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Mit dem Green'schen Theorem, einem Korollar des Satzes von Gauß

$$\int_V u \Delta v d^3x = \int_V v \Delta u d^3x$$

lässt sich das Integral nun umschreiben als:

$$\int \Phi(\vec{x}) \cdot e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x - \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \cdot \int e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} \cdot \Delta \Phi(\vec{x}) d^3x$$

Aus der Elektrodynamik ist bekannt:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ ist statisch. Wir definieren nun die auf die Gesamtladung normierte Ladungsdichte $f(\vec{x})$:

$$\rho(\vec{x}) = Z \cdot e \cdot f(\vec{x})$$

Mit der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ lässt sich das Matrixelement schließlich schreiben als

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{Z \cdot 4\pi\alpha\hbar^3c}{|\vec{q}|^2 \cdot V} \int f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Wir definieren das Integral nun als Formfaktor:

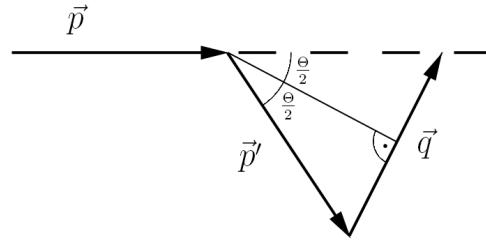
$$F(\vec{q}) = \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der normierten Ladungsverteilung. Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich nun schreiben als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 \cdot Z^2 \alpha (\hbar c)^2 E'^2}{(|\vec{q}|c)^4} \cdot F(\vec{q})^2$$

Als Beispiel betrachten wir nun die Streuung an einer punktförmigen Ladungsverteilung $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$. Dies liefert uns die schon bekannte Rutherfordstreuung.

Der Formfaktor ist konstant und bei entsprechender Normierung $F(\vec{x}) = 1$. Der Rückstoß ist vernachlässigbar. Mit $E' = E$ beziehungsweise $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ erhalten wir:

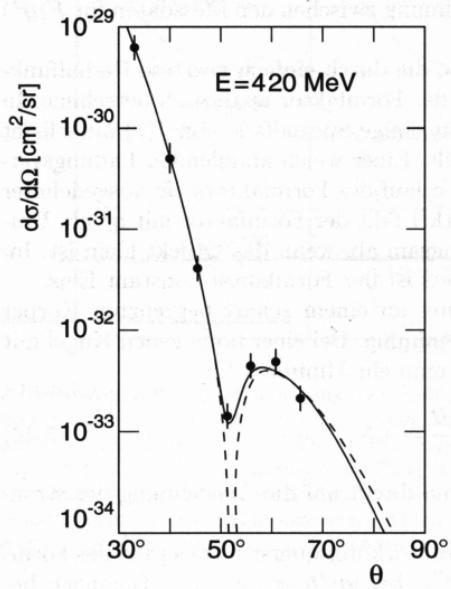


$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{q}|}{2 \cdot |\vec{p}|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{3 \cdot E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Diese Herleitung über den Formfaktor ist wesentlich einfacher als die Herleitung in Abschnitt 2.4.

Messung von Formfaktoren:



Quelle:
Povh, Rith, Kerne und
Teilchen, Abb. 5.5

Abbildung 5.5. Messung des Formfaktors von ^{12}C durch Elektronenstreuung (nach [Ho57]). Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, der bei einer festen Strahlenenergie von 420 MeV unter 7 verschiedenen Streuwinkeln gemessen wurde. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf, der sich ergibt, wenn eine ebene Welle an einer homogenen Kugel mit diffusem Rand gestreut wird (Born'sche Näherung); die durchgezogene Kurve entspricht einer exakten Streuphasenanalyse, die an die Messdaten angepasst wurde.

Minimum bei $\theta = 51^\circ: \Rightarrow |\vec{q}|/\hbar \approx 1,8 \text{ fm}^{-1}$

- Rascher Abfall: $\frac{1}{|\vec{q}|^4}$ -Abhängigkeit.
- Minimum: Der Formfaktor stellt ein Beugungsbild dar.

Mott-Wirkungsquerschnitt:

Das Elektron hat Spin $\frac{1}{2}$. Berücksichtigt man dies, ändert sich die Winkelverteilung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Dabei ist $\beta = \frac{v}{c}$. Der Stern * kennzeichnet, dass der Rückstoß des Targets nicht berücksichtigt wird.

Im Spezialfall einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $f(\vec{x}) = f(|\vec{x}|) = f(r)$ erhält man in Kugelkoordinaten:

$$F(\vec{q}^2) = 4\pi \int f(r) \cdot \frac{\sin(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} r^2 dr$$

Zusammenhang zwischen dem Formfaktor und der Ladungsverteilung:

Tabelle 5.1. Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung und Formfaktor für einige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in Born'scher Näherung

Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q^2)$
Punkt	$\delta(r)/4\pi$
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2 r^2/2)$
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$
	1 konstant $(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$ Dipol $\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$ Gauß $3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha \cos\alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$ oszillierend

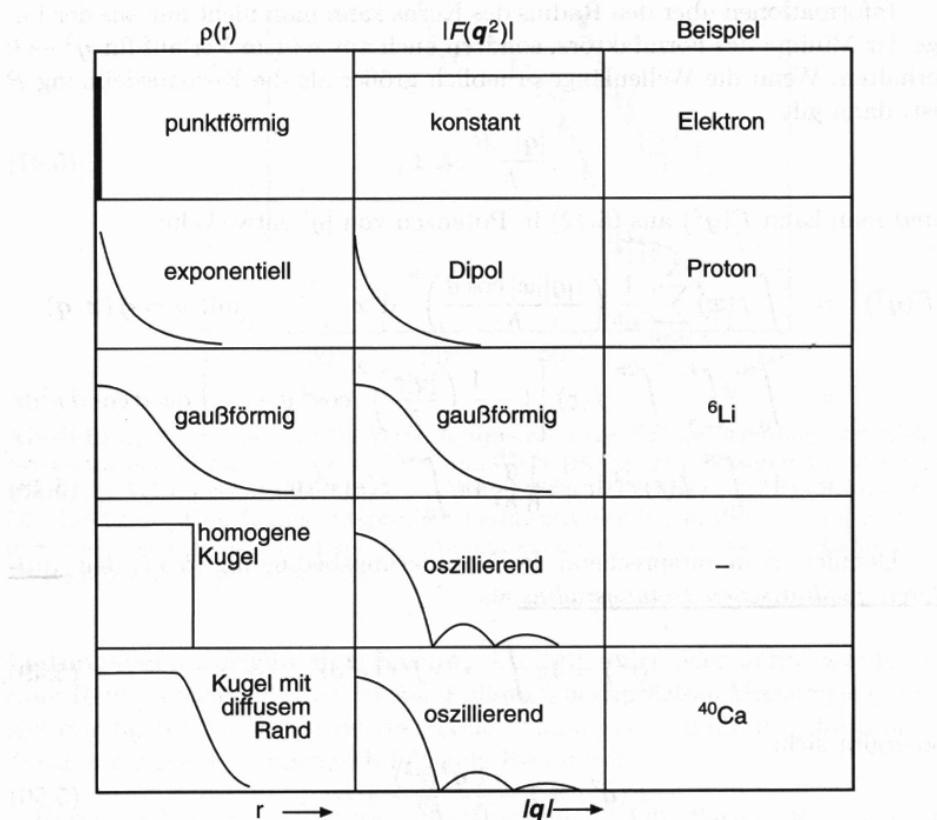


Abbildung 5.6. Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor in Born'scher Näherung. Einem konstanten Formfaktor entspricht eine punktförmige Ladung (z. B. Elektron), einem sogenannten Dipol-Formfaktor eine exponentiell abfallende Ladungsverteilung (z. B. beim Proton), einem gaußförmigen Formfaktor eine ebensolche Ladungsverteilung (z. B. ${}^6\text{Li}$ -Kern) und einem oszillierenden Formfaktor eine homogene Kugel mit mehr oder minder scharfem Rand. Alle Kerne, mit Ausnahme der ganz leichten, haben einen oszillierenden Formfaktor.

Quelle: Povh, Rith, Kerne und Teilchen

Elektronenstreuung an ^{40}Ca und ^{48}Ca :

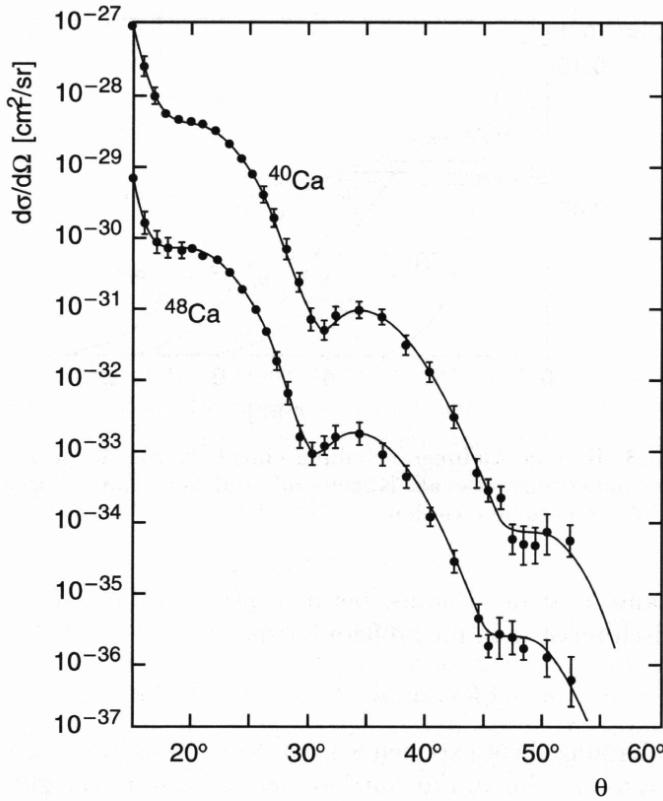


Abbildung 5.7. Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an den Kalziumisotopen ^{40}Ca und ^{48}Ca [Be67]. Zur besseren Darstellung wurde der Wirkungsquerschnitt für ^{40}Ca und ^{48}Ca mit 10 bzw. 10^{-1} multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepasst hat. Aus der Lage der Minima kann man sehen, dass der Radius von ^{48}Ca größer ist als der von ^{40}Ca .

Quelle: Povh, Rith, Kerne und Teilchen

Das Minimum liegt bei ^{48}Ca bei einem kleineren Winkel als bei ^{40}Ca . Somit besitzt ^{48}Ca eine größere Ausdehnung.

Radiale Ladungsverteilung der Kerne:

Wie auf nachfolgender Abbildung zu sehen ist, haben die Kerne in der Mitte eine nahezu konstante Ladungsdichte. Zum Rand hingegen läuft diese diffus aus.

Eine gute Beschreibung der radialen Ladungsverteilung ist gegeben durch die Fermi-Verteilung:

$$\varrho(r) = \frac{\varrho(0)}{a + e^{(r-c)/a}}$$

Mit $c = 1,07 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ und $a = 0,54 \text{ fm}$.

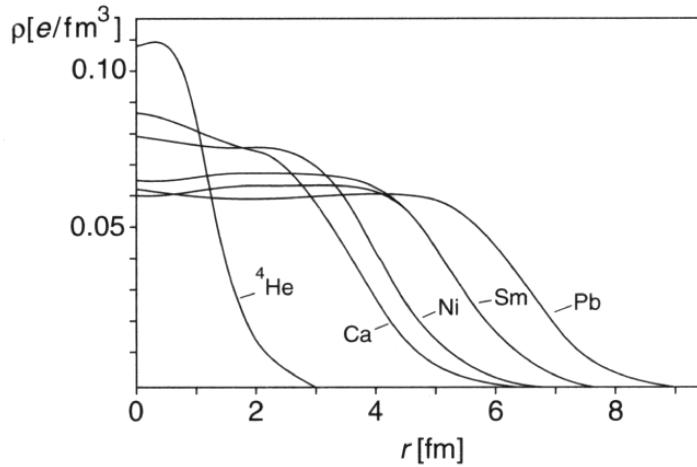


Abbildung 5.8. Radiale Ladungsverteilung einiger Kerne. Diese Ladungsverteilungen können näherungsweise als Kugeln mit diffusen Rand durch die Fermi-Verteilung (5.52) beschrieben werden.

Quelle: Povh, Rith, Kerne und Teilchen

Der mittlere quadratische Radius ist gegeben durch:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 f(r) \cdot r^2 dr$$

Für mittlere und schwere Kerne gilt jedoch die Näherung:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

wobei $r_0 = 0,94 \text{ fm}$ ist.

Man kann den Kern also näherungsweise als Kugel mit Radius R ansehen. Mit $R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle$ erhalten wir die Beziehung, die wir bereits in der Massenformel verwendet haben:

$$R = 1,21 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$$

Ausnahmen bilden nur die leichten Kerne, wie zum Beispiel: 6Li , 9Be und 4He . Diese Kerne besitzen ungefähr eine gaußförmige Ladungsverteilung.

Die Nukleondichte im Kern ist also nahezu konstant, mit im Mittel:

$$\varrho_N \approx 0,17 \frac{\text{Nukleonen}}{\text{fm}^3}$$

2.6 Elektronstreuung an Nukleonen

Bei der Elektronstreuung an Nukleonen ist der Rückstoß nicht mehr zu vernachlässigen, da die Energie in die Größenordnung der Ruhemasse der Nukleonen kommt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^*_{\text{Mott}} \cdot \frac{E'}{E}$$

Außerdem muss auch das magnetische Moment des Nukleons berücksichtigt werden. Für Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen ohne innere Struktur (Dirac-Teilchen) gilt:

$$\mu = g \frac{e}{2M} \frac{\hbar}{2} \text{ wobei } g = 2$$

Nukleonen hingegen haben ein magnetisches Moment von

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \cdot \mu_N = 2,79 \cdot \mu_N$$

wobei $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p}$ das Kernmagneton ist. Folglich sind Nukleonen keine Diracteilchen und besitzen eine Substruktur.

Zur Beschreibung der Streuung werden nun zwei Formfaktoren benötigt:

- elektrischer Formfaktor $G_E(Q^2)$
- magnetischer Formfaktor $G_M(Q^2)$

Rosenbluth-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau GM^2(Q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

Messung des Formfaktors:

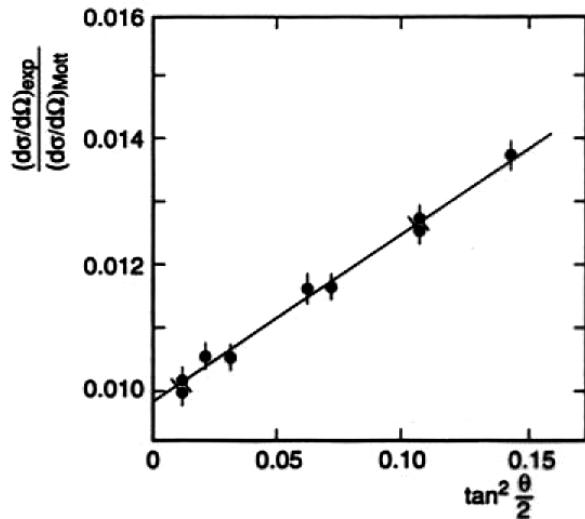


Abbildung 6.1. Quotient aus gemessenem und Mott-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{exp}}/\sigma_{\text{Mott}}$ als Funktion von $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ bei einem Viererimpulsübertrag von $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2/c^2$ [Ta67]

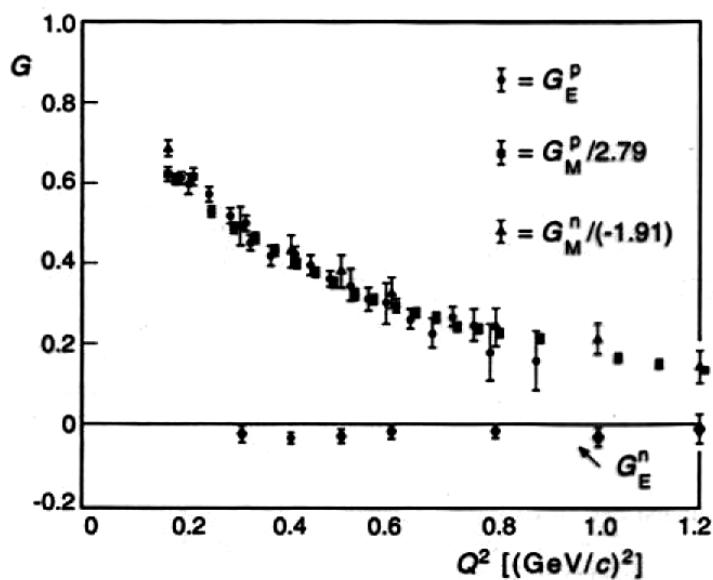


Abbildung 6.2. Elektrischer und magnetischer Formfaktor von Proton und Neutron, aufgetragen gegen Q^2 . Die Datenpunkte sind mit den angegebenen Faktoren skaliert und liegen dann übereinander, so dass das globale Dipolverhalten deutlich wird [Hu65].

Quelle: Povh, Rith, Kerne und Teilchen

Ergebnis der Messungen:

Die Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ haben bis auf die Normierung die gleiche Form.

Dipolverteilung:

$$G^{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0,71 \left(\frac{GeV}{c} \right)^2} \right)^{-2}$$

$$G_E^p(Q^2) = \frac{1}{2,79} G_M^p(Q^2) = \frac{1}{-1,91} G_M^n(Q^2) = G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

Dipolfaktor \Rightarrow Exponentiell abfallende Ladungsverteilung

$$\varrho(r) = \varrho(0) \cdot e^{-ar}$$

mit $a = 4,27 \text{ fm}^{-1}$

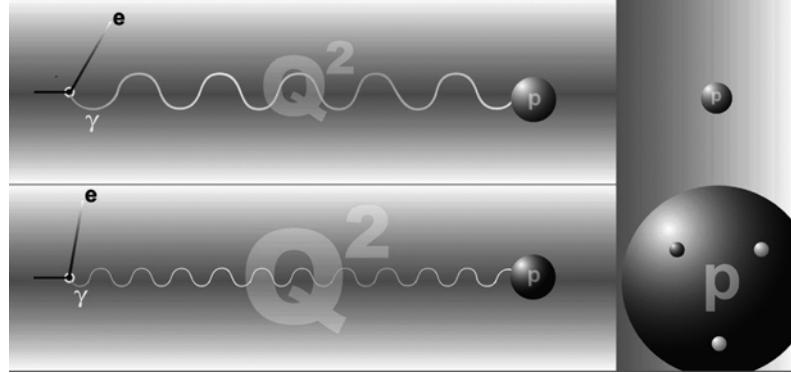
Nukleonen sind nicht punktförmig und sind auch keine Kugeln! Ihr mittlerer quadratischer Ladungsradius ist gegeben durch:

$$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0,862 \text{ fm}$$

3 Grundlagen der Teilchenphysik

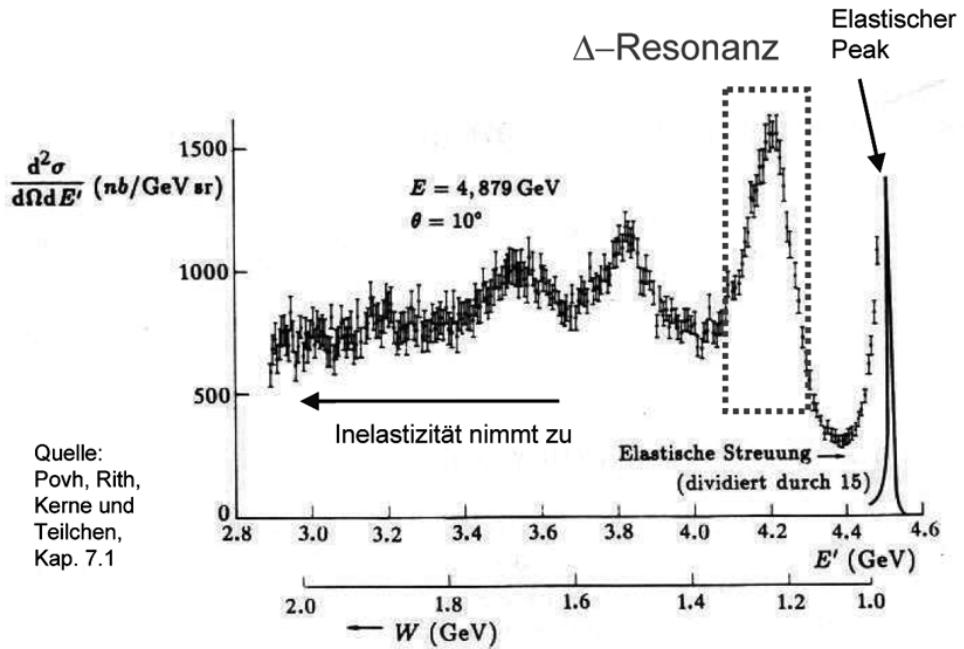
3.1 Tiefinelastische Streuung

Idee: Je höher der Impulsübertrag Q^2 ($Q^2 = -q^2$) desto kleiner ist die Wellenlänge des virtuellen Photons und desto kleinere Strukturen können aufgelöst werden.



Die Elektron-Proton-Streuung wurde Ende der 1960er Jahre am SLAC bei Energien bis 25 GeV untersucht.

3.1.1 Proton-Resonanzen



Resonanzanregungen des Protons deuten darauf hin, dass das Proton ein zusammengesetztes Objekt ist.

Die invariante Masse W der Resonanzen:

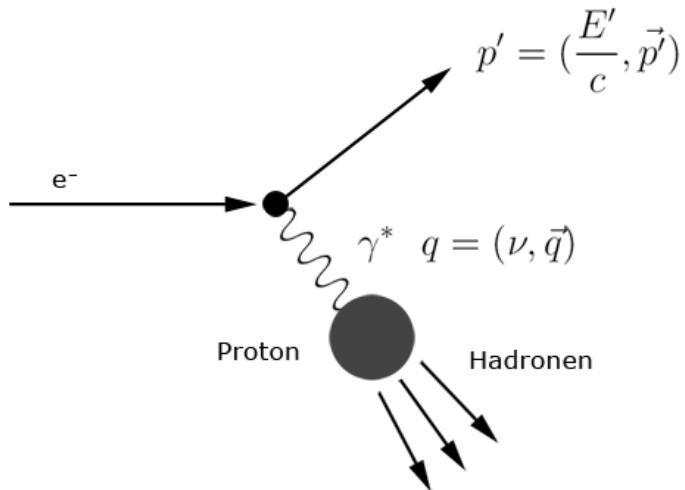
$$\begin{aligned} W^2 c^2 &= p'^2 = (p + q)^2 \\ &= M^2 c^2 + 2pq + q^2 \\ &= M^2 c^2 + 2M\nu + q^2 \end{aligned}$$

Dabei ist die Größe $\nu = \frac{p \cdot q}{M}$ lorentzinvariant. Falls das Targetproton in Ruhe ist gilt:

$$\nu = E - E'$$

3.1.2 Strukturfunktionen

Bei weiterer Erhöhung der Elektronenenergie wird das Proton zerstört. Dabei werden neue Hadronen erzeugt. Dieser Prozess wird **Tiefinelastische Streuung** genannt.



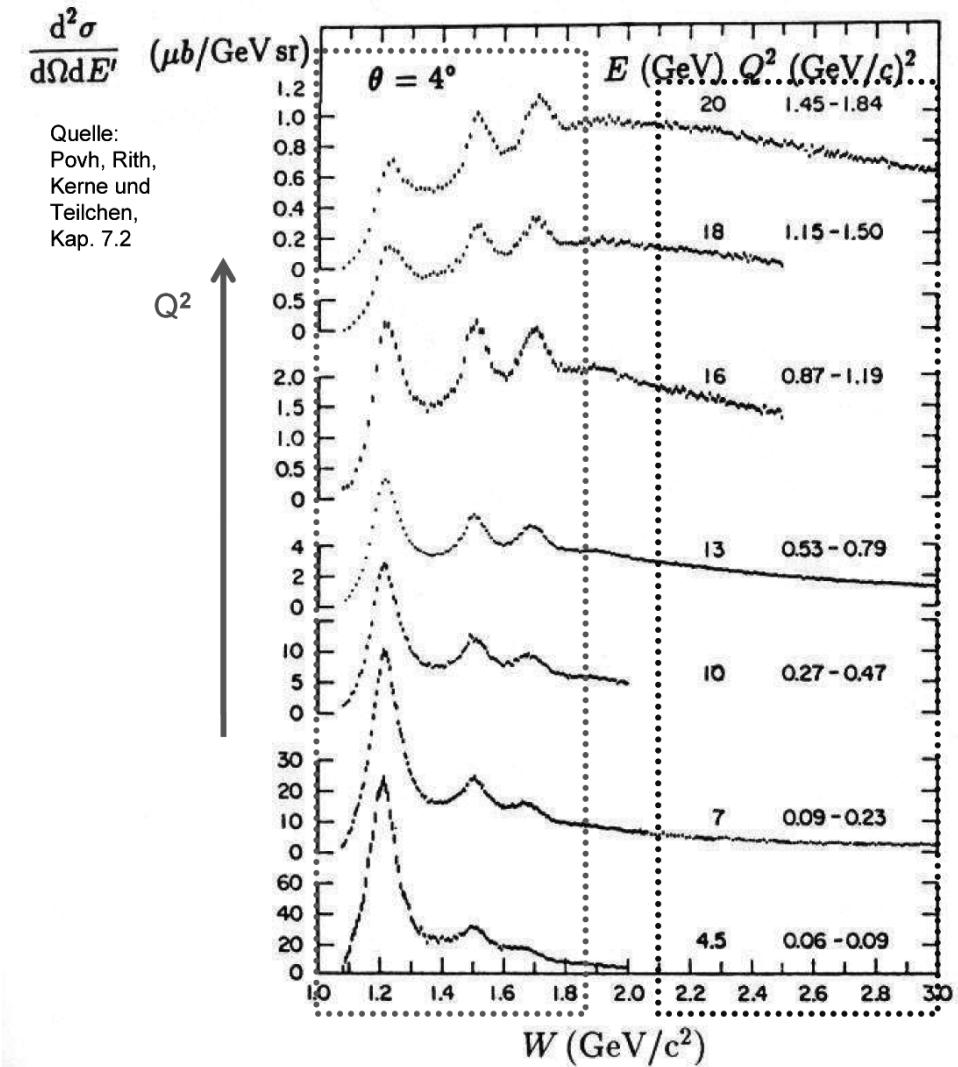
Im Gegensatz zur elastischen Streuung besteht kein fester Zusammenhang mehr zwischen E' und $\Theta \rightarrow 2$ Parameter. Die Formfaktoren heißen im Fall der inelastischen Streuung an Nukleonen **Strukturfunktionen**: w_1 und w_2 .

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die tiefinelastische Streuung ist gegeben durch:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* \cdot \left[w_2(Q^2, \nu) + 2 \cdot w_1(Q^2, \nu) \cdot \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$$

Dabei ist $\nu = E - E'$.

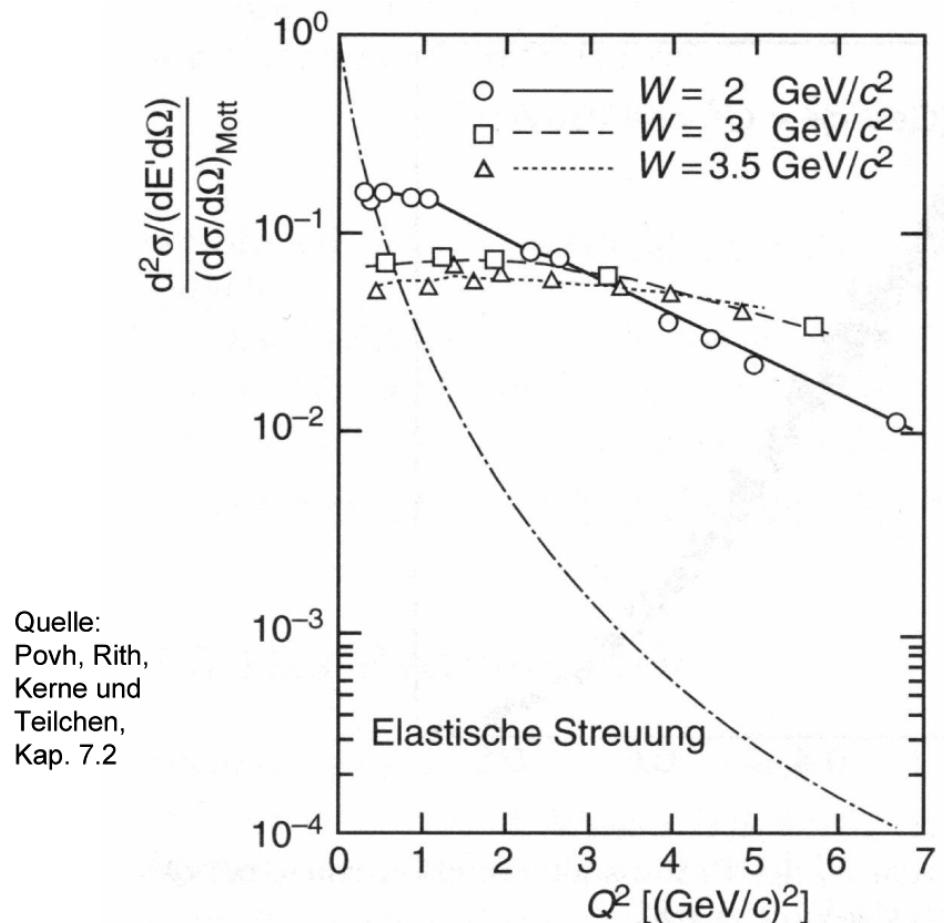
Auf der nachfolgenden Abbildung ist der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt für die ep-Streuung bei Wasserstoff unter einem festen Streuwinkel von $\Theta = 4^\circ$. Die Energie variiert von 4,5 bis 20 GeV.



Beobachtungen:

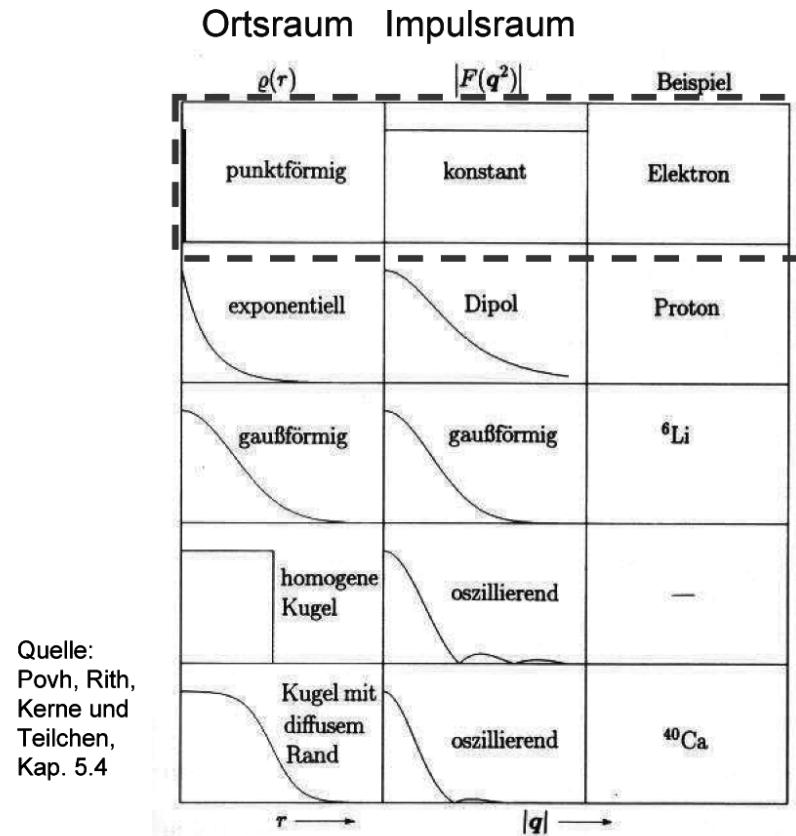
- Nukleonresonanzen sind mit zunehmenden Q^2 deutlich weniger ausgeprägt. Der Abfall des Wirkungsquerschnitts ist für das $\Delta(1232)$ am Auffälligsten.
- Der Abfall schwächt sich mit zunehmender Energie ab.
- Im Kontinuumsbereich bei $W \geq 2,5 \text{ GeV}/c^2$ ist die Abnahme des Wirkungsquerschnitts mit Q^2 nur gering.

3.1.3 ep-Wirkungsquerschnitt jenseits des Resonanzbereichs, Skaleninvarianz



Auf der obigen Abbildung ist der ep-Wirkungsquerschnitt jenseits des Resonanzbereichs aufgetragen. Ab $W \geq 2 \text{ GeV}/c^2$ hängt der Wirkungsquerschnitt nur noch schwach von Q^2 ab. Da Q^2 die Energieskala des Streuprozesses darstellt bezeichnet man diese Verhalten auch als Skaleninvarianz. Man beobachtet jedoch einen dramatischen Unterschied zur elastischen Streuung: Man erhält wesentlich höhere Zählraten.

Skaleninvarianz als Konsequenz der Protonsubstruktur



Wie bereits diskutiert ist der Formfaktor beziehungsweise die Strukturfunktion die Fouriertransformierte der räumlichen Ladungsverteilung

Experimentelle Beobachtung:

Die Strukturfunktion ist unabhängig von Q^2 , die Streuung erfolgt also an punktförmigen Quellen. Die Ladungsverteilung ist also eine Deltafunktion. Die punktförmigen Konstituenten des Protons können als Quarks identifiziert werden.

Die Konstituenten des Protons, beziehungsweise aller Hadronen werden auch als **Partonen** bezeichnet.

Bjorkens Skalierungshypothese (1967)

Bei hohen Energien verschwindet die Abhängigkeit der Strukturfunktion von q^2 . Die Funktionen hängen nur noch von

$$x \equiv -\frac{q^2}{2p_e \cdot q} = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

der Bjorken'schen Skalierungsvariablen ab, auch bezeichnet als „Bjorken x“, die eine lorentzinvariante Größe ist.

Nun lassen sich die Strukturfunktionen in Abhängigkeit von x schreiben:

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= Mc^2 \cdot W_1(Q^2, \nu) \\ F_2(x, Q^2) &= \nu \cdot W_1(Q^2, \nu) \end{aligned}$$

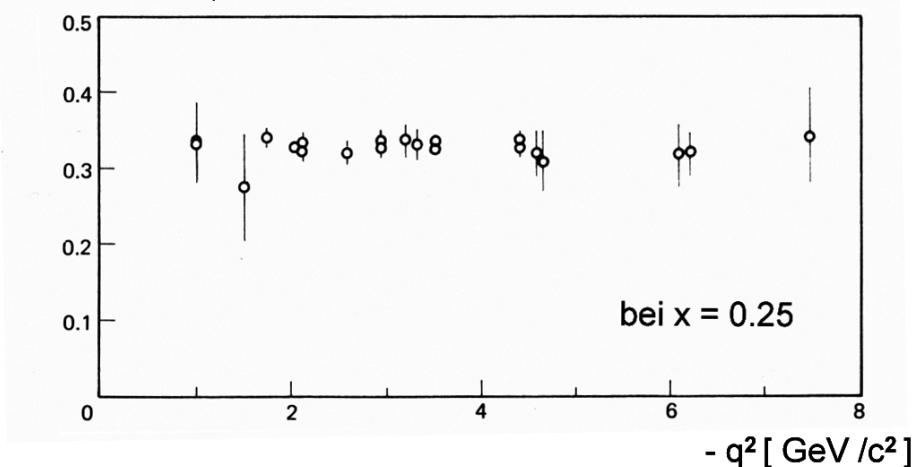
Skaleninvarianz (Bjorkenscaling):

$$F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x)$$

$$F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x)$$

Experimente am SLAC bestätigen Skalenverhalten 1968

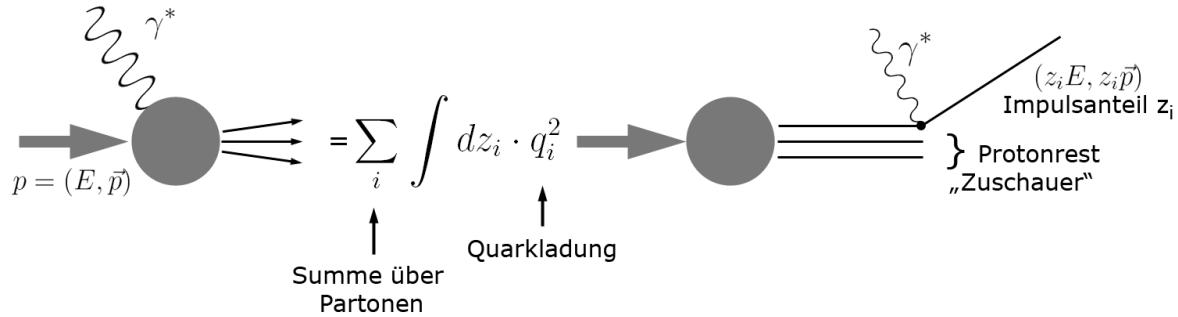
Quelle: D. Griffith Kap. 8.5



Skaleninvarianz tritt auf für:

$-q^2 > 1 \text{ (GeV/c)}^2$ und $p \cdot q > 3.5 \text{ (GeV/c)}^2$

3.1.4 Das Partonmodell



Bei hohen Energien streut das virtuelle Photon, beziehungsweise das Elektron durch Austausch des Photons an den Partonen, die in diesem Zusammenhang als „quasi-freie“ Teilchen angesehen werden können.

Die tiefinelastische ep-Streuung entspricht also der Summe über elastische eq_i -Streuungen, wobei die q_i die einzelnen Quarks des Protons sind.

Bemerkung: Die Impulskomponenten p_i werden mit z_i skaliert. Die Strahlenergie ist viel größer als der Impuls der Partonen relativ zueinander.

Ansatz:

$$2 \cdot W_1^{Punkt}(Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{2M^2} \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M})$$

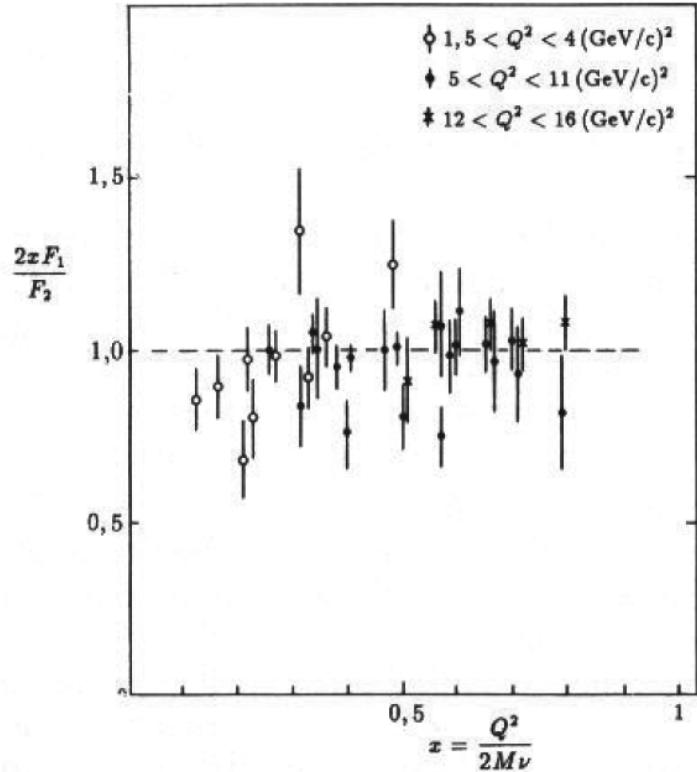
$$W_2^{Punkt}(Q^2, \nu) = \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M})$$

Einsetzen in die Formel für $\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega}$ und Integration über E' ergibt eine Formel für die elastische Streuung an einem Spin $\frac{1}{2}$ -Punktteilchen.

Die Callan-Gross Relation

$$F_2(x) = 2x \cdot F_1(x)$$

Dies gilt jedoch nur für Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Für Spin 0-Teilchen gilt $F_1(x) = 0$, da dieser Term von der magnetischen Wechselwirkung abhängt.



Experimentelle Bestätigung: $\frac{2xF_1}{F_2} \neq 0 \Rightarrow$ Die Partonen des Protons sind $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Diese werden Quarks genannt.

Der Impulsanteil z_i ist nicht fest sondern durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben: f_i
Partondichte

Bjorken x entspricht dem Impulsanteil z_i

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 f_i(x)$$

$$F_2(x) = x \sum_i q_i^2 f_i(x)$$

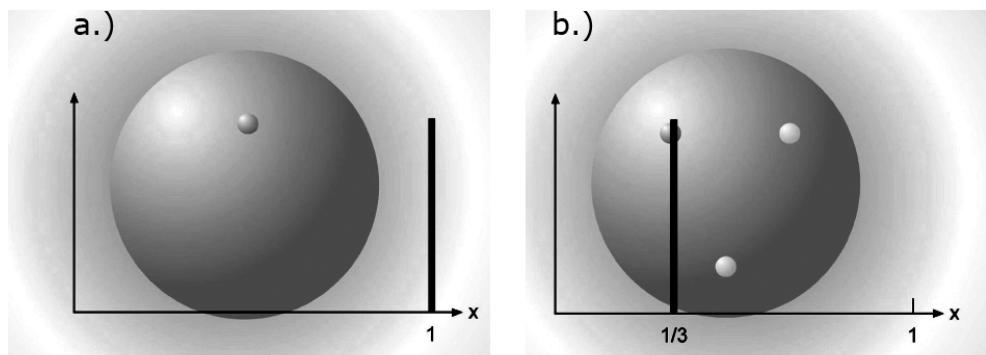
Das Proton besteht aus zwei up-Quarks und einem down-Quark. Entsprechend brauchen wir die Partondichten $u(x)$ und $d(x)$.

$$F_2(x) = x \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 u(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 d(x) \right]$$

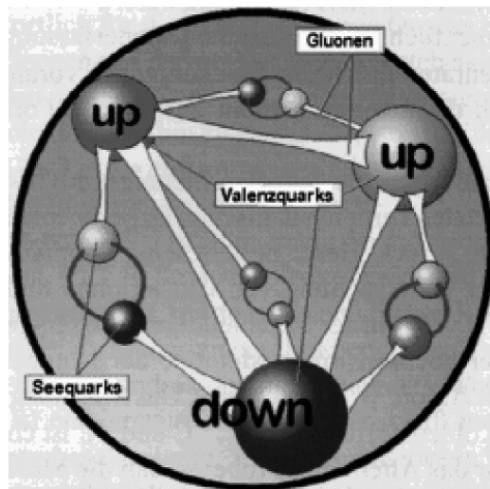
Mit Berücksichtigung der Seequarks ergibt sich:

$$F_2(x) = x \sum_f z_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x))$$

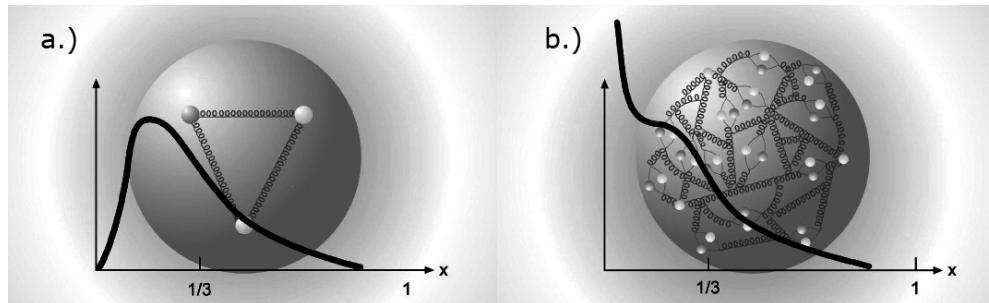
Die naive Erwartung an die Partondichtefunktion (PDF = Parton Density Function) sieht folgendermaßen aus:



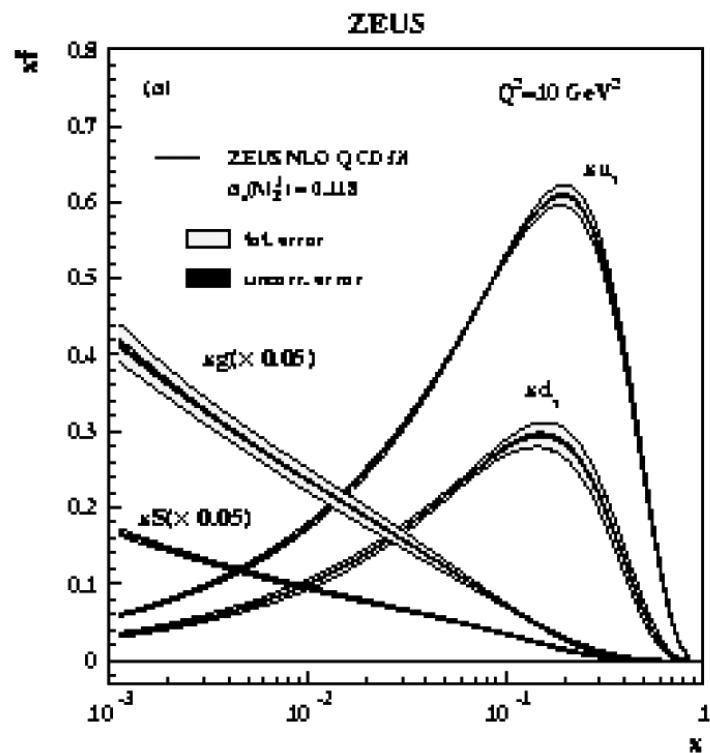
- a.) Wäre das Proton punktförmig (nur ein Quarks vorhanden), wäre die PDF eine δ -Funktion bei 1.
- b.) Bestünde das Proton aus 3 unabhängigen, nicht wechselwirkenden Quarks, würde sich der Impuls gleichmäßig auf die Quarks aufteilen. Die PDF wäre eine δ -Funktion bei $\frac{1}{3}$



Das Proton ist ein komplexes „lebendiges“ Objekt. Die Seequarks, Gluonen und Valenzquarks wechselwirken miteinander.



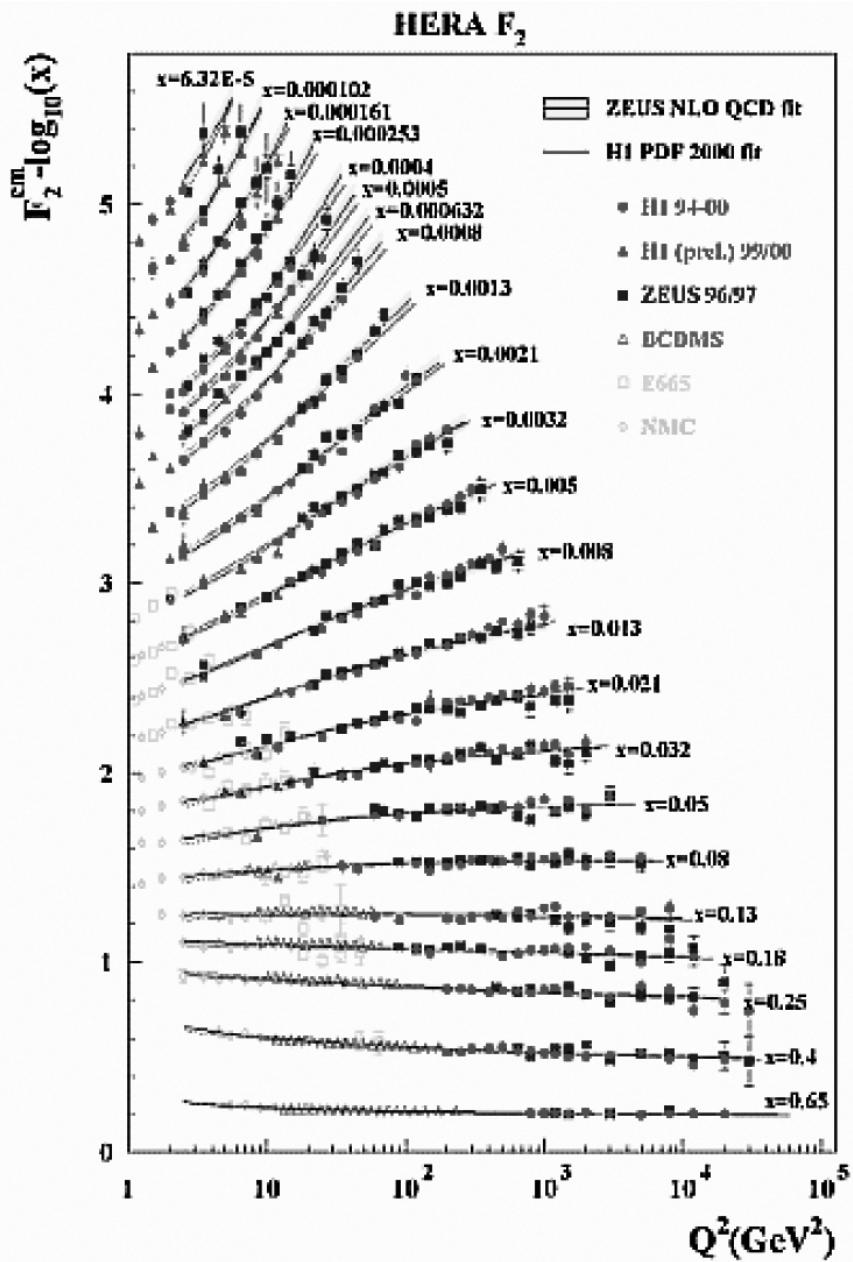
- a.) Wechselwirkung zwischen den Valenzquarks durch Gluonenaustausch berücksichtigt. Die Deltafunktion wird verschmiert. Das Maximum liegt unterhalb von $\frac{1}{3}$.
- b.) Gluonen und Seequarks tragen ebenfalls einen Anteil des Protonimpulses, die Gluondichte $g(x)$ muss also ebenfalls berücksichtigt werden. Dies führt zu einem steilen Anstieg der PDF bei kleinem x .



Messungen von ZEUS an HERA (DESY, Hamburg) in den 1990er Jahren.

- bei großem x : Hauptbeitrag durch die Valenzquarks
- bei kleinem x : Hauptbeitrag durch Seequarks und Gluonen

Messung von F_2



Im mittleren x-Bereich wird die Skaleninvarianz bestätigt. Für größere x fällt F_2 mit Q^2 und für kleinere x fällt F_2 mit Q^2 .

Bjorken'sche Skaleninvarianz ist verletzt. Dies wird auch Skalenverletzung genannt. Ursache: Die Quarks emittieren/absorbieren Gluonen.

3.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Empfehlenswerte Literatur:

D.Griffiths, Introduction to elementary particles

D. H. Perkins, Hochenergiephysik

E. Noether, 1917: Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen.

- Kontinuierliche Transformationen

Transformation	Erhaltungsgröße
Raumtranslation	Impulserhaltung
Zeittranslation	Energieerhaltung
Rotations-Transf.	Drehimpulserhaltung
Eichtransformation	Ladungserhaltung

- Diskrete Transformationen

Transformation	Erhaltungsgröße
Raumspiegelung	Parität P
Teilchen \leftrightarrow Antiteilchen	Ladungsparität C
Zeitspiegelung	Zeitparität

Eichtransformation und Teilchen-Antiteilchenaustausch bedingen interne Symmetrien, Im Gegensatz zu Raum-Zeit-Symmetrien

Was ist eine Symmetrie?

Eine Symmetrie ist die Eigenschaft eines Systems, invariant in Bezug auf die Anwendung einer bestimmten Symmetrieroberation zu sein. Dabei bedeutet invariant, dass der Zustand nach Anwendung der Operation ununterscheidbar vom Zustand vor Anwendung der Operation ist.

Ein Beispiel ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Zustand sich nach einer Drehung um ein Vielfaches von 120° nicht verändert.

Symmetrieoperationen müssen bestimmte Eigenschaften aufweisen:

1. Abgeschlossenheit: Wenn R_i und R_j Operationen sind, dann ist es die Verknüpfung $R_i \circ R_j = R_k$ auch.
2. Existenz der Identität (neutrale Operation)

$$E \circ R_i = R_i$$

3. Existenz einer inversen Operation: Zu jedem R_i gibt es eine inverse Operation R_i^{-1} so dass gilt

$$R_i \circ R_i^{-1} = R_i^{-1} \circ R_i = E$$

4. Assoziativgesetz

$$R_i \circ (R_j \circ R_k) = (R_i \circ R_j) \circ R_k$$

Die Menge der Operationen heißt **Gruppe**. Beim Spezialfall der Abel'schen Gruppe gilt zusätzlich das Kommutativgesetz:

$$R_i \circ R_j = R_j \circ R_i$$

Endliche Gruppen haben eine endliche Anzahl von Elementen

Kontinuierliche Gruppen hängen von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern ab, z.B. bei Drehungen vom Drehwinkel.

Diskrete Gruppen: Elemente sind abzählbar.

In der Physik betrachtet man meistens Gruppen von Matrizen

U(n): Gruppe der unitären $n \times n$ -Matrizen. Die Elemente sind komplex.

$$U^{-1} = \bar{U}^T = U^+$$

SU(n): Matrizen aus U(n) mit $\det U = 1$.

O(n): Gruppe der orthogonalen $n \times n$ -Matrizen. Elemente sind reell.

$$A^{-1} = A^T$$

SO(n): Matrizen aus O(n) mit $\det O = 1$.

Beispiel: SO(3) \Rightarrow Rotation im Raum

Interne Symmetrien:

$SU(2) \rightarrow$ Schwache Wechselwirkung

$SU(3) \rightarrow$ Starke Wechselwirkung, Rotation im Farbraum

Eine kontinuierliche Transformation kann zum Beispiel ein quantenmechanischer Operator sein:

Betrachte infinitesimale Translationen δx im Raum. Dies wirkt folgendermaßen auf die Wellenfunktion ($\psi \rightarrow \psi'$):

$$\psi' = \psi(x + \delta x) \approx \psi(x) + \delta x \cdot \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = (1 + \delta x \frac{\partial}{\partial x})\psi = D \cdot \psi$$

Mit dem Impulsoperator $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ lässt sich der Operator D schreiben als:

$$D = 1 + \frac{i}{\hbar} p \cdot \delta x$$

Eine endliche Transformation Δx wird dann aus n infinitesimalen Schritten zusammen gesetzt.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} p \cdot \delta x \right)^n = \exp \left(\frac{i}{\hbar} p \cdot \Delta x \right)$$

Da p unitär ist, ist es auch D :

$$D^* D = D^{-1} D = 1$$

Der Impulsgenerator p wird als Generator des Translationsoperators bezeichnet. Wenn der Hamiltonoperator H unabhängig von räumlichen Translationen ist, gilt $[D, H] = 0 \Leftrightarrow [p, H] = 0$

Folglich ist der Erwartungswert von p eine erhaltene Größe: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Äquivalente Aussagen:

1. Der Impuls ist erhalten
2. Der Hamiltonoperator ist invariant unter räumlichen Translationen
3. $[p, H] = 0$

3.2.1 Parität

Die Paritätstransformation ist eine Raumspiegelung am Ursprung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \vec{r} \Rightarrow -\vec{r}$$

Sie ist eine diskrete Transformation. Der Paritätsoperator P ist definiert als

$$P\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(-\vec{r})$$

Da offensichtlich $P^2 = 1$ gilt, ist P unitär und besitzt die Eigenwerte ± 1 .

Eine Eigenfunktion zum Paritätsoperator existiert, wenn das System spiegelinviant ist.
Dann gilt:

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(-\vec{r}, t)|^2$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \pm \psi(-\vec{r}, t)$$

Beispiel: $\psi(x) = \cos(x)$

$$P\psi = \cos(-x) = \cos(x) = \psi$$

$\Rightarrow p=1$, $\cos(x)$ ist also eine gerade Wellenfunktion. Im Gegensatz dazu ist $\psi(x) = \sin(x)$ eine ungerade Wellenfunktion mit der Parität $p = -1$.

Es gibt aber auch Wellenfunktionen, die keine Eigenfunktionen des Paritätsoperators P sind, zum Beispiel:

$$\psi(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$P\psi(x) = -\sin(x) + \cos(x) \neq \psi$$

Dieser Zustand hat keine definierte Parität.

Die Parität ist eine erhaltene Quantenzahl, falls $[P, H] = 0$. Für kugelsymmetrische Potentiale gilt $H(-\vec{r}) = H(\vec{r})$:

$$\Rightarrow [P, H] = 0$$

Somit haben gebundene Zustände eine definierte Parität.

Beispiel: Wasserstoff-Atom (ohne Spineffekte)

Die Wellenfunktionen sind gegeben durch

$$\psi(r, \theta, \phi) = \chi(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

Raumspiegelung:

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

$$\phi \rightarrow \pi + \phi$$

$$Y_l^k(\theta, \phi) \rightarrow Y_l^k(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^k(\theta, \phi)$$

Die Parität der Elektronenzustände ist also durch den Bahndrehimpuls gegeben:

$$p = (-1)^l$$

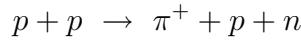
Folglich haben s,d,g-Zustände die Parität $p = 1$, während die p,f,h-Zustände die Parität $p = -1$ haben.

Elektrische Dipolübergänge:

Die Auswahlregel für einen elektrischen Dipolübergang besagt: $\Delta l = \pm 1$. Somit ändert sich die Parität des Elektronenzustandes. Die Parität des abgestrahlten Photons ist -1 und die Parität des Gesamtsystems (Atom + Photon) ist erhalten.

$$P_\gamma = -1$$

Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl: Die Parität des Gesamtsystems ist gleich dem Produkt der einzelnen Paritäten. In der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Parität erhalten, zum Beispiel:



Dabei ist $\pi^+ = (u\bar{d})$. Den Teilchen wird eine Eigenparität zugeordnet. Die Nukleonen haben per Konvention die Parität $+1$. Da die Baryonenzahl erhalten ist, heben sich die Nukleonparitäten in der Reaktion weg.

Parität des Pions: Das Pion hat Spin 0. Die Absorption langsamer Pionen in Deuterium liefert die Festlegung der Parität des Pions.



Dabei erfolgt der Pion-Einfang aus einem s-Bindungszustand ($l_{rel} = 0$). Die Spins sind $s_d = 1$ und $s_\pi = 0$. Im Anfangszustand haben wir also $j = 1$. Da der Drehimpuls erhalten ist, gilt dies auch für den Endzustand: $j = 1$

$$\vec{J}_{tot} = \vec{S}_{nn} + \vec{L}_{rel}$$

Kopplungsmöglichkeiten für die Spins der Neutronen:

$$\uparrow + \downarrow \Rightarrow s_{nn} = 0$$

$$\uparrow + \uparrow \Rightarrow s_{nn} = 1$$

Daraus ergeben sich vier Kopplungsmöglichkeiten für den Gesamtdrehimpuls:

1. $s_{nn} = 0 \ l_{rel} = 1$
2. $s_{nn} = 1 \ l_{rel} = 0$
3. $s_{nn} = 1 \ l_{rel} = 1$
4. $s_{nn} = 1 \ l_{rel} = 2$

Die Gesamtwellenfunktion setzt sich aus der Orts- und der Spinwellenfunktion zusammen:

$$\psi_{ges} = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot S(s_1, s_2)$$

Die Ortswellenfunktion kann durch die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ dargestellt werden und hat somit die Parität $(-1)^{l_{rel}}$.

Die Neutronen sind Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Fermionen) und gehorchen dem Pauliprinzip. Also muss die Gesamtwellenfunktion im Endzustand antisymmetrisch sein.

Fall 1: Im Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$ ist die Spinwellenfunktion antisymmetrisch. Wegen $l_{rel} = 1$ ist auch die Ortswellenfunktion antisymmetrisch, womit die Gesamtwellenfunktion symmetrisch wird, was aber im Widerspruch zum Pauliprinzip steht!

Fall 2-4: Der Zustand $|\uparrow\uparrow\rangle$ ist ein Triplet-Zustand. somit ist $S(s_1, s_2)$ symmetrisch. Folglich muss die Ortswellenfunktion antisymmetrisch sein.

$$\Rightarrow l_{rel} \text{ muss } \mathbf{ungeradzahlig} \text{ sein.}$$

Fall 3 mit $s = 1$ und $L = 1$ ist also realisiert. Die Parität im Endzustand ist dann gegeben durch:

$$P_f = P_{Neutron}^2 \cdot (-1)^L = -1$$

Da die Parität erhalten ist gilt auch:

$$P_{initial} = -1 = P_\pi \cdot P_d \cdot P_{Bahn}$$

Da das Deuteron d aus zwei Nukleonen besteht, hat es die Parität 1. Ebenso hat auch die Bahn die Parität $(-1)^0 = 1$. Somit muss für die Parität des Pions gelten:

$$P_\pi = -1$$

Die Eigenparität von Teilchen und Antiteilchen ist:

- a.) bei Fermionen entgegengesetzt
- b.) bei Bosonen identisch

3.2.2 Ladungskonjugation

Symmetrie der Naturgesetze in Bezug auf Austausch von Teilchen und Antiteilchen.

$$C |\text{Teilchen}\rangle = |\text{Antiteilchen}\rangle$$

Das Vorzeichen ALLER Ladungen wechselt!

Elektrodynamik

Invarianz der Maxwellgleichungen unter Vorzeichenumkehr von Ladung und Stromdichte.

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung erhalten C .

Eigenzustände der Ladungskonjugation:

Nur möglich für neutrale Systeme, z.B. γ und π^0

- Photon: Elektromagnetisch Felder \vec{E} und \vec{B} wechseln das Vorzeichen unter C , da sie durch Ladungen beziehungsweise Ströme hervorgerufen werden.

$$C |\gamma\rangle = - |\gamma\rangle$$

Somit ist $c_\gamma = -1$

- Pion π^0 : Das Pion zerfällt mit einem Branching Ratio (Verzweigungsverhältnis) von $BR = 98,8\%$ in zwei Photonen.

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

$$C |\pi^0\rangle = \eta_{\pi^0} |\pi^0\rangle$$

Da wir wissen, dass $c_{\text{final}} = c_\gamma^2 = 1$ ist, erhalten wir:

$$\boxed{\eta_{\pi^0} = +1}$$

Frage: gibt es einen $c = -1$ Anteil, also $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$?

$$\frac{\text{BR}(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\text{BR}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8} \quad [1998]$$

Folglich ist die Ladungskonjugation eine Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung

3.2.3 Zeitumkehr

$$T\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi(\vec{r}, -t)$$

Darunter versteht man die Invarianz der Naturgesetze unter Umkehrung der Zeitentwicklung.

- klassisch: Newtons Gesetze sind invariant.

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Teilchenphysik:



Die **elektromagnetische** und die **starke Wechselwirkung** sind invariant unter Zeitumkehr.

t-Spiegelung:

$$t \rightarrow -t$$

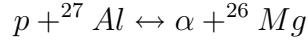
$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$$

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$$

$$\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$$

Dabei bezeichnet σ den Spin eines Teilchens.

Als Beispiel wäre zu nennen:



Wie man auf der nachfolgenden Abbildung sieht, sind die Wirkungsquerschnitte für die beiden Reaktionen quasi identisch.

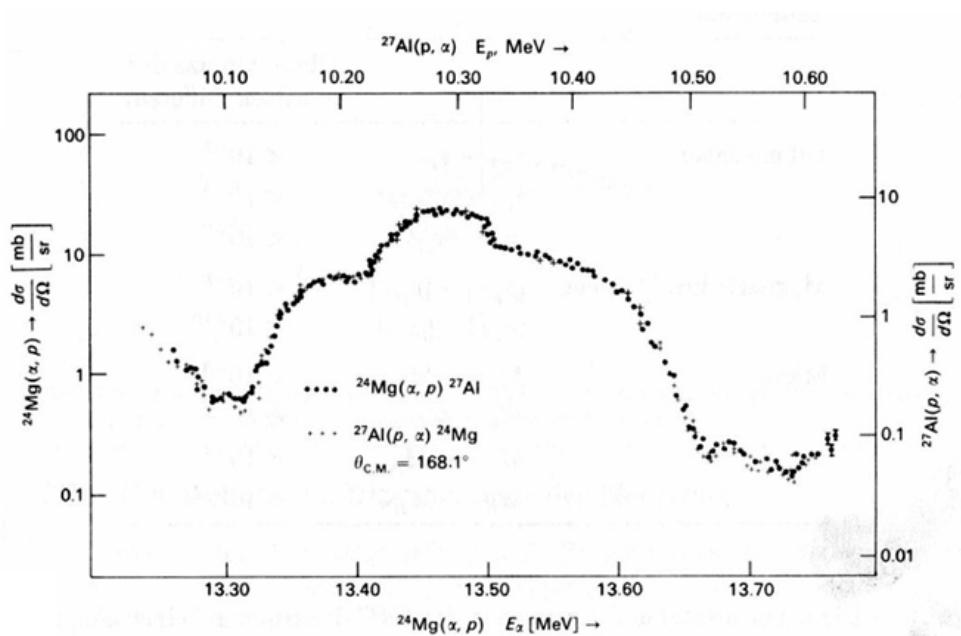


Abbildung 3.9 Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ und die Umkehrreaktion, gemessen von Von Witsch et al., (1968).

D.H.Perkins, Hochenergiephysik, Kap. 3.12

3.3 Der Teilchenzoo

3.3.1 Elementarteilchen im Standardmodell

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen → Fermionen, Bestandteile der Materie.

Spin-0-Teilchen → Bosonen, Vermittler der Kräfte.

Fermionen

$$\text{Leptonen} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} + \text{Antiteilchen}$$

$$\text{Quarks} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} + \text{Antiteilchen}$$

Es existieren also drei Familien (oder Generationen). Die verschiedenen Quarksorten be-

zeichnet man als „Flavours“ (engl.: flavour = Geschmack).

u up	c charm	t top (truth)
d down	s strange	b bottom (beauty)

Die verschiedenen Lepton-Sorten heißen Leptonflavours.

e Elektron		
μ Myon	+ deren Neutrinos	
τ Tau		

Wechselwirkungsteilchen

Die Wechselwirkungsteilchen sind die Vermittler der Kräfte in der Natur.

Elektromagnetische Wechselwirkung	Photon γ
Schwache Wechselwirkung	Z^0, W^\pm
Starke Wechselwirkung	8 Gluonen g
{Gravitation	Graviton (Spin 2) G

Es gibt noch keine Quantentheorie der Gravitation. Sie ist also kein Bestandteil des Standardmodells.

Kopplungen:

1. Leptonen:

e, μ, τ : Elektromagnetische und schwache Wechselwirkung.
 ν_e, ν_μ, ν_τ : nur schwache Wechselwirkung.

2. Quarks:

Elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung

Zu jeder Kopplung tragen die Teilchen entsprechende Ladungen.

Elektrische Ladung:

Leptonen:

e, μ, τ :	$-1 \cdot e \rightarrow e^-, \mu^-, \tau^-$	
Antiteilchen:	$+1 \cdot e \rightarrow e^+, \mu^+, \tau^+$	
Neutrinos:	elektrisch neutral	

Quarks:

$$\text{u-Typ Quarks: } u, c, t: z_f = +\frac{2}{3}e$$

$$\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}: z_f = -\frac{2}{3}e$$

$$\text{d-Typ Quarks: } d, s, b: z_f = -\frac{1}{3}e$$

$$\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}: z_f = +\frac{1}{3}e$$

„Schwache Ladung“: Die Ladung der schwachen Wechselwirkung ist der Isospin T . Die Beschreibung der schwachen Wechselwirkung erfordert, dass Quarks und Leptonen eine Händigkeit zugeordnet wird. Entsprechend bezeichnet man diese als linkshändige und rechtshändige Teilchen.

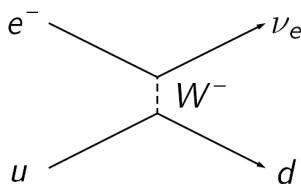
Leptonen:

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & T_3 \\ \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L & \left(\begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right)_L & \left(\begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right)_L & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ e_R & \mu_R & \tau_R & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & & & 0 \end{array}$$

Quarks:

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & T_3 \\ \left(\begin{array}{c} u \\ d' \end{array} \right)_L & \left(\begin{array}{c} c \\ s' \end{array} \right)_L & \left(\begin{array}{c} t \\ b' \end{array} \right)_L & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ u_R & c_R & t_R & 0 & -\frac{1}{2} \\ d_R & s_R & b_R & 0 & 0 \end{array}$$

Die W-Bosonen koppeln nur an die linkshändigen Zustände (Dubletts), zum Beispiel: Tiefinelastische Streuung über W^- -Austausch, auch „geladene Strom-Wechselwirkung“ (charged current) genannt.



Mehr Details zur schwachen Wechselwirkung folgen in Kapitel 5.1

„Starke Ladung“: Die Ladung der starken Wechselwirkung wird Farbe genannt. Die Quarks tragen die Farbladungen „rot, grün, blau“. Die entsprechenden Antiquarks tragen die dazugehörigen Antifarben. Bindungszustände von Quarks müssen immer Farbneutral, also Farbsingletts sein.

Man unterscheidet zwei Sorten von Hadronen:

1. Mesonen: Mesonen sind $q_1\bar{q}_2$ Zustände. Die Konstituenten tragen Farbe und Antifarbe, sodass die Mesonen farbneutral sind.
2. Baryonen: Baryonen sind $q_1q_2q_3$ Zustände, wobei die Quarks die Farben rot-grün-blau tragen. Nach der additiven Farbmischung ist auch dieser Zustand „weiß“, also farbneutral.

3.3.2 Mesonen

- Mesonen sind $q_1\bar{q}_2$ Bindungszustände.
- **Parität:** Quarks und Antiquarks tragen entgegengesetzte Paritäten. Folglich sind die Paritäten gegeben durch den Bahndrehimpuls, also $(-1)^{L+1}$. Im Folgenden betrachten wir nur Zustände mit $L = 0$. Zustände mit $L > 0$ werden als orbital angeregte Zustände bezeichnet. Für den Grundzustand ($L = 0$) gilt: $P = -1$.
- **Spin:** Die Spins haben zwei Einstellmöglichkeiten: $\uparrow\downarrow$ mit Spin 0 oder $\uparrow\uparrow$ mit Spin 1.

Nun erfolgt eine Klassifizierung der Mesonen nach

- pseudoskalare Mesonen: $J^P = 0^-$
 - Vektormesonen: $J^P = 1^-$
1. Pseudoskalare Mesonen aus u- und d-Quarks

Die Konstituentenmassen (d.h. die effektiven Massen der Quarks in einem Bindungszustand) von u- und d-Quarks sind in der Größenordnung von $300 \text{ MeV}/c^2$. Das Konzept der Quarksmassen ist kompliziert, da Quarks nicht als freie Teilchen auftreten. Die vergleichbaren Massen von u- und d-Quarks führen zu einer Entartung, das heißt, Zustände mit gleichen Quantenzahlen können mischen. Die Beschreibung der Mischung von u- und d-Quarks erfolgt durch den **Isospinformalismus**

u- und d-Quarks bilden ein Isospin-Dublett $I = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ll} u & I_3 = +\frac{1}{2} \\ d & I_3 = +\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \bar{u} & I_3 = -\frac{1}{2} \\ \bar{d} & I_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Der starke Isospin ist eine Erhaltungsgröße der starken Wechselwirkung. Alle im Isospinraum gedrehten Zustände sind im Bezug auf die starke Wechselwirkung äquivalent.

Mathematisch wird der Isospin behandelt wie der Drehimpuls.

$$u = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle \quad d = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\bar{u} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad \bar{d} = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle$$

Die u- und d-Quarks können zu einem Isospin-Triplett (I=1) oder zu seinem Isospin-Singlett (I=0) koppeln.

Isospin-Triplett:

$$\left| 1 \ 1 \right\rangle = -u\bar{d} \quad \pi^+$$

$$\left| 1 \ 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad \pi^0$$

$$\left| 1 \ -1 \right\rangle = d\bar{u} \quad \pi^-$$

Isospin-Singlett:

$$\left| 0 \ 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

Aber: Das strange-Quark muss auch berücksichtigt werden!

2. Pseudoskalare Mesonen mit strange-Quark Anteil

Das s-Quark trägt die additive Quantenzahl „strangeness“. Diese ist in der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten. Nur geladene schwache Ströme (W-Austausch) ändern strangeness.

Isospin: flavour SU(2) Symmetrie

$$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$$

Flavour: SU(3)

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

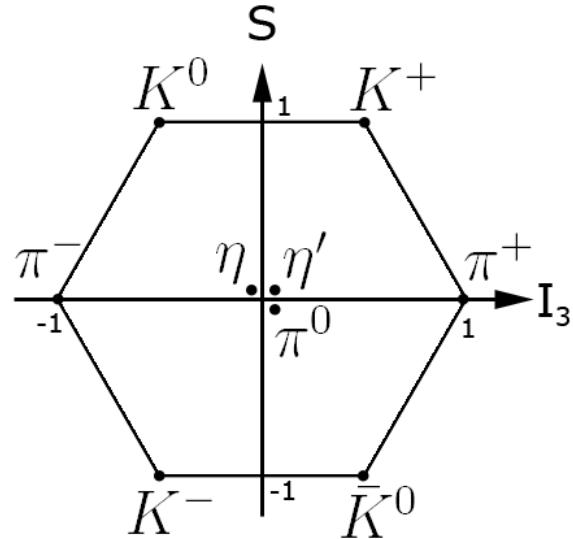
Oktettzustände: $K^+ = u\bar{s}$ $K^- = s\bar{u}$
 $K^0 = d\bar{s}$ $\bar{K}^0 = -s\bar{d}$

strangeness: +1 -1

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}): \text{flavourneutral, aber kein } SU(3) \text{ Singlett}$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}): SU(3)_{\text{Flavour}} \text{ Singlett, in u,d,s antisymmetrisch:}$$

Dies ergibt insgesamt das $SU(3)_{\text{Flavour}}$ Nonett:



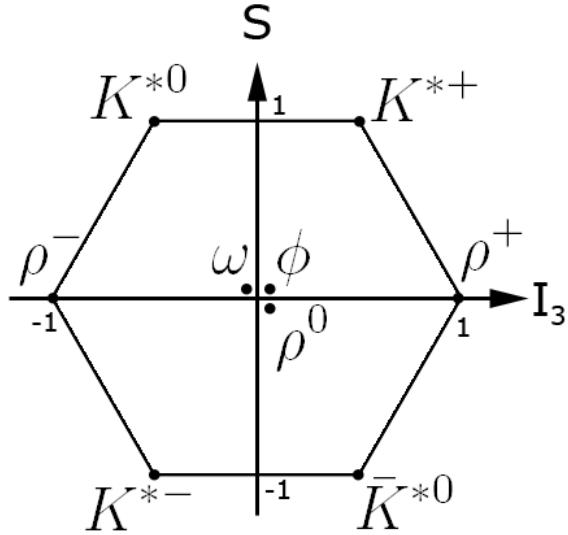
Wäre die Flavour-SU(3) eine perfekte Symmetrie, hätten alle Teilchen eines Supermultipletts die gleiche Masse!

Mesonen	Masse [MeV/c^2]
π^\pm	139.57
π^0	134.98
η	547.51
η'	957.78
K^\pm	493.68
K^0/\bar{K}^0	497.65

⇒ Flavour-SU(3) ist keine gute Symmetrie!

3. Vektormesonen

Die Vektormesonen haben Spin 1, sind also Zustände der Art $\uparrow\uparrow$. Sie bilden ebenfalls ein Nonett:



Zustände mit strangeness:

$$\begin{aligned} |K^{*-}\rangle &= |s^\dagger \bar{u}^\dagger\rangle & |\bar{K}^{*0}\rangle &= |s^\dagger \bar{d}^\dagger\rangle & s=-1 \\ |K^{*0}\rangle &= |\bar{s}^\dagger u^\dagger\rangle & |K^{*+}\rangle &= |u^\dagger \bar{s}^\dagger\rangle & s=+1 \end{aligned}$$

Darstellung der flavourneutralen Zustände:

$$\begin{aligned} |\rho^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u^\dagger \bar{u}^\dagger\rangle - |d^\dagger \bar{d}^\dagger\rangle) & \text{gleich wie } \pi^0 \text{ bis auf Spin} \\ |\rho^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u^\dagger \bar{u}^\dagger\rangle + |d^\dagger \bar{d}^\dagger\rangle) & \text{kein SU(3) Singlett!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= |s^\dagger \bar{s}^\dagger\rangle & \text{kein SU(3) Singlett!} \\ && \text{Maximal entmischt} \end{aligned}$$

Phänomenologische Massenformel für die leichten Mesonen:

$$M_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + \Delta M_{ss}$$

Dabei sind die m_q die oben bereits angesprochenen Konstituenten Quarkmassen und ΔM_{ss} die Massenverschiebung auf Grund der Spin-Spin-Wechselwirkung.

Das Potential der Spin-Spin-Wechselwirkung ist gegeben durch:

$$V_{ss}(q\bar{q}) = \frac{8\pi\hbar^3}{9c} \alpha_s \frac{\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}} \delta(\vec{x})$$

Das farbmagnetische Potential hängt von der Spineinstellung der beiden Quarks ab.

$$\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{\bar{q}} = \frac{4}{\hbar} \vec{s}_q \cdot \vec{s}_{\bar{q}} = 2 \cdot [s(s+1) - s_q(s_q+1) - s_{\bar{q}}(s_{\bar{q}}+1)] = \begin{cases} -3 & \text{für } s=0, \text{ für pseudoskal. Mesonen} \\ +1 & \text{für } s=1, \text{ für Vektormesonen} \end{cases}$$

Tabelle 14.2. Gemessene und nach (14.2) ermittelte Massen der leichten Mesonen [Ga81]. Die berechneten Werte wurden an die mittlere Masse eines Isospinmultiplets angepasst und können natürlich nicht die geringen Massenunterschiede der verschiedenen Ladungszustände aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung erklären.

Meson	J^P	I	Masse [MeV/c^2]	
			berechnet	gemessen
π	0^-	1	140	$\left\{ \begin{array}{ll} 135.0 & \pi^0 \\ 139.6 & \pi^\pm \end{array} \right.$
K	0^-	$1/2$	485	
η	0^-	0	559	$\left\{ \begin{array}{ll} 497.7 & K^0 \\ 493.7 & K^- \end{array} \right.$
η'	0^-	0	—	
ϱ	1^-	1	780	770.0
K^*	1^-	$1/2$	896	$\left\{ \begin{array}{ll} 896.1 & K^{*0} \\ 891.7 & K^{*-} \end{array} \right.$
ω	1^-	0	780	
ϕ	1^-	0	1032	1019.4

Die Anpassung der Massenformel an die Messungen liefert:

$$m_{u,d} \approx 310 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_s \approx 483 \text{ MeV}/c^2$$

Dies sind jedoch die Konstituentenmassen. Die intrinsischen Massen (nackte Massen) sind ungefähr:

$$m_{u,d} \approx 5 - 10 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_s \approx 150 \text{ MeV}/c^2$$

3.3.3 Baryonen

Baryonen sind $q_1 q_2 q_3$ Bindungszustände. Die möglichen Spineinstellungen sind:

$\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow\downarrow, \dots$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

Die drei Quarkspins können folglich zu Spin $\frac{3}{2}$ oder Spin $\frac{1}{2}$ koppeln.

1. Spin $\frac{3}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\ |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\ |\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vollständig} \\ \text{symmetrisch} \end{array}$$

2. Spin $\frac{1}{2}$

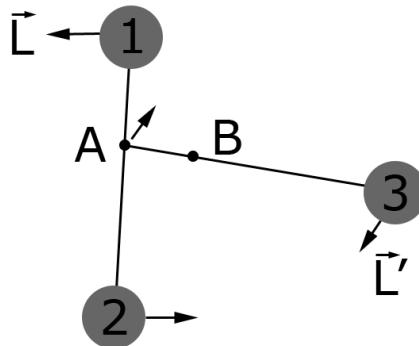
$$\left. \begin{array}{l} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) |\uparrow\rangle \\ |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) |\downarrow\rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{antisymmetrisch unter} \\ \text{Austausch von 1 und 2.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{antisymmetrisch unter} \\ \text{Austausch von 2 und 3.} \end{array}$$

Die Spinwellenfunktionen der Spin $\frac{1}{2}$ -Baryonen sind nur partiell symmetrisch!

Bahndrehimpuls:

Es handelt sich um ein 3-Körper System. Für die Beschreibung sind daher 2 Bahndrehimpulse nötig.



A: Schwerpunkt von Quark 1 und Quark 2

B: Schwerpunkt von allen drei Quarks

Annahme für die weitere Diskussion: keine orbitalen Anregungen

$$l = l' = 0$$

Nomenklatur der Baryonen

Name	N	Δ	Λ	Σ	Ξ	Ω
Isospin I	1/2	3/2	0	1	1/2	0
Strangeness S		0		-1	-2	-3
Zahl der s-Quarks	0			1	2	3

Quelle: Povh, Rith, Teilchen und Kerne, Kap. 15

Baryonen mit einem s-Quark werden Hyperonen genannt:

1. $J^P = \frac{3}{2}^+$ - das Baryon Dekuplett

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad |\Delta^+\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle \quad |\Delta^0\rangle = |u^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle \quad |\Delta^-\rangle = |d^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle \quad |\Sigma^{*0}\rangle = |u^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle \quad |\Sigma^{*-}\rangle = |d^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle$$

$$|\Xi^{*0}\rangle = |u^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle \quad |\Xi^{*-}\rangle = |d^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle$$

$$|\Omega^-\rangle = |s^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle$$

2. $J^P = \frac{1}{2}^+$ - das Baryon Oktett

Die Spin-Zustände sind weder rein symmetrisch noch rein antisymmetrisch. \Rightarrow gemischte Symmetrie.

Kurzform der Spin-Flavour-Wellenfunktionen:

$$|n\rangle = |u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle \quad |p\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle$$

$$|\Sigma^-\rangle = |d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle \quad |\Lambda^0\rangle = |u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle \quad |\Sigma^0\rangle = |u^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle \quad |\Sigma^+\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle$$

$$|\Xi^-\rangle = |d^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle \quad |\Xi^0\rangle = |u^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle$$

Λ^0 und Σ^0 haben die gleichen Valenzquarkinhalte, aber die Spins koppeln unterschiedlich.

Λ^0 : Spins von u und s koppeln zu 1

Σ^0 : Spins von u und d koppeln zu 1

$$m(\Sigma^0) - m(\Lambda^0) \approx 80 \text{ MeV}/c^2$$

Die symmetrierte Form der Spin-Flavour-Wellenfunktion des Protons sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} |p^\dagger\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (& -2|u^\dagger u^\dagger d^\dagger\rangle + 2|u^\dagger d^\dagger u^\dagger\rangle + 2|d^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle \\ & - |u^\dagger u^\dagger d^\dagger\rangle - |u^\dagger d^\dagger u^\dagger\rangle - |d^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle \\ & - |u^\dagger u^\dagger d^\dagger\rangle - |u^\dagger d^\dagger u^\dagger\rangle - |d^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle) \end{aligned}$$

Massenformel für Baryonen

$J^P = \frac{3}{2}^+$ -Baryonen sind ungefähr $300 \text{ MeV}/c^2$ schwerer als $J^P = \frac{1}{2}^+$ -Baryonen, was durch die Spin-Spin-Wechselwirkung verursacht wird:

$$M = \sum_i m_i + \Delta M_{ss}$$

Das Spin-Spin-Potential ist gegeben durch:

$$V_{ss}(q_i q_j) = \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^3}{c} \alpha_s \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j}{m_i m_j} \delta(\vec{x})$$

Die Summierung über die Quark-Quark-Paare vereinfacht sich, wenn die Quarks die gleiche Masse haben:

$$\sum_{i,j=1}^3 \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j = \frac{4}{\hbar^2} \sum_{i,j=1}^3 \vec{s}_i \vec{s}_j = \begin{cases} -3 & \text{für } s = \frac{1}{2} \\ +3 & \text{für } s = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Delta M_{ss} = \frac{4}{9} \frac{\hbar^3}{c^3} \pi \alpha_s |\psi(0)|^2 \cdot \begin{cases} -3 \frac{1}{m_{u,d}^2} & \text{für Nukleonen} \\ +3 \frac{1}{m_{u,d}^2} & \text{für } \Delta\text{-Zustände} \\ +3 \frac{1}{m_s^2} & \text{für } \Omega \end{cases}$$

Anpassung der Quarkmassen an die gemessenen Baryonmassen ergibt:

$$m_{u,d} \approx 363 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_s \approx 538 \text{ MeV}/c^2$$

Die Konstituentenquarkmassen der Hadronen sind also größer als die der Mesonen. Grund dafür ist, dass die Konstituentenquarkmassen dynamisch durch Quark-Gluon-Wechselwirkungen erzeugt werden. Dies geschieht in Baryonen anders als in Mesonen.

3.3.4 Der Farbfreiheitsgrad

Aus der Quantemechanik identischer Teilchen ist bekannt:

$$|\psi(1, 2)|^2 \neq |\psi(2, 1)|^2$$

$$\psi(1, 2) = e^{i\varphi} \psi(2, 1)$$

Da die Wellenfunktion unter nochmaliger Vertauschung wieder in sich selbst übergehen muss gilt:

$$\psi(1, 2) = \pm \psi(2, 1)$$

Die Wellenfunktion muss also entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein.

- Bosonen (ganzzahliger Spin): symmetrische Wellenfunktion.
- Fermionen (halbzahliger Spin): antisymmetrische Wellenfunktion
„verallgemeinertes Pauliprinzip“

Baryonen sind also Fermionen. Folglich muss die Wellenfunktion antisymmetrisch sein. Das Baryon-Dekuplett enthält die Zustände

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle$$

$$|\Delta^-\rangle = |d^\dagger d^\dagger d^\dagger\rangle$$

$$|\Omega^-\rangle = |s^\dagger s^\dagger s^\dagger\rangle$$

Bei diesen Zuständen ist die Spin-Flavour-Wellenfunktion aber symmetrisch.

$$\begin{aligned} \psi(\Delta^{++}) &= \underbrace{\psi_{\text{Ort}}}_{l, l' = 0} \cdot \underbrace{\psi_{\text{Spin}}}_{\uparrow\uparrow\uparrow} \cdot \underbrace{\psi_{\text{flavour}}}_{\text{uuu}} \\ &\Rightarrow \text{sym} \quad \Rightarrow \text{sym} \quad \Rightarrow \text{sym} \end{aligned}$$

Widerspruch: $\psi(\Delta^{++})$ muss antisymmetrisch sein, da Δ^{++} ein Fermion ist!

Spin-Statistik-Problem

Lösung: Quarks tragen eine weitere Quantenzahl: **Farbe**

$$\psi = \psi_{\text{Ort}} \cdot \psi_{\text{Spin}} \cdot \psi_{\text{flavour}} \cdot \psi_{\text{Farbe}}$$

In der Natur treten nur Bindungszustände auf, die Farbsingletts sind!

Also muss ψ_{Farbe} antisymmetrisch sein. Dies gilt für **alle** Hadronen!

- Alle Baryonen haben die gleiche Farbwellenfunktion:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{Farbe}} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha=r,g,b} \sum_{\beta=r,g,b} \sum_{\gamma=r,g,b} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (q_r q_g q_b - q_r q_b q_g + q_g q_b q_r - q_g q_r q_b + q_b q_r q_g - q_b q_g q_r)\end{aligned}$$

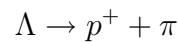
- ψ_{Farbe} ist antisymmetrisch. Folglich muss der Rest der Wellenfunktion symmetrisch sein. Für $l = l' = 0$ ist ψ_{Ort} symmetrisch. $\Rightarrow \psi_{\text{Spin}} \cdot \psi_{\text{flavour}}$ muss symmetrisch sein. Also muss die Spin-Flavour-Wellenfunktion symmetrisiert werden (siehe Kapitel 3.3.3)

$$|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u^\dagger u^\dagger d^\dagger\rangle + |u^\dagger d^\dagger u^\dagger\rangle + |d^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle)$$

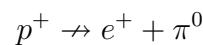
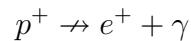
3.3.5 Baryonenzahlerhaltung

Beobachtungen:

1. Wenn in Teilchenreaktionen Baryonen erzeugt werden, dann wird zugleich die gleiche Anzahl an Antibaryonen erzeugt: z.B. $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$
Zuerst beobachtet wurde das Antiproton in der Reaktion



2. Das Proton ist stabil:



Die stabile partielle Lebensdauer $\tau(p \rightarrow e^+ + \pi^0)$ beträgt:

$$\tau(p \rightarrow e^+ + \pi^0) \approx 1.6 \cdot 10^{33} \text{ y}$$

Zum Vergleich dazu, das Alter des Universums beträgt $\approx 13 \cdot 10^9 \text{ y}$.

Die Baryonenzahl ist erhalten!

Eine Verletzung der Baryonenzahlerhaltung ist möglich in hypothetischen „Grand Unified Theories“. Deshalb sucht man in Experimenten nach dem Protonzerfall.

Analog: Leptonzahl-, Elektronzahl-, Myonzahl- und Tauzahlerhaltung.

Ausnahme: Neutrinooszillationen

Gell-Mann-Nishijima-Formel:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S)$$

A : Baryonenzahl

I_3 : dritte Komponente des Isospins

Q : elektrische Ladung in Einheiten von e

S : strangeness

Sie gilt in dieser Form jedoch nur für leichte Hadronen.

3.3.6 Schwere Hadronen

Neben den bisher betrachteten leichten Quarks gibt es auch noch schwere Quarks:

Quarks	Masse [GeV/c ²]
charm	1.25 ± 0.09 (\overline{MS} -Schema)
bottom	4.2 ± 0.07 (\overline{MS} -Schema)
top	170.9 ± 1.8 (Pol-Masse)

Das top-Quark ist so schwer, dass es keine gebundenen Zustände bildet!

$$\tau_{\text{top}} \approx 4.7 \cdot 10^{-25} \text{ s}$$

1. B-Mesonen

$$B_d^0 = \bar{b}d \quad \bar{B}_d^0 = b\bar{d}$$

$$B^+ = \bar{b}u \quad B^- = b\bar{u}$$

$$B_s^0 = \bar{b}s \quad \bar{B}_s^0 = b\bar{s}$$

2. charm-Mesonen

$$D^0 = c\bar{u} \quad \bar{D}^0 = \bar{c}u$$

$$D^+ = c\bar{d} \quad D^- = \bar{c}d$$

$$D_s^+ = c\bar{s} \quad D_s^- = \bar{c}s$$

3. Charmonium und Bottomonium: das sind $d\bar{c}$ und $b\bar{b}$ Bindungszustände, z.B.:

$$\eta_c(1s) \quad J^{PC} = 0^{-+}$$

$$J/\psi(1s) \quad J^{PC} = 1^{--}$$

$$\eta_b(1s) \quad J^{PC} = 0^{-+}$$

$$\Upsilon(1s) \quad J^{PC} = 1^{--}$$

Mehr Details in Kapitel 5.2.

4. charm- und beauty-Baryonen:

$$\Lambda_c^+ = udc \quad J^{PC} = \frac{1}{2}^+$$

$$\Xi_c^+ = usc \quad J^{PC} = \frac{1}{2}^+$$

$$\lambda_b^0 = udb \quad J^{PC} = \frac{1}{2}^+$$

4 Experimentelle Methoden: Detektoren und Beschleuniger

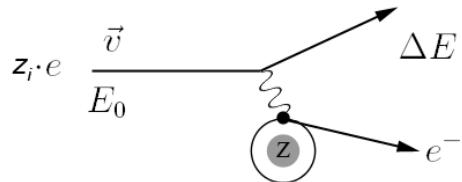
4.1 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

Die Strahlung kann Energieverlust erleiden, beziehungsweise vollständig absorbiert werden.
Dies geschieht durch:

- Elektromagnetische-Wechselwirkung
- Kern-Wechselwirkung

4.1.1 Elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen

1. Ionisation



Parameter: z_i , Z , n_e , \vec{v}

Klassisch erfolgte die Beschreibung von Niels Bohr, die quantenmechanische Formulierung stammt von Bethe. Eine moderne (relativistische) Beschreibung lieferten Allison und Cobb 1988.

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{z_i^2 E^4 n_e}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle} - \beta^2 - \ln(1 - \beta^2) \right)$$

Dabei ist $\langle I \rangle \approx Z \cdot 14 \text{ eV}$ die Ionisierungsenergie.

- $E_0 \ll m_i c^2$:

$$\frac{dE}{dx} \propto \rho \frac{z_i^2}{E_0}$$

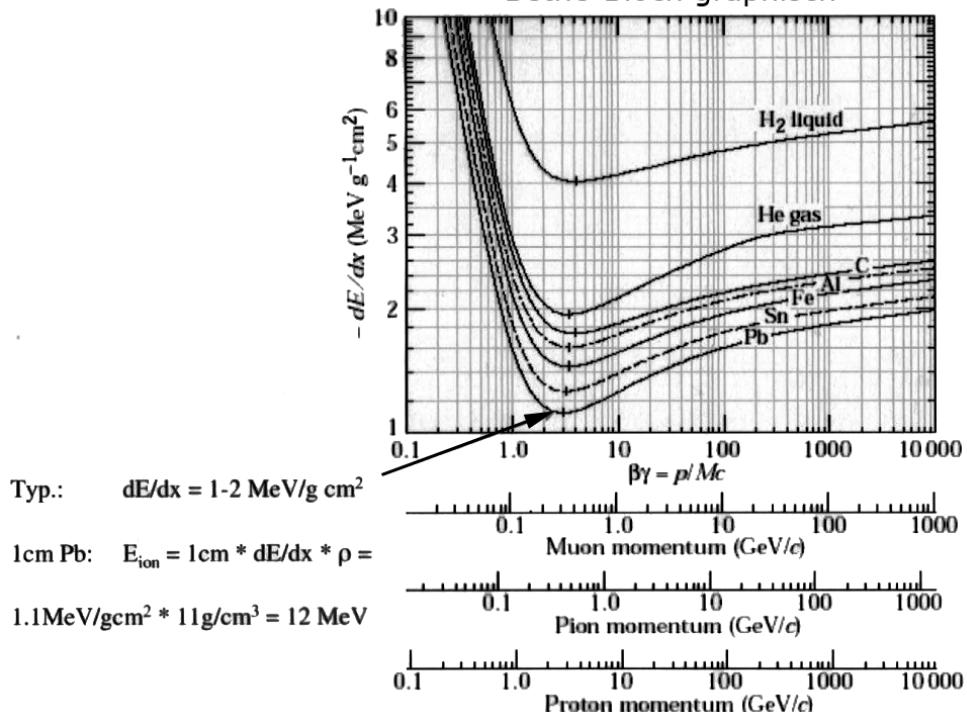
- $E_0 \approx 3m_i c^2$:

$$\frac{dE}{dx} = 1 \dots 2 \frac{\text{MeV}}{\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}} \cdot \rho \approx \text{const.}$$

- $E_0 \gg 3m_i c^2$:

$$\frac{dE}{dx} \propto E$$

Bethe-Bloch graphisch



Verwendung der dE/dx -Messung zur Teilchenidentifikation

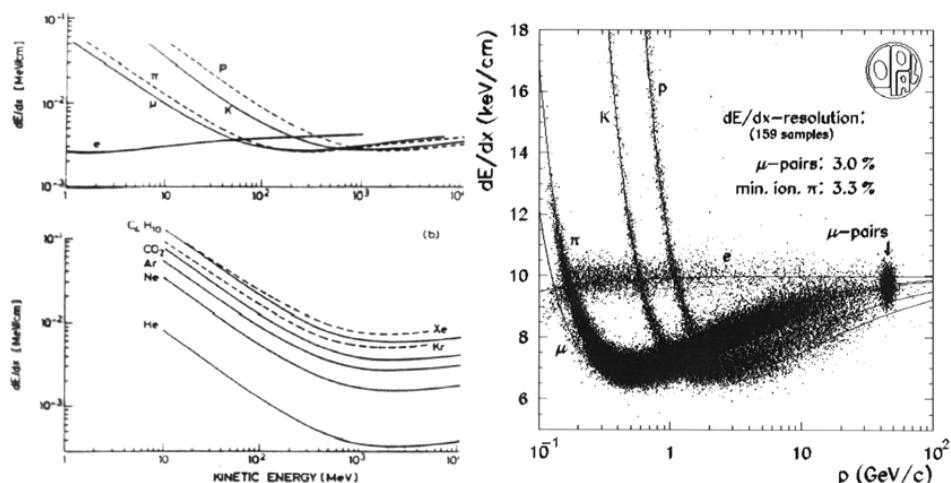
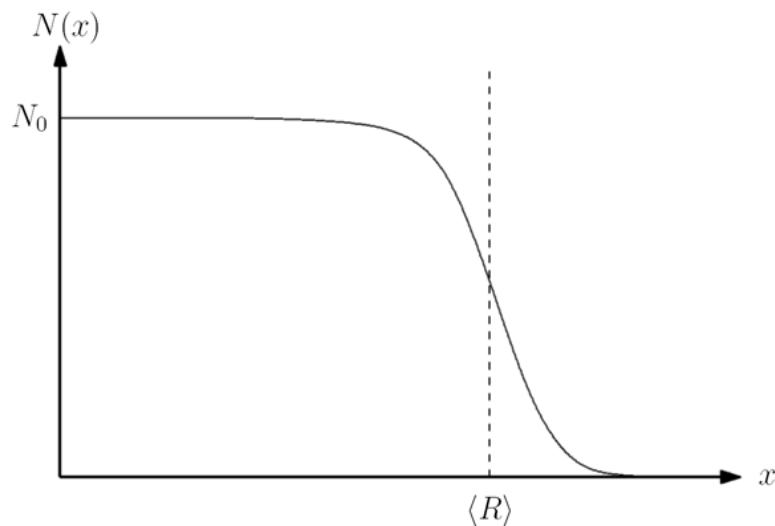


Fig. 1.2.1.1 (a) Energy loss for various particles in argon (density $0.00178 \text{ gm cm}^{-3}$); (b) Energy loss for protons in various gases. (Dumčovský, 1970)

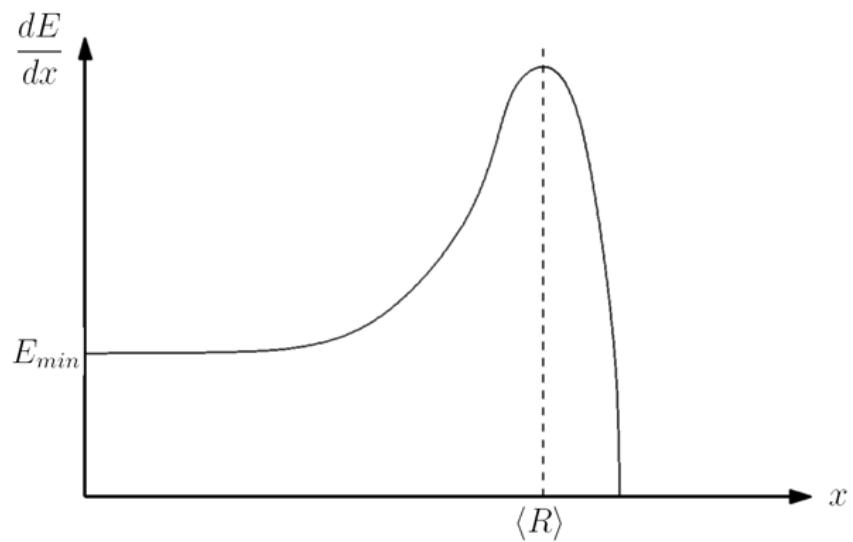
Die **Reichweite** der Teilchen in Materie beträgt:

$$\langle R \rangle = \int_{E_0}^0 \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} \propto \frac{E_0}{m_i \cdot z_i} \cdot \frac{1}{\rho}$$



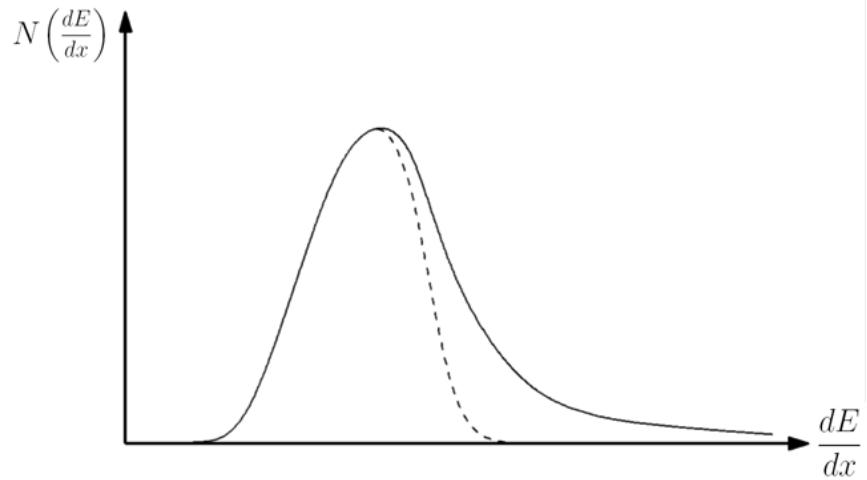
Energieverlust:

Das ausgeprägte Maximum im nachfolgenden Schaubild wird Bragg-Maximum genannt.



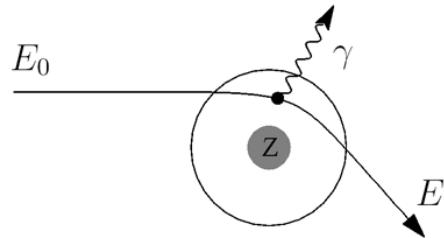
Energiefluktuation:

Für ein „dünnnes“ Material, das heißt bei nur wenigen Stößen, besitzt die Verteilung einen langen Ausläufer, der sich wie eine Landauverteilung verhält.



Im Spezialfall von Elektronen / Positronen in Materie:

- Ionisation (Bethe-Bloch-Formel)
- Bremsstrahlung durch Ablenkung am Kern



Beschleunigung am Kern:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{z_i Z e^2}{4\pi\epsilon r^2} \frac{1}{m_i}$$

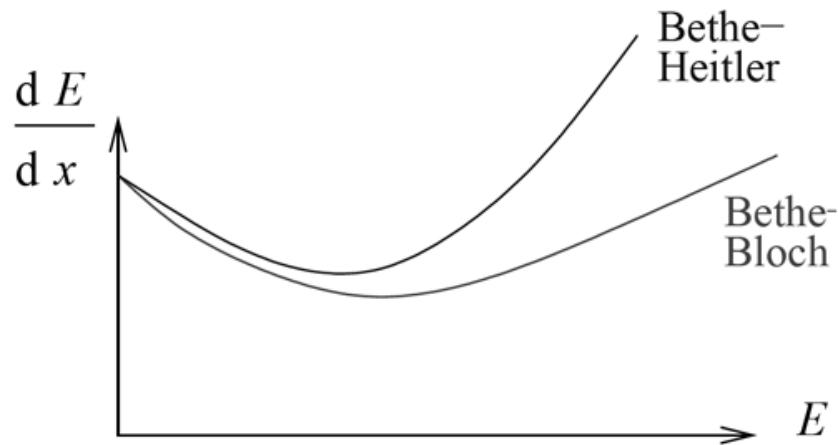
Für die Intensität der Strahlung gilt:

$$\frac{dE}{dt} = I_{\text{Strahlung}} \propto \frac{z_i^2 Z^2}{m_i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{I_{e^-}}{I_p} = \frac{m_p^2}{m_e^2} = 3 \cdot 10^6$$

Der Energieverlust nach der hochrelativistischen Bethe-Heitler-Formel ist jedoch:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{Brems}} \propto \frac{Z^2 E}{m_e^2}$$



Die Konsequenz ist, dass der Energieverlust mit steigender Energie wieder ansteigt:

$$\frac{dE}{dx} \propto E$$

$$\Rightarrow E(x) = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{x_0}} \quad [x_0 : \text{Strahlungslänge}]$$

Beispiel einiger Strahlungslängen:

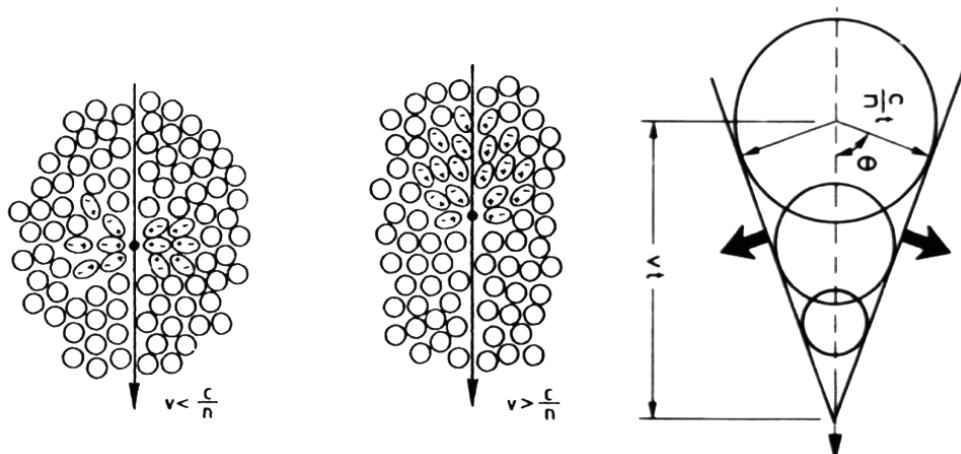
$$\text{Al} \quad x_0 = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Fe} \quad x_0 = 1.8 \text{ cm}$$

$$\text{Pb} \quad x_0 = 0.6 \text{ cm}$$

2. Cerenkov-Effekt (1934)

Wenn sich ein geladenes Teilchen in einem Dielektrikum mit $v > \frac{c}{n}$ bewegt, emittiert es Cerenkov-Licht in Form eines Lichtkegels und zwar mit dem Öffnungswinkel $\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}$.



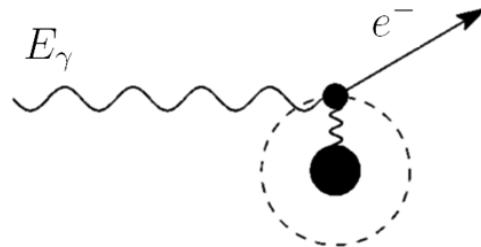
Der Energieverlust beträgt:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_C \approx 10^{-4} \cdot \left(\frac{dE}{dx} \right)_{ion}$$

Die Anzahl der emittierten Photonen N_γ in einem Zentimeter Wasser ist also von der Größenordnung $N_\gamma \approx o(100)$.

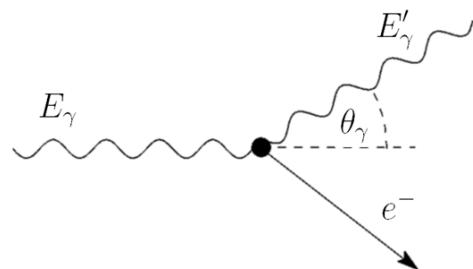
4.1.2 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

1. Photoeffekt



Der Photoeffekt bevorzugt Elektronen aus der K-Schale: $\sigma_{Ph.} \propto Z^5 \cdot \frac{1}{E_\gamma}$

2. Comptonstreuung



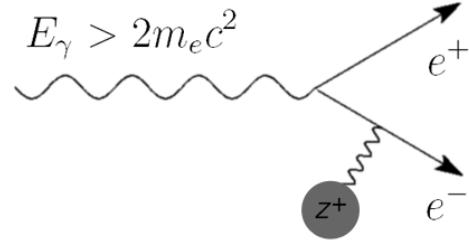
Die Endenergie E'_γ ist gegeben durch:

$$E'_\gamma \frac{1}{a + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta_\gamma)}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch:

$$\sigma_C \propto Z \frac{\ln E_\gamma}{E_\gamma}$$

3. Paarerzeugung

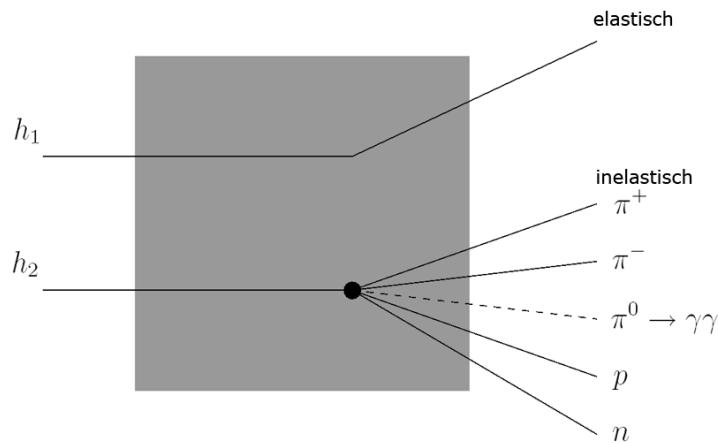


$$\sigma_P \propto Z^2$$

Der Wirkungsquerschnitt ist also energieunabhängig!

$$\Rightarrow N_\gamma(x) = N_0 \cdot e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{x_0}}$$

4.1.3 Hadron-Wechselwirkungen mit Kernen



Hadronen sind zum Beispiel: $h = \pi^+, \pi^-, p, \bar{p}, n, \bar{n}, K^+, K^-, K_L^0$

Die Wechselwirkung erfolgt typischerweise mit einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{in} \approx 50 \text{ mb} = 5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$. Die Absorption folgt einem exponentiellen Verlauf:

$$N(x) = N_0 e^{-\frac{x}{x_0}}$$

mit $\lambda = \frac{A}{\sigma_{in} N_L \cdot \rho} [m]$, zum Beispiel:

C: $\lambda = 34 \text{ cm}$

Fe: $\lambda = 17 \text{ cm}$

U: $\lambda = 11 \text{ cm}$

Eine detailliertere Auflistung einiger Materialien ist in nachfolgender Tabelle gegeben.

Material	Z	A	σ_{total} [barn]	σ_{inel} [barn]	$\lambda_w \cdot \rho$ [g/cm ²]	$\lambda_a \cdot \rho$ [g/cm ²]
Wasserstoff	1	1.01	0.0387	0.033	43.3	50.8
Helium	2	4.0	0.133	0.102	49.9	65.1
Beryllium	4	9.01	0.268	0.199	55.8	75.2
Kohlenstoff	6	12.01	0.331	0.231	60.2	86.3
Stickstoff	7	14.01	0.379	0.265	61.4	87.8
Sauerstoff	8	16.0	0.420	0.292	63.2	91.0
Aluminium	13	26.98	0.634	0.421	70.6	106.4
Silizium	14	28.09	0.660	0.440	70.6	106.0
Eisen	26	55.85	1.120	0.703	82.8	131.9
Kupfer	29	63.55	1.232	0.782	85.6	134.9
Wolfram	74	183.85	2.767	1.65	110.3	185
Blei	82	207.19	2.960	1.77	116.2	194
Uran	92	238.03	3.378	1.98	117.0	199

4.1.4 Strahlenwirkung, Dosimetrie

1. Allgemein:

Aktivität: Die Aktivität ist die Anzahl der Zerfälle je Sekunde, $\frac{dN}{dt}$. Ihre Einheit ist Becquerel (Bq).

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}}$$

Energiedosis: Die Energiedosis ist die je Masse deponierte Energie, $D_E = \frac{\Delta E}{\Delta m}$. Die zugehörige Einheit heißt Gray (Gy).

$$1 \text{ Gy} \equiv 1 \frac{J}{kg} = 100 \text{ rad}$$

2. Ionisierende Strahlung:

Ein Maß für ionisierende Strahlung ist die Ionendosis $D_s = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$, wobei die Einheit Röntgen (R) ist.

$$1 \frac{As}{kg} = 4 \cdot 10^4 R$$

3. Biologische Wirkung:

Da die verschiedenen Strahlungsarten unterschiedlich gefährlich für biologisches Gewebe sind, gibt es den Begriff der Äquivalenzdosis (H):

$$H = D_E \cdot q$$

wobei q der biologische Faktor ist, zum Beispiel:

Elektromagnetische Strahlung	$q = 1$
n	$q = 5 \dots 20$
p	$q = 5 \dots 15$
α , Kerne	$q = 20$

Die Einheit der Äquivalenzdosis heißt Sievert (Sv).

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \cdot q = 100 \text{ rem}$$

4.2 Detektoren

Detektoren dienen dem Nachweis, der Identifikation und der Vermessung von Teilchen:

- E Kalorimetrie (Absorption)
- \vec{p} Bahnbestimmung im Magnetfeld
- v Flugzeitmessung oder Cerenkovstrahlung
- m, q Ionisationsmessung, $\frac{dE}{dx}$
- τ Lebensdauer: Zerfallstrecke

Teilchenidentifikation im Detektor:



- Signale im Spurdetektor
- vollständige Energieabgabe im 1. (elektromagnetischen) Kalorimeter durch Kaskaden von Bremsstrahlung und Paarbildung



- Keine Signale in der Spurkammer
- vollständige Energieabgabe im 1. (elektromagnetischen) Kalorimeter durch Kaskaden von Paarerzeugung und Bremsstrahlung



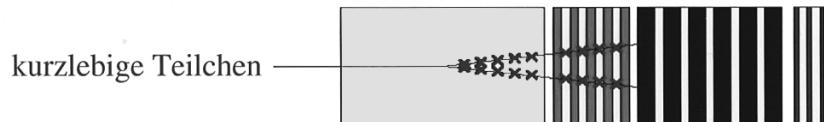
- Signale im Spurdetektor
- minimal-ionisierende Spur in den Kalorimetern
- Signale in Myon-Kammern



- Signale im Spurdetektor
- nur Ionisationsspur im 1. Kalorimeter
- vollständige Energieabgabe durch Kernwechselwirkungen im 2. (hadronischen) Kalorimeter



- Wie geladenes Hadron,
- aber keine Spur im Spurdetektor

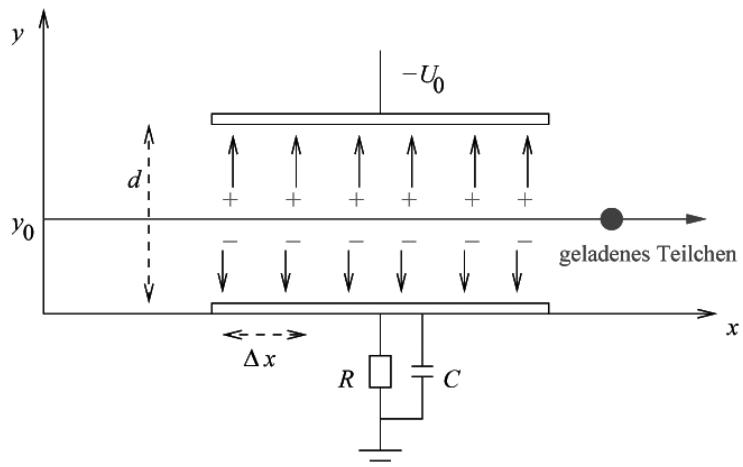


zerfallen im Detektor in langlebige Teilchen.
Durch präzise Vermessung der Zerfallsorte und der Impulse der Zerfallsprodukte
lässt sich die Ruhemasse rekonstruieren (wenn Teilchentyp der Zerfallsprodukte identifiziert ist !)

Bs.: Kaonen, gel. Pionen, Lambdas,
Sonderfall: Hadronen mit Charm oder Beauty

4.2.1 Ionisationsdetektoren

Einen Ionisationsdetektor kann man sich prinzipiell als Plattenkondensator vorstellen:



Der Energieverlust des Teilchens durch Ionisation ist gegeben durch:

$$\Delta E = \frac{dE}{dx} \cdot \Delta x$$

Ionisation:

$$n_e = n_i = \frac{\Delta E}{W_i}$$

Dabei ist W_i die effektive Ionisationsenergie. Im Fall von Argon wären das etwa 26 eV. Die Anzahl der erzeugten Elektron-Loch-Paare wären bei Argon $25 \frac{1}{cm \cdot atm}$, also 25 Elektron-Loch-Paare je Zentimeter bei Atmosphärendruck.

Spannungsänderung durch Ladungsbewegung:

- Ionen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C U^2 &= \frac{1}{2} C U_0^2 - n_i \int_{y_0}^d dE_0 dy \\ &= \frac{1}{2} C U_0^2 - n_i e \frac{U_0}{d} (d - y_0) \end{aligned}$$

mit $\Delta U = U - U_0$, $U^2 - U_0^2 \approx \Delta U \cdot 2U_0$ lässt sich dies schreiben als:

$$\Delta U = -\frac{n_i e (d - y_0)}{C d}$$

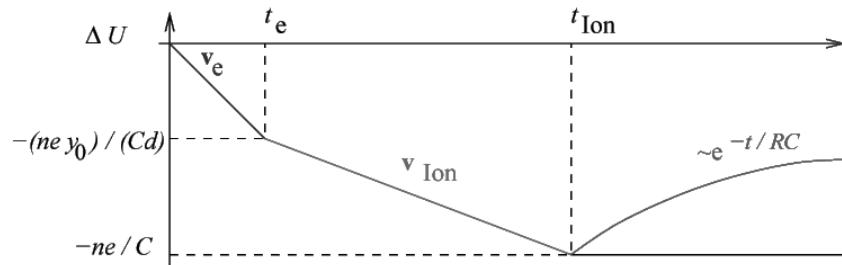
- Elektronen:

$$\Delta U = -\frac{n_e e}{C} \frac{y_0}{d}$$

Zusammen ergibt sich also:

$$\Delta U_{\text{total}} = -\frac{n e}{C}$$

Signalform:



Es ist zu sehen, dass Elektronen und Ionen den Weg unterschiedlich schnell zurücklegen. dabei ist $t_e = o(\mu s)$ und $t_{\text{Ion}} = o(ms)$. Es erfolgt außerdem eine Aufladung über das

Netzteil. Anwendung findet diese Technik zum Beispiel in Taschendosimetern. Typische Werte für die Bauteile sind:

$$R = o(M\Omega)$$

$$C = o(100 \text{ pF})$$

$$\Rightarrow RC = o(100 \text{ } \mu\text{s})$$

Die Signalstärke, zum Beispiel bei Argon ($W_i = 26 \text{ eV}$), bei einer Energie von $\Delta E = 1 \text{ MeV}$ mit einer Kapazität von $C = 100 \text{ pF}$ ist:

$$\Delta U = 60 \text{ } \mu\text{V}$$

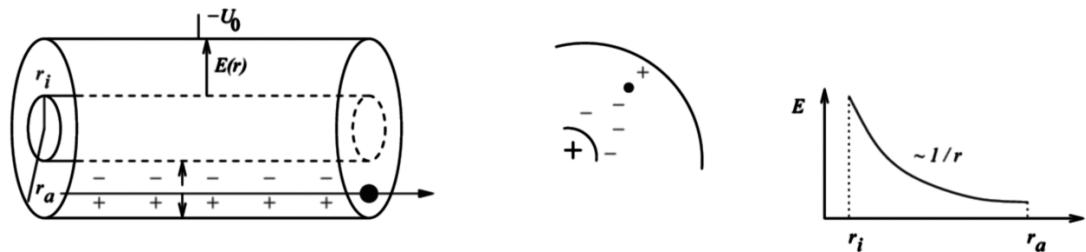
also sehr klein.

4.2.2 Gasdetektoren

Sauli: CERN-Report 77-09

1. Zählrohr:

Schematischer Aufbau:



Wie in obiger Abbildung zu sehen ist, nimmt das elektrische Feld mit zunehmenden Radius ab.

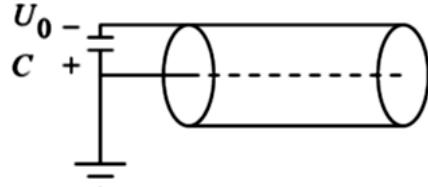
$$R(r) = \frac{CU_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Die Kapazität des Zählrohrs ist gegeben durch

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Durch die Sekundärionisation kommt es zu einer sogenannten Gasverstärkung, die 10^6 erreichen kann.

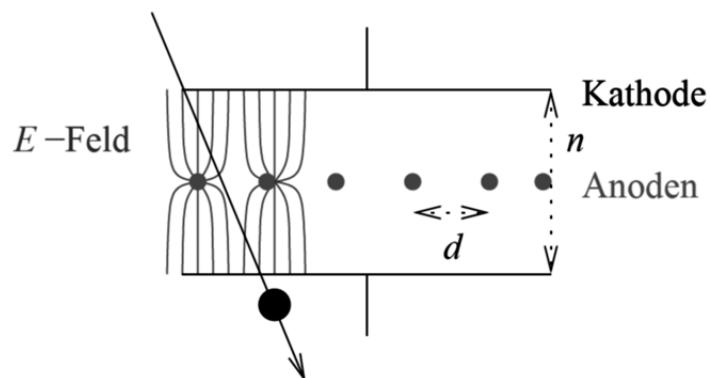
2. Geiger-Müller-Zählrohr:



Die Lawinen an der Anode setzen UV-Photonen frei. Diese erzeugen wiederum Elektron-Ion-Paare die eine Lawine auslösen. Es kommt zu einer Gasentladung mit $\Delta Q = C \cdot U_0$. Anwendung findet das Geiger-Müller-Zählrohr in Teilchenzählern.

Ortsauflösende Gasdetektoren: (von Charpak)

1. Proportionalkammer:



\oslash Anode: $30 - 50 \mu m$

d: $1 - 2 mm$

h: $5 - 20 mm$

Jede Anode besitzt einen eigenen Verstärkerausgang. Neben der Anode, die anspricht gibt es bei den Nachbardrähten ein Signal durch Induktion.

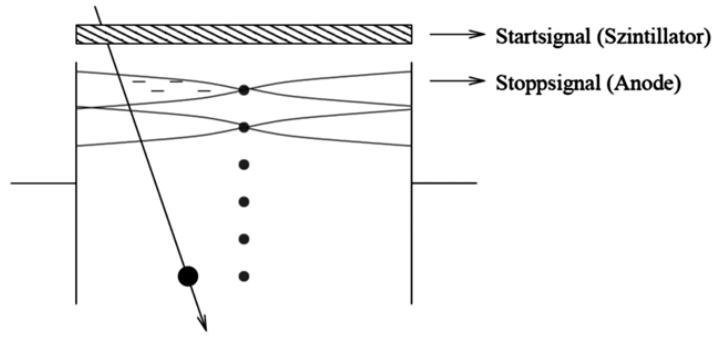
Die Bestimmung des Durchgangsortes x_0 ist die Position des angesprochenen Drahtes mit einer Streuung von $\sigma_x = \frac{d}{\sqrt{12}}$. Dies sind typischerweise $500 \mu m$.

2. Driftkammer:

Die Idee hatten unter anderem Bressani und Charpak im Jahr 1969. Gebaut wurde sie schließlich 1971 unter anderem von Wolenta und Heintze.

Das Prinzip ist die Messung der Ankunftszeit der Ionisationselektronen, wobei der

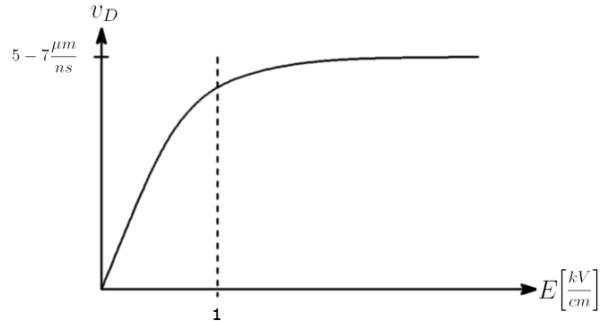
Startzeitpunkt durch externe Detektoren vorgegeben wird.



$$x = \int_{t_1}^{t_2} v_D dt$$

Dabei ist v_D die Driftgeschwindigkeit. Sie beträgt typischerweise $5 - 7 \mu\text{m/ns}$. Im Fall einer konstanten Driftgeschwindigkeit ergibt sich:

$$x = v_D \cdot (t_2 - t_1)$$



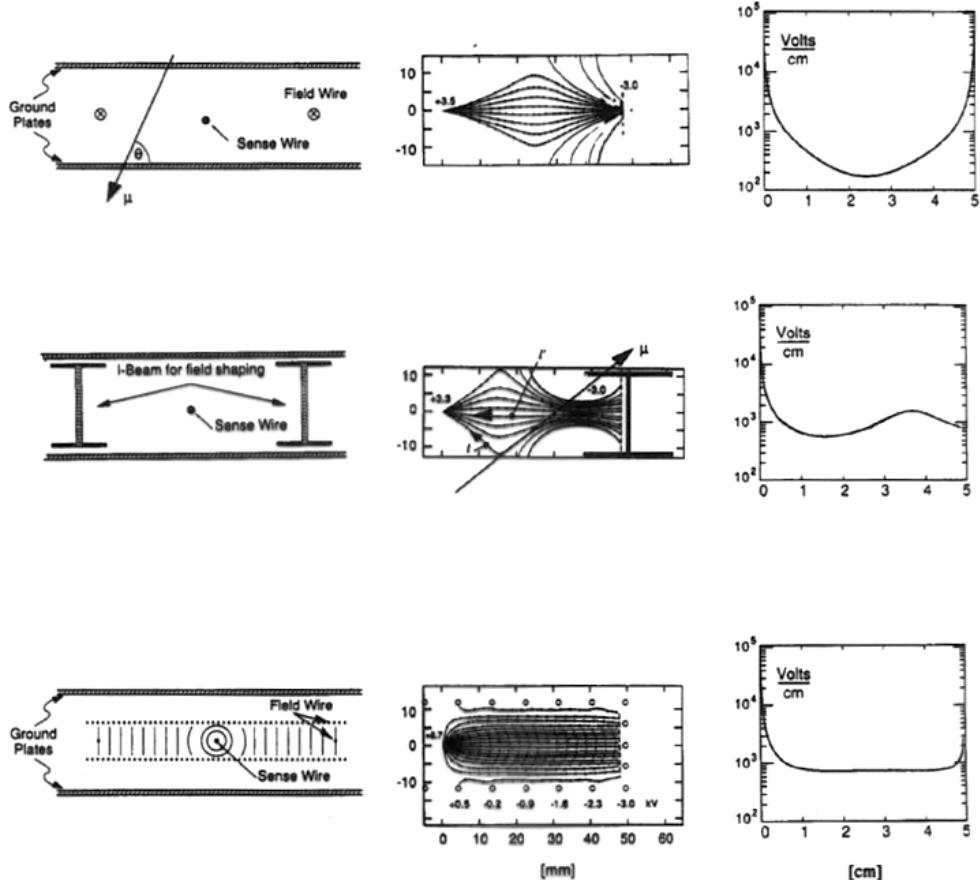
Die Ortsauflösung ist begrenzt durch:

- Inhomogenitäten von E
- Diffusion $D_x \rightarrow \delta x = \sqrt{D_x t}$
- verschiedene Einfallswinkel
- elektronisches Rauschen

$$\Rightarrow \sigma \approx 30 - 200 \mu\text{m}$$

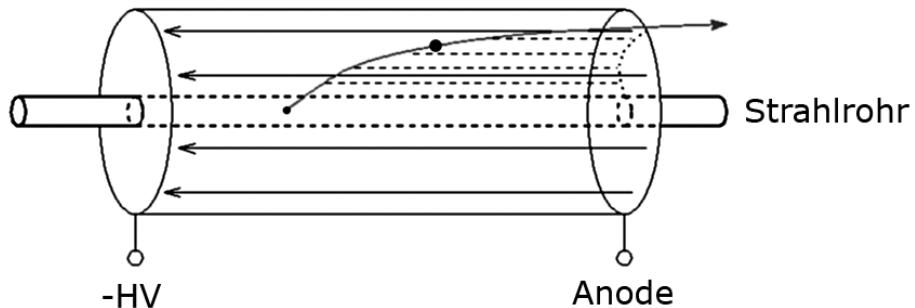
Beispiele für den Aufbau einer Driftkammer mit möglichst homogenem E-Feld:

Optimize geometry → constant E-field
 Choose drift gases with little dependence $v_D(E)$
 → linear space - time relation $r(t)$



(U. Becker, in: Instrumentation in High Energy Physics, World Scientific)

3. Zeitprojektionskammer (TPC):



Die Spurrekonstruktion erfolgt durch Messung von Ankunftszeit und Ort der ansprechenden Elektroden.

4.2.3 Halbleiterdetektoren

Ein Halbleiterdetektor basiert auf dem Prinzip, dass ein ionisierendes Teilchen Elektron-Loch-Paare im Halbleiter erzeugt.

Beispiel: Silizium

Anzahl der erzeugten Elektron-Loch-Paare:

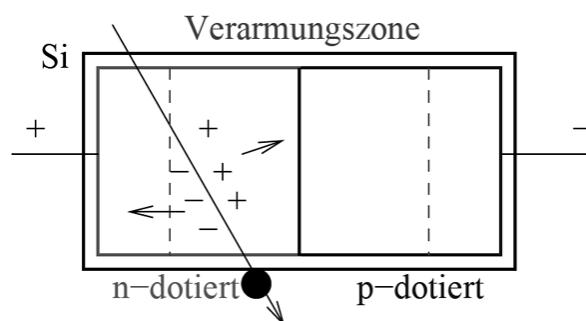
$$N_{el} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{d}{w_i}$$

wobei $w_i = 3.6 \text{ eV}$ (Bandlücke $1.1 \text{ eV} + 2.5 \text{ eV}$ Phononen).

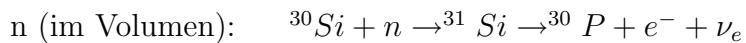
$$N_{el}(d = 300\mu\text{m}) = 3.2 \cdot 10^4$$

Problem: Bei Raumtemperatur gibt es bereits $1.5 \cdot 10^{10} \frac{\text{e-L-Paare}}{\text{cm}^3}$

Lösung: pn-Übergang in Sperrichtung (Diode)

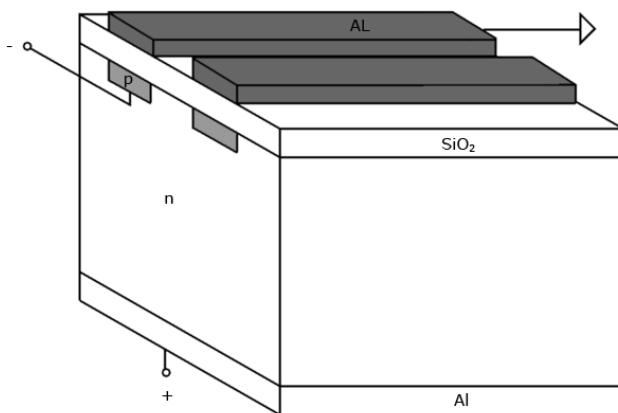


Herstellung:



p (auf der Fläche) Ionenimplantation

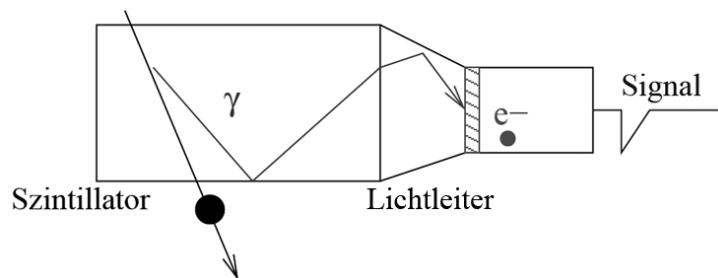
Ortsempfindlichkeit:



Auflösung (Berechnung durch Schwerpunktsbildung): $o(10 \mu\text{m})$

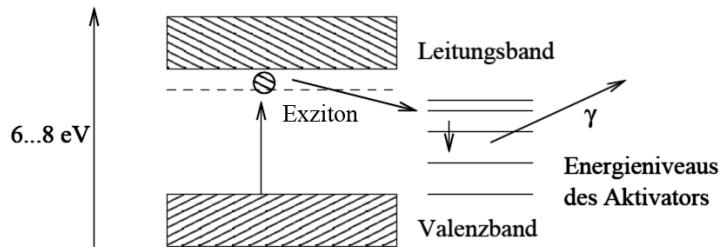
4.2.4 Szintillations-Detektoren

Szintillationsdetektoren beruhen auf dem Prinzip, dass eine Ionisation mit Lichtemission verbunden ist. Das entstandene Licht kann über den Photoeffekt in ein elektrisches Signal umgewandelt werden.



1. Anorganische Szintillatoren:

Kristall mit sogenannten Aktivatoren.



Zum Beispiel: $NaJ + Tl$

$$\rho = 3.7 \frac{g}{cm^3}$$

$$\lambda_\gamma = 410 \text{ nm}$$

$$N_\gamma = 4 \cdot 10^4 \text{ MeV}^{-1}$$

2. Organische Szintillatoren:

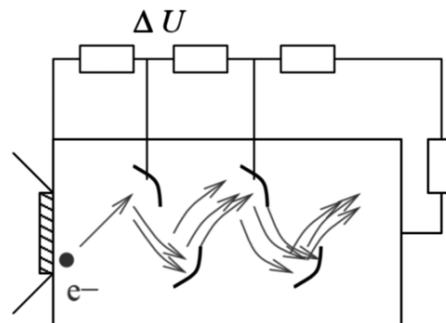
Organische Szintillatoren nutzen aus, dass eine Ionisation eine Molekülänregung verursacht. Dies führt zur Emission von UV-Licht, was dann über einen Wellenlängenschieber umgewandelt und anschließend detektiert wird.

Zum Beispiel:

Naphthalen: $\lambda_{max} = 348 \text{ nm}$

Naphthalen + POPOP: $\lambda_{max} = 500 \text{ nm}$

Der prinzipielle Aufbau eines Photomultipliers (PMT), der zum Nachweis der entstehenden Photonen eingesetzt wird, ist in nachfolgender Skizze zu sehen:



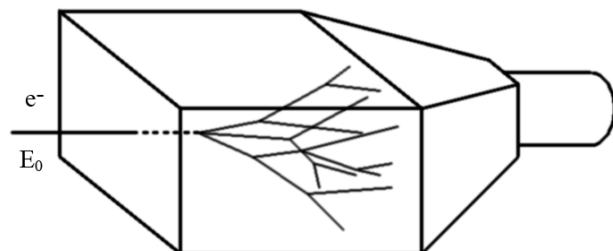
Die erzielbaren Verstärkungen liegen im Bereich von $10^4 \dots 10^7$, wobei die Quanteneffizienz etwa 20 % beträgt.

Vergleich organische / anorganische Szintillatoren:

	Typ	N_γ/keV	τ/ns	λ/nm	X_0/cm
anorganisch	NaI (Tl)	40	230	410	2.6
	BGO	3	350	480	1.1
	CeF	5	5,20	300, 340	1.7
organisch	Anthrazen	17	30	450	30
	NE110 (fest)	10	3.3	430	40
	NE216 (flüssig)	13	3.5	430	50

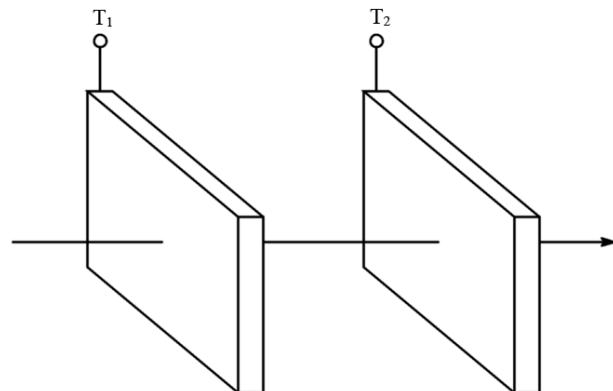
Anwendungen für Szintillations-Detektoren.

1. Die Absorption von e^+ , e^- , γ dient der Energiemessung:



$$I_0 \propto E_0$$

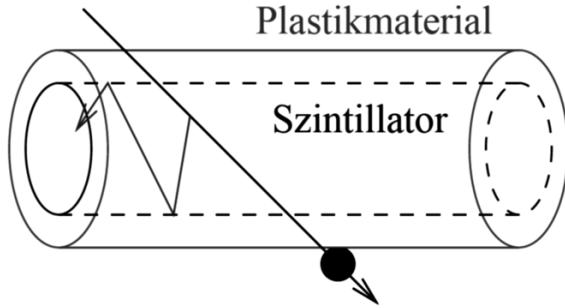
2. Bestimmung der Durchtrittszeit geladener Teilchen:



$$\Delta T = T_2 - T_1$$

$$\delta_t \approx 50 - 2000 \text{ ps}$$

Sonderfall: Szintillierende Fasern

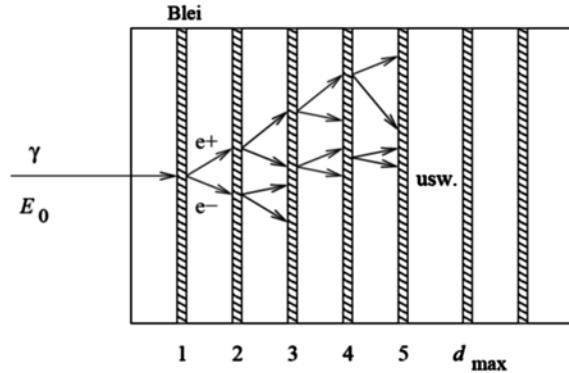


Der Szintillator hat einen Brechungsindex von $n = 1.6$, während die Ummantelung aus einem nicht szintillierenden Material einen etwas kleineren Brechungsindex hat.

4.2.5 Elektromagnetisches Kalorimeter

Mit einem Kalorimeter führt man eine Energiebestimmung durch Absorption durch. Ein Elektromagnetisches Kalorimeter beschränkt sich dabei auf elektromagnetisch Wechselwirkende Strahlung, also e^+ , e^- , γ .

Der Nachweis erfolgt bei e^\pm durch Ionisation und Bremsstrahlung, bei Photonen hingegen durch Paarbildung. Alle diese Effekte führen zu Sekundärelektronen und Photonen.



Die Anzahl der Sekundärteilchen ist $N(d) = 2^d$, wobei die Energie je Sekundärteilchen durch $E(d) = \frac{E_0}{2^d}$ gegeben ist.

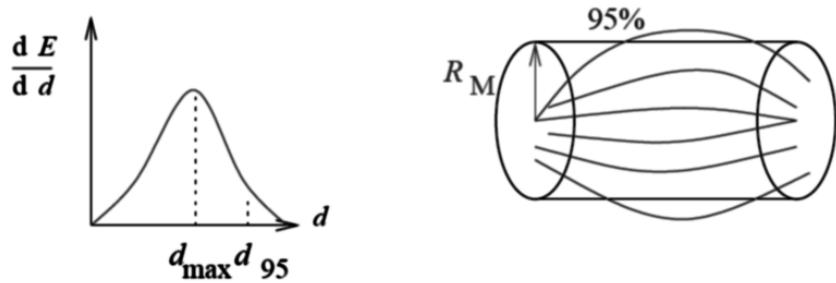
$$E_{d_{max}} = E_c = \frac{E_0}{2^{d_{max}}}$$

Somit lässt sich das Schauermaximum berechnen durch:

$$d_{max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2}$$

Die Anzahl der Teilchen im Schauermaximum ist dann $N(d_{max}) = \frac{E_0}{E_c}$

Das longitudinale und das transversale Profil des Schauers ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.



95% eines Schauers befinden sich in einem Zylinder mit Radius $R_M = \frac{21 \cdot X_0}{E_c}$.

Zum Beispiel Bleiglas: $R_M = 3.6 \text{ cm}$

Energiemessung:

Mit

$$N(d) = 2^d$$

$$N_{tot} = \sum_0^{d_{max}} 2^d = d^{d_{max}+1}$$

$$N_{tot} = 2 \frac{E_0}{e_c} \propto I_{sig.}$$

Ergibt sich:

$$E_0 \propto N_{tot} \propto I_{signal}$$

Die Unsicherheit ist gegeben durch

$$\sigma(E_0) \propto \sqrt{N_{tot}} \propto I_{sig}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(E_0)}{E_0} = \frac{a}{\sqrt{E_0}} \left(+b + \frac{c}{E} \right)$$

Dabei ist der erste Term statistischer Natur, der konstante Term b ist verursacht durch Inhomogenitäten oder Lecks und der letzte Term ist Rauschen.

4.2.6 Hadron-Kalorimeter

Das Hadron-Kalorimeter funktioniert analog zum elektromagnetischen Kalorimeter. Der Hadron-Schauer enthält π , K , p , n . Diese produzieren im Kalorimeter Sekundärteilchen, zum Beispiel: μ^\pm , e^\pm , p , n , ν . Diese führen zu einer Ionisation.

Das longitudinale Schauermmaximum befindet sich bei

$$d_{max} [\lambda_I] = 0.2 \cdot \ln E_0 + 0.7$$

$$d_{95\%} \propto \ln E_0$$

Im Beispiel von Eisen ($E_0 = 100 \text{ GeV}$):

$$d_{max} = 1.6 \cdot \lambda_I \hat{=} 27 \text{ cm}$$

$$d_{95\%} = 4.8 \cdot \lambda_I \hat{=} 80 \text{ cm}$$

Hadron-Kalorimeter sind große Klötze!

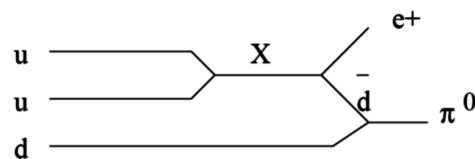
$$\frac{\sigma_E}{E} \approx \frac{100\%}{\sqrt{E}} \quad (\text{typisch})$$

4.2.7 Experimente

Ein Experiment ist ein System von Detektoren zum Nachweis / zur Vermessung physikalischer Prozesse.

1. Superkamiokande in Kamioka, Japan:

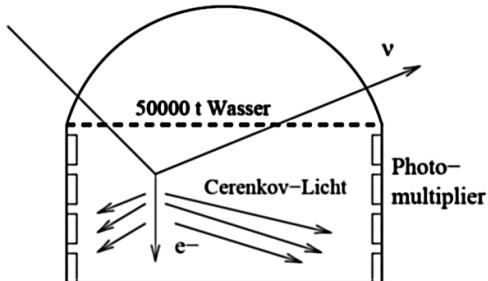
Ursprünglich gebaut für die Suche nach dem Protonzerfall.



Der Nachweis erfolgt über die Cerenkovstrahlung des Positrons im Wasser. Man hat jedoch kein Signal gefunden. Daraus lässt sich die minimale Lebensdauer des Protons abschätzen zu:

$$\tau_p > 10^{33} \text{ Jahre}$$

Später wurde der Detektor auch auf der Suche nach solaren Neutrinos verwendet und hat einen wichtigen Beitrag zur Entdeckung der Neutrinooszillation geliefert.



2. CMS-Experiment

Im Web: <http://cmsinfo.cern.ch>

Motivation:

Studium von Ereignissen in Proton-Proton-Kollisionen bei 14 TeV Schwerpunktsenergie. Man erhofft sich daraus neue Erkenntnisse in folgenden Bereichen:

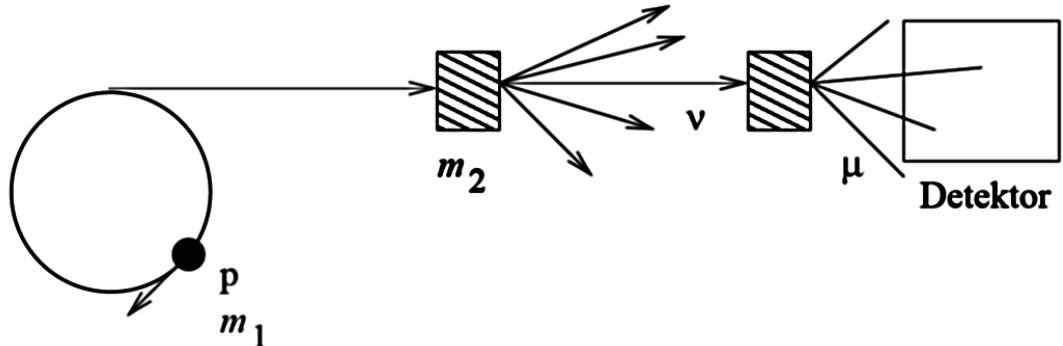
- Higgsboson
- SUSY
- Elektroschwache Anomalien
- top-Quark Ereignisse
- Strukturen von Quarks
- ...

4.2.8 Teilchenbeschleuniger

Die Funktionsweise eines Teilchenbeschleunigers beruht auf wenigen grundlegenden Prinzipien:

- Beschleunigung geladener Teilchen im elektrostatischen Feld
- Ablenkung in magnetischen Dipolfeldern
- Fokussierung mit magnetischen Multipolfeldern

1. Beschleuniger mit Fixed Target Experiment



Die Schwerpunktsenergie ist dann gegeben durch

$$E_{CMS} = \sqrt{S} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2} \approx \sqrt{2E_1 m_2 c^2}$$

Zum Beispiel das Super Proton Synchrotron (SPS) am Cern:

$$E_1 = 450 \text{ GeV}$$

$$m_1 = m_2 = m_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = 29 \text{ GeV}$$

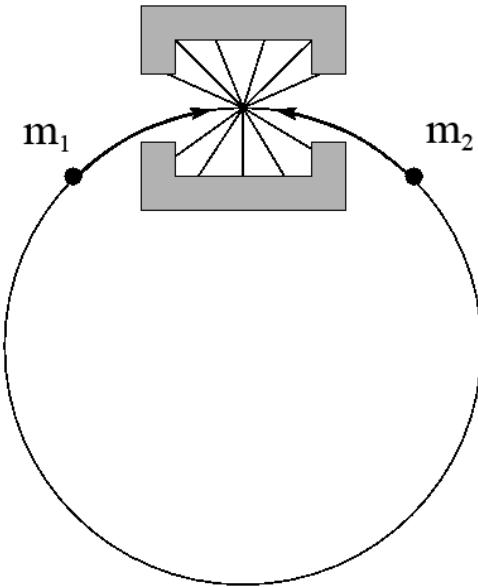
Vorteil:

- Hohe Ereignisrate
- Detektor „einfach“

Nachteil:

- Energien klein

2. Collider



$$E_{CMS} = \sqrt{S} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2}$$

Zum Beispiel das Super-Proton-Antiproton-Synchrotron ($Spp\bar{p}S$ am Cern:

$$E_1 = E_2 = 270 \text{ GeV}$$

$$m_1 = m_2 = m_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} \approx 540 \text{ GeV}$$

Vorteil:

- Hohe Energie

Nachteil:

- Ereignisraten relativ niedrig
- Detektoren aufwändig und teuer

Ein Maß für die Ereignisraten ist die Luminosität (siehe Kapitel 2.3.2)

$$\mathcal{L} = \frac{N_p N_{\bar{p}} \cdot f \cdot n_{bunch}}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

- N_p Anzahl der Protonen je Paket (bunch)
- $N_{\bar{p}}$ Anzahl der Antiprotonen je Paket
- σ_x Ausdehnung des Strahls in x-Richtung
- σ_y Ausdehnung des Strahls in y-Richtung

Die Ereignisrate ist dann

$$\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma$$

Die Zahl der Ereignisse bekommt man durch

$$N = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \sigma \cdot dt$$

Beispiel: Tevatron (Fermilab)

$$\begin{aligned} N_{\bar{p}} &= 10^{11} \quad f = \frac{c}{2\pi R} = 48 \text{ kHz} \\ N_p &= 10^{11} \quad \sigma_x \approx \sigma_y \approx 50 \mu m \\ n_{bunch} &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = 10^{31} \frac{1}{cm^2 s}$$

Stand 2007: $\mathcal{L} \leq 2 \cdot 10^{32} \frac{1}{cm^2 s}$

- Inelastische Streuung:

$$\sigma_{p\bar{p}} = 50 \cdot 10^{-26} cm^2$$

$$\dot{N} = 50 \cdot 10^{-26} \cdot 10^{31} \frac{cm^2}{cm^2 s} = 500 kHz$$

- $t\bar{t}$ -Erzeugung:

$$\sigma_{p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}} = 7 pb$$

$$\dot{N}_z \cdot 10^{-36} \cdot 10^{31} \frac{cm^2}{cm^2 s} = 7 \cdot 10^{-3} s^{-1}$$

In einem „Jahr“ (10^7 s $\hat{=} 1$ Beschleunigerjahr):

$$N_{t\bar{t}} = \int_t^{t+10^7 s} \sigma \mathcal{L} dt = 100 pb^{-1} \cdot \sigma = 700$$

5 Das Standardmodell

Im Rahmen des Standardmodells sind einige Begriffe gebräuchlich:

- QED Quantenelektrodynamik
- QCD Quantenchromodynamik
- QFD Quantenflavourdynamik → Schwache Wechselwirkung.

5.1 Phänomene der schwachen Wechselwirkung

Erste Beobachtung: „Langsamkeit“ des Betazerfalls!

1. Zerfälle:

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\Lambda \rightarrow p\pi & \quad \tau = 2.6 \cdot 10^{-10} s \\ n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e & \quad \tau = 8.9 \cdot 10^2 s \\ \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu & \quad \tau = 2.6 \cdot 10^{-8} s \\ \mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e & \quad \tau = 2.2 \cdot 10^{-6} s\end{aligned}$$

Das ist langsam im Vergleich zu elektromagnetischen Prozessen,

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \tau \approx 10^{-16} s$$

oder zu starken Prozessen:

$$\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \tau \approx 10^{-23} s$$

2. Streuungen

Streuungen haben sehr kleine Wirkungsquerschnitte! Zum Beispiel die Neutrino-Nukleonstreuung:

$$\sigma(\nu_\mu N \rightarrow N + \pi + \mu^-) \approx 10^{-38} cm^2 \text{ bei } 1 \text{ GeV}$$

$$\sigma(\pi N \rightarrow N + \pi) \approx 10^{-26} cm^2$$

„Anwendung“ finden Prozesse der schwachen Wechselwirkung in der 1. Stufe der Fusion in der Sonne:

$$pp \rightarrow d + e^+ + \nu_e$$

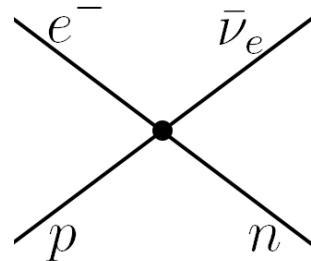
Auf Grund der kleinen Wirkungsquerschnitte ist die Lebensdauer der Sonne im Bereich $\tau \approx 10^{10}$ Jahre.

5.1.1 Schwache Zerfälle

$$1. \ n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

1930 Pauli: Vorschlag eines „Neutrinos“ (kleines Neutron) zur Erklärung der kontinuierlichen Elektron-Energieverteilung.

1934 Fermi: Erklärung des Energiespektrums



Wendet man die „Goldene Regel“ an, so erhält man die Übergangsrate durch:

$$W = \frac{2\pi}{h} |M_{if}|^2 \frac{dN}{dE}$$

Für den Betazerfall gilt:

$$|M|^2 = G_F^2 \cdot 1 \quad (\Delta I = 0)$$

wenn $n(\uparrow) \rightarrow p(\uparrow) + e^-(\uparrow) + \bar{\nu}_e(\downarrow)$, und

$$|M|^2 = G_F^2 \cdot 3 \quad (\Delta I = 1)$$

wenn $n(\uparrow) \rightarrow p(\downarrow) + e^-(\uparrow) + \bar{\nu}_e(\uparrow)$.

Dabei ist G_F :

$$G_F = 1.16 \cdot 10^{-3} \frac{1}{GeV^2}$$

$\frac{dN}{dE}$ ist die Zustandsdichte, also die Anzahl der Zustände mit einer Energie zwischen E und $E + dE$.

Im Ruhesystem des Neutrons gilt:

$$\vec{p}_n = 0 = \vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_{\nu}$$

und

$$E = E_p + E_e + E_{\nu} \approx 1 \text{ MeV}$$

Die Protonenergie ist praktisch vernachlässigbar:

$$E_p = \frac{\vec{p}_p^2}{2m_p} \approx 1 \text{ keV} \ll E$$

Mit

$$dN = dn_e \cdot dn_\nu$$

wobei

$$\begin{aligned} dn_e &= \frac{4\pi p_e^2 dp_e}{h^3} \cdot V \\ dn_\nu &= \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3} \cdot V \end{aligned}$$

und

$$p_\nu = \frac{E - E_e}{c} \Rightarrow dp_\nu = \frac{dE}{c}$$

folgt schließlich für die Zustandsdichte:

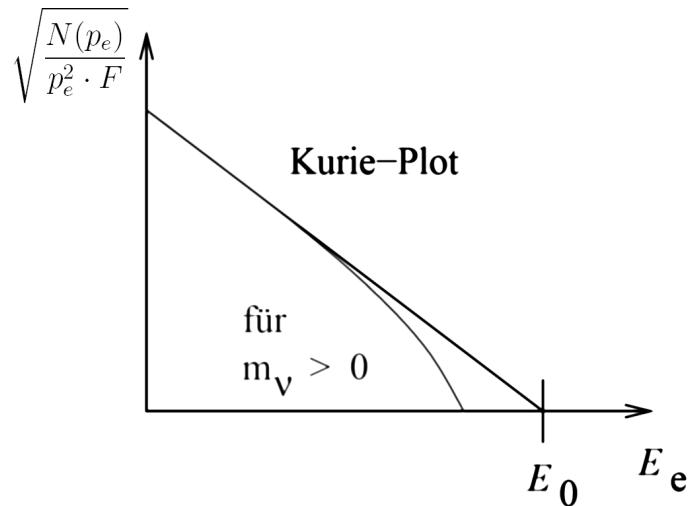
$$\frac{dN}{dE} = \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} p_e^2 (E - E_e)^2 dp_e$$

Im Experiment beobachtet man jedoch die Rate der Zerfälle in einem bestimmten Impulsintervall des Elektrons:

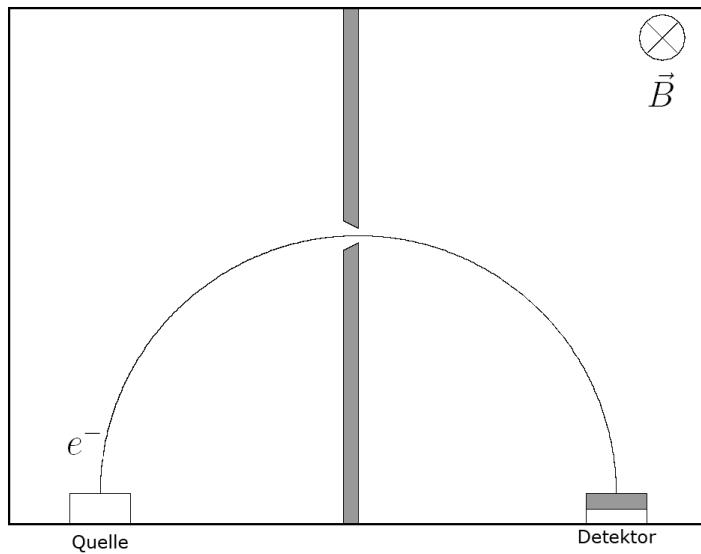
$$\dot{N}(p_e) \propto p_e^2 \cdot (E - E_e) \cdot F(Z, p_e) \cdot \sqrt{1 - \frac{m_\nu c^2}{(E - E_e)^2}}$$

Dabei stellt $F(Z, p_e)$ eine Korrektur durch die Auswirkung des Kerns dar. Der letzte Term kommt zum tragen, wenn die Ruhemasse des Elektroneneutrinos von Null verschieden ist.

Aus dem sogenannten Kurie-Plot wäre in diesem Fall die Neutrinomasse bestimmbar.



Das Spektrometer für solche Messungen kann wie folgt aufgebaut sein:



Damit wurde die Obergrenze der Masse des Antielektronneutrinos auf

$$m_{\bar{\nu}_e} \leq 2 \text{ eV}/c^2$$

gesenkt. Aus anderen Experimenten hat man auch Obergrenzen für die anderen Neutrinoflavours festlegen können:

$$m_{\nu_\mu} < 170 \text{ keV}/c^2$$

$$m_{\nu_\tau} < 24 \text{ MeV}/c^2$$

Für die Gesamtrate der Zerfälle erhält man schließlich:

$$\dot{N}_{tot} \propto G_F^2 \int_0^E E_e^2 \cdot (E - E_e)^2 \cdot dE_e \propto G_F^2 E^5$$

Diese Proportionalität zu E^5 bezeichnet man auch als Sargent-Regel. Die Fermikonstante ist dabei nicht dimensionslos:

$$G_F = 1,16 \cdot 10^{-5} \frac{1}{GeV^2}$$

2. Myonzerfall

$$\begin{aligned}\mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e\end{aligned}$$

Die differentielle Zerfallsbreite ist gegeben durch

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{m_\mu^2 G_F^2}{2\pi^3} E_e^2 \left(3 - \frac{4E_e}{m_\mu} \right)$$

Die totale Zerfallsbreite ergibt sich aus der Integration zu:

$$\Gamma = \int_0^{m_\mu} dE_e \frac{d\Gamma}{dE_e} = G_F^2 \frac{m_\mu^5}{192\pi^3} \quad [c = 1]$$

Der Vergleich des Neutron- und des Myonzerfalls liefert ein Verhältnis der Lebensdauern von

$$\frac{\tau_\mu}{\tau_n} \propto \left(\frac{E_n}{e_\mu} \right)^5 \approx 10^{-10}$$

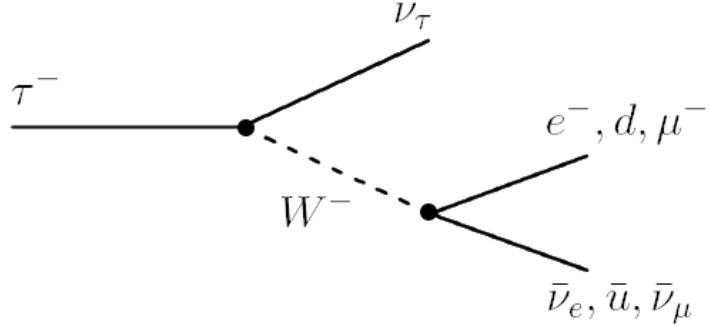
Aus der Myonmasse $M_\mu = 105,65836 \text{ MeV}/c^2$ und der Lebensdauer $\tau_\mu = 2,19703 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ lässt sich die Kopplungskonstante berechnen zu:

$$G_F = 1,166 \dots \cdot 10^{-5} \frac{1}{GeV^2}$$

Die Kopplung im Neutron- und im Myonzerfall ist also trotz der sehr unterschiedlichen Lebensdauern die Gleiche.

3. Überprüfung: Lebensdauer des τ^-

$$\frac{\tau(\tau^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau)}{\tau(\mu^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu)} = \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^5 = 7 \cdot 10^{-7}$$



Mit:

$$\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu} \quad (\text{BR}=20\%)$$

$$\tau \rightarrow \mu\nu\bar{\nu} \quad (\text{BR}=20\%)$$

$$\tau^+ \rightarrow u\bar{d}\bar{\nu} \quad (\text{BR}=60\%)$$

und unter Berücksichtigung des Verzweigungsverhältnisses (branching ratio, BR), das beim Zerfall in Quarks auf Grund der drei Farbladungen 60% beträgt, erhält man als Vorhersage für die Lebensdauer des τ^- :

$$\tau(\tau^-) = 0,2 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \cdot \tau(\mu) = 0,3 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

Das Experiment liefert einen damit verträglichen Wert von:

$$\tau(\tau^-)_{\text{Exp.}} = 290 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

5.1.2 Inverser β -Zerfall

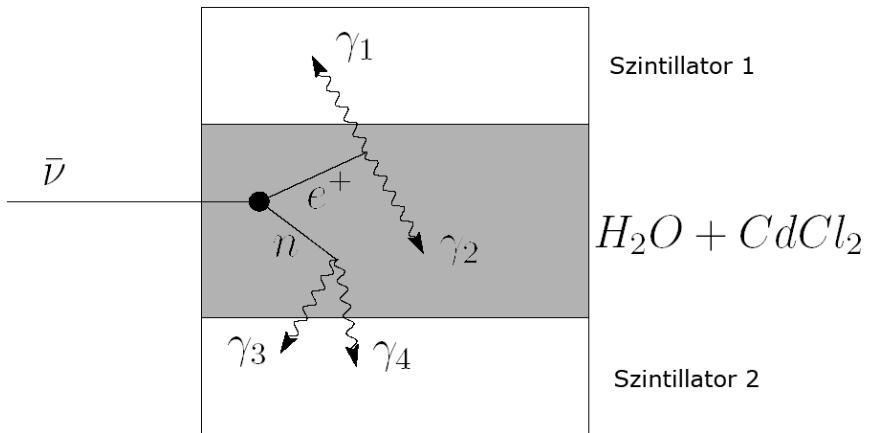
Beim inversen Betazerfall wird ein Proton und ein Antielektronneutrino in ein Neutron und ein Positron umgewandelt. Der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion berechnet sich nach:

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) = \frac{4}{\pi} G_F^2 p_{CM}^2$$

wobei $\Delta J = 0$ und 1 sein kann. Mit $p_\nu = \frac{E_\nu - Q}{c} \approx 1 \text{ MeV}/c$, wobei $Q = 1,8 \text{ MeV}$ die Schwellenenergie ist, erhält man einen Wirkungsquerschnitt von:

$$\sigma = 10^{-42} \text{ cm}^2$$

Der experimentelle Nachweis dieser Reaktion wurde am Savanna River Reaktor bei einem Neutrinostrahl von $10^{13} \frac{\bar{\nu}_e}{s \cdot cm^2}$ erbracht (Reimes und Cowan).



- Die zwei Photonen γ_1, γ_2 stammen aus der Annihilation des Positrons mit einem Elektron und haben jeweils eine Energie von 511 keV
- Die restlichen Photonen stammen aus der Reaktion $n + ^{114}Cd \rightarrow ^{113}Cd + n\gamma$, wobei die Photonen eine Gesamtenergie von 9,1 MeV besitzen.

Als Signal des Einfangs eines Antineutrinos bekommt man also zum einen zeitgleich das Signal der zwei Photonen aus der Paarvernichtung mit diskreter Energie, und zum anderen wenig später ein Schauer von Photonen mit einer Gesamtenergie von 9,1 MeV. Diese eindeutige Signatur lässt eine gute Trennung des Signals von Untergrund zu.

Bestimmung der Raten, zum Beispiel:

1 GW Leistung, 15 m Entfernung: $\phi_\nu = 10^{13} \frac{1}{cm^2 \cdot s}$

1 t Wasser: $6,7 \cdot 10^{29}$ freie Protonen

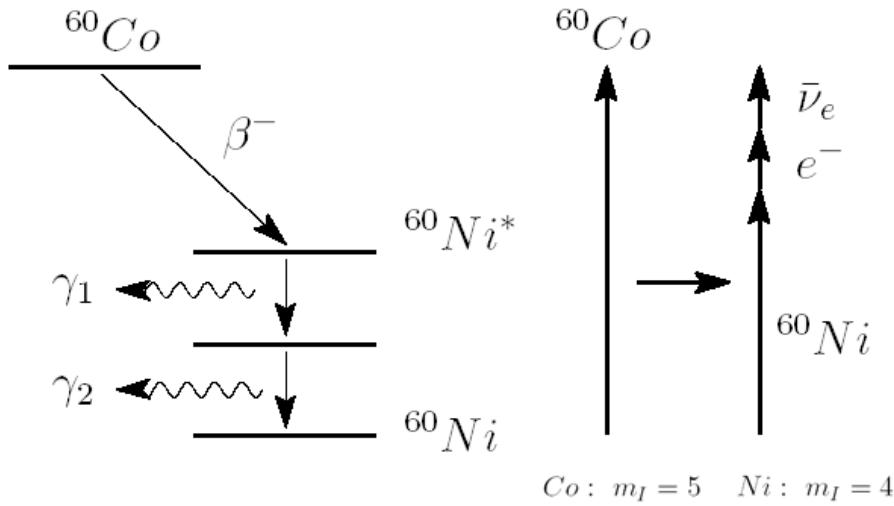
$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{N} &= \sigma \cdot \phi \cdot n_p \\ &= 10^{-43} cm^2 \cdot 10^{13} \frac{1}{cm^2 \cdot s} \cdot 6,7 \cdot 10^{29} \\ &= 0,07 Hz\end{aligned}$$

⇒ Schwache Wechselwirkung ist universell

5.1.3 Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung

Erinnerung: Naturgesetze gehorchen fundamentalen Symmetrien.

Experiment von S. Wu et al. (1956): Studium der β^- -Emission von ^{60}Co



Folglich besitzen das Elektron und das Antineutrino jeweils $m_I = +\frac{1}{2}$

Man erwartet, dass die Richtung der emittierten Elektronen gleichermaßen in bzw. gegen die Ausrichtung des ^{60}Co -Spins erfolgt (Raumspiegelung). Die Beobachtung liefert jedoch, dass die Elektronen bevorzugt gegen die Ausrichtung des ^{60}Co -Spins emittiert werden.

Helizität:

$$H(e^-) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| |\vec{s}|} = -\frac{v}{c} < 0 \text{ (linkshändig)}$$

$$\Rightarrow H(\bar{\nu}_e) = +\frac{v}{c} \approx +1$$

\Rightarrow Es gibt keine linkshändigen $\bar{\nu}_e$!

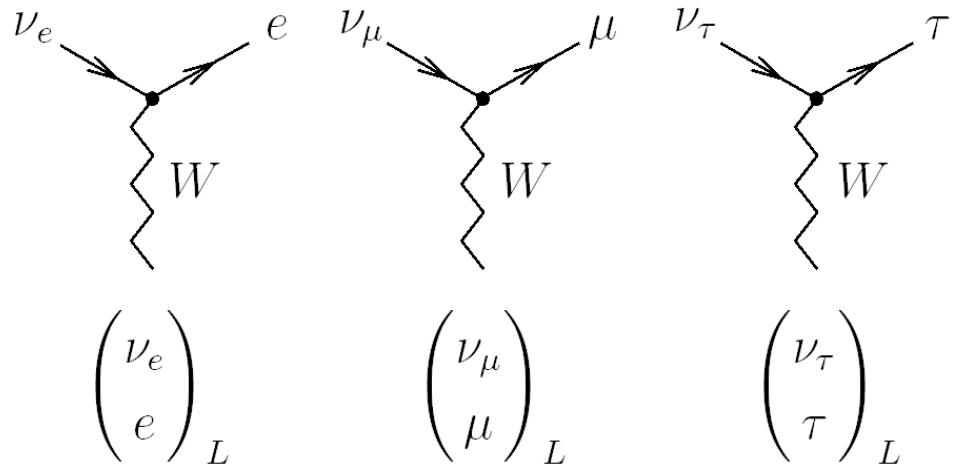
[Bzw. es gibt keine rechtshändigen ν]

Erweiterung: schwache Kopplung erfolgt nur an die linkshändigen Teilchen, beziehungsweise rechtshändigen Antiteilchen.

5.1.4 Schwache Wechselwirkung von Quarks

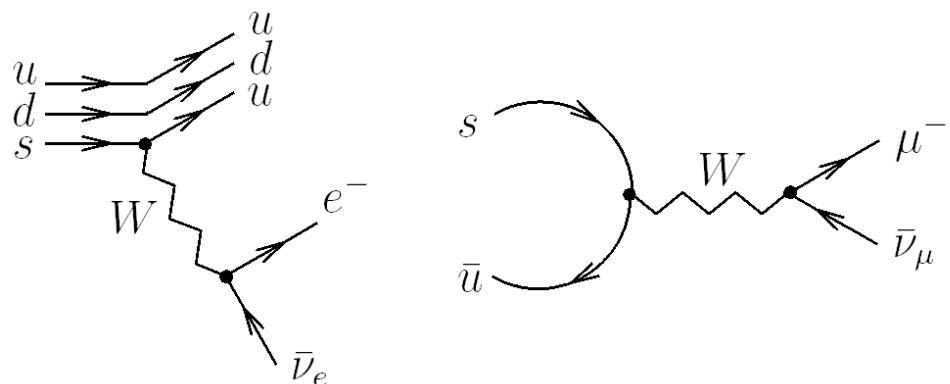
Aus der Untersuchung von nuklearem Betazerfall, Myonzerfall und Neutrinostreuung kommt man zu der Erkenntnis, dass schwache Wechselwirkung durch Austausch eines massiven Bosons mit universeller Kopplung an Lepton- und Quarkgenerationen stattfindet.

1. Lepton-Kopplungen: W-Bosonen koppeln nur an linkshändige Doublets innerhalb einer Generation.



Leptonflavour ändernde Wechselwirkungen werden nicht beobachtet.

2. Quarksektor:



$$\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

$$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

Im Quarksektor ändert der W-Boson Austausch (geladener Strom) zuweilen die Zu-

gehörigkeit zur Flavourfamilie!

Erinnerung: vor 1974 waren bekannt: u, d, s und e, ν_e, μ, ν_μ .

3. Genauer Vergleich der Fermikonstanten G_F aus Neutron- und Myonzerfall liefert:

$$\frac{G_F(n)}{G_F(\mu)} = 0,96$$

Aus Λ^0 -Zerfall:

$$\frac{G_F(\Lambda)}{G_F(\mu)} \approx \frac{1}{20}$$

Vorschlag von N. Cabibbo (1963): Quarks mischen.

Die für die schwache Wechselwirkung relevanten Flavoureigenzustände sind nicht identisch mit den Masseneigenzuständen (Zeitentwicklung)

$$|d'\rangle = \cos \theta_c |d\rangle + \sin \theta_c |s\rangle$$

$$|s'\rangle = \cos \theta_c |s\rangle - \sin \theta_c |d\rangle$$

Schwache Wechselwirkung (W-Boson) koppelt an Dubletts der schwachen Eigenzustände.

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

(Damals nur u, d und s bekannt.)

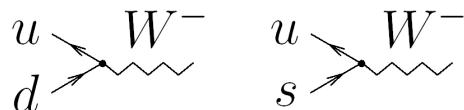
$\theta_c \hat{=} \text{Cabibbo-Winkel (Mischungswinkel)}$

Die down-Typ Quarks haben gedrehte Zustände. Das ist Konvention! (Man könnte auch die up-Typ Quarks drehen. Es kommt nur auf den relativen Winkel an.)

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$$

Die Mischungsmatrix vermittelt also einen Basiswechsel.

Vertizes:



$$\propto \frac{g_W}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \quad \propto \frac{g_W}{\sqrt{2}} \sin \theta_c$$

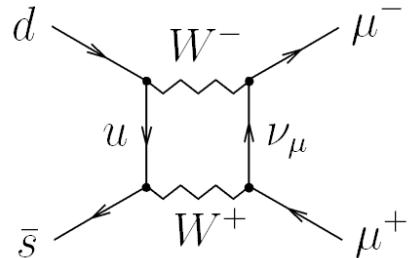
$$\frac{G_F(n)}{G_F(\mu)} = \cos^2 \theta_c \quad \cos \theta_c = 0,98$$

$$\frac{G_F(\Lambda)}{G_F(\mu)} = \sin^2 \theta_c \quad \sin \theta_c = 0,98$$

$$\frac{\Gamma_{K^+ \rightarrow \mu^+ \nu}}{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu}} \propto \tan^2 \theta_c$$

4. GIM-Mechanismus - Das charm-Quark

$$K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \text{ Zerfall}$$



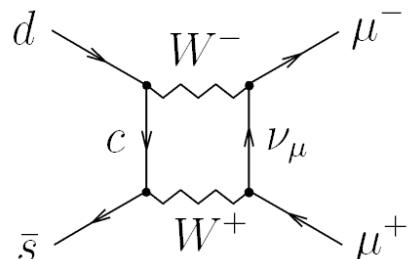
„Box-Diagramm“

$$M \propto \cos \theta_c \cdot \sin \theta_c$$

Beobachtung:

$$\Gamma_{\text{Rechnung}} >> \Gamma_{\text{beobachtet}}$$

Glashow, Iliopolus und Maiani schlagen die Existenz eines vierten Quarks vor, das charm-Quark, mit der Kopplung $-\sin \theta_c$ an d-Quarks und $\cos \theta_c$ an s-Quarks.



$$M \propto -\cos \theta_c \sin \theta_c$$

Im Fall masseloser Quarks würde eine perfekte Aufhebung der Amplituden stattfinden. Da $m_c \gg m_u$, heben sich die Amplituden nicht vollständig auf und $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ findet statt.

Aus $\Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ schlossen GIM bereits Jahre vor Entdeckung des charm-Quarks: $m_c \approx 1...3\text{GeV}/c^2$

5. Quarkmischung in drei Generationen

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{\text{CKM-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix}$$

Cabibbo-Kobayashi-Markawa-Matrix

Die Quarkmischung in drei Generationen lässt sich mit drei Winkeln und einer Phase parametrisieren, denn V ist unitär. (Alle Basiswechselmatrizen sind unitär.)

$$V^+ = V^{-1}$$

Anzahl der Parameter:

- Komplexe $n \times n$ Matrix: $2n^2$ Parameter
- $V^+ V = 1 \Leftrightarrow \sum_k V_{ik} V_{jk}^* = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow n^2 \text{ Bedingungen}$$

- Jedes Quarkfeld kann eine Phase absorbieren. Eine globale Phase ist nicht beobachtbar. Folglich reduzieren sich die Parameter um $2n - 1$.

$$\Rightarrow n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2 \text{ freie Parameter}$$

5.2 Phänomene der starken Wechselwirkung

5.2.1 Farbe, Gluonen, Confinement

Literatur: Povh, Kapitel 8.3

Das Spin-Statistik-Problem (Pauli-Prinzip für Quarks in Baryonen) führte und zu den Farbfreiheitsgraden (siehe Kapitel 3.3.4)

- Die Farbe ist die Ladung der starken Wechselwirkung. Sie kann drei Werte annehmen: rot, grün und blau.
- Antiquarks tragen Antifarben: antirot, antigrün und antiblau.
- Die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung heißen Gluonen
 - Sie koppeln an Farbladung
 - Sie tragen gleichzeitig Farbe und Antifarbe

Gruppentheorie: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$

Diese Oktettzustände sind ein System von Basiszuständen und sind gegeben durch die 8 Gluonen. Diese tragen die Farben (Konvention, andere möglich):

$$r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{b}, g\bar{r}, b\bar{r}, b\bar{g},$$

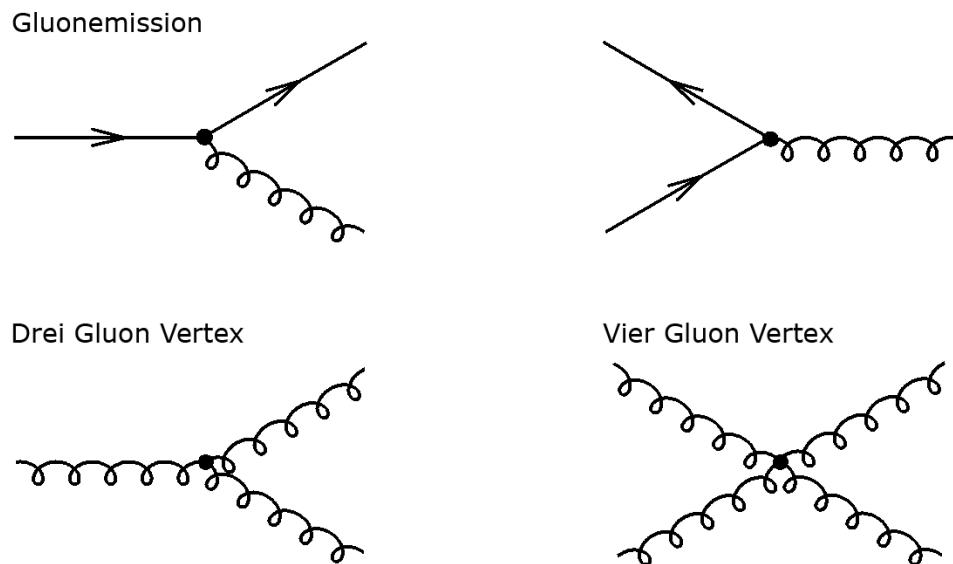
$$\sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \sqrt{\frac{1}{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

Farbsinglett:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

Das Farbsinglett ist invariant gegenüber Umdefinition der Farbnamen, existiert jedoch nicht in der Natur.

- Fundamentale Vertizes der starken Wechselwirkung



Gluonen haben Selbstwechselwirkungen, im Gegensatz zur Elektromagnetischen Wechselwirkung.

- Die Theorie der starken Wechselwirkung heißt Quantenchromodynamik (QCD)
- Hadronen sind farbneutrale Objekte!

Bedingung (bzw. Beobachtung):

In der Natur treten nur farbneutrale Objekte als freie Teilchen auf. Folglich treten Quarks nicht als freie Teilchen auf. Versucht man ein Quark aus einem Hadron zu entfernen, so entstehen neue Quark-Antiquark-Paare, so dass am Ende wieder farbneutrale Hadronen vorliegen.

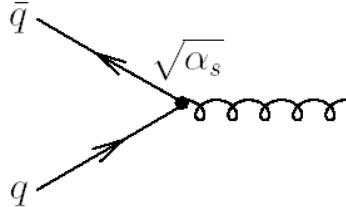
Quarks sind in Hadronen „eingesperrt“

⇒ Confinement

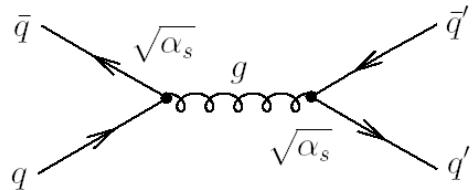
Das QCD-Potential muss mit dem Abstand zwischen farbgeladenen Objekten ansteigen.

5.2.2 Die laufende Kopplungskonstante der QCD

Kopplungskonstante: α_s



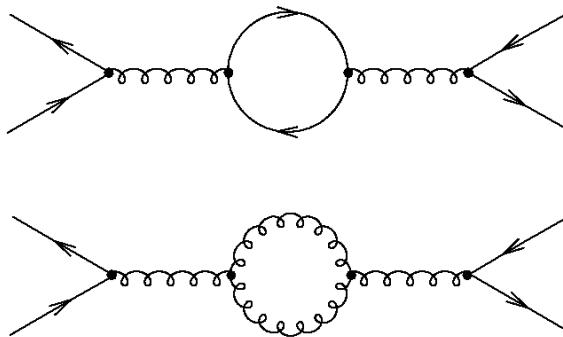
Die Amplitude eines Prozesses ist proportional $(\alpha_s)^{\frac{n}{2}}$, wobei n die Anzahl der Vertizes ist.
Zum Beispiel bei der Reaktion $q\bar{q} \rightarrow g \rightarrow q'\bar{q}'$:



Die Amplitude ist proportional zu α_s . Folglich ist der Wirkungsquerschnitt in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie:

$$\sigma \propto \alpha_s^2$$

Bei Korrekturen höherer Ordnung muss man analog zur QED (Photonaustausch) die Schleifenbildung berücksichtigen, hier also Quarkschleifen und auf Grund der Selbstwechselwirkung der Gluonen auch Gluonschleifen.



Quantenkorrekturen bewirken eine Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante α_s vom Impulsübertrag Q^2 .

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_s(Q^2)$$

Die Quarkschleifen schirmen die Farbladung ab, verhalten sich also analog zur QED. Die Gluonschleifen wirken hingegen verstärkend, wobei dieser Effekt überwiegt.

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

Dabei ist n_f die Anzahl der beteiligten (aktiven) Quarkflavours. Schwere Quarks spielen also erst bei relativ großem Q^2 eine Rolle. Λ wird als Abschneideparameter bezeichnet, unterhalb dessen die Störungsreihe zusammenbricht. Er ist der einzige freie Parameter der QCD und muss experimentell bestimmt werden:

$$\Lambda \approx 250 \text{ MeV}^2$$

1. $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_s \rightarrow 0$. Dieses Verhalten nennt man asymptotische Freiheit. Der Energiebereich wird pertubativer Bereich genannt, das heißt, die Störungsrechnung ist anwendbar. Die Bedingung $\alpha_s << 1$ ist dann erfüllt, wenn $Q^2 >> \Lambda^2$ ist. Im Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ kann man Quarks als freie Teilchen ansehen.
2. $Q^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_s \rightarrow \infty$. Dieses Anwachsen der Kopplungskonstante nennt man Confinement. Die Störungstheorie bricht zusammen, daher bezeichnet man dies auch als nicht pertubativer Bereich.

5.2.3 Die OZI-Regel

Die OZI-Regel (Okuba-Zweig-Iizuka-Regel) ist die Folge der asymptotischen Freiheit der QCD.

Wir betrachten die Zerfle des Φ -Mesons:

$$\Phi = s\bar{s} \quad M = 1020 \text{ MeV}/c^2 \quad J^{PC} = 1^{--}$$

$$\begin{aligned} BR(\Phi \rightarrow K^+ K^-) &= 49,1 \pm 0,6 \% \\ BR(\Phi \rightarrow K_l^0 K_s^0) &= 34,1 \pm 0,5 \% \\ BR(\Phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) &= 15,6 \pm 1,2 \% \end{aligned}$$

Die Verzweigungsverhältnisse sind zunächst (naiv) unerwartet, denn im 3π -Modus ist der Phasenraum größer. Der verfügbare Phasenraum hängt mit der Massendifferenz zwischen Mutter- und Tochterteilchen zusammen.

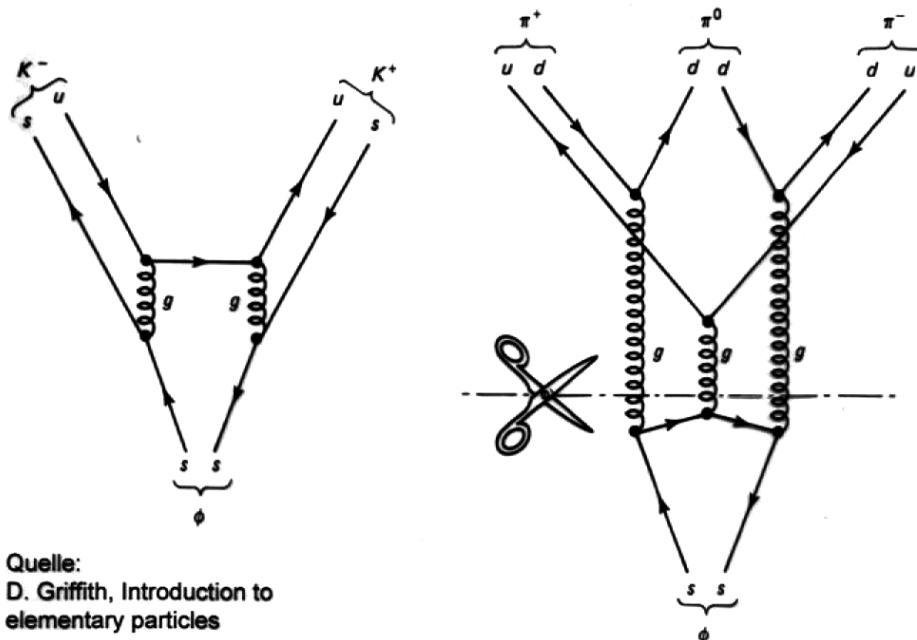
$$\Delta m(\Phi \rightarrow 3\pi) = (1020 - 415) \text{ MeV}/c^2 = 605 \text{ MeV}/c^2$$

$$\Delta m(\Phi \rightarrow 2K) = (1020 - 990) \text{ MeV}/c^2 = 30 \text{ MeV}/c^2$$

Warum ist der Zerfallsmodus in 3π trotz größerem Phasenraumvolumens unterdrückt?

Zerfälle über die starke Wechselwirkung, in denen der Endzustand nur durch Quark-Antiquark-Annihilation in Gluonen erreicht werden kann, sind unterdrückt.

* manchmal auch nur Zweig-Regel genannt



Nach der OZI-Regel ist der Zerfall $\Phi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ gegenüber $\Phi \rightarrow K^+K^-$ und $\Phi \rightarrow K_s K_L$ unterdrückt.

Die OZI-Regel ist zunächst nur eine phänomenologische Regel, aber keine auf grundlegenden Prinzipien beruhende Erklärung.

Erklärung der OZI-Regel durch die QCD:

1. Mesonen sind wie alle Hadronen Farbsingletts. Da Gluonen sowohl Farbe als auch Antifarbe tragen, müssen Anfangs- und Endzustand durch mehrere Gluonen verbunden werden, denn auch der Zwischenzustand muss farbneutral sein. Es kommen also zwei oder drei Gluon Zwischenzustände in Frage.
2. Der Gluonzwischenzustand muss auch alle anderen Quantenzahlen der QCD erhalten, darunter auch die Ladungskonjugation C.

Das Gluon hat die C-Parität -1.

$$\begin{aligned}\Rightarrow gg &: C = +1 \\ ggg &: C = -1\end{aligned}$$

Das Vektormeson ϕ hat $C = -1$. Folglich ist der Austausch von drei Gluonen notwendig. Die Zerfallsamplitude ist dann proportional zu α_s^3 .

3. Das ϕ ist schwer: $M = 1020 \text{ MeV}/c^2$

$$\Rightarrow M > \Lambda_{QCD}$$

Die Gluonen müssen die Gesamte Energie auf den Endzustand übertragen

$$Q^2 >> \Lambda_{QCD}$$

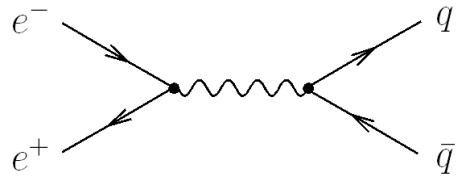
Der ϕ -Zerfall findet also im perturbativen Bereich der asymptotischen Freiheit statt. Folglich ist α_s klein.

\Rightarrow Zerfallsamplitude ist unterdrückt.

4. Bei $\phi \rightarrow 2K$ werden zwei niederenergetische Gluonen ausgetauscht. Folglich ist α_s groß. Auch die Zerfallsamplitude ist relativ groß.

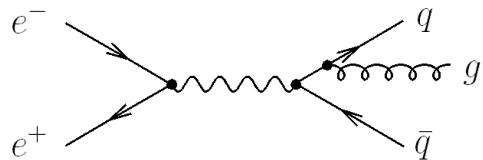
5.2.4 Existenz des Gluons

$$e^+ e^- \rightarrow q\bar{q}$$



Quarks manifestieren sich im Detektor als kollimierte Bündel von Hadronen, den sogenannten Jets. Die Produktion eines Quark-Antiquark-Paars führt zu zwei Jets. Diese sind auf Grund der Impulserhaltung kollinear (back to back)

In Prozessen höherer Ordnung kann ein energiereiches, hartes Gluon unter großem Winkel emittiert werden.



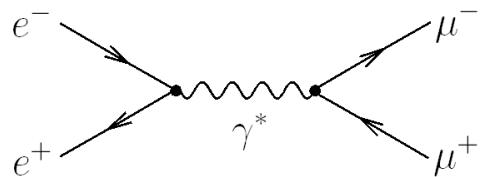
Dieses Gluon produziert einen extra Jet. Man beobachtet ein 3-Jet Ereignis.

$$\alpha_s = \frac{N(3 \text{ Jets})}{N(2 \text{ Jets})} \approx 0,1$$

Messungen bei unterschiedlichen Schwerpunktsenergien sind Messungen des Laufens der Kopplungskonstante.

5.2.5 Hadronproduktion in Elektron-Positron-Vernichtung

Betrachte zunächst die Erzeugung von Myonpaaren:



Falls $Q^2 \ll M(Z^0)$ ist nur der Photonaustausch relevant. Andernfalls muss auch Z^0 -Austausch beziehungsweise $\gamma * / Z^0$ -Interferenz berücksichtigt werden.

Differentieller Wirkungsquerschnitt:

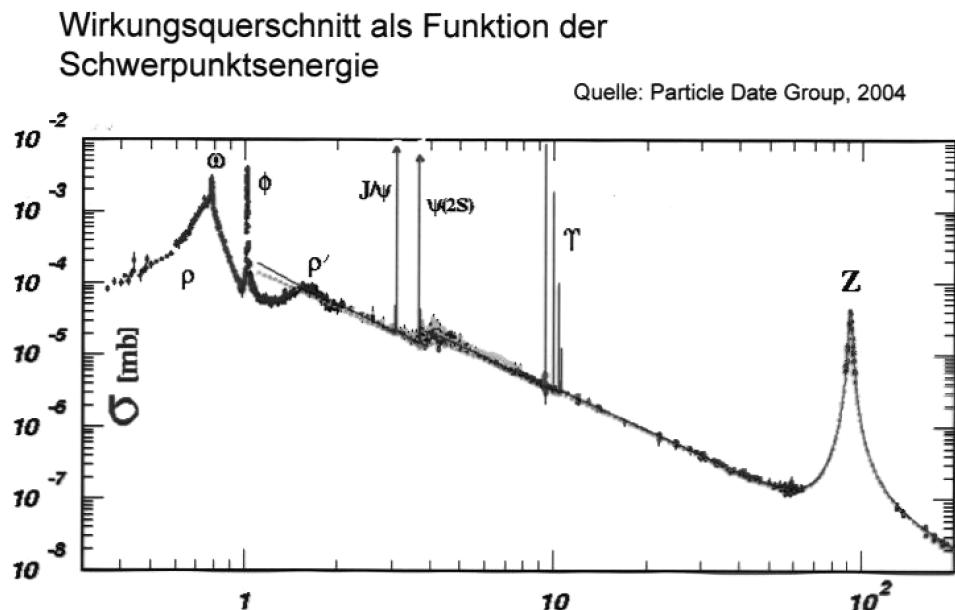
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4S} (\hbar c)^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} (\hbar c)^2$$

Wichtig ist der Abfall mit dem Quadrat der Schwerpunktsenergie. Die Winkelabhängigkeit $(1 + \cos^2 \theta)$ ist typisch für die Erzeugung von zwei Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

Wirkungsquerschnitt für Hadronen:



Resonanzeffekte: Quark-Antiquark-Resonanzen

$$\Phi = s\bar{s}, \Psi = c\bar{c}, \Upsilon = b\bar{b}$$

Resonanzproduktion dieser Zustände bei $E_{\text{CMS}} = M_R$

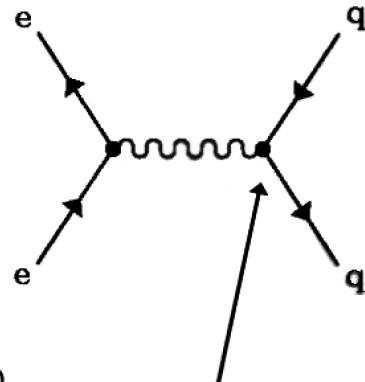
Typischerweise unterhalb der Schwelle für offene Quark-Antiquark-Produktion.

Bei höheren Energien $E_{\text{CMS}} \approx 50$ GeV wird der Prozess $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow \text{Hadronen}$ immer wichtiger. Über der Z^0 -Schwelle werden reelle Z^0 Bosonen erzeugt.

Das R-Verhältnis:

Messung des R-Verhältnisses in e^+e^- Annihilation

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$



$$R(E) = N_{\text{Farbe}} \cdot \sum_{i=u,d,s,c,b,t} Q_i^2$$

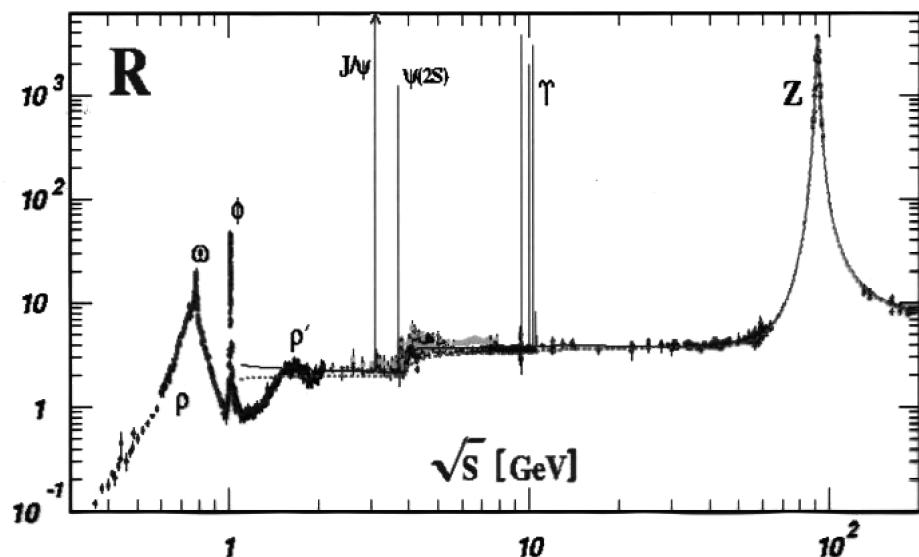
mit $E > 2m_i$

Summe geht über
aktive Quark-
Flavor

Photon koppelt an
elektrische Ladung der
Quarks

Quarks bilden Jets
von Teilchen im
Detektor.

Jets werden
inklusiv in einem
Kalorimeter
gemessen.



Aktive Flavor	u,d,s	u,d,s,c	u,d,s,c,b	u,d,s,c,b,t
R Vorhersage	2	3.33	3.66	5

Experimenteller Befund: $N_{\text{Farbe}} = 3$

Kleinere Abweichungen sind durch Resonanzen oder nicht perturbative Effekte bedingt.

Wichtig ist, dass die Hypothese von 3 Farben bestätigt wird.

David Griffiths:

... the importance of [the R(E) graph] lies not in what the small discrepancies whisper, but in what the overall agreement shouts: the factor of 3 [...] clearly belongs there.

5.3 Elektroschwache Vereinigung

5.3.1 Grundbegriffe in Feldtheorien

- Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik. Lagrangefunktion

$$L = T - U$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Teilchen sind lokalisierte Objekte. Die Bewegungsgleichungen beschreiben eine Trajektorie $\vec{r}(t)$

- Quantenfeldtheorie

Teilchen werden durch Felder beschrieben:

$$\phi(x, y, z, t)$$

Sie erstrecken sich über eine Raumregion beziehungsweise den ganzen Raum.

Die Lagrangefunktion wird zu einer Lagrangedichte \mathcal{L} und ist eine Funktion der Felder ϕ_i und ihrer Ableitungen:

$$\partial_\mu \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \quad x^\mu = (ct, x, y, z)$$

x^μ ist dabei der Raum-Zeit-Vierervektor. Die verallgemeinerten Euler-Lagrangegleichungen sind gegeben durch:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Die Dimension der Lagrangedichte \mathcal{L} ist Energie pro Einheitsvolumen.

- Typen von Feldern:

Skalare-Felder ϕ

Spinor-Felder ψ

Vektor-Felder a^μ

Dirac-Spinoren ψ

Was sind Spinore?

Spinore sind Wellenfunktionen mit zwei Komponenten zur Beschreibung von Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

Zwei Spinzustände:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Zustand:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Spin wird mit Pauli-Matrizen beschrieben:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von σ_x :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \text{ und } b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)$$

- Dirac-Spinore:

Dirac-Spinore sind vierkomponentige Vektoren zur Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

- γ -Matrizen: 4×4 -Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sind σ^i die bekannten Paulimatrizen.

5.3.2 Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

$\bar{\psi}$ = adjungierter Spinor

ψ und $\bar{\psi}$ werden als unabhängige Variablen betrachtet. Eigentlich hat ψ acht Felder, da ψ ein komplexer Spinor ist. Deshalb nimmt man die Komponenten von ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variablen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\psi$$

Mit der Euler-Lagrangegleichung folgt daraus die **Dirac-Gleichung**. Sie beschreibt ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit der Masse m :

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{mc^2}{\hbar c}\psi = 0$$

5.3.3 Lokale Eichinvarianz

Die Dirac-Lagrangedichte ist invariant unter globalen Phasenraumtransformationen (Eichtransformationen).

$$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$$

Denn $\bar{\psi}$ transformiert sich gemäß $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\theta}\bar{\psi}$. Deshalb heben sich in $\bar{\psi}\psi$ die Phasen heraus.

Lokale Eichtransformationen:

$$\theta = \theta(x^\mu)$$

Die Phasenänderung ist also eine Funktion des Ort-Zeit-Vektors x^μ . Ist \mathcal{L} invariant unter lokalen Eichtransformationen?

Berechne:

$$\begin{aligned}\partial_\mu (\mathrm{e}^{i\theta(x)} \psi) &= i (\partial_\mu \theta(x^\mu)) \mathrm{e}^{i\theta} \psi + \mathrm{e}^{i\theta} \psi + \mathrm{e}^{i\theta} \partial_\mu \psi \\ (\mathcal{L} &= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi) \\ \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} - \hbar c (\partial_\mu \theta) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi\end{aligned}$$

Man erhält eine Zusatzterm in der Lagrangedichte. Für die weitere Diskussion nehmen wir eine Variablentransformation vor:

$$\lambda(x) = -\frac{\hbar c}{q} \theta(x)$$

Dabei ist q die Ladung des Teilchens. Daraus folgt:

$$\psi \rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{i q \lambda(x)}{\hbar c}} \psi$$

Neues, grundlegendes Prinzip einer Quanten-Feld-Theorie (QFT):

Fordere, dass die vollständige Lagrangedichte der Theorie invariant unter lokalen Eichtransformationen ist!

Folglich muss die freie Lagrangedichte so ergänzt werden, dass die lokale Eichinvarianz gilt. Wir fügen ein Vektorfeld (Eichfeld) A_μ hinzu, mit $A_\mu + \partial_\mu \lambda$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \\ \partial_\mu \left(\mathrm{e}^{-\frac{i q \lambda}{\hbar c}} \psi \right) &= -i \frac{q}{\hbar c} (\partial_\mu \lambda) \mathrm{e}^{-\frac{i q \lambda}{\hbar c}} \psi + \mathrm{e}^{-\frac{i q \lambda}{\hbar c}} \partial_\mu \psi \\ \Rightarrow \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + q (\partial_\mu \lambda) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \lambda = \mathcal{L}\end{aligned}$$

\mathcal{L} ist somit invariant.

Die volle Lagrangedichte muss auch den freien Term des Eichfeldes enthalten!

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_A c}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\end{aligned}$$

$F^{\mu\nu}$ ist lokal eichinvariant, $A^\nu A_\mu$ hingegen nicht! Folglich muss das Eichfeld A_μ masselos sein:

$$m_A = 0$$

Vollständige Dirac-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

Für eine mathematisch elegante Formulierung der Forderung nach lokaler Eichinvarianz ersetzen wir die Ableitung ∂_μ durch die kovariante Ableitung:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu$$

denn

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow e^{-\frac{i q \lambda}{\hbar c}} \mathcal{D}_\mu \psi$$

und somit ergibt sich die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Die QED ist der Prototyp einer Quantenfeldtheorie!

5.3.4 Schwache Wechselwirkung

Die Ladung der schwachen Wechselwirkung ist der schwache Isospin T. Die fundamentalen Teilchen sind in Dubletts und Singletts angeordnet.

						T	T_3
$(\nu_e)_L$	$(\nu_\mu)_L$	$(\nu_\tau)_L$	$(u)_L$	$(c)_L$	$(t)_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_R	μ_R	τ_R	u_R	c_R	t_R	0	0
			d_R	s_R	b_R	0	0

Die zugehörige Symmetriegruppe ist die $SU(2)$.

Ein Dublett von Dirac-Spinoren muss transformiert werden. In der QED: Eichtransformation aus $U(1)$.

Betrachtet man

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \psi \rightarrow U\psi$$

mit einer unitären 2×2 Matrix ($U^\dagger U = \mathbb{1}$)

$$U = e^{iH}$$

wobei H hermite'sch ist:

$$H = \theta \cdot \mathbb{1} + \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \tau_i \text{ die Pauli-Matrizen sind.}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$U = e^{i\theta} \cdot e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}$$

Verlangt man nun lokale Eichinvarianz der freien Dirac-Lagrangedichte unter $SU(2)$ Phasentransformationen, so brauchen wir neue Eichfelder.

Kovariante Ableitung:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_\alpha}{2} W_\mu^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$$

Man führt drei Eichfelder mit folgender Transformationsregel ein:

$$W_\mu \rightarrow W_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu$$

5.3.5 Das Glashow-Weinberg-Salam-Modell

Eichgruppe: $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Y = Hyperladung

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}$$

$$\chi_L \rightarrow e^{i\vec{\alpha}(x)\vec{T} + i\beta(x)Y} \chi_L$$

Zum Beispiel: $\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ mit $T = \frac{1}{2}$ und $Y = -1$

$$\psi_R \rightarrow e^{i\beta(x)Y} \psi_R$$

Zum Beispiel: $\psi_R = e_R$

Kovariante Ableitung:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\vec{W}_\mu \cdot \vec{T} + ig'\frac{1}{2}B_\mu Y$$

Das führt uns auf 4 Eichfelder.

Die Lagrangedichte ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{\chi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g\frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - g'(-\frac{1}{2})B_\mu \right] \chi_L \\ &+ \bar{\psi}_R \gamma^\mu [i\partial_\mu - g'(-1)B_\mu] \psi_R \\ &- \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\end{aligned}$$

Problem: Die 3 W_μ Felder und B_μ sind masselos, aber die schwache Wechselwirkung braucht massive Felder. Die Massenterme der Form $W^\mu W_\mu$ können jedoch nicht von Hand hinzugefügt werden, da dies zur Verletzung der lokalen Eichinvarianz führen würde.

Lösung: Spontane Symmetriebrechung und Higgsmechanismus

5.3.6 Spontane Symmetriebrechung

Massenterm:

Beispiel einer Lagrangedichte eines skalaren Feldes ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + e^{-(\alpha\phi)^2}$$

Der Massenterm ist ein Term zweiter Ordnung in ϕ , was zunächst nicht offensichtlich ist. Wir entwickeln nun den Potentialterm $e^{-(\alpha\phi)^2}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + 1 \underbrace{- (\alpha\phi)^2}_{\text{Massenterm}} + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \dots$$

Die Lagrangedichte beschreibt Teilchen mit Masse

$$m = \sqrt{2}\alpha \frac{\hbar}{c}$$

Die Terme höherer Ordnung repräsentieren Selbstkopplungen.

Vakuumzustand (Grundzustand des Feldes)

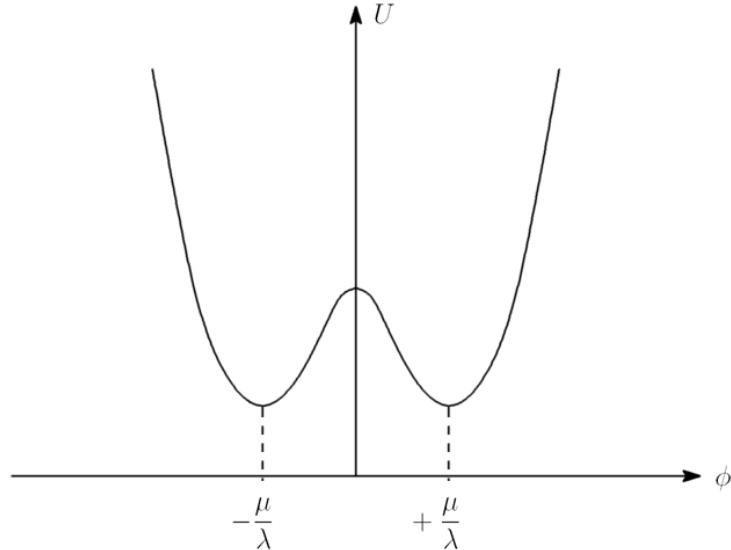
Betrachte dazu:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4$$

Auf Grund des positiven Vorzeichens vor dem Massenterm wären die Massen jedoch imaginär. In der Störungstheorie entwickelt man die Felder um den Grundzustand. Zerlege dazu die Lagrangedichte in einen kinetischen Teil τ und das Potential U .

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \tau - U \\ U(\phi) &= -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi + \lambda^2 \phi^3 = 0 \\ \Rightarrow \phi_0 &= 0 \quad \phi_{1,2} = \pm \frac{\mu}{\lambda} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= -\mu^2 + 3\lambda^2 \phi^2\end{aligned}$$

ϕ_0 ist also ein Maximum falls $\mu^2 > 0$. Folglich sind die Minima ϕ_1 und ϕ_2 . Dieses Potential nennt man auch auch „mexican hat potential“.



Um Störungstheorie zu betreiben, müssen wir um die Minima entwickeln. Dies führt zu einer Umdefinition des Feldes

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda}$$

Dies führt zur Lagrangedichte als Funktion von η

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

Dies liefert uns dann einen Massenterm mit korrektem Vorzeichen:

$$m = \sqrt{2} \mu \frac{\hbar}{c}$$

Die Wechselwirkungsterme, die proportional zu η^3 und η^4 sind, repräsentieren Vertizes mit 3 bzw. 4 „Teilnehmern“.

Spontane Symmetriebrechung:

Die Lagrangedichte ist invariant unter der Transformation $\phi \rightarrow -\phi$ (Symmetrie bezogen auf den Ursprung). Die Lagrangedichte um das Vakuum entwickelt, ist jedoch **nicht** mehr symmetrisch. Die Symmetrie ist gebrochen.

Der Vakuumzustand des Feldes hat nicht die gleiche Symmetrie wie die Lagrangedichte.

Dies führt zur spontanen Symmetriebrechung. Das heißt, die Symmetrie ist nicht durch ein externes Feld gebrochen, wie zum Beispiel ein \vec{B} -Feld beim H-Atom zu einer Aufspaltung der Energieniveaus führt.

5.3.7 Spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie

In Kapitel 5.3.6 hatte die betrachtete Lagrangedichte die diskrete Symmetrie

$$\phi \rightarrow -\phi$$

Nun haben wir eine Lagrangedichte mit zwei Feldern:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

Diese ist invariant unter Rotationen im (ϕ_1, ϕ_2) -Raum. Das Potential ist gegeben durch:

$$-\frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

Die Minima liegen auf einem Kreis:

$$\phi_{1,min}^2 + \phi_{2,min}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

Ein umdefinieren der Felder

$$\eta \equiv \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda} \quad \xi = \phi_2$$

liefert:

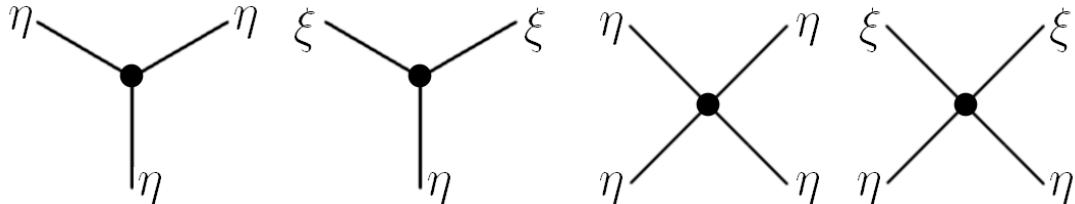
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) - \mu^2 \eta^2 + \mu \lambda (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) + \frac{\mu^2}{4\lambda^2}$$

Das η -Feld hat die Masse $m_\eta = \sqrt{2}\mu_c \hbar$, wohingegen das ξ -Feld masselos ist.

Goldstone-Theorem

Die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie bewirkt immer das Auftreten mindestens eines masselosen, skalaren (Spin 0) Feldes (Teilchen). Diese masselosen Skalare heißen Goldstone-Bosonen.

Kopplungen:



5.3.8 Der Higgs-Mechanismus

Der Higgs-Mechanismus besteht im Wesentlichen aus der lokalen Eichinvarianz der elektroschwachen Lagrangedichte und der spontanen Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie durch Vakuumzustände eines skalaren Feldes.

Wahl der Higgs-Felder:

Vier reelle Felder werden in einem Dublett des schwachen Isospins arrangiert.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 + i\phi_4)$$

Das Higgs-Potential ist gegeben durch

$$U(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

mit $\mu^2 < 0$ und $\lambda > 0$.

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)$$

Aus $\vec{\nabla} U = 0$ folgt im Minimum:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Wahl eines bestimmten Minimums, zum Beispiel:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \quad \phi_4^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv V^2$$

$V^2 = vev$: vacuum expectation value

Entwicklung von ϕ :

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ V + h(x) \end{pmatrix}$$

Die Eichinvarianz fordert einen Wechselwirkungsterm der Higgs- und Eichfelder:

$$\left| \left(i\partial_\mu - g\vec{T} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2 - U(\phi)$$

Einsetzen der Entwicklung von ϕ :

$$\begin{aligned} \left| \left(-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{W}_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2 &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} (gW_\mu^1 - iW_\mu^3)v \\ -vgW_\mu^3 + vg'B_\mu \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{8}v^2g^2 \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right] + \frac{1}{8}v^2 (g'B_\mu - gW_\mu^3)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}vg \right)^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8}v^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2)$

$$M_W = \frac{1}{2}vg$$

Photon und Z^0 -Boson sind Linearkombinationen von W_μ^3 und B_μ :

$$A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \text{ mit } M_A = 0$$

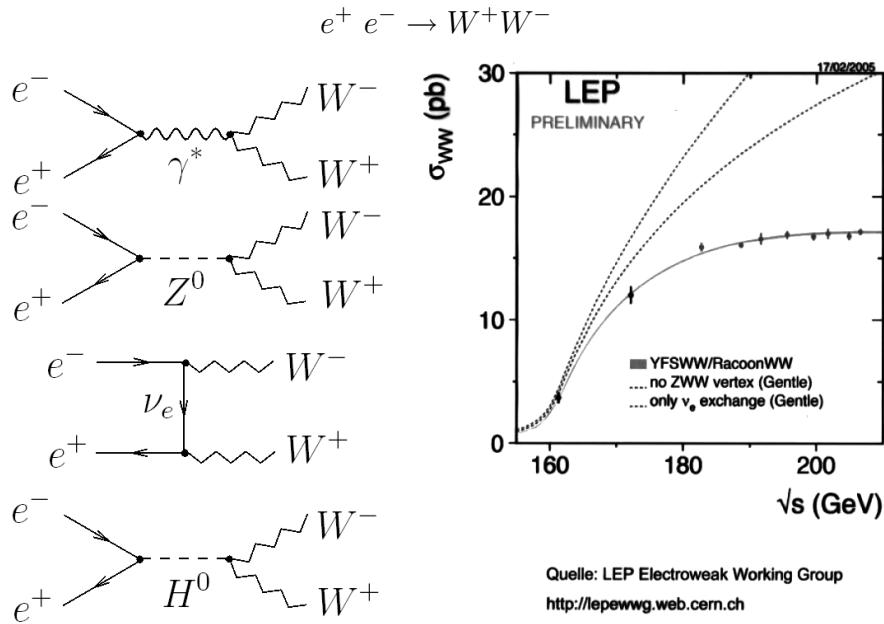
$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \text{ mit } M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}$$

Andere Formulierung:

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$$

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Dabei ist θ_W der Weinberg Winkel genannte elektroschwache Mischungswinkel.



Der Prozess über den Higgs-Austausch regularisiert den Wirkungsquerschnitt bei hohen Energien ($\sqrt{s} \rightarrow 1 \text{ TeV}$).

Die Elektroschwache Vereinigung wird sehr gut bestätigt!

5.4 Entdeckungen der modernen Teilchenphysik

5.4.1 Entdeckung des top-Quarks

Erste Hinweise:

- 1975: Nachweis des τ -Leptons in e^+e^- -Kollisionen (Perl, Mark I)
- 1977: Entdeckung des $\Upsilon(1s) = |b\bar{b}\rangle$ in Proton-Kernstößen

Situation:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} & b \\ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} & \tau \end{array}$$

Frage: Iso-Singletts oder Dubletts?

DESY, 1984: Messung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$ (Jade)

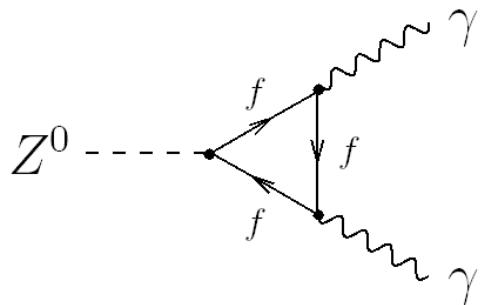
$$A_{FB} = (-22,8 \pm 6,5)\%$$

SM-Dublett: $A_{FB} = -25,2\%$

Singlett: $A_{FB} = 0$

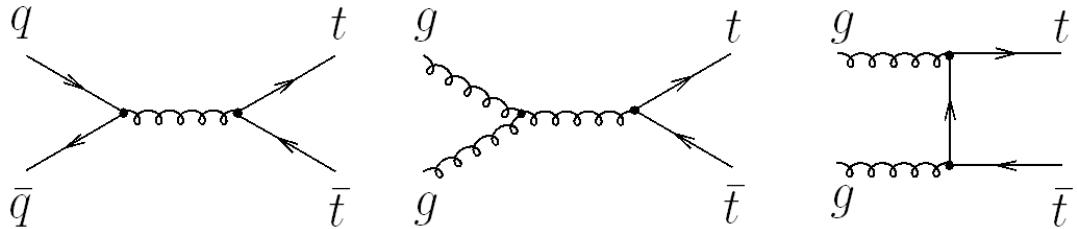
Daraufhin begann die Suche nach dem Isospin-Partner des b-Quark.

Ein weiteres Argument für die vollständige 3. Generation waren Dreiecksdiagramme:



Die Existenz dieser Dreiecksdiagramme würde zu einer Divergenz des Wirkungsquerschnitts führen. Dies wird nur dann vermieden, wenn die 3. Lepton- und Quarkgeneration vollständig sind.

Top-Quark-Produktion:



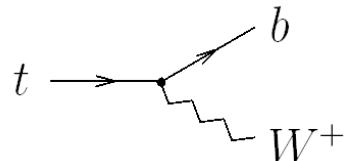
Am Tevatron ($\sqrt{s} = 1,8 \text{ TeV}$ bzw. $1,96 \text{ TeV}$ im Run II):

$$q\bar{q} \rightarrow t\bar{t} \quad 85\%$$

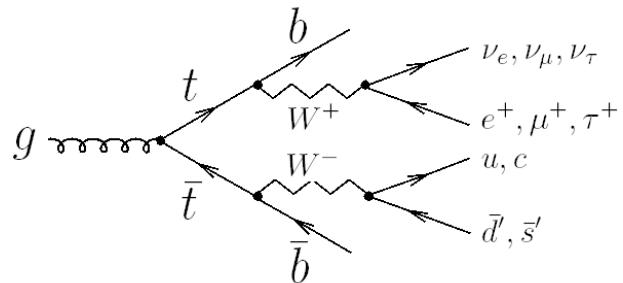
$$g\bar{g} \rightarrow t\bar{t} \quad 15\%$$

Am LHC wird es umgekehrt sein!

Zerfall des top-Quark:



Klassifikation von $t\bar{t}$ -Ereignissen:



Natürlich können auch beliebige Kombinationen der leptonischen und hadronischen Zerfälle der W -Bosonen auftreten. Das Verzweigungsverhältnis lässt sich durch zählen der Zerfallsmoden ermitteln:

3 leptonische Moden und 2 hadronische Moden \times 3 Farben macht 9 Moden:

$$BR(W \rightarrow l\nu_l) = \frac{1}{9}$$

$$BR(W \rightarrow \text{Quarks}) = \frac{6}{9}$$

- Rein hadronischer Modus

W^+ und W^- zerfallen in Hadronen

$$BR\left(\left(\frac{6}{9}\right)^2 = \frac{36}{81}\right) \approx 44\%$$

- Rein leptonischer Modus

nur $e\nu_e$ oder $\mu\nu_\mu$, da experimentell „einfach“ nachzuweisen:

$$e\nu_e + e\nu_e : \quad \frac{1}{81}$$

$$e\nu_e + \mu\nu_\mu : \quad \frac{2}{81}$$

$$\mu\nu_\mu + \mu\nu_\mu : \quad \frac{1}{81}$$

$$BR \approx 5\%$$

- Lepton + Jets-Modus

Zerfall eines W in $e\nu_e/\mu\nu_\mu$ und des anderen in $q\bar{q}$

$$BR = \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot 2 = \frac{24}{81} \approx 30\%$$

Die anderen $t\bar{t}$ -Moden enthalten τ -Leptonen und sind deshalb nur schwer nachweisbar.

5.4.2 Neutrinooszillationen

Neutrinos besitzen eine von Null verschiedene Ruhemasse. Des Weiteren sind die Massen Neutrinos entartet, also verschieden. Die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung

$$|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$$

sind nicht gleichzeitig Eigenzustände des Massenoperators:

$$|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$$

Die führt zur Neutrinomischung:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}$$

Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix

Diese Mischungsmatrix ist vergleichbar mit der CKM-Matrix im Quarksektor.

Die Neutrinos können sich also ineinander umwandeln, d.h. mischen.

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle$$

Auf Grund der Mischung kommt es für Zeiten $t > 0$ zu einer Linearkombination verschiedener Flavours:

$$|\nu(t)\rangle = \alpha(t) \cdot |\nu_1\rangle + \beta(t) \cdot |\nu_2\rangle + \gamma(t) \cdot |\nu_3\rangle$$

Zur Vereinfachung der Diskussion betrachten wir eine Zweizustandsmischung:

$$|\nu_e(t)\rangle = U_{e1} \cdot e^{-iE_{\nu_1}\frac{t}{\hbar}} |\nu_1\rangle + U_{e2} \cdot e^{-iE_{\nu_2}\frac{t}{\hbar}} |\nu_2\rangle$$

Dieser Fall kommt in der Natur zum Beispiel bei solaren Neutrinos vor.

Für relativistische Neutrinos erhalten wir mit der Näherung $pc \gg m_{\nu_i}c^2$ für die Energie:

$$E_{\nu_i} = \sqrt{p^2c^2 + m_{\nu_i}^2c^4} \approx pc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_{\nu_i}^2c^4}{p^2c^2} \right)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ν_e zur Zeit t zu messen ergibt sich dann zu:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = \langle \nu_e(t) | \nu_e \rangle = |U_{e1}|^2 + |U_{e2}|^2 + 2 |U_{e1}| |U_{e2}| \cdot \cos \left(\frac{1}{2} \frac{E_{\nu_1} - E_{\nu_2}}{\hbar} \cdot t \right)$$

Wenn man diese Oszillation misst, erhält man eine Aussage über

$$\Delta m^2 = m_{\nu_1}^2 - m_{\nu_2}^2$$

Die dazu benötigte Zeit t erhält man aus der Flugstrecke:

$$l = t \cdot c$$

Die Mischung lässt sich auch durch einen Mischungswinkel parametrisieren:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Umwandlung von $\alpha \rightarrow \beta$, wobei $\alpha \neq \beta$, ist dann gegeben durch:

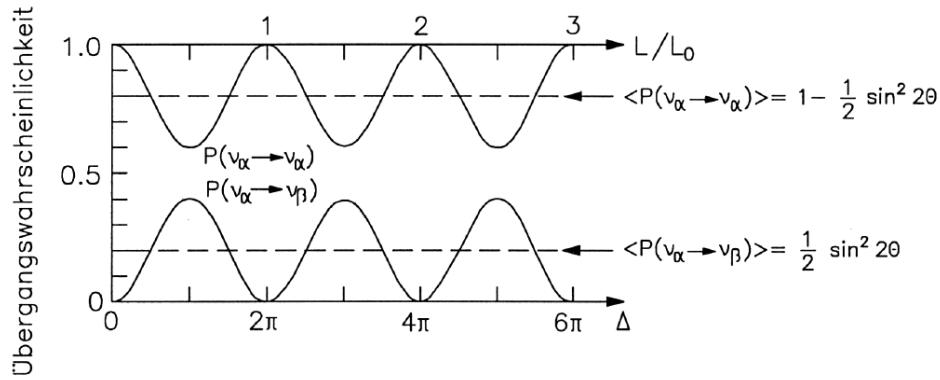
$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2(2\theta) \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 l}{4E} \right)$$

In konkreten Einheiten lässt sich dies schreiben als:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2(2\theta) \cdot \sin^2 \left(1,267 \cdot \frac{\Delta m^2 [ev^2] \cdot \ell [km]}{E [keV]} \right)$$

Anschaulich ist dieses Verhalten in der folgenden Abbildung zu sehen. L_0 bezeichnet dabei die Oszillationslänge:

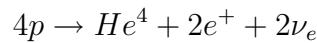
$$L_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$$



Neutrinoquellen:

1. Sonne

In der Sonne entstehen Neutrinos durch Fusionsreaktionen. Die Gesamtreaktion ist gegeben durch:



Es gibt verschiedene Fusions-Zyklen mit schwachen Prozessen. Mehr dazu in Kapitel 6.

2. Höhenstrahlung

Die Neutrinos entstehen durch Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit der Atmosphäre. Dabei werden zum Beispiel Pionen erzeugt, die dann zerfallen:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$$

Das Verhältnis der Raten der einzelnen Flavours ist

$$\frac{N(\nu_e)}{N(\nu_\mu)} \approx \frac{1}{2}$$

Die Energien bewegen sich in dem Bereich $0,5 - 50 \text{ GeV}$ und die Flugstrecken betragen bis zu 12000 km. Mit diesen Parametern ist man besonders auf kleine Δm^2 sensativ.

3. Reaktorneutrinos

Spaltprozesse erzeugen Neutronen, die dann Zerfallen:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

Die Neutrinos haben eine Energie von ungefähr 4 MeV

4. Teilchenbeschleuniger

Ein auf ein Target gerichteter Protonenstrahl erzeugt Pionen, die dann zerfallen, wobei Neutrinos entstehen. Mittels Ladungsseparation kann man nun ν_μ oder $\bar{\nu}_\mu$ -Strahlen erzeugen. Es sind dabei Energien bis 100 GeV möglich.

5. Natürliche Radioaktivität

Bei natürlichen Zerfällen im Erdinneren entstehen ebenfalls Neutrinos. Dies führt zu einem neuen Froschungsfeld: Dem Scan des Erdinnerens.

6. Kosmische Beschleuniger

Zum Beispiel Supernovae

7. Kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung

Diese Neutrinos sind kurz nach dem Urknall aus dem thermodynamischen Gleichgewicht ausgefroren.

$$T \approx 1,9 \text{ K} \quad n_\nu \approx 330 \text{ cm}^{-3}$$

Als wichtige Experimente zum Thema Neutrinos sind zu nennen:

Homestake: Homestake war das erste Sonnenneutrinoexperiment. Es konnte mittels eines radiochemischen Verfahrens Neutrinos ab einer Energie von 814 keV nachweisen. In diesem Experiment wurden weniger solare Elektroneneutrinos nachgewiesen als nach dem Standardsonnenmodell erwartet wurden. Somit gilt Homestake als Anfang des Sonnenneutrinoproblems

Kamiokande: Ursprünglich wurde dieses Experiment zum Nachweis von Protonzerfällen gebaut, woher auch der Name stammt:

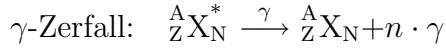
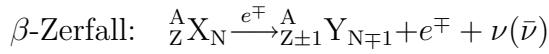
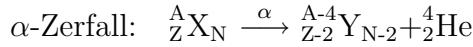
Kamioka nucleon decay experiment

Dabei werden Neutrinos über elastische Streuung an Elektronen nachgewiesen, die dann in einem großen Wassertank Cerenkov-Licht produzieren. Somit ist eine Energierekonstruktion, und durch den hohen Impulsübertrag auch eine ungefähre Richtungsrekonstruktion möglich. Kamiokande, beziehungsweise die nächste Ausbaustufe Super-Kamiokande, hat einen wichtigen Beitrag zum Nachweis der Neutrinooszillation und zur Lösung des Sonnenneutrinoproblems geleistet.

6 Anwendungen der Kern- und Teilchenphysik

6.1 Radioaktivität

Radioaktivität bezeichnet die Umwandlung chemischer Elemente durch Aussendung von Strahlung



6.1.1 Zerfallsgesetz

Das Zerfallsgesetz ist gegeben durch

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dabei ist λ die Zerfallskonstante. Die in der Einheit Becquerel [Bq] gemessene Aktivität ist mit der Zerfallskonstante durch

$$A(t) = \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

verknüpft.

Beispiele:	Außenwelt	Aktivität
	Granit	1000 $\frac{Bq}{kg}$
	Gartenerde	400 $\frac{Bq}{kg}$
Haus		
	Radon	50 $\frac{Bq}{m^3}$
	Kalium im Körper	4500 Bq

Halbwertszeit:

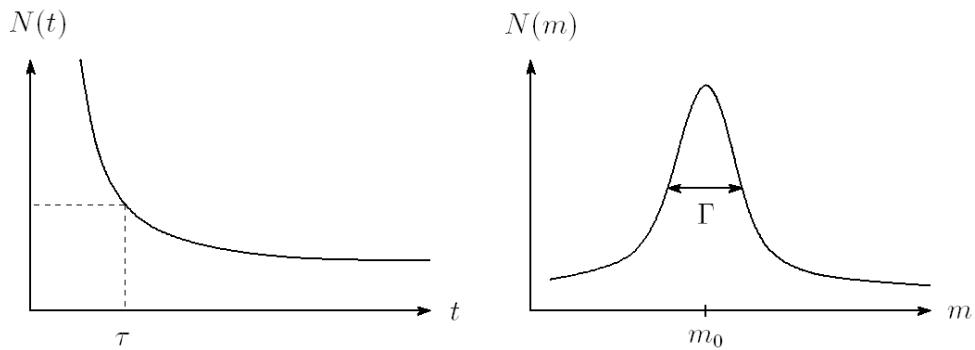
$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Lebensdauer:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Zerfallsbreite:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \cdot \lambda$$



Die Lebensdauer und die Zerfallsbreite sind durch eine Fouriertransformation miteinander verknüpft.

1. α -Zerfall

Die Voraussetzung für den α -Zerfall ist, dass der „Q-Wert“ größer Null ist:

$$Q = (M(Z, A) - M(Z - 2, A - 4) - M_\alpha) \cdot c^2 > 0$$

Daraus folgt für die Energie der α -Teilchen:

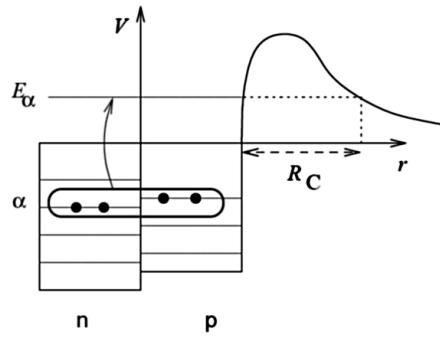
$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{M_\alpha}{M(Z-2, A-4)}}$$

Beobachtungen:

- (a) Es gibt mehrere Linien $E_{\alpha,i}$ für einen Übergang, da der Tochterkern Y verschiedene Anregungsenergien haben kann.
- (b) Zusammenhang zwischen $t_{\frac{1}{2}}$ und E_α :

Beispiele:	X	$t_{\frac{1}{2}}$	E_α
	^{212}Po	$0,3 \mu\text{s}$	$8,8 \text{ MeV}$
	^{240}Cu	$27 d$	$6,4 \text{ MeV}$
	^{238}Pu	$877 a$	$5,6 \text{ MeV}$
	^{238}U	$4,5 \cdot 10^9 a$	$4,27 \text{ MeV}$
	^{205}Pb	$1,4 \cdot 10^{16} a$	$2,6 \text{ MeV}$

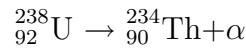
Das Potential für ein α -Teilchen sieht folgendermaßen aus:



Im Kern entsteht ein gebundenes System aus $\text{Y}+\alpha$. Das α -Teilchen kann nur durch den Tunneleffekt entweichen. Dazu muss die Coulombschwelle durchtunnelt werden:

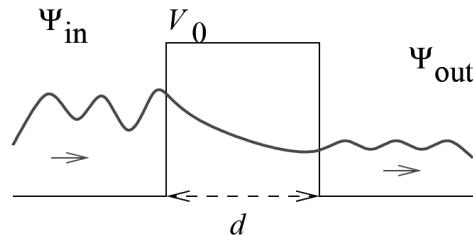
$$V_C(R_0) = \frac{Z_\alpha \cdot Z_Y \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_0}$$

Beispiel: Zerfall von Uran



Aus der Berechnung der Coulombschwelle erhält man im Fall von Uran $V_C = 35 \text{ MeV}$. Im Vergleich dazu ist die Energie der α -Teilchen mit $E_\alpha = 4,27 \text{ MeV}$ viel kleiner.

Betrachte zum Tunneleffekt zunächst eine eindimensionale Barriere:

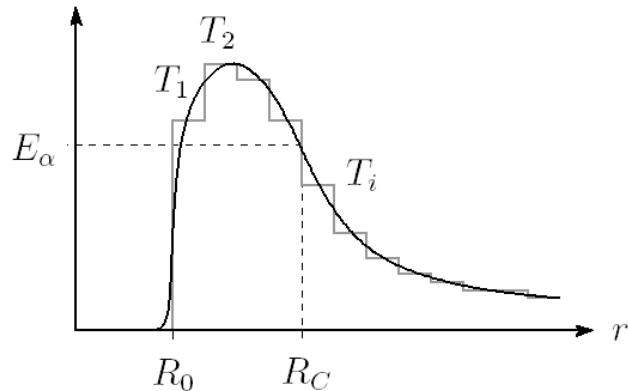


$$T = \frac{j_{out}}{j_{in}} = \frac{|\psi_{out}| \cdot v_{out}}{|\psi_{in}| \cdot v_{in}}$$

Aus der Schrödingergleichung erhält man dann:

$$T = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E_\alpha)} \cdot d}$$

Im dreidimensionalen Fall nähert man den Coulombwall durch eine Reihe von Potentialstufen an:



Lässt man nun die Breite der Potentialstufen gegen Null gehen, so erhält man einen Ausdruck für die Transmission:

$$T = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V(r)-E_\alpha)} \cdot dr}$$

Für $V(r)$ setzt man nun das gewöhnliche Coulombpotential ein.

In diesem speziellen Fall erhalten wir:

$$T_\alpha = e^{-G}$$

Dabei ist G der sogenannte Gamov-Faktor. Er ist proportional zu $\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

Beispiele: $^{212}_{84}\text{Po}: \quad t_{\frac{1}{2}} = 0,3 \mu\text{s}$
$E_\alpha = 8,8 \text{ MeV}$
$T_\alpha = 10^{-13}$
$^{144}_{66}\text{Nd}: \quad t_{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 10^{15} \text{ a}$
$E_\alpha = 1,83 \text{ MeV}$
$T_\alpha = 10^{-42}$

Die Stoßfrequenz des α -Teilchens gegen den Coulombwall lässt sich berechnen durch:

$$f = \frac{v_\alpha}{2R_0} = 10^{20} \dots 10^{21}$$

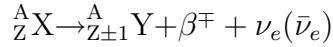
Insgesamt ergibt sich die Zerfallsrate λ durch

$$\lambda = \lambda_\alpha \cdot T_\alpha \cdot f$$

Dabei ist λ_α die Wahrscheinlichkeit, dass ein α -Teilchen entsteht, T_α ist die Tunnelwahrscheinlichkeit und f die Stoßfrequenz des α -Teilchens gegen den Coulombwall.

2. β -Zerfall

Prozess:



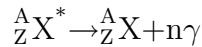
Beobachtung durch Chadwick (1914): e^-/e^+ -Abstrahlung mit kontinuierlichem Spektrum

Mysterium:

- Wo kommen die e^-/e^+ her?
- Kontinuierliches Spektrum

3. γ -Zerfall

Prozess:



6.1.2 Anwendungen der Radioaktivität

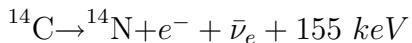
1. Datierung

Interessant für Archäologie

(a) Atmosphäre

- ${}^{14}N + p \rightarrow {}^{14}C + n$
- ${}^{14}CO_2$ Entstehung
- Aufnahme in Pflanzen, Tieren und Menschen.

(b) Nach Ende des Stoffwechsels:



Die Halbwertszeit beträgt $t_{\frac{1}{2}} = 5730 \text{ a}$. Zur Altersbestimmung misst man das Verhältnis

$$R = \frac{R({}^{14}C)}{R({}^{12}C)}$$

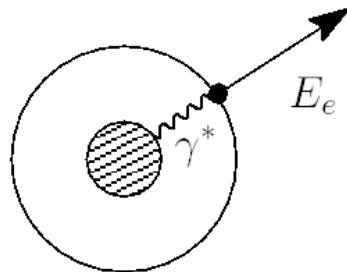
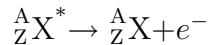
Vor 1950 betrug dieses Verhältnis in der Atmosphäre

$$R = 1,2 \cdot 10^{-12}$$

Danach hat sich diese Zahl zum Beispiel durch atmosphärische Atomtests verändert.
Somit ist die Radiocarbonmethode bei neueren Proben nicht mehr anwendbar.

6.1.3 Sonderfälle von Kernübergängen

Innere Konversion



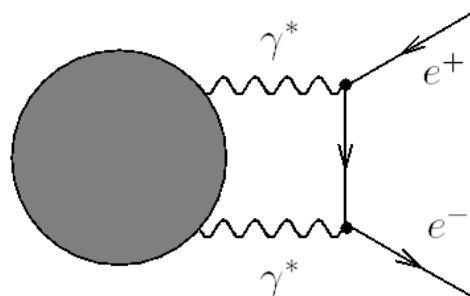
$$E_e = (M(X^*) - M(X)) \cdot c^2 - E_b(e^-)$$

Die innere Konversion tritt auf, wenn die γ -Emission bei einem Übergang verboten ist ($0 \rightarrow 0$).

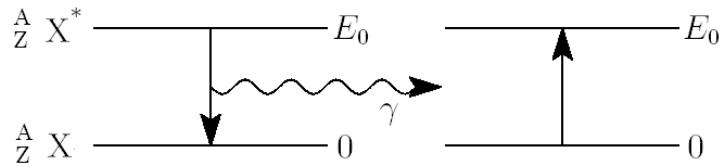
Innere Paarbildung

Kann auftreten, falls $\Delta E > 2m_ec^2$.

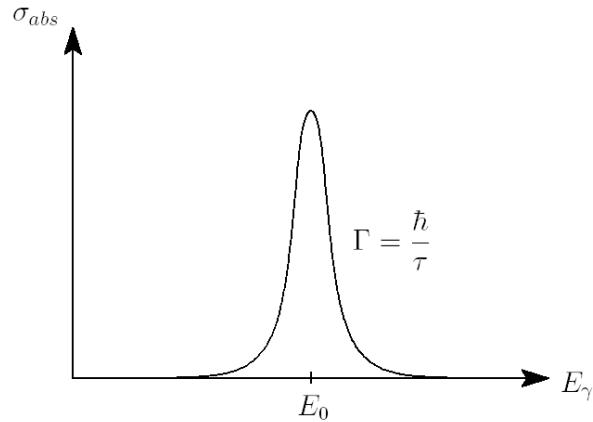
Zum Beispiel: ${}_{8}^{16}O^* \rightarrow {}_{8}^{16}O + e^- + e^+$ $\Delta E = 6 \text{ MeV}$



Resonanzabsorption von γ -Strahlung (Kernfluoreszenz)



Der Absorptionsquerschnitt ist gegeben durch:



Beispiel: ^{57}Fe :

$$E_0 = 14,4 \text{ keV}$$

$$\tau = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \Gamma = 4,7 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$$

Kernfluoreszenz findet also statt, wenn die Energie des Photons $E_\gamma \approx E_0 \pm \Gamma$ ist.

Aber:

1. Der Rückstoß den Kerns muss berücksichtigt werden:

$$E_r = \frac{1}{2} m_0 v_r^2 = \frac{E_\gamma^2}{2m_A c^2}$$

Im Fall von ^{57}Fe ist das $E_r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$. Die Energie des Photons ist also

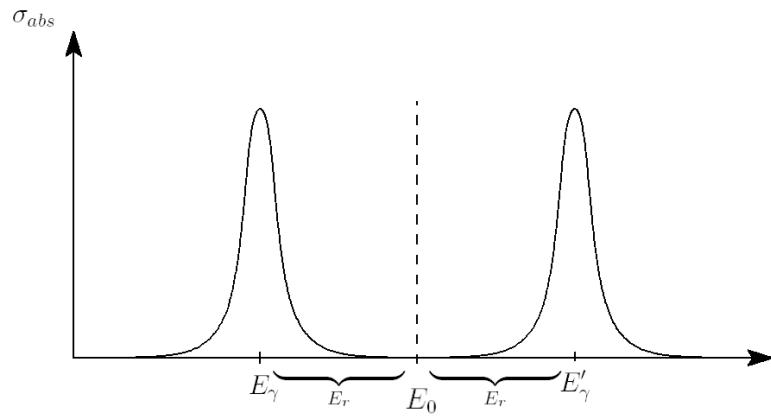
$$E_\gamma = E_0 - E_r$$

2. Auch der Rückstoß des absorbierenden Kerns muss berücksichtigt werden:

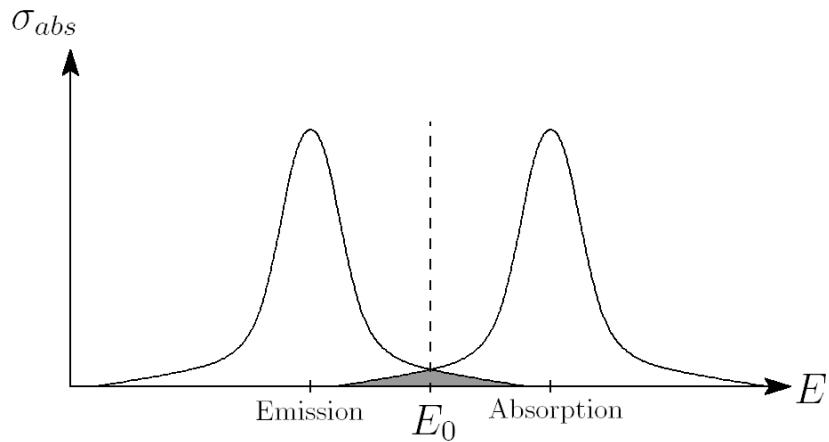
$$E_r = \frac{E_\gamma^2}{2m_A c^2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

Für die Absorption gilt dann:

$$E'_\gamma = E_0 + E_r$$



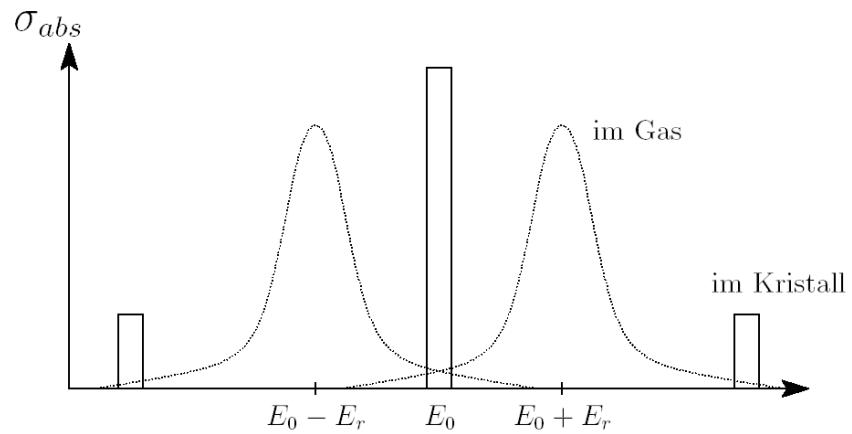
3. Dopplerverschiebung durch thermische Bewegung



$$\Delta E_{therm.} = E_0 \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m_K c^2}}$$

4. Mößbauereffekt

Für den Mößbauereffekt bindet man die Atome in ein Kristallgitter ein. Dabei nutzt man aus, dass Gitterschwingungen gequantelt sind.



In 60% aller Fälle geben die emittierende bzw. absorbierende Kerne ihren Rückstoß an das Gitter ab. In diesem Fall ist $E_r \approx 0$

Mößbauer-Experiment:

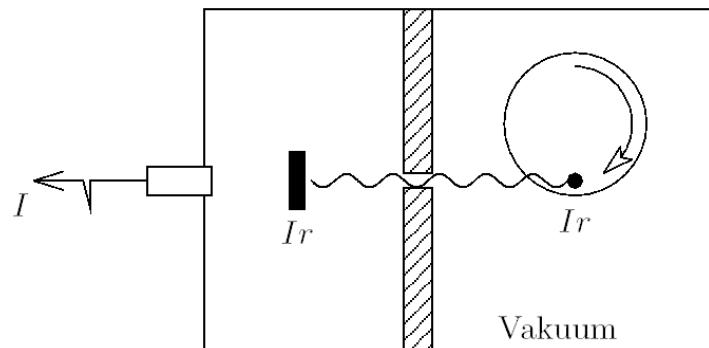
Verwendung von $^{191}\text{Ir} \xrightarrow{\gamma_1 \text{ od. } \gamma_2} {}^{191}\text{Ir}$ mit den Energien

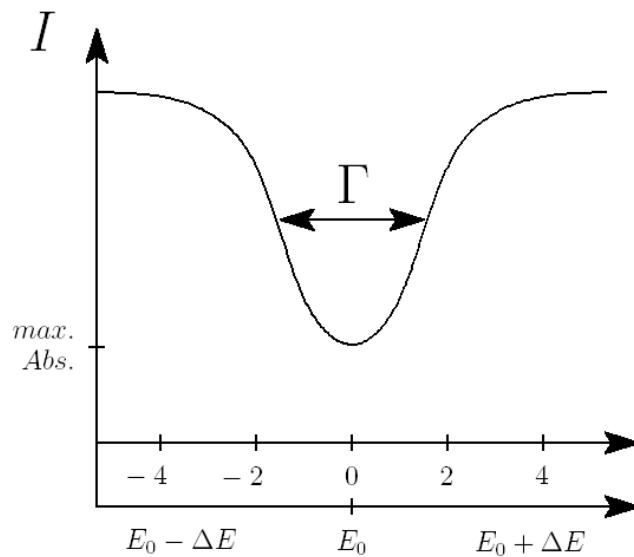
$$E_{\gamma_1} = 42 \text{ keV}$$

$$E_{\gamma_2} = 123 \text{ keV}$$

Die Halbwertszeit dieses Isotops beträgt:

$$\tau < 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$





Anwendungen:

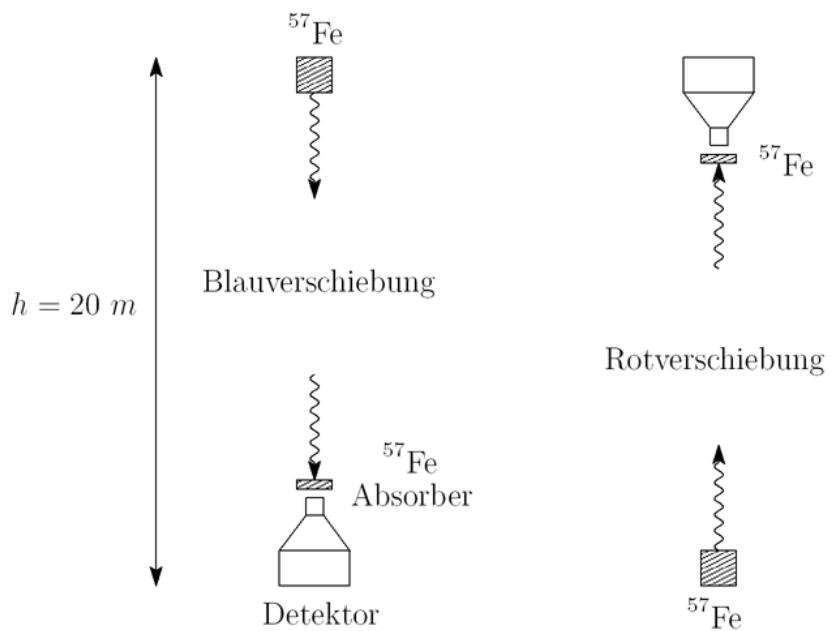
- HFS-Analysen
- Isomere Verbindungen (Einfluss chemischer Verbindungen)
- Messung von relativistischen Effekten:
Zum Beispiel: Gewicht von Licht (Pound, Rebka, PRL 4 (1960), S. 357)
Gleichheit der schweren und der trügen Masse des Photons.

$$m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2}$$

Im Gravitationsfeld beträgt die Energieänderung:

$$\Delta E_\gamma = m_\gamma g \cdot \Delta h = \frac{h\nu}{c^2} g \Delta h = \frac{h}{c} \Delta \nu$$

Verwende ${}^{57}\text{Fe}$: $h\nu_0 = 14,4 \text{ keV}$



Erwartet:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{h\nu}{c^2} g \cdot \Delta h \\ &= \frac{14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \\ &= 3,1 \cdot 10^{-11} \text{ eV}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 2,2 \cdot 10^{-15}$$

Experimentell: $\Delta(h\nu) = 1,05 \pm 0,10 \cdot \Delta(h\nu)_{therm}$.

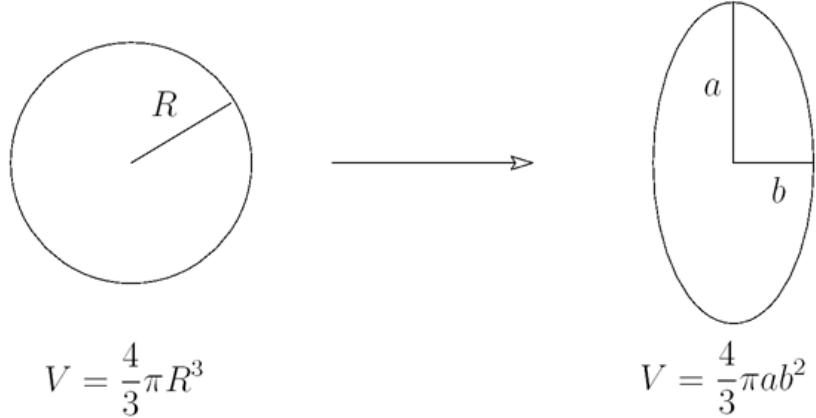
6.2 Kernspaltung (Fission)

Historisch: 1938/39 Zufällige Entdeckung von Hahn und Straßmann
 1939 Meitner, Fritsch: Erklärung des Prozesses
 1942 Kontrollierte Kernspaltung in Chicago
 1945 Atombomben am 6.8. und 9.8.

1. Voraussetzung: Spontane Spaltung

- $Q = M(Z, A) - M(Z_X, A_X) - M(Z_Y, A_Y) > 0$

- Energiegewinnung bei Deformation des Mutterkerns



$$a = R \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \approx R \cdot (1 - \frac{1}{2}\varepsilon)$$

Dabei ist ε der Deformationsparameter. Da das Volumen konstant ist, ergibt sich die Oberfläche zu:

$$O \approx 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots \right)$$

Mit den Beiträgen zur Energie des Kerns:

$$E_s = -a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 \dots \right)$$

$$E_c = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 \dots \right)$$

Somit ergibt sich für die Energieänderung bei Deformation:

$$\Delta E = \frac{1}{5} \left(a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 2a_s A^{2/3} \right) \cdot \varepsilon^2$$

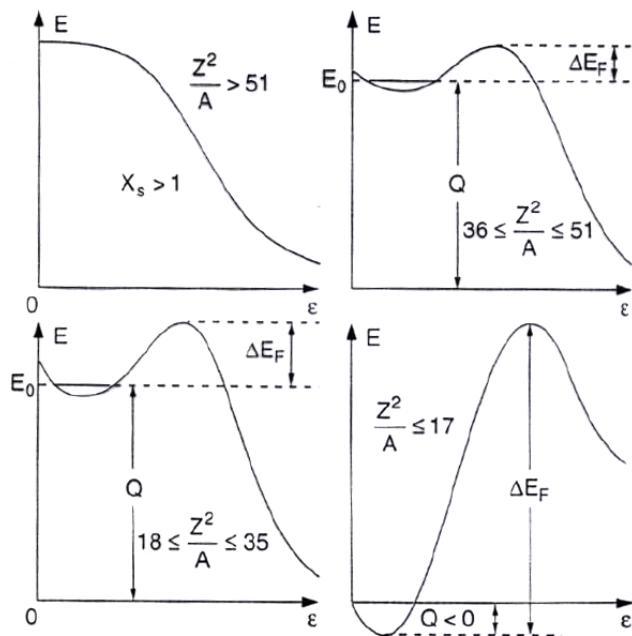
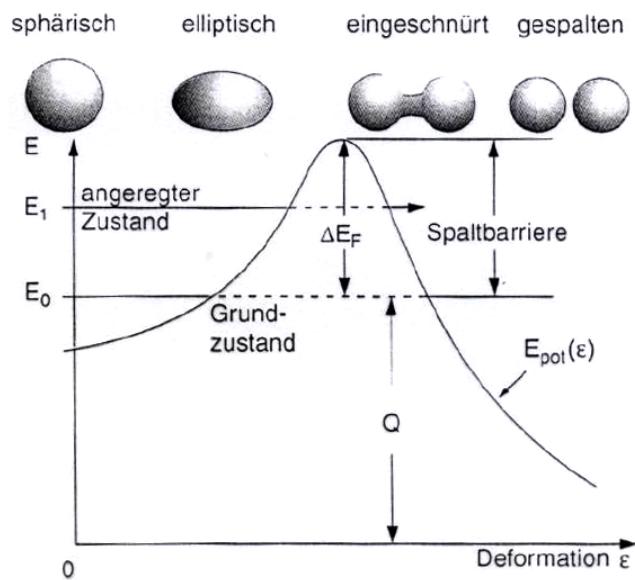
Diese Energieänderung muss für spontane Spaltung größer Null sein. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{a_c Z^2}{2a_s A} > 1$$

woraus sich als Bedingung für spontane Spaltung

$$\frac{Z^2}{A} > 51$$

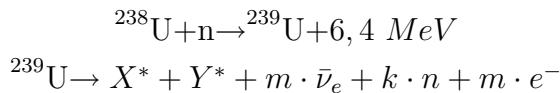
ergibt.



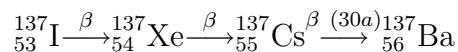
Beispiel: ${}_{92}^{238}\text{U} = \frac{Z^2}{A} = 35,6$
 $T_{1/2}(\text{Spaltung}) = 10^{16}a$
 $T_{1/2}(\alpha) = 1,5 \cdot 10^9a$

Uranspaltung:

Die Auslösung der Spaltung erfolgt zum Beispiel durch Neutroneneinfang:



Ein Beispiel für die Zerfallsprodukte wären ${}^{36}\text{Kr} + {}^{56}\text{Ba}$, wobei über 300 verschiedene Paare bekannt sind. Daraus resultieren verschiedene Zerfallsketten, zum Beispiel:



2. Kernkraftwerke

(a) Energiebilanz bei der Uranspaltung:

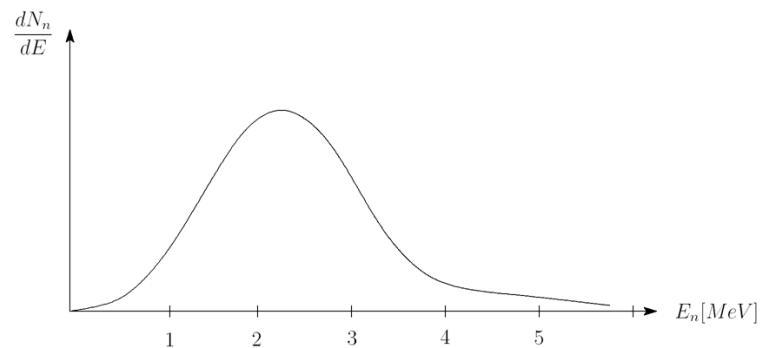
Spaltfragmente	167 MeV
Spaltneutronen	5 MeV
Photonen	6 MeV
β, γ (Sekundärzerf.)	14 MeV
$\bar{\nu}_e$	12 MeV
Gesamt:	204 MeV

Davon sind 192 MeV thermisch nutzbar. Somit liefert ein Gramm ${}^{235}\text{U}$ eine thermische Energie von 2 MWh. Im Gegensatz dazu liefert ein Gramm Kohle bei der Verbrennung nur 8 Wh thermische Energie.

(b) Betrieb durch Kettenreaktion



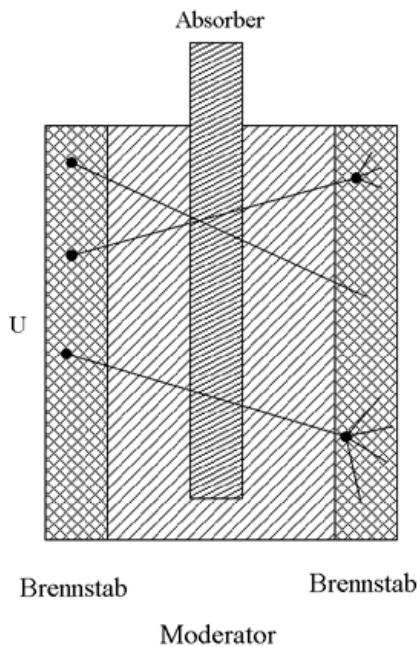
Die entstehenden Neutronen regen wiederum Urankerne an. Nun muss man durch passende Wahl der Neutronenenergie den Wirkungsquerschnitt für die Spaltung maximieren.



Für eine effiziente Spaltung werden thermische Neutronen benötigt. Folglich müssen die Neutronen abgebremst werden.

Moderator	H_2O	D_2O	Graphit
Bremslänge [cm]	5,3	11,2	19,2
$\sigma_{Abs.} [\text{b}]$	0,7	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$

Prinzip:



Der Absorber verhindert eine unkontrollierte Kettenreaktion.

Kritische Masse: oberhalb der kritischen Masse entsteht eine unkontrollierte Kernspaltung. Im Fall von ^{235}U führt die Überschreitung der kritischen Masse von 50 kg zur Explosion.

6.3 Kernfusion

- Big Bang (3 min)
- Sterne, Supernovae
- H-Bombe

6.3.1 Energiegewinnung



Deuterium kommt zu 0,015% natürlich im Wasser vor. Das Tritium muss erst erzeugt werden.



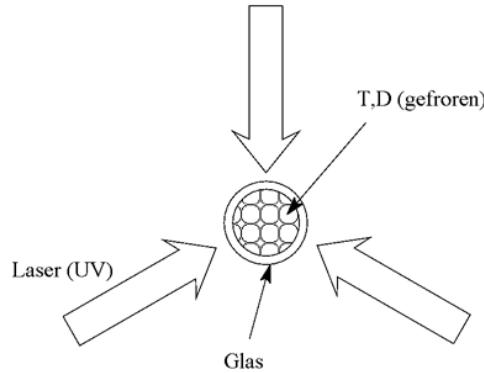
Die Halbwertszeit von Tritium beträgt $t_{1/2} = 12,3a$

Die Voraussetzungen für die Kernfusion:

- Die Kerne müssen ausreichend Energie zur Überwindung der Coulombabstößung besitzen. Dies ist ab $kT(d,t) > 10 \text{ keV}$ der Fall, was einer Temperatur $T > 10^8 \text{ K}$ entspricht.
 - Lawson-Kriterium
- $$\begin{array}{ccc} P_{d,t} & > & P_V \\ \text{Fusion} & & \text{Verluste} \end{array}$$
- Zündparameter (für Fusionsbetrieb):

$$Z = n \cdot \tau_E \cdot kT > 10^{21} \frac{keV \cdot s}{m^3}$$

Laser-induzierte Kernfusion



Durch das plötzliche Verdampfen des Glasmantels wird das eingeschlossene Deuterium und Tritium durch die Trägheit des Glases auf Dichten von

$$n > 10^{22} \frac{1}{cm^3}$$

komprimiert. Die Einschlusszeit beträgt

$$\tau_E > 10^{-8}s$$

und die Temperatur

$$T > 10^8 K$$

Somit ist das Kriterium für den Zündparameter erfüllt, was zur Zündung führt.

6.3.2 Energiegewinnung in Sternen

Die Strahlungsleistung unserer Sonne auf der Erdoberfläche ist durch die Solarkonstante gegeben:

$$P = 1,372 \frac{kW}{m^2}$$

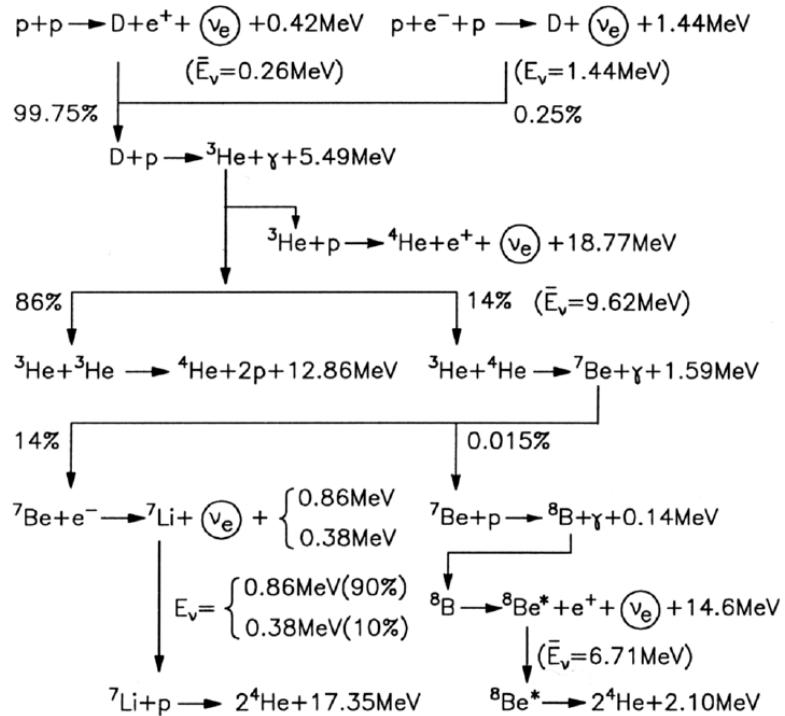
Diese Leistung errechnet sich aus der Gesamtleistung

$$P_{tot} = 4 \cdot 10^{23} kW$$

und dem Abstand zwischen Erde und Sonne von 1 AE.

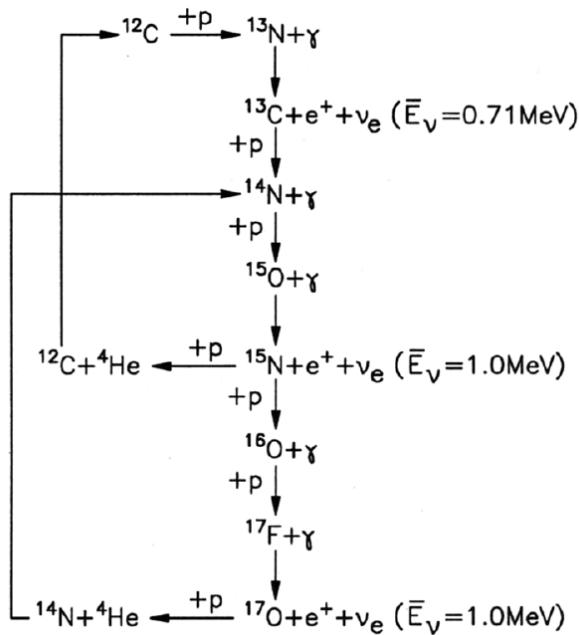
In der Sonne laufen zwei Fusionszyklen ab, wobei der CNO-Zyklus für die Energiegewinnung nur eine untergeordnete Rolle spielt.

1. pp-Kette:



$$\text{Energie: } E = 26,2 \text{ MeV} \hat{=} 6,55 \frac{\text{MeV}}{\text{Proton}}$$

2. CNO-Zyklus:



Dabei spielt der Kohlenstoff die Rolle eines Katalysators. Folglich kann dieser Prozess nicht in Sternen der ersten Generation ablaufen, da der benötigte Kohlenstoff erst im Endstadium eines Sterns entsteht.