Untitled

December 19, 2018

1 SMD Übungszettel Nr. 9

Abgabe von: Pape, Kusurmann und Becker

```
In [1]: import numpy as np
        import pandas as pd
        import matplotlib.pyplot as plt

        np.random.seed(8)
```

WICHTIG Ich habe die `.csv` Datein angepasst, damit ich die einzelen Labels/Spalten im `DataFrame` ansprechen kann. Hätte ich das nicht gemacht, hätte ich zum Beispiel auf das Element `"y_1` zugreifen müssen und das hat mit `pd_a['"y_1']` nicht funktioniert. Wisst ihr wie man das ohne Umbennen machen kann?

1.1 Nr. 25

1.1.1 Aufgabenteil a)

```
In [2]: pd_a = pd.read_csv('./aufg_a.csv')
```

Es soll an ein Polynom sechsten Grades gefittet werden:

$$P(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

Stelle die Designmatrix auf:

```
In [3]: def poly__6(x, a, b, c, d, e, f, g):
            return a*x**6 + b*x**5 + c*x**4 + d*x**3 + e*x**2 + f*x +g

In [4]: x__6 = pd_a['x'].values**6
        x__5 = pd_a['x'].values**5
        x__4 = pd_a['x'].values**4
        x__3 = pd_a['x'].values**3
        x__2 = pd_a['x'].values**2
        x__1 = pd_a['x'].values
        x__0 = pd_a['x'].values * 1/pd_a['x'].values

In [5]: A = np.array([x__6, x__5, x__4, x__3, x__2, x__1, x__0]).T
```

Berchene die Koeffizienten

```
In [6]: cof = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T @ pd_a['y'].values

        print(f'Die berechneten Koeffizienten lauten: \n {cof}')
```

```
Die berechneten Koeffizienten lauten:
 [-1.96288194e-04  4.78568044e-03 -4.52007747e-02  2.10566519e-01
 -5.13748208e-01  6.09609032e-01 -6.74453234e-02]
```

Berechne die Fehler:

```
In [7]: sigma = np.zeros((8, 8), int)
        np.fill_diagonal(sigma, 1)
        var = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T @ sigma @ A @ np.linalg.inv(A.T @ A)
```

Frage

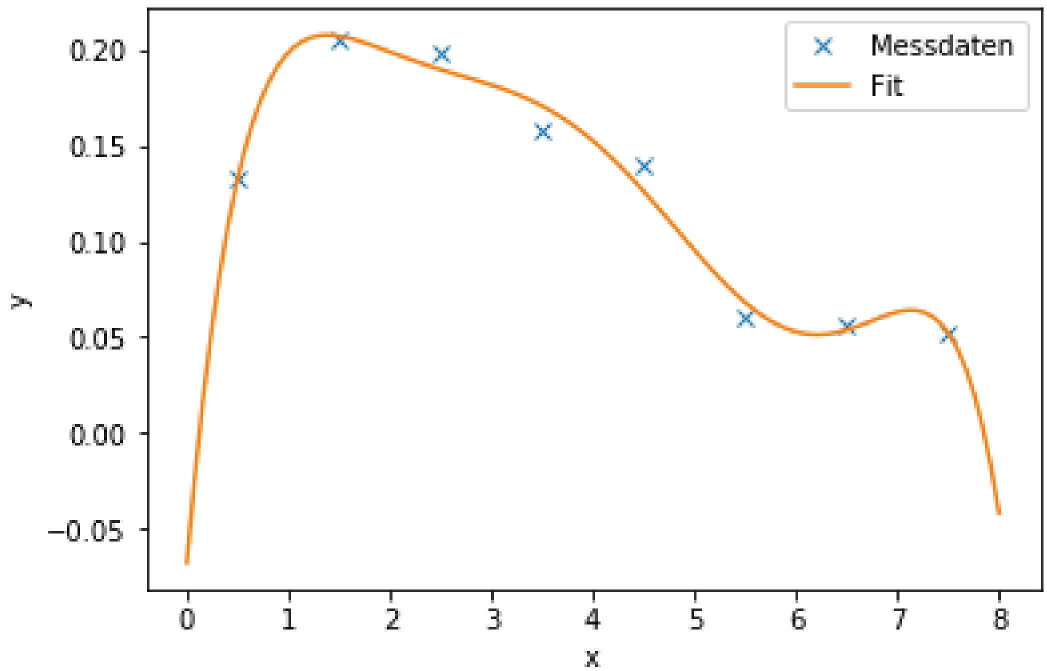
Wie werden die Parameterfehler berechnet, wenn der Fehler von y nicht bekannt ist oder nicht verwendet wird? Wenn in Pyhton zum Beispiel die Funktion `curve_fit` (bekannt aus dem Toolbox Workshop) verwendet wird, gibt diese einen Fehler bzw. eine Korrelationsmatrix aus, obwohl die Fehler der Datenpunkte nicht mit angegbene wurden.

Dann wir die $\hat{S}$ Matrix verwendet.

```
In [8]: x_fit = np.linspace(min(pd_a['x'].values-0.5), max(pd_a['x'].values)+0.5, 100)
```

```
In [9]: plt.plot(pd_a['x'].values, pd_a['y'].values,'x', label='Messdaten')
        plt.plot(x_fit, poly__6(x_fit, *cof), label='Fit')

        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('y')
        plt.legend()
```

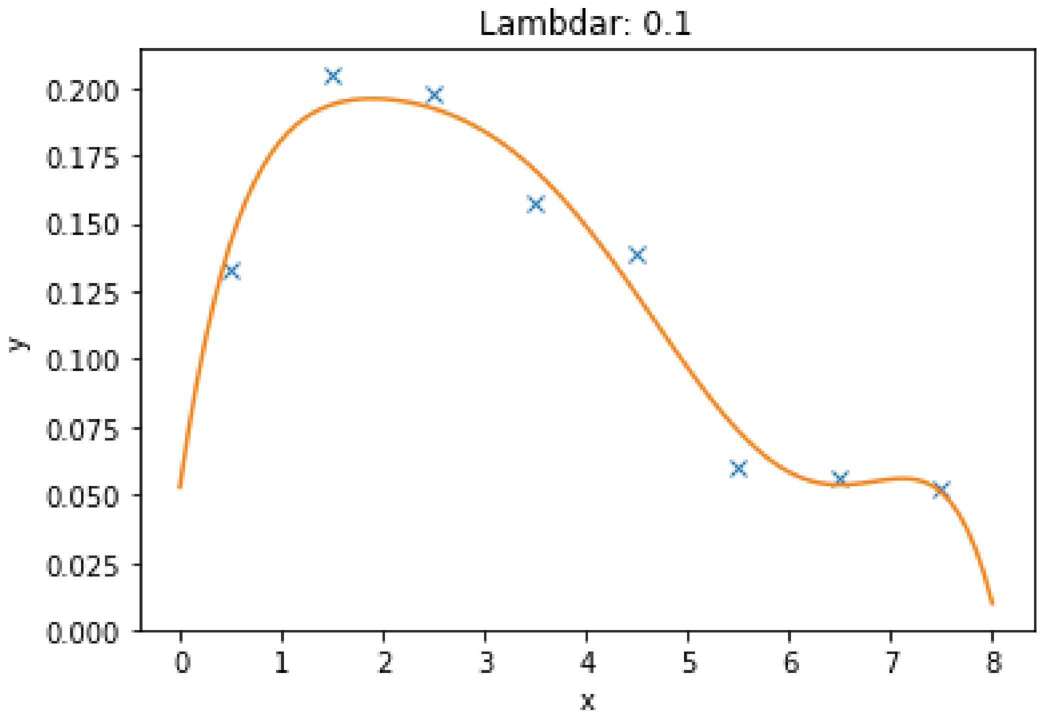
```
Out[9]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fb6e3458278>
```

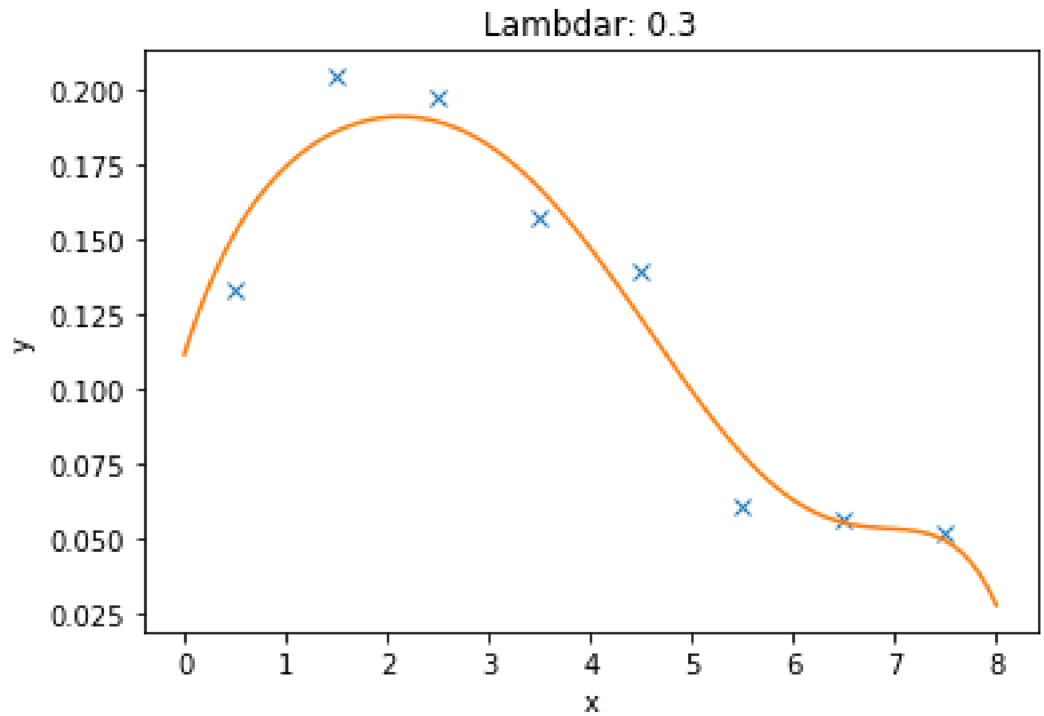


1.1.2 Aufgabenteil b)

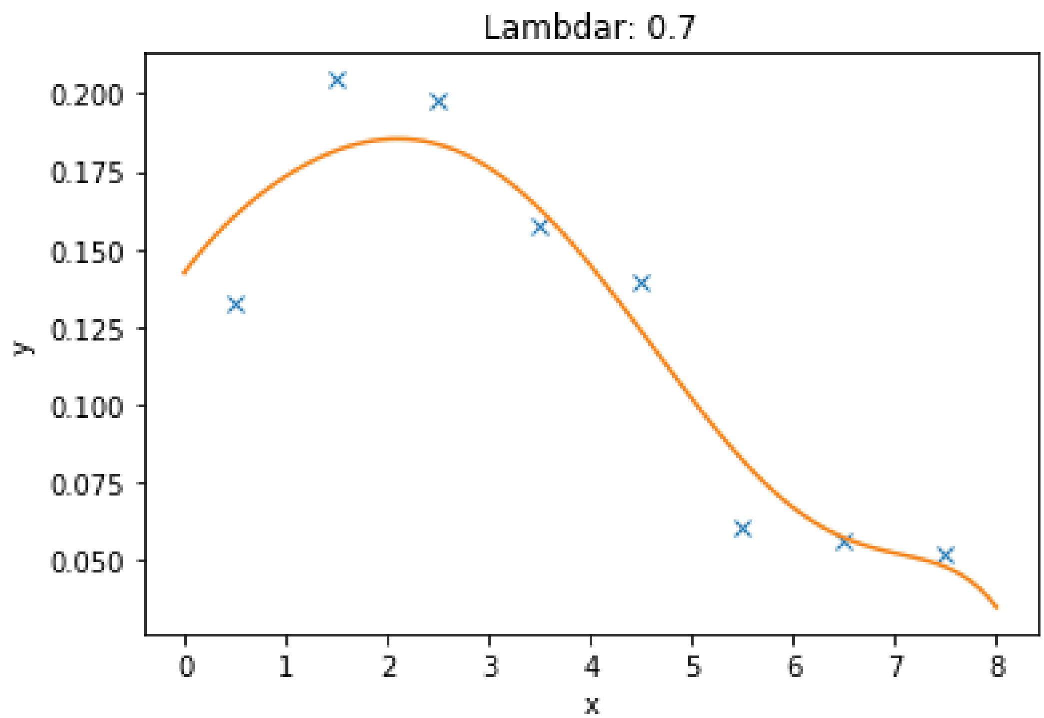
```
In [10]: lambdar = [0.1, 0.3, 0.7, 3, 10]

In [11]: def cof_reg(A, y, Gammar):
             return np.linalg.inv(A.T @ A + Gammar.T @ Gammar) @ A.T @ y

In [12]: C  = np.zeros((8, 8))

In [13]: np.fill_diagonal(C[1:], 1)
         np.fill_diagonal(C[:, 1:], 1)
         np.fill_diagonal(C, -2)

         C[0,0] = -1
         C[7, 7] = -1

In [14]: params = []

         for lam in lambdar:
             Gammar = np.sqrt(lam) * C @ A

             para = cof_reg(A, pd_a['y'].values, Gammar)
             params.append(para)

             plt.plot(pd_a['x'].values, pd_a['y'].values,'x', label='Messdaten')
```

```
plt.plot(x_fit, poly__6(x_fit, *para), label='Fit')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title(f'Lambdar: {lam}')
plt.show()
```



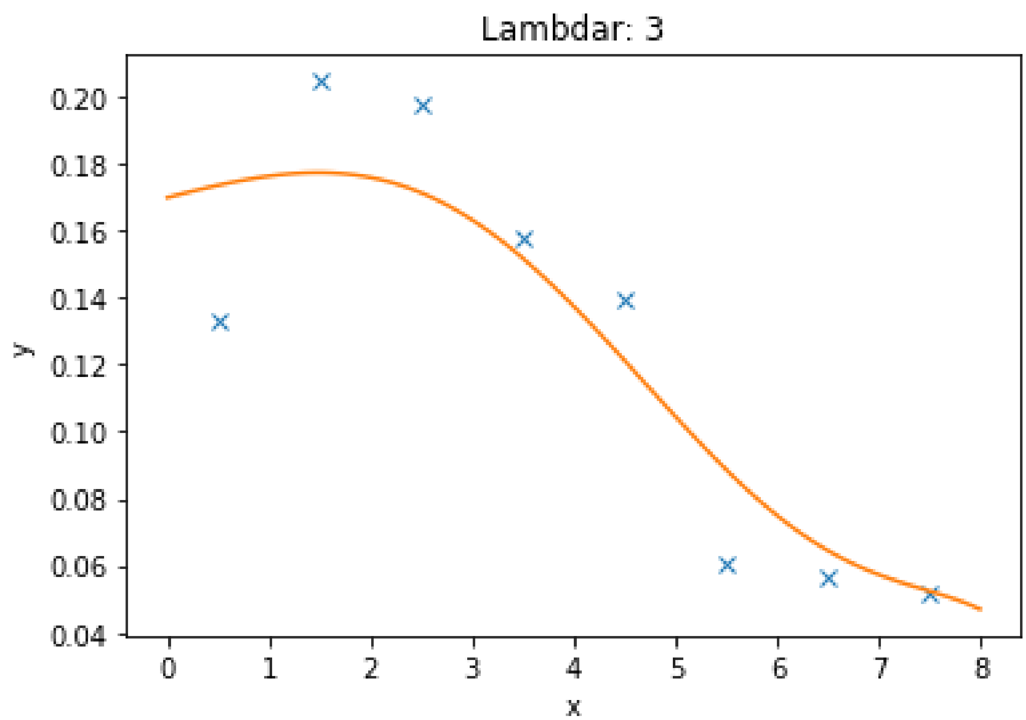


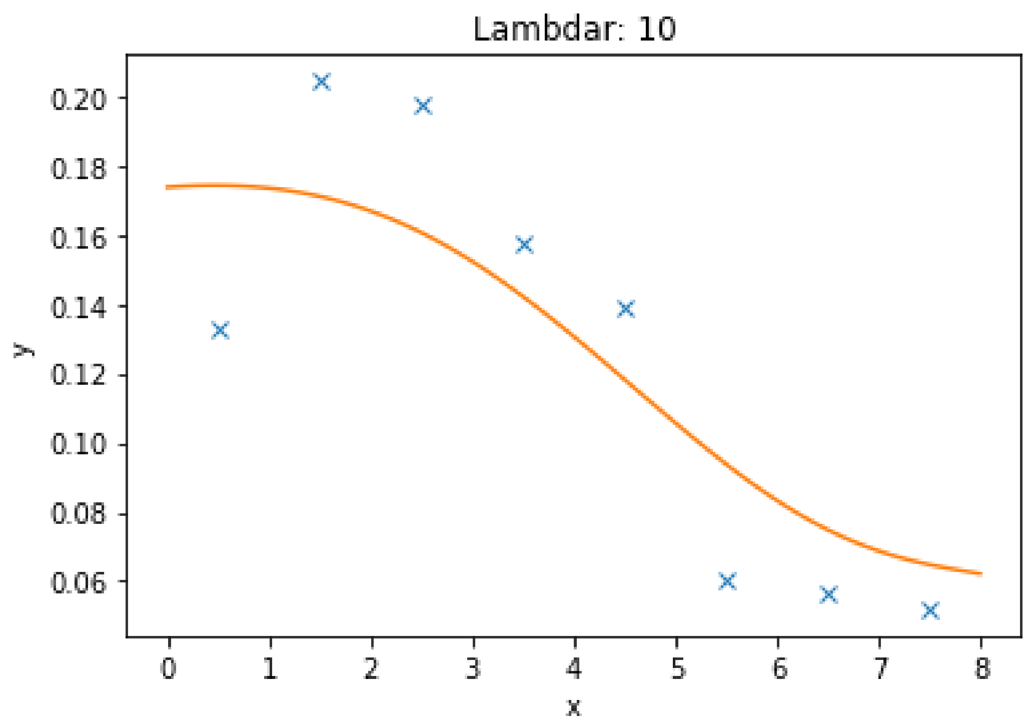
Lambdar: 0.3
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x



Lambdar: 0.7
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x

Man erkennt eine deutliche Glätung der Funktion.





Man erkennt eine deutliche Glätung der Funktion.

1.1.3 Aufgabenteil c)

In [15]:
```
pd_c = pd.read_csv('./aufg_c.csv')
```

In [16]:
```
labels = ['x',]
for i in range(0,50):
    labels.append('y_'+str(i))
```

In [17]:
```
pd_c = pd.DataFrame(pd_c.values, columns=labels)
```

In [18]:
```
W = np.zeros((8,8))
```

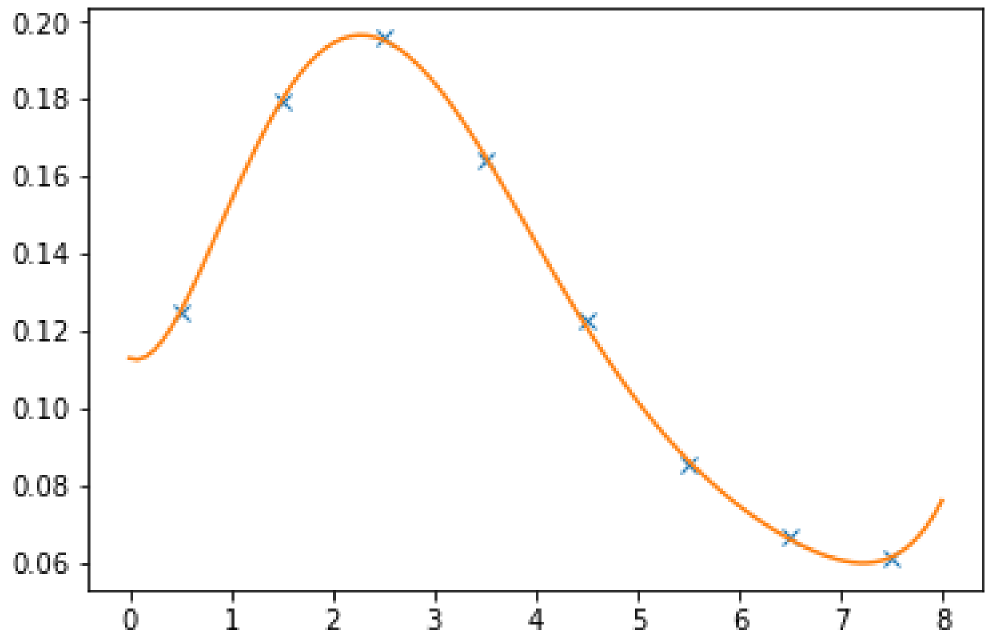
In [19]:
```
stds = np.ones(pd_c.shape[0])
means =  np.ones(pd_c.shape[0])
for i in range(pd_c.shape[0]):
    stds[i] = pd_c.ix[i][1:].std(axis=0)
    means[i] = pd_c.ix[i][1:].mean(axis=0)

np.fill_diagonal(W, stds)
```

```
/home/beckstev/.local/anaconda3/lib/python3.7/site-packages/ipykernel_launcher.py:4: Deprecatio
.ix is deprecated. Please use
.loc for label based indexing or
.iloc for positional indexing

See the documentation here:
http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/indexing.html#ix-indexer-is-deprecated
  after removing the cwd from sys.path.
/home/beckstev/.local/anaconda3/lib/python3.7/site-packages/ipykernel_launcher.py:5: Deprecatio
.ix is deprecated. Please use
.loc for label based indexing or
.iloc for positional indexing

See the documentation here:
http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/indexing.html#ix-indexer-is-deprecated
  """
```

In [20]:
```
params_c = np.linalg.inv(A.T @ W @ A) @ A.T @ W @ means
```

In [21]:
```
plt.plot(pd_a['x'].values, means,'x', label='Messdaten')
plt.plot(x_fit, poly__6(x_fit, *params_c), label='Fit')
```

Out[21]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb6e31afcc0>]
```



1.2 Nr. 26

1.2.1 Aufgabenteil a)

Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

Damit ist der Mittelwer erwartungstreu.

1.2.2 Aufgabenteil b)

Mit den Rechenregeln für die Varianz folgt:

$$\begin{aligned} E\left((\bar{X}-\mu)^2\right) &= \mathrm{Var}(\bar{X}) \\ &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &\overset{\star}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\sigma}{n} \end{aligned}$$

Die Gleichheit von $\star$ gilt nur wenn die X_i nicht korelliert sind (ist nach Aufgabenstellung erfüllt). Vergleiche hierzu die **Gleichung von Bienaymé**. Könnt ihr in der Übung einmal explizit zeigen wieso $\star$ nur gilt, wenn die X_i nicht korrelliert sind. Ich glaube das hilft nochmal besser zu verstehen, wieso die Defintion der Kovarianz Cov die Korrelation berechnen.

1.2.3 Aufgabenteil c)

Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$E(S_0^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - \mu)^2\right) = \frac{1}{n} n\sigma = \sigma$$

Damit ist S_0^2 erwartungstreu.

1.2.4 Aufgabenteil d)

Verwende auch hier die Linearität des Erwartungswertes und das Ergebnis aus *Aufgabenteil b) & c)*.

$$\begin{aligned}
E(S_1^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2\right)\right) \\
&= E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2\right)\right) \\
&= E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) - (\bar{X} - \mu)^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i - \mu)^2\right)\right) - E\left((\bar{X} - \mu)^2\right) \\
&\overset{\text{Mit b) \& c)}}{=} \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2
\end{aligned}$$

1.2.5 Aufgabe Nr. 27

Die Likelihood Funktion ist gegeben durch:

$$L = \Pi_{i=1}^{n} f(x|b) = \frac{1}{b^n}$$

Ziel ist die Maximierung von L, eine Gradientenbildung ist auf Grund der Unstetigkeit wenig sinnvoll. Stattdessen kann der Wert für b diskutiert werden. Die Variabele b muss mindestens so gewählt werden, dass die Gesamtestichprobe erzeugt werden kann, somit gilt

$$b \geq \max\{x_i\}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (1)$$

Zusätzlich muss die Likelihood Funktion maximiert werden. Wird diese Bedingung mit Gleichung (1) kombiniert folgt:

$$b = \max\{x_i\} := x_{max}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$