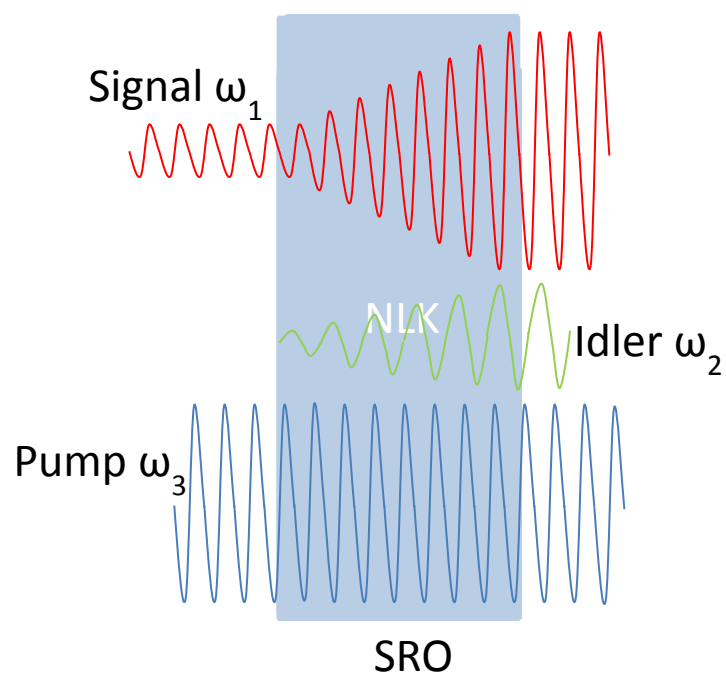


Nichtlineare Optik

Praktikumsanleitung für den Lehrversuch NLO



Erstellt von: Dipl.-Ing. (FH) Thomas Ganka; Dipl.-Ing. (FH) Christoph Dietzinger (SS2010)
Überarbeitet von: M. Grimm (SS2014)

1.	Überblick und Vorbereitung des Praktikums	2
1.1	Themen und Ziele	2
1.2	Antestat und Vorbesprechung	2
2.	Versuchsaufbau	3
3.	Durchführung des Praktikums	4
3.1	Messung	5
3.1.1	Pulsängenmessung	5
3.1.2	Konversionseffizienz der Frequenzverdopplung	5
3.1.3	Summenfrequenzzeugung	5
3.1.4	Optischer parametrischer Oszillator	6
4.	Ausarbeitung der Versuchsergebnisse	6
5.	Theoretische Grundlagen	7
5.1	Wechselwirkung zwischen Licht und Materie	7
5.1.1	Erzeugung von harmonischen durch Nichtlinearitäten	7
5.1.2	Frequenzverdopplung	9
5.1.3	Summen- und Differenzfrequenzzeugung	10
5.2	Phasenanpassung	12
5.2.1	Beispiel Phasenanpassung bei kollinearer Frequenzverdopplung	12
5.2.2	Möglichkeiten der Phasenanpassung	13
	Doppelbrechung	14
	Kritische oder Winkel-Phasenanpassung	15
	Quasi-Phasenanpassung	17
5.3	Nichtlineare Kristalle	18
5.4	Parametrische Verstärkung und Oszillation	22
5.4.1	Optisch Parametrischer Verstärker - OPA	22
	Prinzipieller Aufbau	24
	Typen optisch parametrischer Oszillatoren	25
	SRO	26
	DRO	26
5.4.2	Effizienzmodellierung (<i>Performance Modelling</i>)	27
	Konversionseffizienz	28
6.	Aufgaben	30
6.1	Berechnung der Effizienz einer SHG	30
6.2	Berechnung der Effizienz einer SFG	30
6.3	Berechnung der Verstärkungsfaktoren eines SRO-OPOs	30
6.4	Verhältnis der Schwellenleistung eines SRO- und DRO-OPOs	30
7.	Auslegung der optischen, nichtlinearen Prozesse	31
7.1	Dimensionierung der SFG	31
7.2	Dimensionierung eines SRO-OPOs	33
7.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	35
8.	Anhang	36
8.1	Strahlengänge	36
	Abbildung 20: Strahlengang zur Messung der Pulsauern von 532/1064nm	36
8.2	Amplitudengleichungen und Manley-Rowe-Beziehung	37
8.3	Herleitung der Beziehung zwischen $I(2\omega)$ und $P(\omega)$	40
8.4	Phasenanpassung und Impulserhaltung	41
8.5	Herleitung für den Winkel der Phasenanpassung	41
8.6	Herleitung des nichtlinearen Koeffizienten	42
8.7	Herleitung der effektiven Verstärkung	44
8.8	Literatur	46
8.9	Komponenten des NLO-Versuchs:	47

1. Überblick und Vorbereitung des Praktikums

1.1 Themen und Ziele

In diesem Praktikumsversuch sollen Sie mit der Thematik der Nichtlinearen Optik (NLO) vertraut gemacht werden. Machen sie sich dazu mit den folgenden Themengebieten vertraut, nutzen sie den Anhang dieser Anleitung.

- Grundlagen der nichtlinearen Optik
 - Doppelbrechung
 - Frequenzverdopplung (*Second harmonic generation*, SHG)
 - Summenfrequenzerzeugung (*Sum frequency generation*, SFG)
 - Optische parametrische Verstärkung (*Optical parametric amplification*) und optische parametrische Oszillation (*optical parametric oscillation*)
- Nichtlineare Kristalle – Arten und Eigenschaften, Nichtlinearitätskoeffizient d_{eff}
- Bestimmung der Energiebilanz und Konversionseffizienz (für SHG und SFG)
- Stabilitätskriterium von optischen Resonatoren

1.2 Antestat und Vorbesprechung

Folgende Aufgaben und Fragen sind für die Vorbesprechung des Versuchs vorzubereiten:

1. Was bedeutet die dielektrische Suszeptibilität?
2. Nennen Sie die zwei Erhaltungsgrößen und die wichtigsten Einflussgrößen für nichtlineare Prozesse und erklären Sie deren Bedeutung
3. Wie funktioniert Frequenzverdopplung (Photonenbild und Wellenbild)?
4. Warum funktionieren nichtlineare Prozesse nur bei bestimmten Symmetrieeigenschaften der Kristalle? Warum verschwindet der quadratische Anteil der Polarisation bei inversionssymmetrischen Kristallen?
5. Warum ist die Pulsbreite (FWHM) des frequenzverdoppelten Pulses kleiner als die des Ausgangspulses?
6. Wie funktioniert Dreiwellenmischung (*three wave mixing*) und welche Ausgangswellen entstehen dabei?
7. Was bedeutet Phasenanpassung? Erklären Sie Möglichkeiten der Phasenanpassung.
8. Welche nichtlinearen Kristalle gibt es und was sind deren wesentliche Unterschiede? Vergleichen Sie BBO, LBO und PPLN.
9. Wie ist ein optischer parametrischer Oszillator aufgebaut und wie funktioniert er?

2. Versuchsaufbau

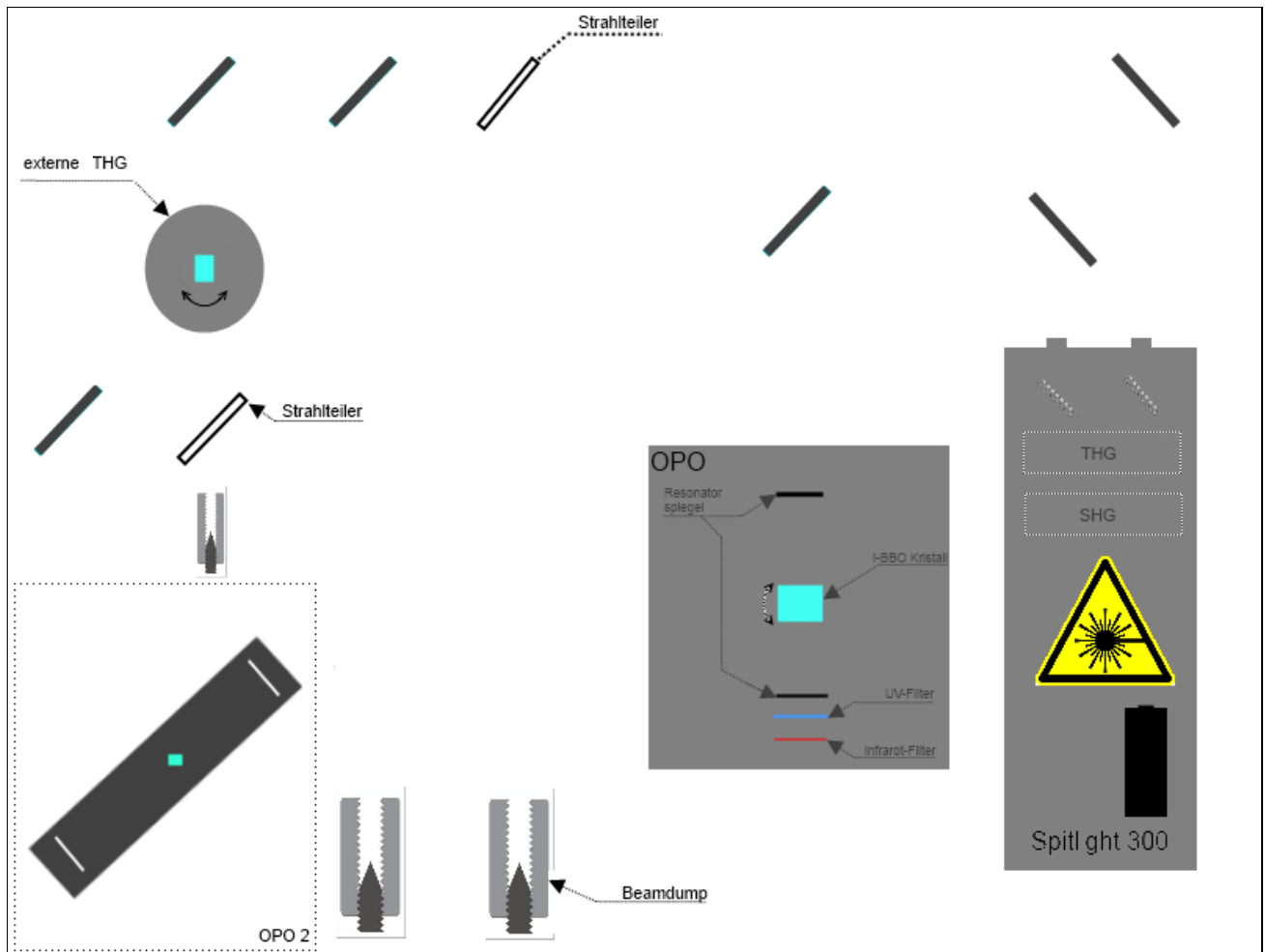


Abbildung 1: Prinzipieller Versuchsaufbau. Über die 2 Austrittsöffnungen am Laser lassen sich wahlweise entweder 1064/532 nm oder 355 nm abgreifen. Über verschieden klappbare Spiegel lässt sich der Strahlengang je nach Bedarf verändern.

Der Versuch besteht aus einem Innolas Spitlight 300 blitzlampengepumpten güteschalteten Nd:YAG Laser (1064 nm) mit integrierten SHG- (532 nm) und THG-Modul (355 nm), über zwei dielektrische Spiegel wird der durch das THG-Modul erzeugte UV-Strahl auf eine 2. Austrittsöffnung umgelenkt um die Strahlen separat untersuchen zu können (verschließen sie die ungenutzte Austrittsöffnung mit dem beiliegenden Beam Dump).

Im Versuch befinden sich zwei optisch parametrische Oszillatoren, OPO 2 dient dabei zur Veranschaulichung der Funktionsweise, für die Messung ist er allerdings irrelevant. Bei dem für die Messung verwendeten OPO handelt es sich um einen „singly resonant Oscillator – SRO“ von der Firma GWU-Lasertechnik Vertriebsges.mbH, eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise befindet sich im Anhang.

Über klappbare Spiegel lässt sich der benötigte Strahlengang einstellen, den Verlauf der drei benötigten Strahlengänge befindet sich ebenfalls im Anhang

Außerdem lässt sich mit einem externen THG-Modul ein UV-Strahl erzeugen.

3. Durchführung des Praktikums

Im Rahmen dieses Versuchs sollen die Pulslängen der Grundwelle und der zweiten Harmonischen eines gütegeschalteten, blitzlampengepumpten Nd:YAG-Lasers (Innolas Spitlight 300) gemessen werden. Außerdem sind die Konversionseffizienzen der SHG und der SFG zu ermitteln. Zuletzt soll die Pulsenergie der SFG abhängig vom Winkel der Phasenanpassung ermittelt werden. Zur Verfügung stehende Messmittel und Geräte:

- Innolas Spitlight 300; Blitzlampengepumpter Nd:YAG Laser
- Internes SHG und THG Modul
- Photodiode DET10A (Thorlabs)
- Energiemessgerät Field MaxII-Top mit Energiesensor J-25MB-HE
- Digitales Speicheroszilloskop (200 MHz Bandbreite)
- Stellarnet Faseroptisches Kompaktspektrometer
- Strahlteiler (Reflexion 532 nm/Transmission 1064 nm)
- Strahlteiler (Reflexion 355 nm/Transmission 1064/532 nm)
- Indikatorplättchen (Thorlabs)
 - VRC1: 250-540 nm
 - VRC2: 400-640 nm/800-1700 nm
- Imbusschlüsselsatz
- Keramikplättchen
- 2x Beam Dump (Coherent)
- Graufilter
- 50 Ω Vorwiderstand für das Oszilloskop
- Zerstreuungslinse ($f = -50$ mm)
- 4x Schutzbrille (315-532 D LB6 + I LB 7 + R LB 5 / 1030–1100 DR LB 7 + I LB8)

Wichtige Hinweise zum Umgang mit den Lasern im Praktikum
<p>Die verwendeten Laser haben Pulsenergien von $> 300\text{mJ}$ mit einer Wellenlänge von 1064nm und werden der Laserschutzklasse 4 zugeschrieben. Es ist die Verwendung von Schutzbrillen somit dringend erforderlich.</p> <p>Am Praktikum darf nur teilnehmen, wer die jährliche Sicherheitsunterweisung zum Thema Laserstrahlung erhalten hat. Teilnehmer des Praktikums werden aufgefordert, selbst darauf zu achten, dass sie geeignete Schutzausrüstung (insbesondere Schutzbrillen) verwenden.</p>

3.1 Messung

3.1.1 Pulslängenmessung

In diesem Versuchsteil sollen die Pulsdauern (FWHM) des 1064 nm und des 532 nm Strahls vermessen werden.

Stecken sie dazu den Beamdump auf die linke Austrittsöffnung und Klappen sie die Spiegel so ein das Strahlengang 1 (siehe Anhang) aktiv ist, über den ersten Strahlteiler sind die beiden Strahlen nun separat zu vermessen.

Um die Photodiode nicht durch direkte Bestrahlung zu zerstören wird über ein Keramikplättchen Streulicht erzeugt welches mit der Photodiode detektiert wird.

Messen sie die Pulsdauern für die beiden Strahlen bei einer Blitzlampenspannung von 480 V – 560 V mit $\Delta U = 20$ V.

3.1.2 Konversionseffizienz der Frequenzverdopplung

Nun wird die Konversionseffizienz der Frequenzverdopplung (*second harmonic generation*) bestimmt. Die Konversionseffizienz wird hier durch das Verhältnis der Pulsenergie der zweiten Harmonischen und der Pulsenergie der Grundwelle beschrieben.

$$\eta = \frac{E(2\omega)}{E(\omega)}$$

Die Energie des optischen Pulses wird mit Hilfe eines Pulsenergiemessgeräts (COHERENT FieldMax II mit Messkopf J-25MB-HE) bestimmt. Diese wird in Abhängigkeit von der Blitzlampenspannung im Bereich von 460 V bis 610 V gemessen. Bei der Messung sollte ein Mittelwert über 10 - 20 Impulse gebildet werden, um den Mittelwert der Pulsenergie genauer zu bestimmen.

$$\frac{\sigma_{\text{Mittelwert}}}{\overline{E_p}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_{\text{Einzelpulse}}}{E_p}$$

Die maximale Energiedichte des Detektors beträgt 500 mJ/cm². Dieser Wert wird bei direkter Bestrahlung schon bei einer Blitzlampenspannung von ca. 470 V erreicht. Eine weitere Erhöhung zerstört den Detektor. Aus diesem Grund wird mit einer Linse negativer Brennweite aufgeweitet (f = -50 mm), die etwa 10 cm vor dem Detektor platziert wird. Der Strahldurchmesser beträgt dann ca. 15 mm auf der Oberfläche des Detektors, was die Intensität unter die Zerstörschwelle reduziert.

3.1.3 Summenfrequenzerzeugung

Aufgrund der vorherigen Messung ist die Energie bei 532 nm bzw. 1064 nm in Abhängigkeit der Blitzlampenspannung bis 610 V bekannt. Es soll im Folgenden mit Hilfe eines Spektrometers die durch Summenfrequenz im externen THG-Modul erzeugten 355nm nachgewiesen werden (konfigurieren sie die Spiegel so, das Strahlengang 2 aktiv ist) und anschließend die Pulsenergie dieser Wellenlänge in Abhängigkeit der Blitzlampenspannung gemessen werden (ebenfalls im Bereich von 460 V – 610 V)

3.1.4 Optischer parametrischer Oszillator

In diesem Teil des Versuchs zur nichtlinearen Optik soll das Prinzip des Optisch Parametrischen Oszillators vorgestellt werden, Stecken sie den Beam Dump nun auf die rechte Austrittsöffnung und Stellen sie sicher das die 355 nm in den OPO einkoppeln, arbeiten sie zuerst mit geringer Spannung, wenn sie sicher sind das der Strahl den OPO erreicht erhöhen sie die Spannung auf 600 V.

Ebenfalls mit dem Spektrometer kann so beim Output des OPO die Wellenlänge in Abhängigkeit der Winkelstellung gemessen werden. Theoretisch ist hier ein Bereich von 400 nm bis 710 nm durchstimmbar, da für diesen großen Bereich allerdings verschiedene Resonatorspiegel notwendig sind und auch die Brillen nicht für diesen Wellenlängenbereich ausgelegt sind sollten sie im Bereich von 500 nm bis 600 nm bleiben.

Nehmen sie das Spektrum in Abhängigkeit der Winkelstellung des

4. Ausarbeitung der Versuchsergebnisse

Bitte achten Sie auf die physikalisch sinnvolle Aufbereitung der Ergebnisse beim anpassen geeigneter Modellfunktionen und hinreichende Genauigkeiten der Auswertung. Werden Größen aus gemessenen Werten berechnet, dann sind die zu Grunde liegende Formel und die zugehörige Quelle zu nennen. Weniger wichtig sind lange Beschreibungen des Versuchsaufbaus. Der Umfang der Ausarbeitung sollte 6 Seiten nicht übersteigen. Folgendes sollte die Ausarbeitung beinhalten:

- Titelblatt und Inhaltsverzeichnis
- Kurzbeschreibung des Versuches
- Schriftliche Beantwortung der Testatfragen
- Laserparameter: Rep-Frequenz, Leistung, Energie, Oszillatorlänge
- Graphische Darstellung der zeitlichen Pulsformen
- Graphische Darstellung der Pulsenergie über die Blitzlampenspannung (für 1064 nm, 532 nm und 355 nm) und der Konversionseffizienz (E_{532} bzw. E_{355} in Abhängigkeit E_{1064}) mit angefitteter Funktion. Welche Abhängigkeit zeigt diese? Diskussion.
- Berechnung der Konversionseffizienz der SHG für KTP, $E_{1064} = 200$ mJ, Strahldurchmesser 5 mm, $d_{\text{eff}} = 0.5$ pm/V und einer Kristalllänge von $l = 30$ mm (zeitliche Pulslänge siehe Versuchsergebnis von oben)
- Graphische Darstellung des Spektrums nach der SFG mit Erklärung der auftretenden Wellenlängen

Bei der Auswertung ist außerdem zu beachten, dass alle abgebildeten Graphiken im Text verwiesen und diskutiert werden. Desweiteren sollten alle Annahmen bei den Berechnungen in tabellarischer Form dargestellt und die Einheit des Ergebnisses kontrolliert werden.

5. Theoretische Grundlagen

5.1 Wechselwirkung zwischen Licht und Materie

Die lineare Optik beruht auf der Annahme, dass sich die Ausbreitung einer Lichtwelle in einem optischen Medium durch eine lineare Wellengleichung beschreiben lässt, unter Vernachlässigung von Streuung und Absorption. So lautet zum Beispiel die Helmholtz-Gleichung für das E-Feld in dielektrischen Medien:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P \quad (1)$$

$$c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (2)$$

Diese Gleichung ist auch für mehrere superpositionierte Wellen gültig, da sich diese unabhängig und ohne gegenseitiger Beeinflussung ausbreiten. Harmonische Wellen breiten sich verzerrungsfrei aus, unabhängig von Medium und Intensität.

Die lineare Optik geht davon aus, dass die optischen Eigenschaften eines Materials wie z.B. Brechungsindex und Absorptionskoeffizient, nicht von der Intensität der Welle abhängen. Es hat sich jedoch (insbesondere seit der Entwicklung des Lasers) gezeigt, dass die lineare Optik nicht in der Lage ist, alle beobachteten Effekte zu erklären. Durch die Bestrahlung von Materie mit sehr intensivem kohärentem Licht (wie z.B. Laserlicht) können nichtlineare Eigenschaften der Materie erzeugt werden. In solchen Fällen ist das Superpositionsgesetz, das die ungestörte Überlagerung von harmonischen Wellen beschreibt, verletzt und es ist eine Erweiterung der linearen Wellentheorie notwendig um die beobachteten Effekte zu beschreiben.

5.1.1 Erzeugung von harmonischen durch Nichtlinearitäten

Während die Polarisation P bei kleinen Schwingungen der Elektronen proportional zum elektrischen Feld E der Welle ist, besteht die strenge Proportionalität über [Tei07]

$$P = N q d E = \epsilon_0 \chi E \quad (3)$$

wobei N die Anzahl der verschobenen Teilladungen q und d deren Auslenkung gegenüber dem Ladungsschwerpunkt beschreibt. Diese Gleichung gilt jedoch bei hohen Lichtintensitäten nicht mehr, wie bei einer Feder, deren Anharmonizität mit steigender Auslenkung wächst. Bei intensivem kohärentem Licht kommt es in Materie zu Nichtlinearitäten, da die erzeugten atomaren elektrischen Dipole nicht mehr linear auf die elektrischen Wechselfelder der elektromagnetischen Welle reagieren. Die mikroskopische Verschiebung d der Elektronenhüllen der Atome um die Ruhelage führt zu einem makroskopischen Dipolmoment welches bei großen Auslenkungen nicht mehr proportional zur Kraft ist. Die hervorgerufene elektrische Polarisation des Materials kann nun nicht mehr nur mit einem linearen Term beschrieben werden, sondern wird als Taylor-Reihe folgendermaßen entwickelt [Tei07]:

$$P = a_1 E + \frac{1}{2} a_2 E^2 + \frac{1}{6} a_3 E^3 + \dots \quad (4)$$

Die Koeffizienten sind charakteristische Konstanten des Mediums. Der erste, lineare Term, dominiert bei kleinen elektrischen Feldstärken E , mit $a_1 = \varepsilon_0 \chi$, wobei χ die lineare Suszeptibilität darstellt, welche wiederum von der dielektrischen Konstante und dem Brechungsindex abhängt:

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi. \quad (5)$$

Der zweite Term repräsentiert die quadratische oder die Nichtlinearität zweiter Ordnung, der dritte Term die Nichtlinearität dritter Ordnung, usw.. Häufig wird für die Polarisation auch der Ausdruck

$$P = \varepsilon_0 \chi E + 2dE^2 + 4\chi^{(3)}E^3 + \dots \quad (6)$$

verwendet. Hier sind $d = \frac{1}{4}a_2$ ($a_2 = 2\varepsilon_0\chi^{(2)}$) und $\chi^{(3)} = \frac{1}{24}a_3$ die Größen der zweiten und dritten Ordnung des nichtlinearen Effekts, sowie die Größe $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ die Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Die Koeffizienten der Suszeptibilität $\chi^{(i)}$ nehmen mit zunehmender Ordnung schnell ab. Für Festkörper gilt typisch: $\chi^{(1)} \approx 1$, $\chi^{(2)} \approx 10^{-12} \text{ m/V}$ und $\chi^{(3)} \approx 10^{-21} \text{ m}^2/\text{V}^2$ [Nik99].

Der Zusammenhang zwischen Polarisation und dem anregendem elektrischen Feld kann bei einem Medium mit quadratischer Nichtlinearität wie in Abbildung 2 veranschaulicht werden.

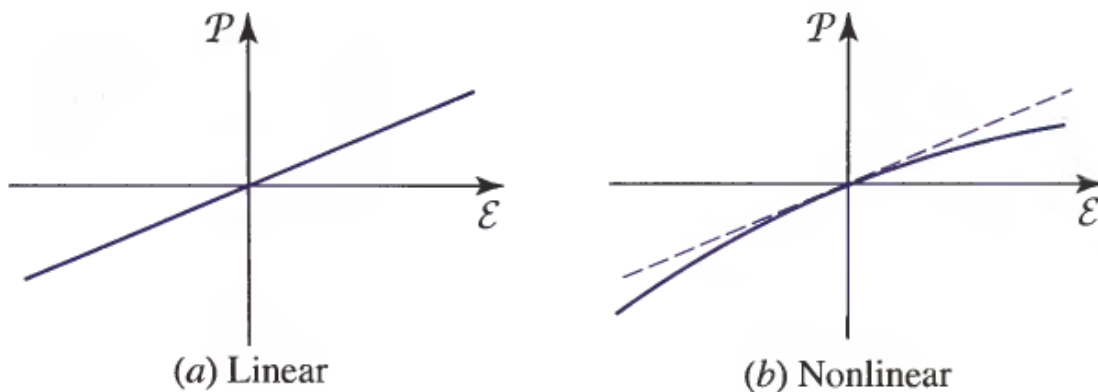


Abbildung 2: Zusammenhang der Polarisation P und der elektrischen Feldstärke E für ein lineares (a)) dielektrisches Medium und für ein nichtlineares (b)) dielektrisches Medium [Tei07].

Nichtlineare optische Suszeptibilitäten 2. Ordnung, $\chi^{(2)}$, treten nur in Kristallen, Flüssigkristallen und anderen anisotropen Materialien auf. Die quadratische Nichtlinearität ist für alle im Folgenden diskutierten Effekte entscheidend.

In isotropen Medien oder Kristallen mit Punktsymmetrie verschwindet der Term 2. Ordnung, denn die Elementarzelle solcher Kristalle besitzt ein Inversionszentrum. Kehrt sich die Richtung des erregenden Feldes um, so kann sich demnach nur das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Polarisation ändern. Das bedeutet, dass gleichzeitig $P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} (+E)^2$ und $-P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} (-E)^2$ gelten müsste, also $\chi^{(2)} P_2 = -\chi^{(2)} P_2$. Dies ist nur mit $\chi^{(2)} = 0$ erfüllt. Hieraus folgt für Kristalle mit Punktsymmetrie, dass alle geraden Terme der Polarisation verschwinden. Die analoge Betrachtung von Kristallen mit Achsensymmetrie ergibt, dass alle ungeraden Exponenten der Polarisation null sein müssen, demzufolge wäre keine Frequenzverdreifung möglich.

Die in Abbildung 3 dargestellten Effekte sind Teil der nichtlinearen Frequenzerzeugung (*optical frequency generation, OFC*), welche wiederum nur ein Teilgebiet der nichtlinearen Optik ist.

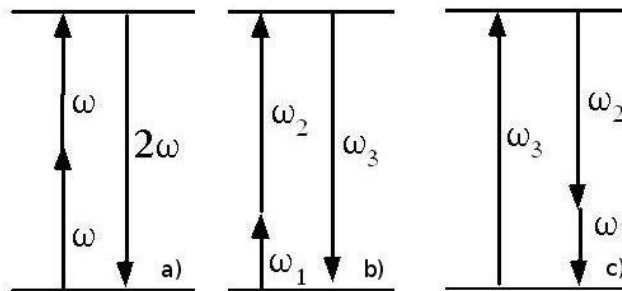


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Energieübergänge bei verschiedenen Phänomenen der optischen Frequenzkonversion (*optical frequency conversion, OFC*) wie die a) SHG (*second harmonic generation*), b) SFG (*sum frequency generation*) und c) DFG (*difference frequency generation*). Bei der SHG wird aus zwei einfallenden Photonen mit gleicher Energie ein Photon mit doppelter Energie erzeugt. Bei der SFG wird aus zwei Photonen unterschiedlicher Energie ein Photon mit der Summenenergie erzeugt. Die DFG liefert zwei Photonen, deren Summenenergie der Energie des einfallenden Photons entspricht [Mes08].

5.1.2 Frequenzverdopplung

Im durchzuführenden Versuch soll die Erzeugung der zweiten Harmonischen (*second harmonic generation, SHG*) in einem nichtlinearen Kaliumtitanylphosphat-Kristall (KTP-Kristall) untersucht werden. Der Effekt der Frequenzverdopplung lässt sich unter Betrachtung des Korrekturterms zweiter Ordnung (quadratische Nichtlinearität) erklären. Dieser Term lautet

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2. \quad (7)$$

Allgemein ist zu beachten, dass bei allen Interaktionsprozessen zwischen Wellen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein müssen:

- Energieerhaltung
- Impulserhaltung

Der Energieerhaltungssatz besagt im Fall der Frequenzverdopplung, dass $\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0 = \hbar(2\omega_0)$, wobei $\hbar = h/2\pi$ mit $h = 6.64 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ als Planck'sches Wirkungsquantum, ist. Die Gleichung bedeutet, dass aus zwei Photonen mit der Fundamentalenergie $\hbar\omega_0$ ein Photon mit der Energie $\hbar 2\omega_0$ erzeugt werden kann.

In gleicher Weise muss der Impulserhaltungssatz erfüllt sein (siehe auch Anhang 8.4). Es muss also gelten: $\hbar k_0 + \hbar k_0 = \hbar(2k_0)$ damit die Wellen kollinear interagieren können.

Die Dispersionsrelation besagt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle von der Frequenz abhängt. Da die Effizienz der Frequenzverdopplung von der Phasenlage der beiden kohärenten, interagierenden Wellen bestimmt wird, ist es entscheidend, die Wellen möglichst phasenstarr zu überlagern, was in Kapitel 6.3 näher erklärt werden soll.

Aufgrund der quadratischen Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke kann der Effekt nicht in beliebigen Materialien auftreten, sondern benötigt anisotrope Medien, wie einen solchen KTP-Kristall.

Wirkt ein elektrisches Feld der Form

$$E = E_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} E_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (8)$$

so erhält man mit dem quadratischen Term der Polarisation

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t), \quad (9)$$

was sich unter Verwendung von $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$ zu

$$P_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 (1 + \cos(2\omega t)) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos(2\omega t) \quad (10)$$

umformen lässt. Man erkennt, dass sich zwei Terme ergeben: der eine ist zeitunabhängig (DC-Term) und beschreibt die sogenannte *optische Gleichrichtung*. Der zweite Term beschreibt eine zeitabhängige Schwingung der Polarisation mit exakt der doppelten Frequenz der Fundamentalwelle. Dieser Term führt also zu einer signifikanten Erzeugung einer Welle mit einer Kreisfrequenz von 2ω im nichtlinearen Material, hierbei spricht man von Frequenzverdopplung oder von SHG (*second harmonic generation*).

Das Ziel bei der Frequenzverdopplung ist es, den zweiten Term zu maximieren, damit soviel Energie wie möglich auf die zweite Harmonische übertragen wird. Unter bestimmten Bedingungen ist es möglich, nahezu die gesamte Energie der Fundamentalwelle auf die zweite Harmonische zu konvertieren. Die höchste Konversionseffizienz erreicht man bei idealer Phasenanpassung, d.h. die Phasendifferenz zwischen Fundamentalwelle und zweiter Harmonischer hebt sich auf. Die möglichen Verfahren der Phasenanpassung werden in Kapitel 6.3 beschrieben.

5.1.3 Summen- und Differenzfrequenzerzeugung

Die bisherige Diskussion behandelte die Kombination (Addition) von zwei gleichfrequenten Wellen zu einer Welle mit der doppelten Kreisfrequenz. Dieser Prozess kann jedoch auch generell für zwei Wellen mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen betrachtet werden, die unter Erzeugung einer dritten Welle interagieren und wird allgemein als Dreiwellenmischung (*three wave mixing*) bezeichnet. Die Ausgangsform des elektrischen Gesamtfeldes lautet dann unter Einbeziehung der komplex-konjugierten Terme

$$E = (E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_1^* e^{i\omega_1 t}) + (E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_2^* e^{i\omega_2 t}). \quad (11)$$

Wirkt ein solches elektrisches Feld auf ein Medium mit einer quadratischen Nichtlinearität der Form

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 \quad (12)$$

ergibt sich eine zeitabhängige Gesamtpolarisation der Form

$$P_2 = \epsilon_0 \chi^{(2)} \left[E_1^2 e^{-i(2\omega_1)t} + (E_1^*)^2 e^{-i(2\omega_1)t} + E_2^2 e^{-i(2\omega_2)t} + (E_2^*)^2 e^{-i(2\omega_2)t} + 2E_1 E_1^* + 2E_2 E_2^* + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1^* E_2^* e^{+i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + 2E_1^* E_2 e^{+i(\omega_1 - \omega_2)t} \right] \quad (13)$$

Der hier dargestellte Ausdruck enthält sogenannte DC-Terme (z.B. $2E_1 E_1^*$), frequenzverdoppelte Terme (diese enthalten $2\omega_1$ und $2\omega_2$) und zwei neue Terme mit den Kreisfrequenzen $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$.

Der Term mit dem Ausdruck $\omega_1 + \omega_2$ führt zu einer neuen Welle mit einer Frequenz ω_3 , die der Summe der beiden ursprünglichen Frequenzen entspricht. Hierbei spricht man von Summenfrequenzerzeugung (*sum frequency generation*, SFG).

Ebenso erkennt man an dem Ausdruck der Gesamtpolarisation, dass ein Medium mit einer quadratischen Nichtlinearität es erlaubt, $\omega_1 - \omega_2$ zu erzeugen. Wenn man ω_1 so wählt, dass $\omega_1 > \omega_2$ ist, kann so eine Welle mit der Frequenz $\omega'_3 = \omega_1 - \omega_2$ erzeugt werden. Wobei die hochfrequente Welle $\omega_1 = \omega'_3 + \omega_2$ in zwei niederfrequente Wellen ω'_3 und ω_2 aufgespalten wird. Hierbei spricht man von Differenzfrequenzerzeugung (*difference frequency generation*, DFG). Vom Standpunkt des Photons aus betrachtet können also zwei verschiedene Effekte auftreten: Zum einen kann aus zwei absorbierten Photonen mit ω_1 und ω_2 ein Photon mit höherer Frequenz ω_3 erzeugt werden. Zum anderen kann aus einem hochenergetischen Photon mit ω_1 ein Paar aus Photonen mit ω'_3 und ω_2 erzeugt werden.

Es erscheint also möglich, dass eine Welle mit ω_2 durch Überlagerung mit einer zweiten Welle mit ω_3 verstärkt werden kann, wobei $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ gelten muss. Genau dieser Effekt wird bei der optischen parametrischen Verstärkung ausgenutzt, was später genauer betrachtet wird. Die bisherigen Überlegungen führen zur Annahme, dass alle Frequenzen $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$ gleichzeitig erzeugt werden, wenn zwei Wellen mit ω_1 und ω_2 in einem nichtlinearen Medium kohärent überlagert werden. Dies ist aber nicht der Fall, denn es muss die Bedingung der Phasenanpassung (*phase matching*) gewährleistet sein, um eine der genannten Frequenzen effektiv erzeugen zu können. Die Phasenanpassung kann jeweils nur für eine der genannten Frequenzen zu einem Zeitpunkt hergestellt werden.

5.2 Phasenanpassung

Wie bisher gezeigt wurde, können in einem nichtlinearen Medium verschiedene Frequenzen erzeugt werden. Welche der genannten Frequenzen erzeugt wird, ist durch die Phasenanpassungsbedingung definiert, welche durch die Energie- und Impulserhaltung mit folgender Form beschrieben wird:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (14)$$

$$\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 = \omega_3 n_3 \quad (15)$$

Dabei ist zu beachten, dass in Medien Dispersion herrscht, d.h. jede Welle hat eine frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit. Beide Bedingungen müssen gleichzeitig erfüllt sein um eine Welle effizient erzeugen zu können.

5.2.1 Beispiel Phasenanpassung bei kollinearer Frequenzverdopplung

Als Beispiel soll die Phasenanpassung im Folgenden anhand der Frequenzverdopplung bei kollinear zueinander laufenden Wellen diskutiert werden. Die Ausgangswelle mit der Kreisfrequenz ω (entsprechend zu oben: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) soll sich zunächst in einem nichtlinearen Medium der Länge l ausbreiten. Am Ende dieser Strecke überlagern sich alle Wellenfronten der entlang des Weges entstandenen Teilwellen mit der Frequenz 2ω (entspricht ω_3). Damit an diesem Punkt eine gleichphasige, konstruktive Überlagerung stattfinden kann, muss sich die frequenzverdoppelte Welle mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten, wie die Grundwelle. Es muss also $n_1 \omega = n_2 2\omega$ gelten. Dies ist jedoch in dispersiven Medien aufgrund des frequenzabhängigen Brechungsindex nicht der Fall. Daher kommt es zu Phasendifferenzen der 2ω -Teilwellen, die sogar zur völligen Auslöschung führen können. In diesem Fall kann keine frequenzverdoppelte Welle hinter dem Kristall beobachtet werden. Setzt man aber eine Kristalllänge von l_K so an, dass die bei $l = 0$ und bei $l = l_K$ erzeugten Teilwellen gerade einen Gangunterschied von $\Delta = \lambda_{2\omega}/2 = \lambda_\omega/4$ haben, so beobachtet man maximale Intensität der frequenzverdoppelten Welle. Der Gangunterschied entspricht gerade der Differenz der optischen Wege beider Wellen im Medium, also $\Delta = (n_{2\omega} - n_\omega) \cdot l_K = \Delta n \cdot l_K$. Dies liefert den Ausdruck

$$\Delta = \frac{\lambda_\omega}{4} = (n_{2\omega} - n_\omega) \cdot l_K, \quad (16)$$

wobei die Größe l_K als Kohärenzlänge bezeichnet wird. Genauer gesagt ist l_K die Länge unter der die Wellen interagieren können. l_K kann also ausgedrückt werden durch

$$l_K = \frac{\lambda_\omega}{4\Delta n}. \quad (17)$$

Die Länge l_K stellt damit ein Optimum für die auszuwählende Kristalllänge dar. Wenn die Kristalllänge größer als l_K wird, nimmt die Intensität der generierten frequenzverdoppelten Welle wieder ab. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden hergeleitet.

Die Zunahme des elektrischen Felds der frequenzverdoppelten Wellen kann wie folgt beschrieben werden (wenn die Verluste gering sind):

$$\frac{\partial E(2\omega)}{\partial z} = \frac{-i\omega}{n_{2\omega}c} dE^2(\omega) e^{i\Delta k z} \quad (18)$$

mit $\Delta k = k(2\omega) - k(\omega)$. Für niedrige Konversionseffizienzen, d.h. $E(2\omega) \ll E(\omega)$, bleibt $E(\omega)$ über die interagierende Länge gleich (unabgeschwächte Pumpe; *undepleted pump*). Mit der Annahme $E(2\omega, z = 0) = 0$ gilt dann:

$$E(2\omega, z = l) = -\frac{i\omega d}{n_{2\omega}c} E^2(\omega) \int_0^l e^{i\Delta k z} dz = -\frac{i\omega d}{n_{2\omega}c} E^2(\omega) l \frac{\sin\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\frac{\Delta k l}{2}} e^{\frac{i\Delta k l}{2}} \quad (19)$$

Für die (optische) Intensität gilt:

$$I(2\omega) = \frac{n_{2\omega}}{2} \frac{|E^2|}{\eta_0} = \frac{n_{2\omega}}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E^2| \quad (20)$$

Somit lässt sich schreiben:

$$I(2\omega, l) = \frac{2\omega^2 d^2 l^2}{n_{2\omega} n_\omega^2 c^3 \epsilon_0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\frac{\Delta k l}{2}} \right)^2 I^2(\omega) \quad (21)$$

Eine genauere Herleitung von Gleichung (21) findet sich in Anhang 8.3. Setzt man für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ein und verwendet die Beziehung $c = \lambda f$ und beachtet, dass $E^2(\omega) \propto I(\omega) = I_\omega$ ist, lässt sich letztlich schreiben:

$$I(2\omega, l) = \frac{8\pi^2 d^2 l^2}{n_{2\omega} n_\omega^2 c \epsilon_0 \lambda_\omega^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\frac{\Delta k l}{2}} \right)^2 I^2(\omega) \quad (22)$$

Im günstigsten Fall der vollständigen Phasenanpassung, ist $\Delta n = 0$, also $l_K \rightarrow \infty$, und somit $\text{sinc}(0) = 1$. Lässt man die Intensitätsabnahme der Grundwelle außer Acht, so würde $I_{2\omega}$ proportional zu l^2 über alle Grenzen wachsen. Unter Berücksichtigung der Verluste der Grundwelle ergibt sich bei wachsender Kristalllänge statt dessen ein Verlauf proportional zu \tanh^2 . Der Verlauf der Intensität der frequenzverdoppelten Welle wird also hinsichtlich seines Maximalwertes, sowie seiner Periodizität von der Kristalllänge l_K bestimmt.

5.2.2 Möglichkeiten der Phasenanpassung

Wie oben bereits diskutiert spricht man bei $\Delta n = 0$ von Phasenanpassung. Eine gleichbedeutende Formulierung, welche in vielen Lehrbüchern enthalten ist lautet

$$\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega = 0. \quad (23)$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, kann man das im folgenden beschriebene Phänomen der Doppelbrechung in anisotropen Kristallen ausnutzen. Es gibt unterschiedliche Methoden, die auf der Richtungsabhängigkeit des Brechungsindex für den außerordentlichen Strahl beruhen. Diese sollen im Folgenden diskutiert werden.

Doppelbrechung

Eine Möglichkeit, die Phasenanpassungsbedingung in doppelbrechenden nichtlinearen Medien trotz der Dispersion zu erfüllen, besteht darin, den Effekt der Doppelbrechung auszunutzen, dieser tritt beim Durchgang von Licht durch anisotrope Kristalle auf. Die Ursache hierfür liegt in der unterschiedlichen Stärke elektrischer Polarisierbarkeit in verschiedenen Richtungen. Bei einem uniaxialen Kristall wird die Symmetrieachse auch als optische Achse (O.A.) bezeichnet (siehe Abbildung 4).

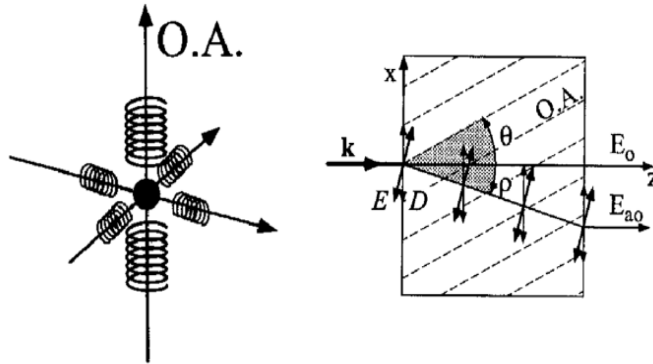


Abbildung 4: Schematische Darstellung der verschiedenen Bindungskräfte in die unterschiedlichen Raumrichtungen (links) und die Ausbreitung verschieden polarisierter Strahlen in einem doppelbrechenden Kristall. Der mit E_o (o für ordentlich) bezeichnete Strahl ist senkrecht zur Zeichenebene polarisiert und erfährt keine Ablenkung. Der mit E_{ao} (ao für außerordentlich) bezeichnete Strahl erfährt dagegen eine Ablenkung. Mit O.A. ist die optische Achse des Kristalls bezeichnet [Mes08].

Ein parallel zur optischen Achse polarisierter Lichtstrahl sieht einen anderen Brechungsindex als ein senkrecht polarisierter Strahl. Verwendet man ein Koordinatensystem, welches als eine der Achsen die optische Achse beinhaltet, so hat der Dielektrizitätstensor Diagonalgestalt (Hauptachsenform), und es gilt:

$$D = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} E \quad (24)$$

Das Ausweichen (*walk off*) des außerordentlichen Strahls kann man mit Hilfe des Huygensschen Prinzips verstehen, wonach die Ausbreitungsrichtung immer die Normale zur Einhüllenden der Wellenfront der Elementarwellen ist. Für den senkrecht zur optischen Achse polarisierten Anteil der Welle hängt der Brechungsindex n_o und damit auch die Phasengeschwindigkeit nicht von der Richtung ab. Daher bilden die Phasenfronten der Elementarwellen Kugeln in der Einfallsebene (Einfallsebene wird durch die optische Achse und die Ausbreitungsachse aufgespannt).

Für den parallel zur Einfallsebene polarisierten Anteil kann der E-Vektor aufgespalten werden in eine Komponente parallel und eine senkrecht zur optischen Achse. Diese beiden Komponenten weisen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten auf, weshalb die Wellenfronten für die außerordentliche Welle Ellipsen darstellen. Im Gegensatz zum ordentlichen Strahl hat beim außerordentlichen Strahl das elektrische Feld \vec{E} nicht die gleiche Richtung wie die Verschiebung \vec{D} . Der Ausbreitungsvektor \vec{k} steht nicht wie sonst senkrecht auf den elektrischen Feldvektor, sondern senkrecht auf den Vektor der dielektrischen Verschiebung \vec{D} . Für den Ablenkwinkel (*walk off angle*) gilt (mit den Bezeichnungen aus Abbildung 4)

$$\tan(\rho) = \frac{n(\theta)^2}{2} \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \quad (25)$$

Nur wenn die Ausbreitungsrichtung mit der Richtung der optischen Achse zusammenfällt, findet keine Doppelbrechung statt.

Kritische oder Winkel-Phasenanpassung

Die Geschwindigkeitsflächen von ordentlichem und außerordentlichem Strahl bilden in uniaxialen anisotropen Kristallen Kreise bzw. Ellipsen (siehe Abbildung 5).

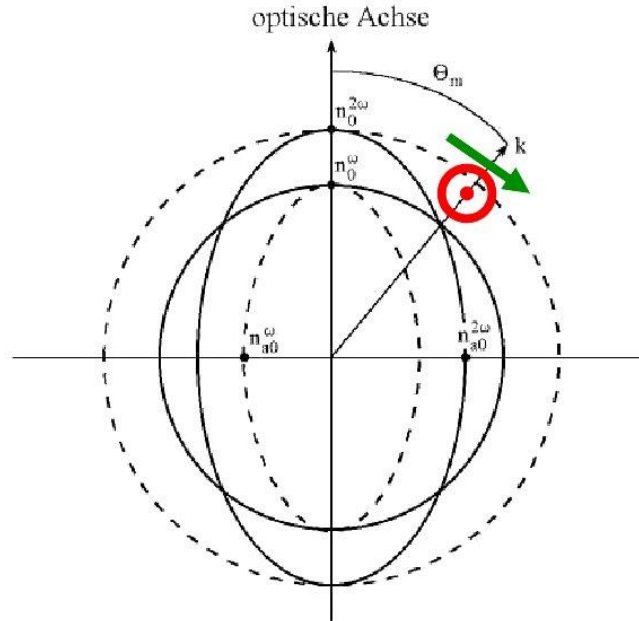


Abbildung 5: Phasenanpassung (Typ I) in einem negativ uniaxialen Kristall ($n_{ao} < n_o$). Die Polarisation der Fundamentalwelle (rot) wird senkrecht zur Hauptschnittebene (aufgespannt durch die optische Achse und die Ausbreitungsachse k) eingestellt. Die Polarisation der zweiten Harmonischen ist parallel zur Hauptschnittebene (grün) [LTH10].

Die Schnittpunkte dieser Kurven bezeichnen Richtungen (relativ zur optischen Achse mit dem Winkel θ_m (m für *matching*) angegeben), in denen $c_\omega = c_{2\omega}$ gilt. Hierzu muss der Kristall präzise zur Ausbreitungsrichtung des Strahls ausgerichtet werden. Man unterscheidet zwei Typen von Winkelanpassung (siehe Abbildung 6):

1. Skalare oder kollineare Phasenanpassung – Typ I. Hierbei wird die Polarisation der Grundwelle komplementär zu der Polarisation der Oberwelle gewählt. Da man es in Kristallen gewöhnlich mit normaler Dispersion zu tun hat (d.h. höherfrequentes Licht wird stärker gebrochen), muss man für die Oberwelle immer den kleineren Brechungsindex wählen. Bei negativ uniaxialen Kristallen ($n_e < n_o$) ist daher die Belegung Oberwelle \rightarrow außerordentlicher Strahl, Grundwelle \rightarrow ordentlicher Strahl zu wählen, im positiv uniaxialen Kristall ($n_e > n_o$) entsprechend umgekehrt. Für den optimalen Phasenanpassungswinkel gilt die Beziehung (25) für uniaxiale Kristalle und im Fall eines positiven uniaxialen Kristalls ergibt sich statt dessen die Beziehung (26) (Herleitung siehe Anhang 8.5). (Beachten sie das diese Beziehung nur gilt wenn der richtige Quadrant im KO-System gewählt ist).

$$\sin^2 \theta_m = \frac{(n_{o,\omega})^{-2} - (n_{o,2\omega})^{-2}}{(n_{e,2\omega})^{-2} - (n_{o,2\omega})^{-2}} \quad (26)$$

$$\sin^2 \theta_m = \frac{(n_{o,\omega})^{-2} - (n_{o,2\omega})^{-2}}{(n_{o,\omega})^{-2} - (n_{e,\omega})^{-2}} \quad (27)$$

2. Vektorielle Phasenanpassung – Typ II und höher. Die Polarisation der Grundwelle wird auf ordentlichen und außerordentlichen Strahl verteilt (d.h. verkippt unter einem Winkel von 45° zu den Kristallachsen eingestrahlt). Die Oberwelle entsteht als ordentlicher oder außerordentlicher Strahl. Dieser Typ der Phasenanpassung wird bei SFG und DFG verwendet.

Bei der kritischen Phasenanpassung hat man jedoch das Problem, dass bei einem Winkel von $\theta_m \neq 0^\circ$ oder 90° der Strahl der Oberwelle von der Richtung des Grundwellenstrahles wegwandert und so die Überlagerungsstrecke erheblich verkürzt wird (*walk off*); als Folge davon nimmt dann die Intensität der zweiten Harmonischen nicht mehr quadratisch, sondern nur noch linear mit der Kristalllänge l zu (daher der Name kritische Phasenanpassung).

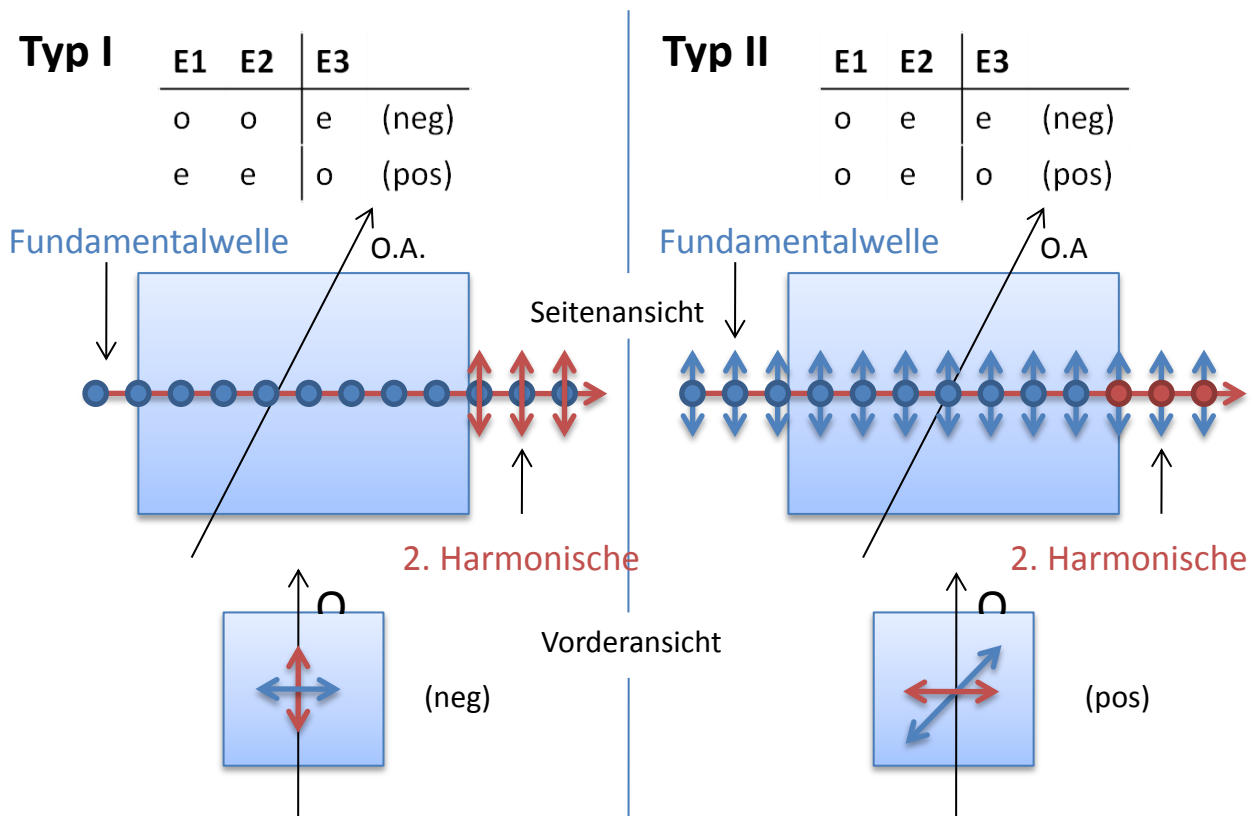


Abbildung 6: Tabellarische und graphische Darstellung der Polarisationszustände von Ein- und Ausgangswellen bei kollinearer Frequenzverdopplung mit Typ I (links) und Typ II (rechts) Phasenanpassung. Mit O.A. ist die optische Achse des Kristalls bezeichnet. Die blauen Pfeile und Punkte symbolisieren die Polarisation der Fundamentallwelle(n) und die roten Pfeile und Punkte die Polarisation der entstehenden zweiten Harmonischen.

Unkritische oder Temperatur-Phasenanpassung

Das Ablenk- (*walk off*)-Problem kann umgangen werden, wenn die Phasenanpassung unter einem Winkel von $\theta_m = 90^\circ$ stattfindet. Bei bestimmten Kristallen ist dies möglich, da sich einer der beide Brechungsindizes über einen größeren Bereich durch die Kristalltemperatur beeinflussen lässt. Das in unserem Versuch verwendete Material KTP eignet sich besonders gut, da es starke nichtlineare Eigenschaften besitzt und Temperaturanpassung im Bereich des nahen Infrarot ermöglicht.

Quasi-Phasenanpassung

Die geringe Konversionseffizienz von einem Laserstrahl bei einem Einfach-Durchgang durch ein nichtlineares Material hat dazu geführt, dass nach neuen Materialien und Methoden geforscht wurde, mit denen nichtlineare Prozesse effizienter generiert werden können. Für ferroelektrische Materialien wie beispielsweise Lithiumniobat (LiNbO_3) oder Lithiumtantalat, bei denen periodisches Polen möglich ist, hat sich die sogenannte Quasi-Phasenanpassung etabliert. Diese beruht auf der Idee [Arm62], den nichtlinearen Kristall nach jeweils einer Kohärenzlänge durch einen „invertierten“ Kristall zu ersetzen. Diese „Inversion“ bedeutet einen Vorzeichenwechsel der nichtlinearen Suszeptibilität zweiter Ordnung ($\chi^{(2)}$). Die heute gängige Methode zur Realisierung der Quasi-Phasenanpassung ist die periodische Umkehr der Spontanpolarisierung in geeigneten ferroelektrischen Kristallen. Im Fall von LiNbO_3 spricht man dann von periodisch gepoltem LiNbO_3 (periodically poled Lithiumniobat, PPLN). Bereiche im Kristall mit einheitlicher Polarisierung werden als ferroelektrische Domänen bezeichnet. Der entscheidende Vorteil der Quasi-Phasenanpassung ist die Tatsache, dass quasi-phasenangepasste Kristalle für nichtlineare Prozesse bei prinzipiell beliebigen Wellenlängen flexibel und kostengünstig hergestellt werden können. Außerdem entsteht in periodisch gepolten Kristallen keine Ablenkung (*walk-off*) des Strahls.

Bei der Herstellung von Materialien für die Quasi-Phasenanpassung müssen Elektroden auf den Kristall aufgebracht werden, die ungefähr eine Kohärenzlänge breit sind. Über diese Elektroden wird der Kristall dann einem starken elektrischen Feld ausgesetzt, welches die Domänen in der richtigen Weise ausrichtet [Yam93]. Beim Aufbringen der mikrostrukturierten Elektroden kommen Techniken aus der Photolithographie zum Einsatz.

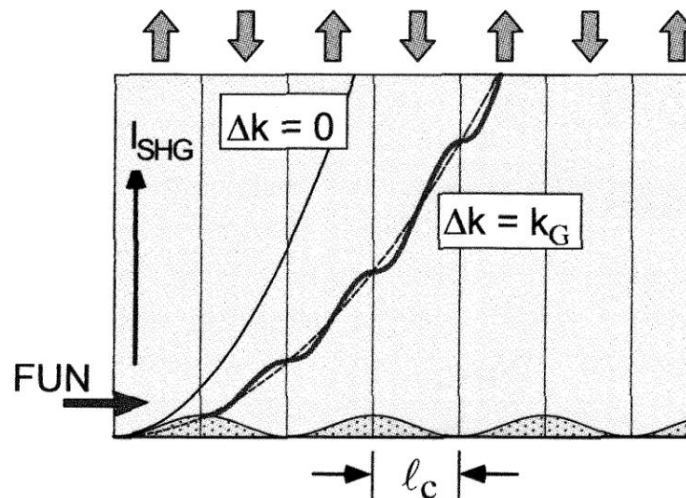


Abbildung 7: Theoretischer Intensitätszuwachs der 2. Harmonischen im Fall von perfekter Phasenanpassung ($\Delta k=0$), Quasi-Phasenanpassung ($\Delta k=k_G$) und Phasenanpassung mit fester Fehlanpassung (sinusförmiger Intensitätsverlauf). Die wechselnde Orientierung der Domänen ist schematisch mit Pfeilen angedeutet [Mes08].

Wie in Abbildung 7 dargestellt, steigt die Intensität der 2. Harmonischen im Fall von perfekter Phasenanpassung ($\Delta k=0$) mit dem Quadrat der Interaktionslänge. Im Fall eines festen Phasenanpassungsfehlers fließt die Energie zwischen der Fundamentalwelle und der 2. Harmonischen sinusförmig hin und her. Die Hälfte einer Periode ist dabei die Kohärenzlänge l_k , über welche die Intensität der 2. Harmonischen wachsen kann.

Im Fall von periodisch gepoltem Material wird die Phase jeweils nach Erreichen von einem Phasenfehler von π durch die Domänenumkehrung zurückkorrigiert, sodass ein kontinuierlicher Energiefluss von der Fundamentalwelle zur 2. Harmonischen stattfinden

kann. Im Mittel kann ein quadratischer Anstieg der Intensität mit der Interaktionslänge angenommen werden, wobei zu beachten ist, dass der Nichtlinearitätskoeffizient bei der Berechnung mit Faktor $2/\pi$ multipliziert werden muss. Die Herkunft dieses Faktors soll nun beschrieben werden.

Die bereits diskutierte Kohärenzlänge l_k , nach der die Fundamentalwelle und die 2. Harmonische nicht mehr in Phase sind, definiert die Länge nach der die Domäne künstlich variiert werden muss. Die theoretische Beschreibung des Nichtlinearitätskoeffizienten entlang des PPLN Kristalls kann aufgrund des periodischen Vorzeichenwechsels als Fourier Reihe $d(z) = d_{eff} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{-ik_m z}$ mit $G_m = \frac{2}{m\pi} \sin(\frac{m\pi l}{\Lambda})$ beschrieben werden [Mes08].

Hierin beschreibt $k_m = 2\pi m/\Lambda$ die Länge des reziproken Vektors des Domänengitters und Λ die Länge der einzelnen Domänen. Letztendlich spielt nur eine bestimmte Fourierkomponente eine signifikante Rolle, alle anderen Komponenten führen nur zu einer geringen Konversion, ähnlich wie bei unangepasster Phase ohne periodisch gepoltem Material. Die wichtigsten Koeffizienten $m=1, 3, \dots$ der Fourierreihe erfüllen die Quasi-Phasenanpassungsbedingung (*quasi-phase matching condition*) $\Delta k = k_m$, wobei der Koeffizient $m=1$ dominiert und daher näherungsweise ein reduzierter Nichtlinearitätskoeffizient von $d_Q = 2/\pi d_{eff}$ hergeleitet werden kann.

5.3 Nichtlineare Kristalle

Ein quadratisches, nichtlineares, dielektrisches Medium ist durch die Beziehung der Polarisation und des elektrischen Feldes durch

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 \quad (28)$$

beschrieben. Typische Werte der zweiten Ordnung der Nichtlinearität für dielektrische Kristalle, Halbleiter und organische Materialien, welche häufig in der Photonik Anwendung finden, liegen im Bereich von $d = 10^{-24} \dots 10^{-21} \frac{C}{V^2}$ (Einheiten im MKS-System). Typische Werte der dritten Ordnung ($\chi^{(3)}$) für Gläser, Kristalle, Halbleiter, mit Halbleitermaterialien dotierte Gläser und organische Materialien sind $\chi^{(3)} = 10^{-34} \dots 10^{-29} \frac{Cm}{V^3}$ (Einheiten ebenfalls im MKS-System). Die Umrechnung von d in $\left[\frac{C}{V^2}\right]$ zu d_{eff} in $\left[\frac{pm}{V}\right]$ erfolgt durch Division mit der dielektrischen Permittivität $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$. In anisotropen Medien ist jede der drei Komponenten des Polarisationsvektors ($P = (P_1, P_2, P_3)$) eine Funktion der drei Komponenten des elektrischen Feldes. Durch Taylorreihenentwicklung kann somit die Polarisation mit

$$P = \varepsilon_0 \left(\sum_j \chi_{ij} E_j + 2 \sum_{jk} d_{ijk} E_j E_k + 4 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \right) \quad (29)$$

beschrieben werden. In der nichtlinearen Optik wird häufig die sogenannte *kontrahierte Notation* benutzt, die zunächst durch den Tensor $d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)}$ definiert ist. Für eine detaillierte Erklärung, sowohl auf mathematischer Ebene als auch auf atomarer Ebene (Herleitung der Polarisation aus den DGL des nichtharmonischen Oszillators, Kristallsymmetrie, Entstehung der Matrix durch die Koeffizienten d und Definition von d_{eff}), wird auf folgende Literatur verwiesen: [Tei07], [Mid73], [Mes08] und [She02].

Die Matrix, mit der man mit Hilfe des d_{ij} -Tensors die Frequenzverdopplung beschreiben kann, lautet:

$$\begin{pmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{pmatrix} = 2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Kristalle mit Inversionssymmetrie weisen keine Nichtlinearität 2. Ordnung ($\chi^{(2)}$) auf, da bei Inversion aller Koordinaten sich sowohl das Vorzeichen der Feldamplituden als auch das Vorzeichen der Polarisierung umdreht:

$$P_i(r) = d_{ijk}E_j(r)E_k(r) \rightarrow -P_i(r) = d_{ijk}E_j(-r)E_k(-r) \quad (31)$$

Aus diesem Grund scheiden für diese nichtlinearen Prozesse von 32 Kristallklassen die 11 inversionssymmetrischen aus. Die Symmetrieeigenschaften der übrigen Kristallklassen reduzieren die Anzahl der nichtverschwindenden und voneinander unabhängigen nichtlinearen Koeffizienten (d) erheblich. Abbildung 8 die übliche Notation von biaxialen, uniaxialen und uniaxialen/isotropen Medien und die Koeffizienten, die $\neq 0$ sind. In Abbildung 9 sind die Nichtlinearitätskoeffizienten zweiter und dritter Ordnung von bekannten Kristallen dargestellt.

Um nichtlineare Effekte besonders effizient zu nutzen, sind Materialien mit möglichst hoher Nichtlinearität notwendig. Die Strahlungsintensitäten sind proportional zur Eingangsintensität jeder beteiligten Wellenlänge. Bei Frequenzverdopplung ergibt sich eine Proportionalität zum Quadrat der Eingangsintensität ($E^2 \sim I$). Der Wirkungsgrad der Frequenzkonversion steigt also mit steigender Eingangsintensität. Somit sind für nutzbare Strahlungsintensitäten durch Frequenzkonversion sehr hohe (meist gepulste) Eingangsintensitäten nötig, in manchen Fällen sogar eine Fokussierung auf den Kristall. Diese Fokussierung halten aber nicht alle Materialien stand. Häufig tritt der Effekt der Bildung von Farbzentren auf, die die weiter einfallende Strahlung dann absorbieren, was wiederum zu einer starken Erwärmung und somit zu einer möglichen Zerstörung des Mediums führt. Wichtige Eigenschaften von nichtlinearen Kristallen sind somit die Nichtlinearität, Doppelbrechung, (möglichst hohe) Zerstörungsschwelle und eine hohe Reinheit der Medien, d.h. frei von Schlieren und Einschlüssen. Die eben genannten Eigenschaften werden nur von wenigen Substanzen erfüllt. Die bekanntesten sind im Folgenden aufgeführt.

- Lithium-Borat LBO (LiB_2O_5)
- Beta-Barium-Borat BBO ($\beta - BaB_2O_4$)
- Kaliumtitanyl-Phosphat KTP ($KTiOPO_4$)
- Kaliumdihydrogen-Phosphat KDP (KH_2PO_4)
- Deuteriertes KDP ($KD^*P = KD_2PO_4$)
- Lithium-Niobat LNO ($LiNbO_3$)
- Barium-Titanat ($BaTiO_3$)

Abbildung 10 zeigt einige Koeffizienten wichtiger Materialien. Für die SFG und auch für den OPO unseres Versuchs wird jeweils ein Beta-Barium-Borat (BBO) verwendet. Dieser Kristall ist ein negativer uniaxialer Kristall¹. Es gilt [Nik99]:

¹Falls $n_o > n_e$, werden die Kristalle als negativ deklariert und bei $n_o < n_e$ als positiv [Nik99], [Mid73].

$$n_o^2 = 2,7359 + \frac{0,01878}{\lambda^2 - 0,01822} - 0,01354\lambda^2 \quad (32)$$

$$n_e^2 = 2,7353 + \frac{0,01224}{\lambda^2 - 0,01667} - 0,01516\lambda^2 \quad (33)$$

Der BBO-Kristall gehört der 3m-Gruppe an, was zu einem effektiven nichtlinearen Koeffizienten von [Nik99]

$$d_{ooe} = d_{31} \cdot \sin(\Theta) - d_{22} \cdot \cos(\Theta)\sin(3\Phi) \quad (34)$$

$$d_{eoe} = d_{oeo} = d_{22}\cos^2(\Theta)\cos(3\Phi) \quad (35)$$

führt (Typ I Gleichung (34) und Typ II (35)), wobei der erste Index von d die Strahlung mit der niedrigsten und der dritte Index die mit der höchsten Frequenz beschreibt. Eine Erklärung zur Herleitung der effektiven nichtlinearen Koeffizienten finden Sie im Anhang 8.6. Im Folgenden werden für einen BBO-Kristall Formeln zur Bestimmung des Ablenkswinkels (*walk off angle*, ρ) und des Schnittwinkels, Θ_c , bereitgestellt [Nik99]:

$$\rho(\Theta) = \pm \arctan \left[\left(\frac{n_o}{n_e} \right)^2 \tan(\Theta) \right] \mp \Theta \quad (36)$$

Die oberen Vorzeichen werden bei negativen Kristallen und die unteren Vorzeichen bei positiven Kristallen verwendet. Es ergibt sich bei einem $n_o = 1.7$, $n_e = 1.65$ und $\Theta = 38.15^\circ$ für einen negativen uniaxialen Kristall ein Ablenkswinkel von $\rho = 1.673^\circ$. Der Schnittwinkel des Kristalls lässt sich mit [Nik99]

$$\Theta_c = \arctan \left(\frac{|n_o^2 - n_e^2| \cdot L}{2\delta n_o^2} \pm \left| \frac{(n_o^2 - n_e^2) \cdot L^2}{4\delta^2 n_o^4} - \frac{n_o^2}{n_e^2} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \quad (37)$$

berechnen, wobei $\delta = L \cdot \tan(\rho)$ ist. Es ergibt sich somit mit den gleichen Angaben wie bei der Berechnung des Ablenkswinkels und einer Kristalllänge von 5mm ein Schnittwinkel von $\Theta_c = 74^\circ$.

Biaxial	Uniaxial	Uniaxial/Isotrop
32	3	622 422
m	3m	32
mm2	$\bar{6}$	6mm 4mm
2	6m2	$\bar{4}$
222	6	42m 43m 23
	4	

Abbildung 8: Nichtlineare Koeffizienten (d_{eff}), die nicht den Wert 0 besitzen. Identische Koeffizienten sind mit Linien verbunden (gestrichelt: nur bei Kleinman-Symmetrie). Volle und offene Symbole weisen auf verschiedene Vorzeichen hin. Quadratische Symbole verschwinden bei Kleinman-Symmetrie [Mes08].

Second-order nonlinear coefficients d_{ij} for some representative crystal groups.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Cubic $\bar{4}3m$ (e.g., GaAs, CdTe, InAs)	Tetragonal $\bar{4}2m$ (e.g., KDP, ADP)	Trigonal $3m$ (e.g., BBO, LiNbO ₃ , LiTaO ₃)

Third-order nonlinear coefficients $\chi_{IK}^{(3)}$ for an isotropic medium.

$\begin{bmatrix} \chi_{11}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{12}^{(3)} & \chi_{11}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{12}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & \chi_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$	$\chi_{44}^{(3)} = \frac{1}{2} (\chi_{11}^{(3)} - \chi_{12}^{(3)})$
--	---

Abbildung 9: Nichtlinearitätskoeffizient d_{ij} (oben) und $\chi_{ik}^{(3)}$ (unten) [Tei07].

Representative magnitudes of second-order nonlinear optical coefficients for selected materials.^a

Crystal	d_{ij} (C/V ²)	d_{ij}/ϵ_0 (pm/V) ^b
β -BaB ₂ O ₄ (BBO)	$d_{22} = 2.0 \times 10^{-23}$ $d_{31} = 3.5 \times 10^{-25}$	2.2 0.04
LiB ₃ O ₅ (LBO)	$d_{31} = 5.9 \times 10^{-24}$ $d_{32} = 7.5 \times 10^{-24}$ $d_{33} = 3.5 \times 10^{-25}$	0.67 0.85 0.04
LiIO ₃	$d_{31} = 3.9 \times 10^{-23}$ $d_{33} = 4.1 \times 10^{-23}$	4.4 4.6
LiNbO ₃	$d_{22} = 1.9 \times 10^{-23}$ $d_{31} = 4.1 \times 10^{-23}$ $d_{33} = 2.2 \times 10^{-22}$	2.1 4.6 25.2
KNbO ₃	$d_{31} = 1.1 \times 10^{-22}$ $d_{32} = 1.2 \times 10^{-22}$	11.9 13.7
KTiOPO ₄ (KTP)	$d_{31} = 2.0 \times 10^{-23}$ $d_{32} = 3.3 \times 10^{-23}$ $d_{33} = 1.3 \times 10^{-22}$	2.2 3.7 14.6
KH ₂ PO ₄ (KDP)	$d_{36} = 3.1 \times 10^{-24}$	0.38
NH ₄ H ₂ PO ₄ (ADP)	$d_{36} = 4.2 \times 10^{-24}$	0.47
α -SiO ₂ (quartz)	$d_{11} = 2.7 \times 10^{-24}$	0.30
KBe ₂ BO ₃ F ₂ (KBBF)	$d_{11} = 4.3 \times 10^{-24}$	0.49
GaAs	$d_{14} = 1.5 \times 10^{-21}$	170.
Te	$d_{11} = 5.8 \times 10^{-21}$	650.

^aMost of the coefficients are as reported by D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey*, Springer-Verlag, 2005. Values are provided at a wavelength $\lambda_0 = 1.06 \mu\text{m}$ except for Te, which is provided at $\lambda_0 = 10.6 \mu\text{m}$.

^bThe coefficients d/ϵ_0 , specified in units of pm/V, are often used in practice. The nonlinear optical coefficients in C/V² (MKS units) are readily converted to pm/V by dividing d by $10^{-12}\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-24}$.

Abbildung 10: Liste wichtiger nichtlinearer Koeffizienten [Tei07].

5.4 Parametrische Verstärkung und Oszillation

Um den Vorgang der parametrischen Oszillation besser zu verstehen, wird zunächst die optische parametrische Verstärkung (im Folgenden mit OPA bezeichnet) näher erläutert.

5.4.1 Optisch Parametrischer Verstärker - OPA

Ein OPA (*optical parametric amplifier*) verwendet die sogenannte Dreiwellenmischung (*three-wave mixing*) in einem nichtlinearen Kristall um die optische Verstärkung zu ermöglichen [Tei07]. Das Signal, mit ω_1 bezeichnet, mit einer kleinen Intensität $I_1(0)$, wird erzeugt und unter bestimmten Bedingungen verstärkt. Durch die hohe Intensität des Pumplichts mit ω_3 wird eine optische Verstärkung ermöglicht. Die Hilfs-(*Idler*-)Wellenlänge mit λ_2 bzw. ω_2 entsteht durch Überlagerung der beiden anderen. Verdeutlicht wird dieser Vorgang in Abbildung 11.

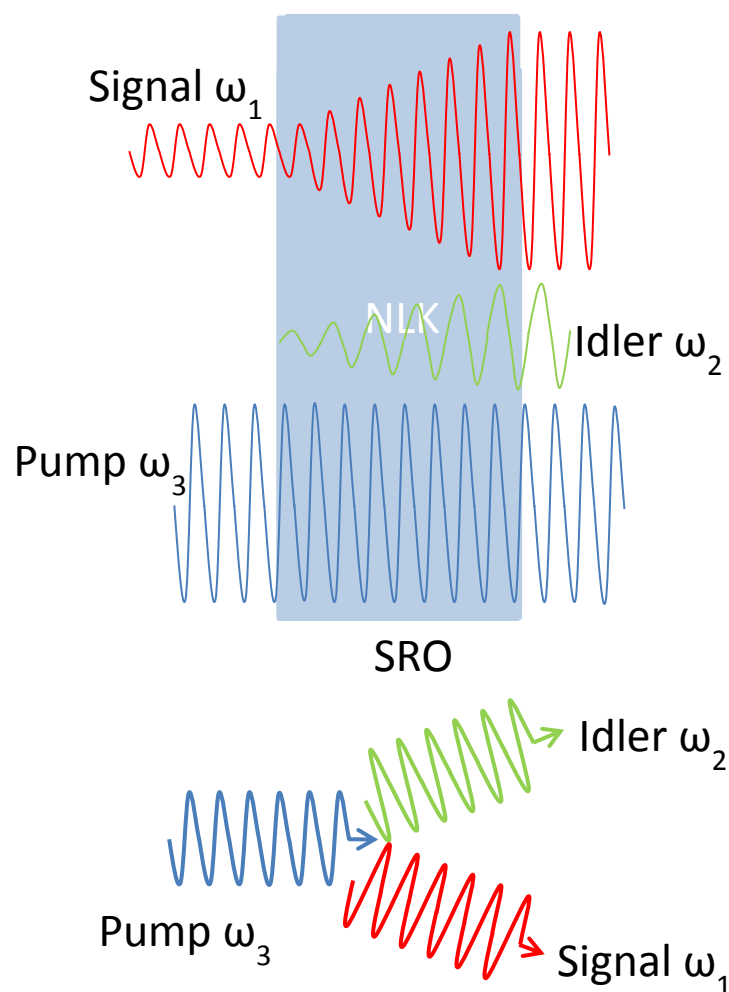


Abbildung 11: Das Prinzip der optischen parametrischen Verstärkung im Wellenbild (*Wave-mixing*, oben) und im Photonenbild (*Photon-mixing*, unten) schematisch dargestellt [Tei07].

Angenommen, es liegt perfekte Phasenanpassung, d.h. $\Delta k = 0$, und unabgeschwächte (*undepleted pump*) Pumpleistung², d.h. $a_3(z) \approx a_3(0)$, vor, werden die Wellengleichungen mit [Tei07]

$$\frac{da_1}{dz} = -j\frac{\gamma}{2}a_2^* \quad (38)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -j\frac{\gamma}{2}a_1^* \quad (39)$$

beschrieben, wobei $\gamma = 2ga_3(0)$ ist. Hier bezeichnet γ den Verstärkungskoeffizienten eines OPAs, j die komplexe Zahl und a_i ist eine Größe die eingeführt wird, um die Berechnung überschaubarer zu machen und die Amplitudengleichung zu normieren³. Ist $a_3(0)$ und somit auch γ real, ergeben sich als Lösung der eben genannten Wellengleichungen folgende Zusammenhänge [Tei07]:

$$a_1(z) = a_1(0)\cosh\left(\frac{\gamma z}{2}\right) - ja_2^*(0)\sinh\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (40)$$

$$a_2(z) = -ja_1^*(0)\sinh\left(\frac{\gamma z}{2}\right) + a_2(0)\cosh\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (41)$$

Photonenflussdichten von

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(0)\cosh^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (42)$$

und

$$\Phi_2(z) = \Phi_1(0)\sinh^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (43)$$

ergeben sich unter der Annahme, dass $a_2(0) = 0$ ist. Die Verstärkung der gewünschten Signalwelle mit ω_1 ist gegeben mit

$$G = \frac{\Phi_1(l)}{\Phi_1(0)} = \cosh^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right), \quad (44)$$

wobei für $\gamma l = 1$

$$G = \frac{\left(e^{\frac{\gamma l}{2}} + e^{-\frac{\gamma l}{2}}\right)^2}{4} \quad (45)$$

gilt. Dem entsprechend steigt die Verstärkung exponentiell mit dem Faktor γL . Der Koeffizient $\gamma = 2ga_3(0) = 2d\sqrt{2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3\eta^3}a_3(0)$ wird durch

$$\gamma = 2C\sqrt{I_3(0)} = 2C\sqrt{\frac{P_3}{A}} \quad (46)$$

mit

$$C^2 = 2\omega_1\omega_2\eta_0^3 \frac{d_{eff}^2 \cdot \epsilon_0^2}{n^3} \quad (47)$$

²Hier beschreibt z den Weg durch das nichtlineare Medium.

³Ebene Welle: $E_q(z) = A_q \exp(-jk_q z) \Rightarrow a_q = \frac{A_q}{\sqrt{2\eta\hbar\omega_q}} \Rightarrow E_q(z) = \sqrt{2\eta\hbar\omega_q}a_q \exp(-jk_q z) \Rightarrow I_q = \frac{|E_q|^2}{2\eta} = \hbar\omega_q|a_q|^2$

beschrieben, wobei $P_3(0) = I_3(0)A$ die Pumpleistung, A die Querschnittsfläche und C^2 den Kopplungskoeffizienten darstellt [Tei07].

Die Wirkung eines OPAs ist gleichbedeutend mit einer Aufteilung oder Spaltung eines Photons ($\hbar\omega_3$) mit Energie- und Impulserhaltung in ein Signalphoton ($\hbar\omega_1$) und in ein Hilfsphoton (*idler*, $\hbar\omega_2$). Dies hat zur Folge, dass bei diesem Prozess auf Kosten der Pumpwelle die beiden anderen Wellen verstärkt werden.

Optisch Parametrischer Oszillator - OPO

Im Folgenden soll auf den prinzipiellen Aufbau eines OPOs eingegangen werden. Anschließend wird anhand der Berechnung für die Schwell-Pumpleistung der Unterschied zwischen einem einfach-resonanten (*singly resonant*) und einem doppelt-resonanten (*doubly resonant*) OPO erklärt.

Prinzipieller Aufbau

In Abbildung 12 ist ein optischer parametrischer Oszillator schematisch dargestellt. Das Pumplicht (ω_3) wird durch einen Laser in einen optischen Resonator eingekoppelt, der einen nichtlinearen Kristall der Länge l beinhaltet. Erzeugt werden hierbei durch nichtlineare Effekte die Signalwelle ($\lambda_1; \omega_1$), die Idlerwelle ($\lambda_2; \omega_2$) und ebenfalls noch erhalten ist die Pumpstrahlung mit ω_3 (abgeschwächt aufgrund der Entstehung von ω_1 und ω_2). Die Grundlegende Idee ist prinzipiell die Gleiche wie bei einem Laser, allerdings ist hier keine Inversion nötig, aber es treten ebenfalls Schwellenwertbedingungen für die Oszillation auf. Es gibt zwei Möglichkeiten für ein anfängliches Signal-Photon:

- Einstrahlung von Laserstrahlung bei der Signalfrequenz
- Parametrische Fluoreszenz: Strahlungsfeld mit ω_3 kann zwei Photonen mit ω_1 und ω_2 unter Energieerhaltung emittieren (entsteht quasi aus dem Quantenrauschen)

Ein optischer parametrischer Oszillator ist auch als Ringresonator realisierbar, wie in Abbildung 13 gezeigt. Der OPO stellt dem Anwender leistungsstarke, schmalbandige, abstimmbare Laserstrahlung zur Verfügung. Die Anwendungsmöglichkeiten reichen von lasergestützten Untersuchungen an Festkörpern über die Spurengasanalytik bis hin zur hochpräzisen Molekülspektroskopie. Mit Hilfe von Frequenzstandards (z.B. Frequenzkamm) sind in der Metrologie Anwendungen denkbar. Eine bekannte militärische Anwendung ist die Erzeugung von breitbandigem Licht hoher Leistung im Wellenlängenbereich von 3 μm bis 5 μm zur Blendung von wärmegesteuerten Raketen, wenn diese Flugzeuge angreifen. Ebenso kann ein OPO als leistungsstarke RGB-Quelle eingesetzt werden.

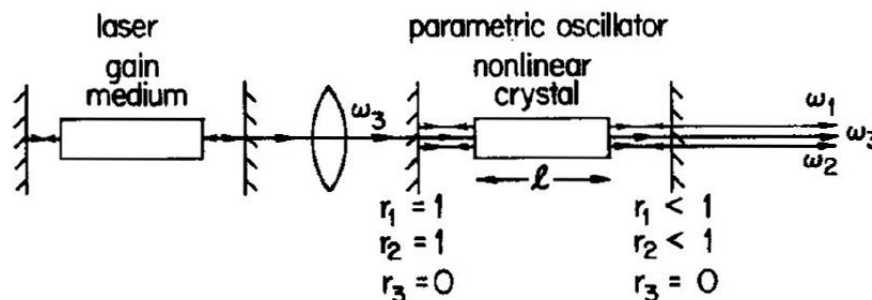


Abbildung 12: Prinzipieller Aufbau eines OPOs. Die Pumpstrahlung wird mit Hilfe eines Lasers bereitgestellt, hier mit ω_3 bezeichnet, welche in einen optischen Resonator, in dem sich ein nichtlinearer Kristall befindet, eingekoppelt wird. Hierbei entstehen die Signalwelle mit ω_1 und die Hilfswelle (*idler*) mit ω_2 [UN10].

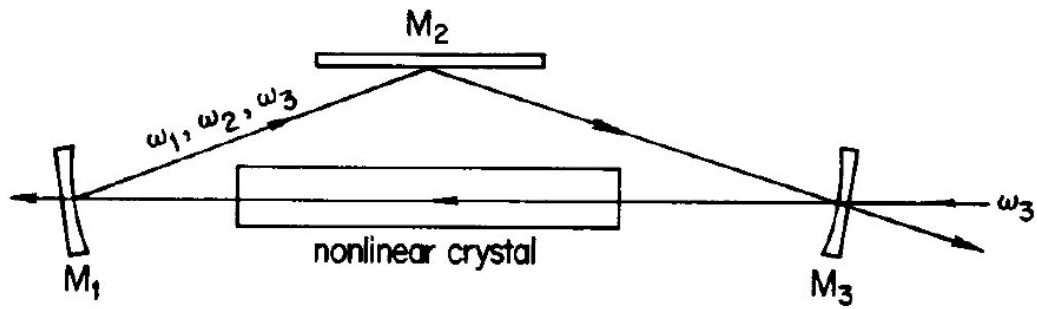


Abbildung 13: Schematischer Aufbau eines OPOs mit Ringresonator [UN10].

Typen optisch parametrischer Oszillatoren

Im parametrischen Oszillator wird die Welle mit ω_1 in einem Resonator aufgebaut. Diese Welle kann ähnlich wie in einem Laser entstehen, wenn die Verluste pro Umlauf kleiner sind als die Verstärkung. Es existiert also eine Schwelle, d.h. eine minimale Leistung ($P_{3|threshold}$) der Welle mit ω_3 , ab der der parametrische Oszillator anspringt. Oberhalb der Schwelle ist die Umwandlung von ω_3 nach ω_2 sehr effizient. Man erhält so breit durchstimmbare kohärente Lichtquellen. Die Realisierung eines parametrischen Oszillators besteht darin, eine Rückkopplung der Signalwelle (*singly resonant oscillator - SRO*) oder eine Rückkopplung der Signal- und Idler-Welle (*doubly resonant oscillator - DRO*) zu erzeugen. Beide Formen sind prinzipiell in Abbildung 14 dargestellt.

ω_1 und ω_2 der parametrischen Oszillation ergeben sich aus den Bedingungen der Frequenz- und Phasenanpassung ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ und $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3$). Zu beachten ist, dass die Frequenzen aus den oben genannten Gleichungen mit den Frequenzen der Resonatormoden übereinstimmen müssen (ähnlich wie bei konventionellen Lasern), was bedeutet, dass ein DRO schwieriger zu realisieren ist. Eine weitere Bedingung für die Oszillation ist, dass die Verstärkung größer sein muss als die Verluste, die durch die Spiegel innerhalb des Resonators bei einem Durchlauf auftreten. Dementsprechend werden nun unter Berücksichtigung dieser Punkte Gleichungen für den Schwellenwert der Pumpleistung für einen SRO und einen DRO hergeleitet (vgl. Laser: Scharlow-Townes für Laser).

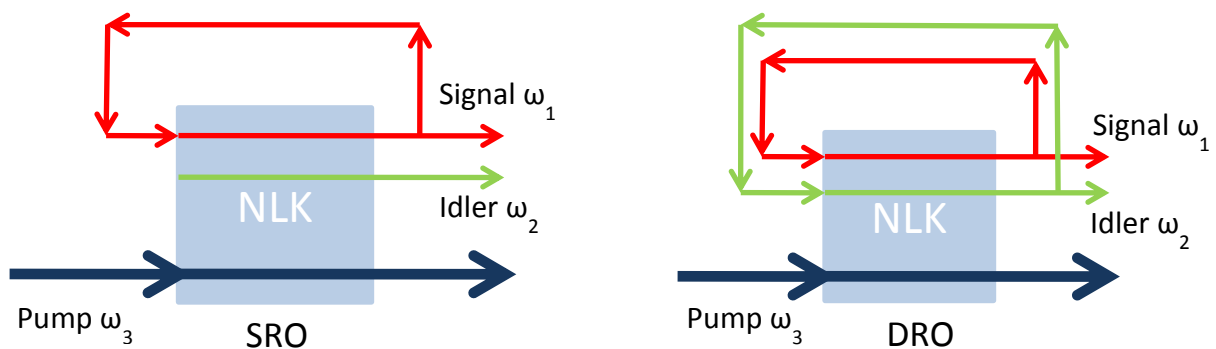


Abbildung 14: Die parametrische Oszillation generiert Strahlung bei λ_1 bzw. ω_1 und λ_2 bzw. ω_2 . Die Pumpstrahlung ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) dient als Energiequelle. Links ist ein SRO und rechts ein DRO dargestellt.

SRO

Bei Erreichung des Schwellenwertes der Oszillation gilt für das verstärkte und zweimal reflektierte Signal, dass $a_1(l)r_1^2$ der Anfangsamplitude $a_1(0)$ gleicht. Hierbei beschreibt l die Länge des nichtlinearen Mediums und r_1 den Reflexionsgrad des Spiegels (unter der Annahme, dass beide Spiegel identisch sind und die Phase hinsichtlich eines Hin- und Rücklaufs nicht betrachtet wird). Durch Verwendung der Gleichungen (14) und (15) und der Annahme, dass $a_2(0) = 0$ ist, erhalten wir $r_1^2 = \cosh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) = 1$ und daraus

$$R_1^2 \cosh^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right) = 1. \quad (48)$$

$R_1 = r_1^2$ ist der Reflexionsgrad des Spiegels bei der Signalfrequenz. Typischerweise ist R_1 nur etwas kleiner als 1, d.h. $\cosh^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$ ist geringfügig größer als 1. Daraus folgt, dass $\frac{\gamma l}{2} = 1$ ist und somit die Näherung $\cosh^2(x) \approx 1 + x^2$ verwendet werden kann. Es ergibt sich in der Nähe des Schwellenwertes ein $\left(\frac{\gamma l}{2}\right)^2 \approx \frac{(1-R_1^2)}{R_1^2}$ und unter Berücksichtigung von Gleichung (21) ein Schwellenwert (*threshold*) für die Pumpleistung von

$$P_{3|threshold}(0) \approx \frac{1}{C^2} \frac{A}{L^2} \frac{1 - R_1^2}{R_1^2}. \quad (49)$$

In dieser Gleichung ist wie in (22) $C^2 = 2\omega_1\omega_2\eta_0^3 \frac{d_{eff}^2 \cdot \epsilon_0^2}{n^3}$ und A die Querschnittsfläche. Ein kleines Rechenbeispiel: Wenn $\frac{L^2}{A} = 10^6$, $C^2 = 10^{-7} \frac{1}{W}$ und $R_1 = 0.9$, ergibt sich ein $P_{3|threshold}(0) \approx 2.3W$.

DRO

Es müssen bei einem DRO (*doubly resonant oscillator*) an der Schwelle der Oszillation zwei Bedingungen erfüllt sein: $a_1(l)r_1^2 = a_1(0)$ und $a_2(l)r_2^2 = a_2(0)$, wobei hier r_1 und r_2 die Reflexionsgrade der Spiegel einmal für die Signalfrequenz und einmal für die Idlerfrequenz darstellen. Wir erhalten durch Substitution für $a_1(l)$ in Gleichung (14) und $a_2(l)$ in Gleichung (16) und Umformung der konjugiert-komplexen

$$(1 - R_1) \cosh\left(\frac{\gamma_Z}{2}\right) a_1(0) + jR_1 \sinh\left(\frac{\gamma_Z}{2}\right) a_2^*(0) = 0 \quad (50)$$

und

$$-jR_2 \sinh\left(\frac{\gamma_Z}{2}\right) a_1(0) + (1 - R_2) \cosh\left(\frac{\gamma_Z}{2}\right) a_2^*(0) = 0 \quad (51)$$

mit $R_1 = r_1^2$ und $R_2 = r_2^2$. Durch Gleichsetzen der Verhältnisse $\frac{a_1(0)}{a_2^*(0)}$ aus Gleichungen (27) und (28), ergibt sich

$$\tanh^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right) = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{R_1 R_2}. \quad (52)$$

Für sehr kleine $\frac{\gamma l}{2}$ kann die Näherung $\tanh(x) \approx x$ verwendet werden und aus Gleichung (29) wird $\left(\frac{\gamma l}{2}\right)^2 \approx \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{R_1 R_2}$. Hieraus errechnet sich der Schwellenwert für die Pumpleistung zu

$$P_{3|threshold}(0) \approx \frac{1}{C^2} \frac{A}{L^2} \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{R_1 R_2}. \quad (53)$$

Das Verhältnis der Schwellenwerte der Pumpleistung für einen DRO und einen SRO lautet

$$\frac{\frac{R_1}{R_2}(1-R_2)}{1+R_1}. \quad (54)$$

Für $R_1 \approx 1$ und $R_2 \approx 1$, ist das Verhältnis identisch mit $\frac{1-R_2}{2}$, was eine sehr kleine Zahl ergibt. Dies bedeutet, dass der Schwellenwert der Pumpleistung bei einem DRO wesentlich kleiner ist als bei einem SRO. Unglücklicherweise ist aber die Empfindlichkeit bei DROs hinsichtlich von Fluktuationen der Resonatorlängen aufgrund der Anforderungen für den Oszillatorbetrieb (sowohl Signal- als auch Idlerfrequenz müssen mit den Resonatormoden übereinstimmen) sehr hoch. Aus diesem Grund ist die Stabilität von DROs geringer [Tei07].

5.4.2 Effizienzmodellierung (*Performance Modelling*)

Das Design und die Auslegung eines OPOs erfordert die Spezifikation von vielen Variablen, wie z.B. Kristalltyp, Kristalllänge, Reflexionsgrad der Spiegel bei allen drei Wellenlängen, die Krümmung der Spiegel, die Umlauflänge, usw.. Für viele verschiedene OPO-Typen existieren bereits sehr genaue numerische Modelle, die viele Aspekte der OPO-Performance (Effizienz, Strahlqualität, Signal- und Idlerspektrum, usw.) beinhalten. Das Softwaretool *SNLO* bietet viele dieser Modelle an, die weitestgehend mit Ergebnissen aus Laboruntersuchungen übereinstimmen. Näheres ist ebenfalls in [Bas03], [Ric03] und [Tei07] zu finden. Dennoch werden hier die Parameter, die bei der Auslegung optischer parametrischer Systeme große Bedeutung haben, näher erläutert. Hierfür sind einfache Modelle notwendig, die die Parameter wie Verstärkung, Schwellenwert, Phasenanpassung und Konversionseffizienz als Funktion des Aufbaus und der Eingangsparameter beschreiben. Für einen OPA ist die parametrische Verstärkung der Signalwelle mit [Bas03]

$$g = \sqrt{C^2 \cdot I_p} \quad (55)$$

$$C^2 = 2\omega_1\omega_2\eta_0^3 \frac{d^2}{n^3} \quad (56)$$

definiert, wobei $I_p = I_3$ die Pumpintensität und C^2 wie in (23) eine Kopplungskonstante beschreibt. Der effektive Brechungsindex verbindet die Felder der Pumpe, des Signals und des Idlers. n_3 , n_2 und n_1 sind die Brechungsindizes der drei Wellen und λ_3 , λ_2 und λ_1 deren Wellenlängen. Nachdem die Brechungsindizes sehr ähnliche Werte aufweisen, sind diese in Formel (32) zu einem n^3 zusammengefasst. d_{eff} ist der effektive nichtlineare Koeffizient des nichtlinearen Mediums, c_o die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und ϵ_0 die Permittivität im Vakuum. Die Verstärkung des OPAs beträgt [Tei07]

$$G = \frac{1}{4} e^{2gl}, \quad (57)$$

mit l als Länge des Kristalls. Wie oben schon erwähnt, existiert eine Phasenfehlanspassung

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2, \quad (58)$$

mit den Ausbreitungskonstanten $k_j = \frac{2\pi n_j}{\lambda_j}$, ($j = 1,2,3$). Unter Berücksichtigung einer vorhandenen Phasenfehlanpassung reduziert sich die effektive Verstärkung auf

$$g_{eff} = \left[g^2 - \left(\frac{1}{2} \Delta k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (59)$$

Eine Herleitung für g_{eff} finden Sie im Anhang 8.7. Daraus ist ersichtlich, dass eine maximale Verstärkung für $\Delta k \rightarrow 0$ erreicht wird. Typische Werte für C^2 liegen in der Größenordnung von $10^{-8} \frac{1}{W}$, somit ist für ein $g = 1 \frac{1}{cm}$ und für ein $G = 1.8$ eine Pumpwelle von mindestens $100 \frac{MW}{cm^2}$ erforderlich, wenn die Kristalllänge $1cm$ beträgt. Dies folgt aus Formel (31), da dieses Beispiel ein $I_p = \frac{g^2}{C^2}$ von $I_p = 10^8 \frac{W}{cm^2}$ ergibt. Bei einer Wellenlänge von $1\mu m$ hat die Ausbreitungskonstante in einem Material mit $n = 1.7$ einen Wert von $k \approx 10^5 \frac{1}{cm}$ [Bas03].

Konversionseffizienz

Bei vereinfachter Betrachtung von Ebenen Wellen, beträgt die Konversionseffizienz eines SROs für angenommene ideale Phasenanpassung und vernachlässigbaren Verlusten [Bas03]

$$\eta = \sin^2(gl). \quad (60)$$

Mit dieser Beziehung ist theoretisch eine totale Konversion der Pumpleistung erreichbar. Wird dieser Punkt überschritten, tritt eine Rückkonversion der Leistung auf, was eine Reduzierung der Signalwelle und der Idlerwelle und somit auch eine Abnahme der Konversionseffizienz wieder zugunsten der Pumpwelle hervorruft. Die Konversionseffizienz ist definiert als Verhältnis aus der Summe von Signalenergie und Idler und der Pumpe. Die Energiebetrachtung von Signal und Idler führt entsprechend der Photonenenergien zu [Bas03]

$$\frac{h\nu_2}{h\nu_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (61)$$

Hieraus folgt das Verhältnis der Energie des Signals bezogen auf die Gesamtenergie, die vom OPO konvertiert wird:

$$\frac{E_2}{E_2 + E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (62)$$

Für die sogenannte entartete Variante gilt, dass $\lambda_2 = \lambda_1 = 2\lambda_3$ ist, d.h. dass jedes Pumpphoton zwei Photonen mit doppelter Pumpwellenlänge generiert.

5.4.3 Aufbau des verwendeten OPO's

Bei unserem Aufbau handelt es sich um einen singly resonant oscillator, wobei der optische Resonator aus zwei dielektrischen Spiegeln und einem drehbaren typ I-BBO Kristall, der in der Mitte der Spiegel positioniert ist, besteht.

Das Intensitätsstarke Pumplicht passiert den Hoch reflektierenden Einkoppelspiegel (HR – Transmission für die Pumpwellenlänge; Reflektion für Signal- und Idlerwelle) und koppelt in den Nichtlinearen Kristall ein, aufgrund der hohen Intensitäten der Pumpfrequenz $\omega_{\text{Pump}} \sim \lambda_{\text{Pump}}^{-1}$ entsteht eine Polarisation des Typs $\chi^{(2)}$, dadurch entstehen 2 Wellen (Hilfs/Idler- und Signalwelle) deren Frequenz durch die Energieerhaltung (Gleichung (14)) gegeben ist ($\lambda_{\text{Pump}}^{-1} = \lambda_{\text{Signal}}^{-1} + \lambda_{\text{Idler}}^{-1}$) und abhängt von der Winkelstellung des Kristalls. Durch die Oszillation dieser Frequenzen im Resonator wird die Konversion verstärkt. Der Auskoppelspiegel (OC) ist hochreflektierend (>99 %) für die Signalwellenlänge während die anderen beiden Wellen erstmal ungehindert passieren und nach dem Auskoppelspiegel durch optische Bandpassfilter (1x UV- und 1x NIR-Filter) gefiltert werden.

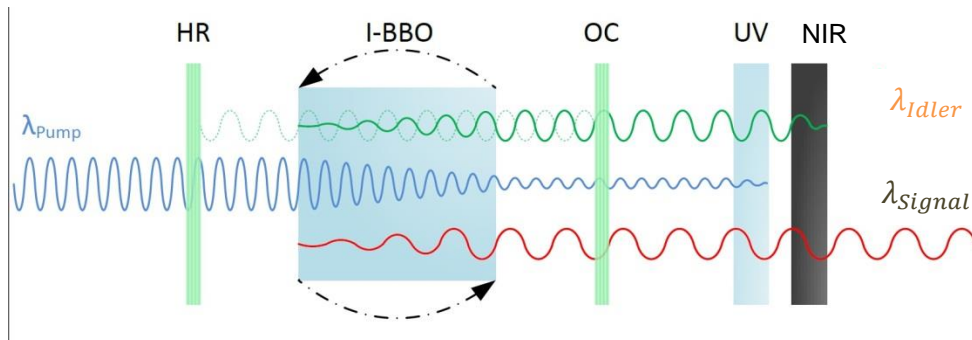


Abbildung 15: Prinzipielle Aufbau optisch parametrischen Oszillators. Durch die Pumpwelle entsteht eine Polarisation welche die Signal- und Idlerwelle erzeugt, diese werden durch einen UV- und NIR- Bandpassfilter eliminiert

Aufgrund des hohen Wellenlängenbereichs der Konversion ($\lambda_{\text{Signal}} = [400 \text{ nm}; 700 \text{ nm}]$) werden 3 verschiedene Spiegelpaare für den Resonator benötigt die für verschiedene Wellenlängenbereiche justiert werden müssen. Für den Gebrauch im Praktikum ist der grüne Spiegelsatz gedacht, dieser deckt einen Wellenlängenbereich von 500nm – 600 nm ab. In Abbildung 16 sind die Wellenlängenbereiche in Abhängigkeit der Mikrometerschraubenstellung am OPO dargestellt.

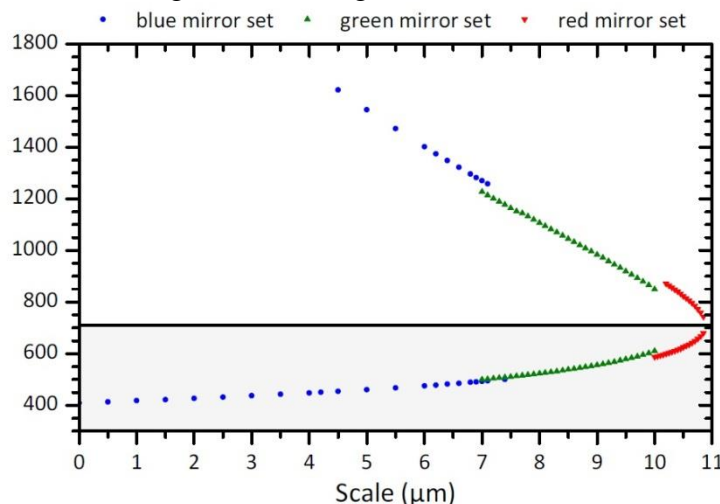


Abbildung 16: Darstellung der Signal- und Idlerwelle in Abhängigkeit der Mikrometerschraubenstellung am OPO

6. Aufgaben

6.1 Berechnung der Effizienz einer SHG

Berechnen Sie die Effizienz der SHG unter folgenden Voraussetzungen (gleiche Angaben wie in Kapitel 5): KTP, $E_{1064} = 200 \text{ mJ}$, Strahldurchmesser 5 mm , $d_{\text{eff}} = 0.5 \text{ pm/V}$ und einer Kristalllänge von $l = 30 \text{ mm}$ (zeitliche Pulslänge siehe Versuchsergebnis von oben).

6.2 Berechnung der Effizienz einer SFG

Gegeben sind die Intensitäten von $I_1(0) = 8.49 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und $I_2(0) = 1.7 \cdot 10^{12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Weiterhin ist bekannt, dass die Effizienz einer SFG mit

$$\eta_{\text{SFG}} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot \sin\left(\frac{\gamma l}{2}\right)^2$$

berechnet wird, wobei

$$\gamma = \sqrt{8\hbar\omega_1\omega_2\omega_3\eta^3 d^2} \cdot \sqrt{\frac{I_2}{\hbar\omega_2}}$$

ist. Die Wellenlängen betragen $\lambda_1 = 532 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 1064 \text{ nm}$ und $\lambda_3 = 355 \text{ nm}$. Gehen Sie von einer Brechzahl von $n = 1.65$ aus. Sie verwenden einen $3,4 \text{ mm}$ langen BBO Kristall bei einer Typ II-Phasenanpassung. Der nichtlineare Koeffizient berechnet sich mit

$$d_{\text{eff}}(II) = d_{11} \cdot \sin(3\Phi) + d_{22} \cdot \cos(3\Phi) \cdot \cos(\Theta)^2.$$

Weiterhin soll $\Theta = 28^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, $d_{11} = 0.16 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$ und $d_{22} = 2.3 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$ sein. Berechnen Sie mit diesen Angaben die SFG-Effizienz und führen Sie eine Einheitenkontrolle durch.

6.3 Berechnung der Verstärkungsfaktoren eines SRO-OPOs

Die parametrische Verstärkung einer Signalwelle wird mit

$$g = \sqrt{C^2 I_p} = \sqrt{2\omega_1\omega_2\eta_0^3 \frac{d^2}{n^3} I_p}$$

berechnet. Berechnen Sie zunächst die Wellenlänge des Idlers, wenn für die Signalwellenlänge $\lambda_s = 500 \text{ nm}$ und für die Pumpwellenlänge $\lambda_p = 355 \text{ nm}$ gilt (Tipp: Berücksichtigen Sie hierbei die Energieerhaltung). Wie groß ist die Verstärkung g , wenn weiterhin $n_p = 1.68$, $n_s = 1.69$, $n_i = 1.61$, $d_{\text{ooe,eff}} = 2.106 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$ und $I_p = 5.09 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ gilt. Berechnen Sie anschließend die Verstärkung G für eine Kristalllänge von 7 mm .

6.4 Verhältnis der Schwellenleistung eines SRO- und DRO-OPOs

Schätzen Sie das Verhältnis der Schwellenleistung ($P_{\text{threshold}}$) eines SRO- und eines DRO-OPOs ab. Gehen Sie hierbei von Reflektion der Spiegel von 95% aus. Welche Energie benötigen Sie für einen DRO-OPO, wenn $E_{\text{threshold}}$ des gleichwertigen SRO-OPOs 25 mJ und die Pulsdauer 8 ns beträgt?

7. Auslegung der optischen, nichtlinearen Prozesse

Im Folgenden werden die Überlegungen zur Dimensionierung der beiden nichtlinearen Baugruppen beschrieben. Der erste Teil beinhaltet die Dimensionierung einer Summenfrequenzerzeugung (*sum frequency generation*), bei der durch Berücksichtigung der hier vorkommenden Wellenlängen, Intensitäten und des Phasenanpassung-Typs, die Konversionseffizienz in Abhängigkeit der Kristalllänge diskutiert wird. Anschließend folgt eine Dimensionierung eines SRO-OPOs. Hier wird genauer auf die vorhandenen Wellenlängen, Brechungsindizes, Verstärkungsfaktoren und die daraus resultierende Effizienz eingegangen.

7.1 Dimensionierung der SFG

Bei der Auslegung einer SFG sind folgende Ausgangsparameter von entscheidender Bedeutung:

- Energie der Einzelpulse
- Pulsdauer
- Polarisationsrichtungen der Ausgangswellen und gewünschte Polarisationsrichtung der erzeugten Welle

Aus diesen Daten kann sofort der gewünschte Typ der Phasenanpassung (*phase-matching-type*) ermittelt werden. In unserem Fall ist dies Typ II. In den meisten Fällen ermöglichen es verschiedene Kristallarten eine Typ II Phasenanpassung zu erzeugen, jedoch unterscheiden sich die Kristallarten stark im Nichtlinearitäts-Koeffizienten d_{eff} . Um einen kosteneffektiven Aufbau zu erhalten, sollte der Kristall mit dem höchsten d_{eff} und zugleich einer hohen Zerstörschwelle ausgewählt werden. Aus diesem Grund wird für diesen Versuch ein Beta-Barium-Borat-Kristall (BBO) gewählt.

Im Folgenden wird die Dimensionierung der SFG rechnerisch beschrieben. Im vorliegenden Versuch werden durch den Phasenanpassungstyp II aus 1064nm (e) und 532nm (o) 355nm (e) erzeugt³. Die Intensitäten betragen $I_2(0) = 1.7 \cdot 10^{12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, $I_1(0) = 8.49 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und $I_3(l) = 9.80 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, welche mit

$$I = \frac{E}{t_{\text{puls}} \cdot A} \quad (63)$$

berechnet wurden, wobei $A = r^2\pi$ die Fläche des Strahls mit $r = 2.5\text{mm} = 0.0025\text{m}$, E die Pulsenergie in Joule und t_{puls} die Pulslänge ist. Die Effizienz berechnet sich aus

$$\eta_{\text{SFG}} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot \sin\left(\frac{\gamma l}{2}\right)^2 \quad (64)$$

mit

$$\gamma = 2 \cdot g \cdot a_2(0) = 2 \cdot \sqrt{2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3\eta^3 d^2} \cdot a_2(0) = \sqrt{8\hbar\omega_1\omega_2\omega_3\eta^3 d^2} \cdot \sqrt{\frac{I_2}{\hbar\omega_2}} \quad (65)$$

Und

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} = \frac{120\pi\Omega}{n}. \quad (66)$$

³Im Folgenden stehen die Indizes 1 für 532nm, 2 für 1064nm und 3 für 355nm.

Hier wird d in $\frac{C}{V^2}$ verwendet, d.h. es muss d_{eff} in $\frac{pm}{V}$ mit $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ multipliziert werden. Die Einheit von $a_2(0)$ beträgt $\frac{1}{m\sqrt{s}}$. Abbildung 18 zeigt die Konversionseffizienz in Abhängigkeit der Kristalllänge einmal für den BBO- und den LBO-Kristall bei verschiedenen Phasenanpassungstypen (I und II). In diesem Versuch wird Typ II Phasenanpassung verwendet, bei 1064 nm (e) und 532 nm (o). Unter Berücksichtigung des Strahldurchmessers von 5 mm ergibt sich eine optimale Länge des Kristalls von 5mm (Abbildung 18 schwarze Kurve; Falls nicht anders angegeben, beträgt der Strahldurchmesser 5mm). Der nichtlineare Koeffizient für die SFG des Typs II wird mit

$$d_{eff}(II) = d_{11} \cdot \sin(3\Phi) + d_{22} \cdot \cos(3\Phi) \cdot \cos(\Theta)^2 \quad (67)$$

berechnet. Es ergibt sich hier mit $\Theta = 38.15^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, $d_{11} = 0.16 \frac{pm}{V}$ und $d_{22} = 2.3 \frac{pm}{V}$ ein $d_{eff} = 1.4224 \frac{pm}{V}$. Mit Hilfe der SNLO-Software wurde ein Wert von $d_{eff} = 1.29 \frac{pm}{V}$ ermittelt. Aufgrund der Abweichung wird hier für die weiteren Berechnungen der schlechtere Wert von $d_{eff} = 1.29 \frac{pm}{V}$ verwendet. Im Folgenden sind alle wichtigen Parameter bezüglich der SFG tabellarisch aufgelistet.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\omega_1[Hz](532 \text{ nm})$	$3.54135 \cdot 10^{15}$	$I_1(l)[\frac{W}{m^2}]$	$8.49 \cdot 10^{11}$
$\omega_2[Hz](1064 \text{ nm})$	$1.77068 \cdot 10^{15}$	$I_2[\frac{W}{m^2}]$	$1.70 \cdot 10^{12}$
$\omega_3[Hz](355 \text{ nm})$	$5.30704 \cdot 10^{15}$	$I_3(l)[\frac{W}{m^2}]$	$9.80 \cdot 10^{11}$
$d[\frac{C}{V^2}]$	$1.14165 \cdot 10^{-23}$	$a_2(0)[\frac{1}{m\sqrt{s}}]$	$3.0152 \cdot 10^{15}$
$g[\frac{1}{m}]$	$1.04457 \cdot 10^{-13}$	$\gamma[\frac{1}{m}]$	629.92
$n[1]$	1.65	$\eta_0[\Omega]$	120π

Abbildung 17 zeigt die Pulsenergie in Abhängigkeit des Tuningwinkels, hier ist ebenfalls gut der $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ - Zusammenhang (Herleitung wie für Gleichung (22)) zwischen der Pulsenergie und des Tuningwinkels des Kristalls erkennbar.

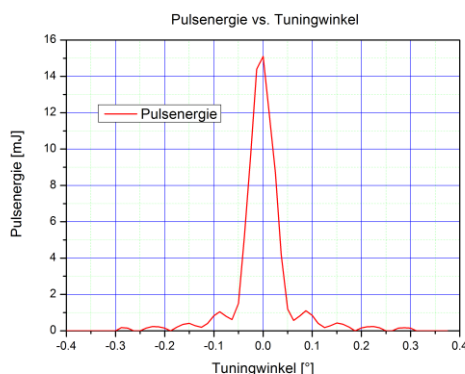


Abbildung 17: Messung der Pulsenergie in Abhängigkeit des Tuningwinkels der SFG (siehe Gleichung (23)). Hier ist der $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ -Verlauf erkennbar.

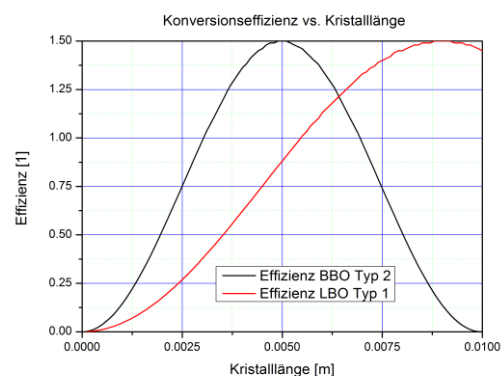


Abbildung 18: Die Konversionseffizienz in Abhängigkeit von der Kristalllänge (Gleichung (36)); optimale Länge des Kristalls beträgt 5 mm (schwarze Kurve), was zu einer Effizienz von 1.50 führt.

7.2 Dimensionierung eines SRO-OPOs

In Abbildung 19 ist der Aufbau des SRO-OPOs, wie er in diesem Versuch realisiert wird, dargestellt. Es werden nun einige Eigenschaften des BBO-Kristalls (negativer, uniaxialer Kristall) sowie die SNLO-Software verwendet, um den nichtlinearen Koeffizienten d_{oe} , die Koppelkonstante C^2 sowie die Verstärkung g und G zu berechnen. Der nichtlineare Koeffizient eines BBO-Kristalls ergibt sich aus Gleichung (9) zu

$$d_{oe} = d_{31} \cdot \sin(\Theta) + (d_{11} \cdot \cos(\Theta) - d_{22} \cdot \sin(3\Phi)) \cdot \cos(\Theta). \quad (68)$$

Mit einem Schnittwinkel von $\Theta = 28^\circ$, einem $d_{31} = 0.16 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$, einem $d_{22} = 2.3 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$, einem $d_{11} = 0 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$ und einem $\Phi = 0^\circ$ ergibt sich ein $d_{oe,eff} = 2.1059 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$. Die SNLO-Software berechnet Brechungsindizes von $n_p = 1.68$, $n_s = 1.69$ und $n_i = 1.61$ (Die Wellenlänge des Signals beträgt hier 400 nm und die des Idlers 3160 nm). Dadurch lässt sich die Kopplungskonstante mit [Tei07]

$$C^2 = 2\omega_1\omega_2\eta_0^3 \frac{d^2}{n^3} \quad (69)$$

für den Fall $\lambda_s = 500 \text{ nm}$ und $\lambda_i = 1220 \text{ nm}$ zu $C^2 = 4.69 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{VA}}$ berechnen. Es ergibt sich somit eine parametrische Verstärkung der Signalwelle (mit $I_p = 5.09 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) von

$$g = \sqrt{C^2 I_p} = 154.5 \frac{1}{\text{m}}. \quad (70)$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$G = \frac{1}{4} e^{2gl} \quad (71)$$

lässt sich die Abhängigkeit der Verstärkung von der Kristalllänge verdeutlichen. Es ergibt sich bei einer Kristalllänge von $l = 7.0 \text{ mm}$ ein $G = 1.94$.

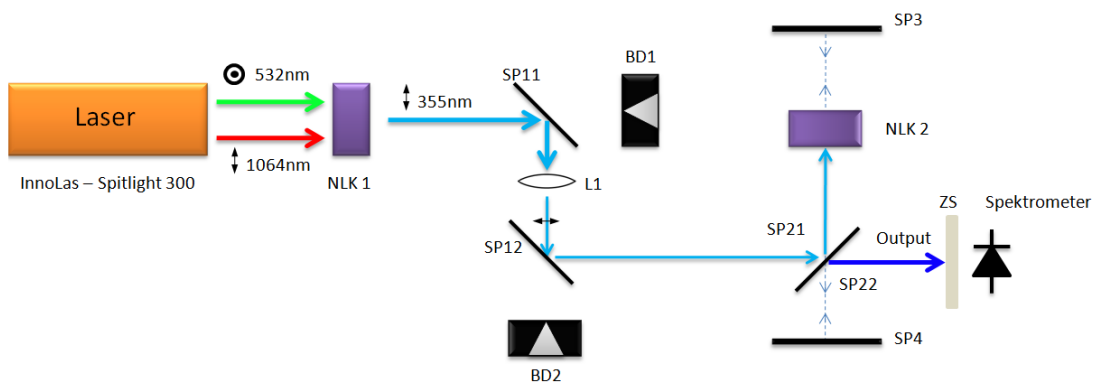


Abbildung 19: Schematischer Aufbau des optischen parametrischen Oszillators mit SFG. Der Laser erzeugt durch eine interne SHG aus 1064 nm 532 nm, welche mit Hilfe des NLK 1 die gewünschten 355 nm erzeugen. Diese werden zweimal durch die Spiegel SP11 und SP12, die HR für 355 nm sind, umgelenkt. Die Linse L1 (Brennweite 750 mm) dient zur Fokussierung des Laserstrahls, da die Fläche von NLK 2 nur 4x4 mm² beträgt. Der Einkoppelspiegel ist auf der Seite SP21 HR für 355 nm und auf der Seite SP22 unbeschichtet. Der nichtlineare Prozess für den OPO findet im NLK 2 statt. SP3 und SP4 dienen als optischer Resonator. SP22 wird durch Fresnel-Reflexionen auch als Auskoppelspiegel verwendet. Hier befindet sich eine Zerstreuscheibe ZS und ein Spektrometer. Der Spiegel, der zwischen dem NLK 2 und Spiegel SP3 liegt, ist hier nicht eingezeichnet. Dieser dient zur Auskopplung der Pumpstrahlung (in Richtung der Tischoberfläche).

Der Auskoppelgrad an Spiegel SP22 liegt zwischen 6 % und 15 % aufgrund von Fresnel-Reflektivitäten [Fre10].

Im Folgenden sind alle wichtigen Parameter bezüglich des SRO-OPOs tabellarisch aufgelistet. d_{eff} wurde hierbei mit einem mittleren Wert von $2.1 \frac{pm}{V}$ angenommen.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\lambda_p[nm]$	$355 \cdot 10^{-9}$	k_p	$1.77 \cdot 10^7$
$\lambda_s[nm]$	$500 \cdot 10^{-9}$	k_s	$1.26 \cdot 10^7$
$\lambda_i[nm]$	$1220 \cdot 10^{-9}$	k_i	$5.13 \cdot 10^6$
$\varepsilon_0[\frac{As}{Vm}]$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	$l[m]$	0.007
$c[\frac{m}{s}]$	$3 \cdot 10^8$	$d_{eff}[\frac{pm}{V}]$	2.1
n_p	1.68	n_s	1.69
n_i	1.61	$\eta_0[\Omega]$	377

Im Folgenden sind die Ergebnisse der Simulation der Effizienz des SRO-OPOs in Abhängigkeit der gewünschten Signalwellenlänge im interessanten Bereich von 400 nm bis 700 nm graphisch dargestellt.

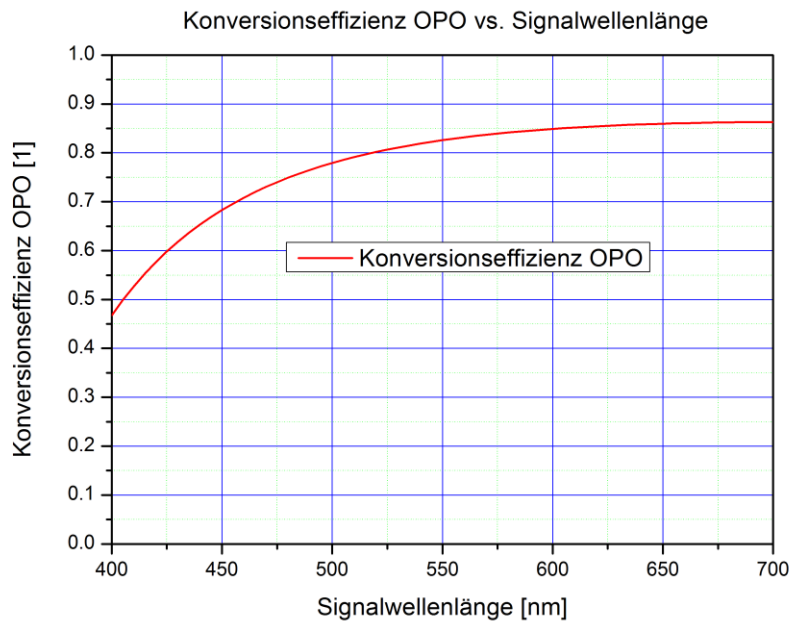


Abbildung 20: Konversionseffizienz des OPOs in Abhängigkeit von der Wellenlänge des Signals.

7.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Der vorliegende Versuchsaufbau enthält verschiedene optische Elemente der nichtlinearen Optik mit denen ein umfassender Überblick der Vielseitigkeit dieser Thematik vermittelt werden kann. Ausgehend von der Frequenzverdopplung mittels Temperatur-Phasenanpassung als internes Bauteil des gütegeschalteten Nd:YAG Festkörperlaser mit der eine Diskussion der Effizienz dieses Prozesses durchgeführt wird.

Als weiteres Element des Aufbaus ist die Summenfrequenzerzeugung mittels Typ II Phasenanpassung in einem BBO Kristall zu nennen, an der der mathematische Hintergrund von Mehr-Photonen-Prozessen erläutert wird. Die Effizienz der Summenfrequenzerzeugung beträgt bei einer Blitzlampenspannung von 520 V ca. 46 % ($E(355\text{ nm})=28\text{ mJ}$ und $E(532\text{ nm})=40,8\text{ mJ}$).

Außerdem enthält der Aufbau einen optisch parametrischen Oszillator, welcher von 430 nm bis über 670 nm durchstimmbare ist. Im OPO wurde Typ I Phasenanpassung ausgenutzt und eine eigens überlegte Methode zur Auskopplung der Signalwelle aus dem Resonator umgesetzt. Abbildung 21 zeigt Ausgangsspektren des optisch parametrischen Oszillators bei verschiedenen Winkelstellungen des BBO Kristalls, deutlich erkennbar sind darin außerdem die Linien der 2. und 3. Harmonischen des Nd:YAG Lasers.

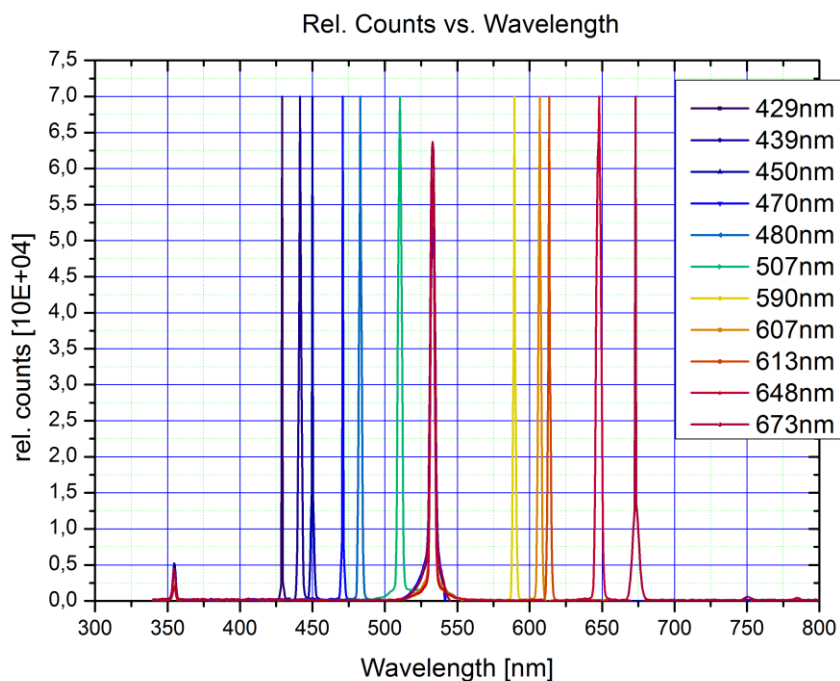


Abbildung 21: Ausgangsspektren (normiert) des optisch parametrischen Oszillators bei verschiedenen Winkelstellungen des BBO Kristalls. Deutlich erkennbar sind die Linien der 2. und 3. Harmonischen (532 nm und 355 nm) des Nd:YAG Lasers. Bei diesem Experiment wurde der OPO von 430 nm bis über 670 nm verstimm.

8. Anhang

8.1 Strahlengänge

Strahlengang 1:

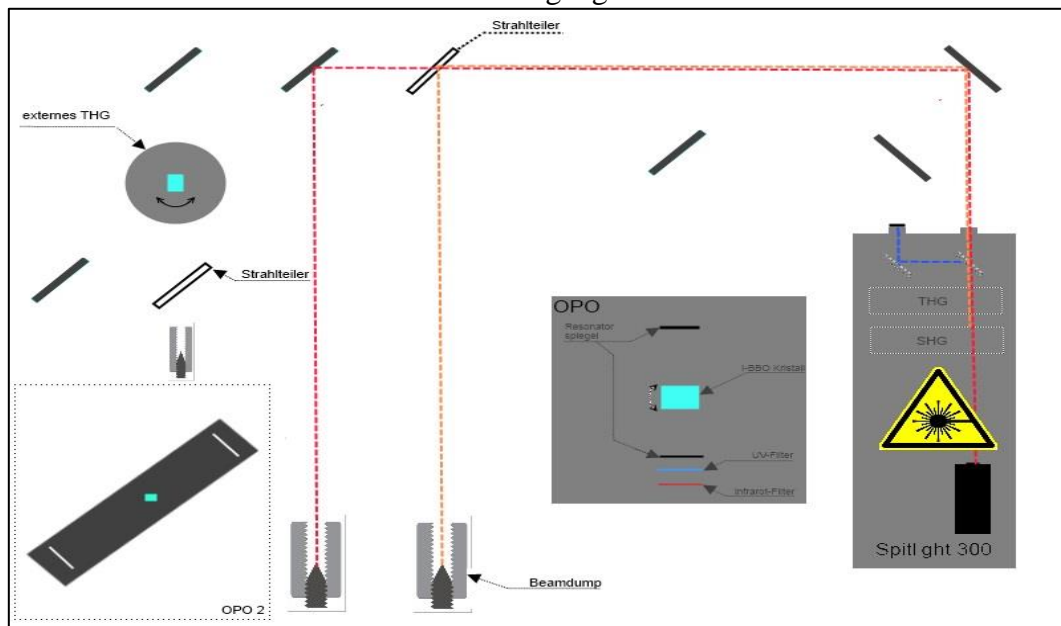


Abbildung 22: Strahlengang zur Messung der Pulsdauern von 532/1064nm

Strahlengang 2:

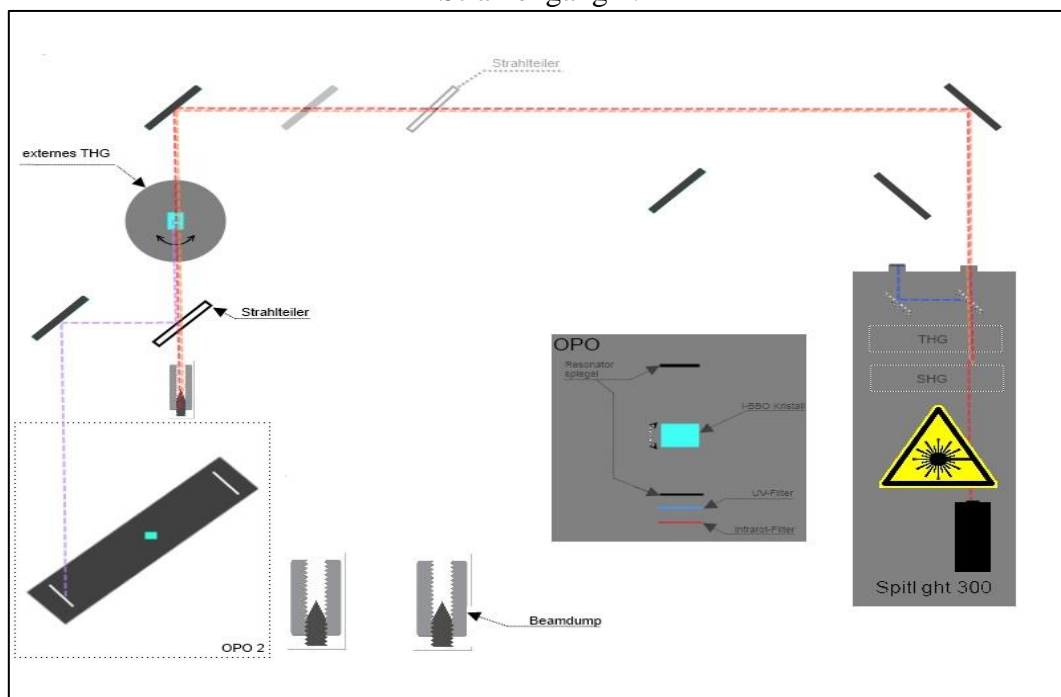


Abbildung 23: Strahlengang zur Erzeugung von UV-Strahlung mit dem Externen THG-Modul

Strahlengang 3:

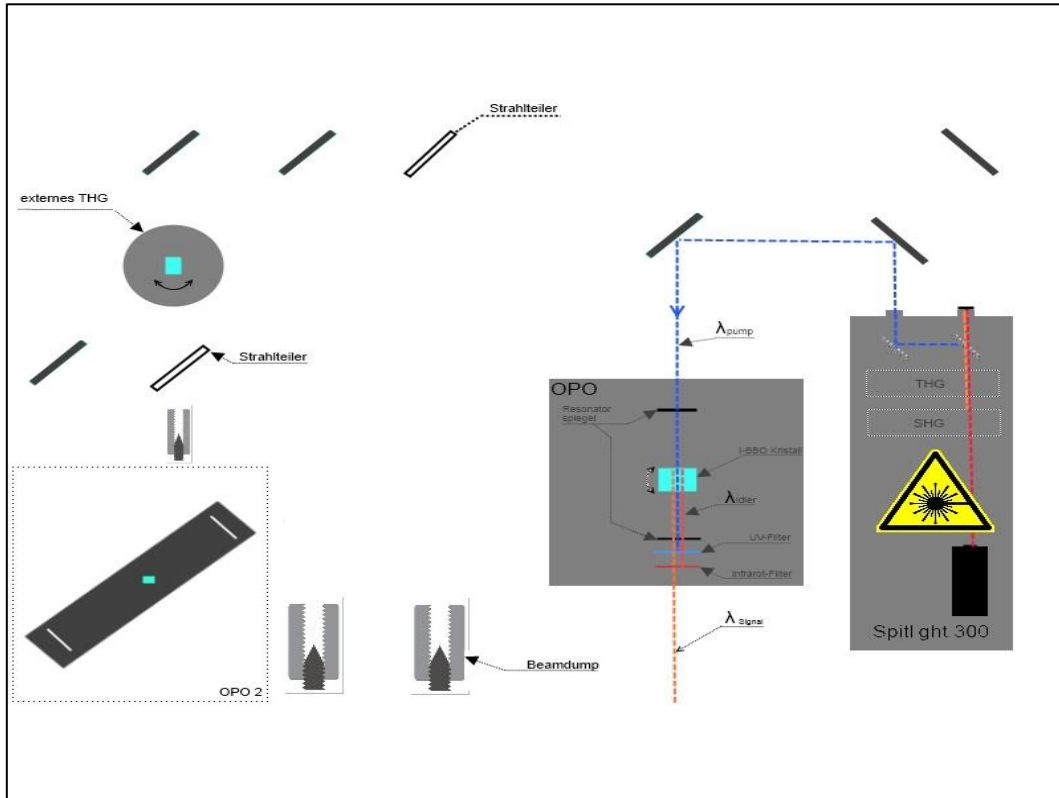


Abbildung 24: Strahlengang für die Inbetriebnahme des Optisch parametrischen Oszillators

8.2 Amplitudengleichungen und Manley-Rowe-Beziehung

Die Herleitung der gekoppelten Amplitudengleichungen ist ähnlich wie die Herleitung der Brechzahl [Mid73]. Eine ebenfalls ausführliche Herleitung findet sich in [She02] in Kapitel 3. Auch hier gehen wir zur Einführung der nichtlinearen Polarisation als Quellterm der Maxwell-Gleichungen aus:

$$\nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (72)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H) \quad (73)$$

$$D = \epsilon E + P \quad (74)$$

Die dielektrische Verschiebung (74) setzt sich hier aus einem linearen Term (erster Term) und der nichtlinearen Polarisation (zweiter Term) zusammen. Durch Anwendung der Rotation auf beiden Seiten von Gleichung (73), erhält man

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\epsilon}{c^2} E \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (75)$$

Hierbei geht man von einem eindimensionalen Problem und einer Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet aus, d.h. dass $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ gilt. Es werden nun drei interagierende Wellen definiert:

$$E_1(z, t) = E_1(z)e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} \quad (76)$$

$$E_2(z, t) = E_2(z)e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)} \quad (77)$$

$$E_3(z, t) = E_3(z)e^{-i(\omega_3 t - k_3 z)} \quad (78)$$

In einem linearen Medium bleibt die komplexe Amplitude konstant. Hier ändert sich jedoch diese Amplitude durch Interaktion von Wellen mit verschiedenen Frequenzen. Wir erhalten für die Polarisierung (Herleitung siehe [Mid73], Seite 32) bei einer SFG mit $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$:

$$P_1(z, t) = 4dE_2^*(z)E_3(z)e^{-i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} \quad (79)$$

$$P_2(z, t) = 4dE_3(z)E_1^*(z)e^{-i[(\omega_3 - \omega_1)t - (k_3 - k_1)z]} \quad (80)$$

$$P_3(z, t) = 4dE_1(z)E_2(z)e^{-i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]} \quad (81)$$

Aus den Gleichungen (79), (80) und (81) erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -(\omega_3 - \omega_2)^2 4dE_2^*(z)E_3(z)e^{-i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} \quad (82)$$

Analoge Gleichungen für $\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}$. Unter Berücksichtigung einer sich langsam mit z ändernden komplexen Feldamplitude (SVEA; *slowly varying envelope approximation*), d.h. $k \frac{\partial E}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$, erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 E_1(z, t)}{\partial z^2} = - \left[k_1^2 E_1(z) - 2ik_1 \frac{dE_1(z)}{dz} \right] e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} \quad (83)$$

Da Gleichung (75) bei jeder Frequenz separat erfüllt ist, erhalten wir aus (75), (82) und (83):

$$\frac{dE_1(z)}{dz} = -i \frac{8\pi\omega_1^2}{k_1 c^2} dE_2^*(z)E_3(z)e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z} \quad (84)$$

$$\frac{dE_2(z)}{dz} = -i \frac{8\pi\omega_2^2}{k_2 c^2} dE_1^*(z)E_3(z)e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z} \quad (85)$$

$$\frac{dE_3(z)}{dz} = -i \frac{8\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} dE_1(z)E_2(z)e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z} \quad (86)$$

Dies sind die drei gekoppelten Amplitudengleichungen. Wir erkennen hierbei, dass jede Gleichung in der Tat die Änderung der Amplituden bei einer Frequenz als Funktion der Amplituden der zwei anderen Frequenzen wiedergibt. Desweiteren ist die Phasendifferenz zwischen dem E- und dem H-Feld gegeben. Es gilt weiterhin im Falle der SFG:

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 \quad (87)$$

Wir betrachten nun eine Summenfrequenzerzeugung. Falls E_1 und E_2 konstant sind, gilt:

$$E_3 = -\frac{8\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} dE_1 E_2 \int_0^L e^{i\Delta k z} dz \quad (88)$$

Hierbei beschreibt L die Länge des Kristalls. Die Durchführung dieser Integration und mit $\omega_3 = \frac{2\pi c}{\lambda_3}$ sowie $k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3}$ erhält man:

$$E_3 = -\frac{16\pi^2}{n_3 \lambda_3 \Delta k} dE_1 E_2 (e^{i\Delta k L} - 1) \quad (89)$$

Es folgt somit für die Leistung pro Fläche in einem Material mit Brechzahl n :

$$S = \frac{cn}{2\pi} EE^* \quad (90)$$

Die Multiplikation von Gleichung (89) mit deren konjugiert-komplexen ergibt

$$S_3 = \frac{512\pi^5 L^2 d^2 S_1 S_2}{n_1 n_2 n_3 \lambda_3^2 c} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \quad (91)$$

wobei $x = \frac{\Delta k L}{2}$ bedeutet. Die gekoppelten Amplitudengleichungen zeigen, dass Gleichung (85) durch Austausch von E_1 mit E_2 Gleichung (84) ergibt, dieser Vorgang bei Gleichung (86) jedoch nicht funktioniert. Diese Aussage verdeutlicht den Zusammenhang des Kraftflusses (*power flow*) innerhalb der Interaktion, wenn $\Delta k = 0$ angenommen wird:

$$\frac{n_1 c}{\omega_1} E_1^* \frac{dE_1}{dz} = -8\pi i d E_1^* E_2^* E_3 \quad (92)$$

$$\frac{n_2 c}{\omega_2} E_2^* \frac{dE_2}{dz} = -8\pi i d E_2^* E_1^* E_3 \quad (93)$$

$$\frac{n_3 c}{\omega_3} E_3^* \frac{dE_3}{dz} = -8\pi i d E_3^* E_2 E_1 \quad (94)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die rechte Seite von Gleichung (92) und (93) gleich ist mit der konjugiert-komplexen rechten Seite von (94). Es folgt demnach:

$$\frac{n_1 c}{\omega_1} \frac{d}{dz} (E_1 E_1^*) = \frac{n_2 c}{\omega_2} \frac{d}{dz} (E_2 E_2^*) = -\frac{n_3 c}{\omega_3} \frac{d}{dz} (E_3 E_3^*) \quad (95)$$

Unter Berücksichtigung von (90) erhalten wir die sogenannte Manley-Rowe-Beziehung, die sowohl für die SFG als auch für die DFG gültig ist:

$$\frac{\text{change in power at } \omega_1}{\omega_1} = \frac{\text{change in power at } \omega_2}{\omega_2} = -\frac{\text{change in power at } \omega_3}{\omega_3} \quad (96)$$

8.3 Herleitung der Beziehung zwischen $I(2\omega)$ und $I^2(\omega)$

Ausgangspunkt zur Herleitung dieser Beziehung ist die Gleichung

$$E(2\omega, z = l) = -\frac{i\omega d}{n_{2\omega}c} E^2(\omega) l \frac{\sin\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)}{\frac{\Delta kl}{2}} e^{\frac{i\Delta kl}{2}} \quad (97)$$

Für die (optische) Intensität gilt:

$$I(2\omega) = \frac{n_{2\omega}}{2} \frac{|E^2|}{\eta_0} = \frac{n_{2\omega}}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E^2(2\omega)| \quad (98)$$

Für die optische Intensität $I(\omega)$ folgt weiterhin

$$I(\omega) = \frac{n_\omega}{2} \frac{|E^2(\omega)|}{\eta_0} = \frac{n_\omega}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E^2(\omega)| \Rightarrow E^4(\omega) = I^2(\omega) 4 \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{1}{n_\omega^2} \quad (99)$$

Nun wird Gleichung (97) in (98) und anschließend (99) in (98) eingesetzt:

$$I(2\omega) = \frac{\omega^2 d^2 l^2}{2 n_{2\omega} c^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)}{\frac{\Delta kl}{2}} \right)^2 E^4(\omega) \quad (100)$$

$$I(2\omega) = \frac{\omega^2 d^2 l^2}{2 n_{2\omega} c^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)}{\frac{\Delta kl}{2}} \right)^2 I^2(\omega) 4 \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{1}{n_\omega^2} \quad (101)$$

$$I(2\omega) = \frac{2\omega^2 d^2 l^2}{n_{2\omega} n_\omega^2 c^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)}{\frac{\Delta kl}{2}} \right)^2 I^2(\omega) \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (102)$$

Es wird jetzt eine kleine Umformung durchgeführt:

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0^2 \epsilon_0}{\epsilon_0^2 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0^2}} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{\epsilon_0} \quad (103)$$

Weiterhin folgt für (102) durch einsetzen von (103):

$$I(2\omega) = \frac{2\omega^2 d^2 l^2}{n_{2\omega} n_\omega^2 c^3 \epsilon_0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)}{\frac{\Delta kl}{2}} \right)^2 I^2(\omega) \quad (104)$$

Mit (104) ist erkennbar, dass ein quadratischer Zusammenhang zwischen $I(2\omega)$ und $I(\omega)$ vorliegt:

$$I(2\omega) \sim I^2(\omega) \quad (105)$$

8.4 Phasenanpassung und Impulserhaltung

Für den Zusammenhang zwischen Phasenanpassung und Impulserhaltung ist Gleichung (14) von Bedeutung. Auch hier gehen wir von einer Summenfrequenzerzeugung aus. Die Impulserhaltung besagt, dass

$$p_1 + p_2 = p_3 \quad (106)$$

ist. Es gilt:

$$p_i = \hbar k_i = \hbar \frac{2\pi}{\lambda_i} = \hbar \frac{2\pi f_i n(\omega_i)}{c_0} = \frac{\hbar}{c_0} n(\omega_i) \omega_i \quad (107)$$

Aus dieser Beziehung und aus (106) folgt

$$\frac{\hbar}{c_0} n(\omega_1) \omega_1 + \frac{\hbar}{c_0} n(\omega_2) \omega_2 = \frac{\hbar}{c_0} n(\omega_3) \omega_3 \Rightarrow n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = n_3 \omega_3 \quad (108)$$

8.5 Herleitung für den Winkel der Phasenanpassung

Betrachtet wird hier ein uniaxialer Kristall, wie z.B. der BBO. Der ordentliche Strahl ist unabhängig von der Richtung, wobei der außerordentliche Strahl von der Ausbreitungsrichtung abhängt. Für einen negativen uniaxialen Kristall gilt, dass die Brechzahl des winkelabhängigen außerordentlichen Strahls kleiner als die Brechzahl des ordentlichen Strahls ist. Weiterhin folgt aus der Ellipsengleichung

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (109)$$

Für die Phasenanpassung muss der richtige Winkel θ gewählt werden (siehe Abbildung 5):

$$n_e^{2\omega}(\theta) = n_o^\omega \quad (110)$$

Somit folgt für Gleichung (109):

$$\frac{1}{(n_o^\omega)^2} = \frac{\sin^2 \theta_m}{(n_e^{2\omega})^2} + \frac{1 - \sin^2 \theta_m}{(n_o^{2\omega})^2} \quad (111)$$

Durch weitere Umformung erhält man schließlich (vgl. Gleichung (26), (27)):

$$\sin^2 \theta_m = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}} \quad (112)$$

Exkurs:

Genaue Herleitung von Gleichung (112). Zur Vereinfachung verwenden wir nun folgende Bezeichnungen: $u = (n_o^\omega)^2$, $v = (n_e^{2\omega})^2$, $w = (n_o^{2\omega})^2$, $x = \theta_m$. Es folgt somit für Gleichung (111)

$$\frac{1}{u} = \frac{\sin^2 x}{v} + \frac{1 - \sin^2 x}{w} \quad (113)$$

Es wird nun auf beiden Seiten mit v und w multipliziert, dies führt zu folgender Form:

$$\frac{vw}{u} = w \sin^2 x + v - v \sin^2 x \quad (114)$$

Weiterhin bringen wir v auf die linke Seite und klammern auf der rechten Seite $\sin^2(x)$ aus:

$$\frac{vw}{u} - v = (w - v) \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{vw - uv}{u(w - v)} = \frac{vw - uv}{uw - uv} \quad (115)$$

Der nächste Schritt besteht darin, im Zähler und im Nenner durch vw (linke Seite, mittlerer Term) und anschließend durch u (linke Seite, rechter Term) zu dividieren:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \frac{u}{w}}{\frac{u}{v} - \frac{u}{w}} = \frac{1 - \frac{1}{\frac{w}{u}}}{\frac{1}{\frac{v}{u}} - \frac{1}{\frac{w}{u}}} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{u^{-1} - w^{-1}}{v^{-1} - w^{-1}} \quad (116)$$

Durch Rucksstitution mit den oben festgelegten Beziehungen erhält man Gleichung (112).

8.6 Herleitung des nichtlinearen Koeffizienten

Die effektive Nichtlinearität d_{eff} wird am besten durch ein Beispiel hergeleitet. Es wird hier von einer kollinearen, Typ I Frequenzkonversion (*down conversion process*) mit einem BBO-Kristall ausgegangen. Nachdem dieser Kristall negativ uniaxial ist, wird bei diesem Vorgang nur die Pumpwelle als einziger außerordentlicher Strahl durch das Medium propagiert ($e \rightarrow o + o$). In **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** ist die Polarisation der Pumpe, des Signals und des Idlers relativ zu den (piezoelektrischen) Achsen dargestellt. Ebenfalls zu erkennen ist die Standard-Orientierung der Gruppe 3m. Die piezoelektrischen Achsen $\{X, Y, Z\}$ decken sich mit den dielektrischen optischen Achsen $\{x, y, z\}$ [Tan95]. Die Komponenten der oszillierenden nichtlinearen Polarisation bei der Frequenz des Idlers ist mit [Tan95]

$$\begin{pmatrix} P_x(\omega_i) \\ P_y(\omega_i) \\ P_z(\omega_i) \end{pmatrix} = 2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(\omega_p)E_x(\omega_s) \\ E_y(\omega_p)E_y(\omega_s) \\ E_z(\omega_p)E_z(\omega_s) \\ E_y(\omega_p)E_z(\omega_s) + E_z(\omega_p)E_y(\omega_s) \\ E_x(\omega_p)E_z(\omega_s) + E_z(\omega_p)E_x(\omega_s) \\ E_x(\omega_p)E_y(\omega_s) + E_y(\omega_p)E_x(\omega_s) \end{pmatrix} \quad (117)$$

gegeben. Hier wurde die kontrahierte Notation verwendet [Mes08], [Tan95]. Bei einer Typ I Phasenanpassung in einem negativen uniaxialen Kristall, bei dem die Pumpwelle außerordentlich ist und das Signal und der Idler ordentliche Wellen sind, lautet der dazugehörige gekoppelte Nichtlinearitätskoeffizient

$$\frac{E_o(\omega_i)}{E_e(\omega_p)E_o(\omega_s)} = d_{eff}^{parametric} = \sum_{i,j,k=1}^3 2d_{i,j,k}(\omega_i; \omega_p \omega_s) a_i(\omega_i) b_j(\omega_p) a_k(\omega_s) \quad (118)$$

wobei die Koeffizienten a und b den Richtungs-cosinus der ordentlichen und außerordentlichen Felder, E und P , bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (119)$$

Wird nun die Summation aus Gleichung (114) durchgeführt, erhält man für den effektiven nichtlinearen Koeffizienten der paramtrischen Erzeugung mit Typ I in einem BBO-Kristall:

$$d_{eff}^{parametric}(\theta, \phi) = 2[d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin(3\phi)] \quad (120)$$

In Abbildung 26 und Abbildung 27 sind die effektiven nichtlinearen Koeffizienten für die SHG von positiven uniaxialen und negativen uniaxialen Kristallen für die verschiedenen Kristallgruppen zusammengefasst.

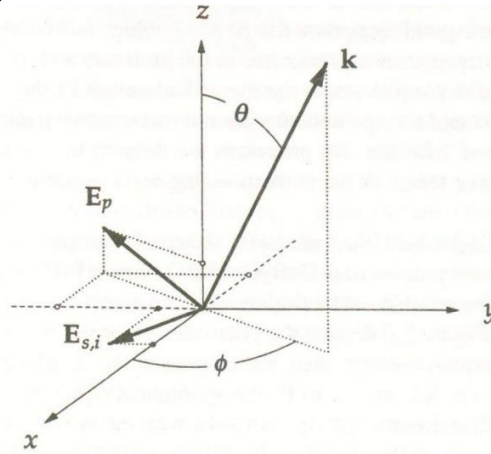


Abbildung 25: Polarisation der Pumpe (E_p), des Signals (E_s) und des Idlers (E_i) für Typ I Phasenanpassung ($e \rightarrow o + o$) in einem BBO-Kristall. Die kleinen Kreise an den Achsen sind die Projektionen der Koeffizienten a und b auf die Achsen [Tan95].

Crystal Point Group	Positive Birefringence $n_e > n_o$	
	Type I; $o \rightarrow e + e$	Type II; $o \rightarrow o + e$
6; 4	$-d_{14} \sin 2\theta$	$d_{15} \sin \theta$
622; 422	$-d_{14} \sin 2\theta$	0
6mm; 4mm	0	$d_{15} \sin \theta$
$\bar{6}m2$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$	$-d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$
3m	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$	$d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$
$\bar{6}$	$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta$	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta$
3	$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta - d_{14} \sin 2\theta$	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta + d_{15} \sin \theta$
32	$d_{11} \cos^2 \theta \sin 3\phi - d_{14} \sin 2\theta$	$d_{11} \cos 3\phi \cos \theta$
$\bar{4}$	$(d_{14} \cos 2\phi - d_{15} \sin 2\phi) \sin 2\theta$	$-(d_{15} \cos 2\phi + d_{14} \sin 2\phi) \sin \theta$
$\bar{4}2m$	$d_{14} \sin 2\theta \cos 2\phi$	$-d_{14} \sin 2\phi \sin \theta$

Abbildung 26: d_{eff}^{SHG} für verschiedene positive uniaxiale Kristallgruppen (die Gruppen 23 und $\bar{4}3m$ sind hier nicht aufgelistet, da diese keine Doppelbrechung aufweisen). Unterschieden wird hier zwischen Typ I und Typ II Phasenanpassung [Tan95].

Crystal Point Group	Negative Birefringence $n_e < n_o$	
	Type I; $e \rightarrow o + o$	Type II; $e \rightarrow e + o$
6; 4	$d_{31} \sin \theta$	$d_{14} \sin \theta \cos \theta$
622; 422	0	$d_{14} \sin \theta \cos \theta$
6mm; 4mm	$d_{31} \sin \theta$	0
$\bar{6}m2$	$-d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$
3m	$d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\phi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\phi$
$\bar{6}$	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta$	$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta$
3	$(d_{11} \cos 3\phi - d_{22} \sin 3\phi) \cos \theta + d_{31} \sin \theta$	$(d_{11} \sin 3\phi + d_{22} \cos 3\phi) \cos^2 \theta + d_{14} \sin \theta \cos \theta$
32	$d_{11} \cos 3\phi \cos \theta$	$d_{11} \sin 3\phi \cos^2 \theta + d_{14} \sin \theta \cos \theta$
$\bar{4}$	$-(d_{31} \cos 2\phi + d_{36} \sin 2\phi) \sin \theta$	$[(d_{14} + d_{36}) \cos 2\phi - (d_{15} + d_{31}) \sin 2\phi] \sin \theta \cos \theta$
$\bar{4}2m$	$-d_{36} \sin 2\phi \sin \theta$	$(d_{14} + d_{36}) \cos 2\phi \sin \theta \cos \theta$

Abbildung 27: d_{eff}^{SHG} für negative uniaxiale Kristallgruppen. Unterschieden wird hier zwischen Typ I und Typ II Phasenanpassung [Tan95].

8.7 Herleitung der effektiven Verstärkung

Die Randbedingung für Gleichung (84), (85) und (86) lautet [Mid73], [Boy03]:

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = 0 \quad (121)$$

Hieraus folgen die anderen beiden Gleichungen zu

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -K_1 E_3 E_2^* e^{i\Delta k z} \quad (122)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -K_2 E_3 E_1^* e^{i\Delta k z} \quad (123)$$

Mit

$$K_i = \frac{8\pi i \omega_i^2 d}{k_i c^2} \quad (124)$$

(i=1,2). Durch differenzieren von Gleichung (118) bezüglich z und unter Verwendung von (119), lässt sich für $\Delta k = 0$ aus der DGL zweiter Ordnung folgende Lösung finden [Mid73]:

$$E_2(l) = E_2(0) \cosh\left(\frac{l}{l_{pa}}\right) + \left(\frac{\omega_1^2 k_2}{\omega_2^2 k_1}\right)^{\frac{1}{2}} E_1(0) \sinh\left(\frac{l}{l_{pa}}\right) \quad (125)$$

Mit

$$l_{pa} = \sqrt{\frac{n_1 n_2 \lambda_1 \lambda_2}{8\pi d E_3}} \quad (126)$$

Analog lässt sich eine Lösung für E_1 finden. Für große l gilt

$$E_2 = \left[E_2(0) + \left(\frac{\omega_1^2 k_2}{\omega_2^2 k_1}\right)^{\frac{1}{2}} E_1(0) \right] e^{\frac{l}{l_{pa}}} \quad (127)$$

mit einem exponentiellen Verstärkungsfaktor von $\alpha = \frac{1}{l_{pa}}$. Demnach erhalten wir zwei verschiedene Arten von Lösungen: Ist l in der gleichen Größenordnung wie l_{pa} , was bei einem paramtrischen Verstärker der Fall ist, gilt (der Index 2 steht hier für das Signal und 1 für den Idler) [Mid73]:

$$E_2(l) = E_2(0) \cosh(\alpha l) \quad (128)$$

$$E_1(l) = E_2(0) \left(\frac{\omega_1^2 k_2}{\omega_2^2 k_1}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh(\alpha l) \quad (129)$$

Hingegen gilt für einen Oszillator, dass l durch mehrmaliges Durchlaufen des Mediums groß ist [Mid73]:

$$E_2(l) = E_2(0) e^{\alpha l} \quad (130)$$

$$E_1(l) = E_2(0) \left(\frac{\omega_1^2 k_2}{\omega_2^2 k_1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha l} \quad (131)$$

Hieraus folgt, dass sich für $\alpha l < 1$ die Welle bei der parametrischen Verstärkung mit $1 + \frac{(\alpha l)^2}{2}$ und die eines parametrischen Oszillators mit $1 + \alpha l$ ausbildet. Das bedeutet, dass der Oszillator im Stande ist, auch mit kleinen Verstärkungen die Verluste pro Umlauf zu übersteigen. Es wird im Folgenden der Effekt der Phasenfehlانpassung berücksichtigt, d.h. $\Delta k \neq 0$. Durch Substitution der Gleichungen (118) und (119) mit

$$E_1(z) = E_1(0)e^{g_{eff}z + i\frac{\Delta k}{2}z} \quad (132)$$

und

$$E_2^*(z) = E_2^*(0)e^{g_{eff}z - i\frac{\Delta k}{2}z} \quad (133)$$

erhält man

$$g_{eff}^2 + \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 = \frac{(8\pi d)^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{c^4 k_1 k_2} E_3(0) E_3^*(0) = \alpha^2 \quad (134)$$

Der effektive Verstärkungsfaktor lautet demnach

$$g_{eff}^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 \Rightarrow g_{eff} = \left[\alpha^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (135)$$

Eine genauere Analyse zeigt jedoch, dass sich die Beziehungen für die Verstärkung eines OPAs und die eines OPOs unterscheiden [Mid73]. Für eine exakte Betrachtung der Phasenfehlانpassung wird auf [Smi64] verwiesen. Die richtigen Zusammenhänge bei bestehender Phasenfehlانpassung, analog zu den Gleichung bei perfekter Phasenانpassung, lauten für einen OPA:

$$S_2(l) = S_2(0) \left[1 + (\alpha l)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)^2} \right] \quad (136)$$

$$S_1(l) = S_1(0) (\alpha l)^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)^2} \quad (137)$$

Hier war die Annahme, dass kleine Verstärkungen vorliegen, was bei cw-OPAs durchaus üblich ist. Die korrespondierenden Gleichungen, unter der Annahme, dass sowohl das Signal und der Idler in Folge von Quantenrauschen hervorgerufen wurden und dass die Verluste beider Wellen gleich sind, lauten für einen OPO entsprechend:

$$S_2(l) = S_2(0) \left[1 + 2\alpha l \frac{\sin\left(\frac{\Delta k l}{2}\right)}{\frac{\Delta k l}{2}} \right] \quad (138)$$

$$S_1(l) = \frac{\omega_1}{\omega_2} S_2(l) \quad (139)$$

8.8 Literatur

- [Arm62] Armstrong, Bloembergen et al.. Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric, Phys. Rev. 127, 1918 (1962).
- [Bal07] M. Gupta, J. Ballato. The Handbook of Photonics 2nd Ed. CRC, 2007.
- [Bas03] W. Koechner, M. Bass. Solid-State Lasers. Springer-Verlag, 2003.
- [Boy03] W. Boyd. Nonlinear Optics. Academic Press , 2ed., 2003.
- [Che10] www.chemgapedia.de, letzter Zugriff am 24.08.2010.
- [Fre10] <http://refractiveindex.info>, letzter Zugriff am 24.08.2010.
- [Lth10] Prof. Dr. rer. nat. H. Huber. Skriptum zur Vorlesung Lastertechnologie, 2010.
- [Mes08] D. Meschede. Optik, Licht und Laser. Vieweg und Teubner, 2008.
- [Mid73] F. Zernike, J.E. Midwinter. Applied nonlinear optics. Dover, 1973.
- [Nik99] V.G. Dmitriev, G.G. Gurzadyan, D.N. Nikogosyan. Handbook of Nonlinear Optical Crystals. Springer, 1999.
- [Ric03] R. L. Sutherland. Handbook of Nonlinear Optics. Marcel Dekker, 2003.
- [She02] Y. Shen. The Principles of Nonlinear Optics. Wiley, 2002.
- [Smi64] R. G. Smith. Effects of Momentum Mismatch on Parametric Gain. J. Appl. Phys., 41, 4121, 1964.
- [Tan95] C. L. Tang, L. K. Cheng. Fundamentals of Optical Parametric Processes and Oscillators. Harwood Academic Publishers, 1995.
- [Tei07] B.E.A. Saleh, M.C. Teich. Fundamentals of Photonics. Wiley, 2007.
- [UN10] C. Kreidler. Der optisch parametrische Oszillator (OPO). Universität Konstanz, 2010.
- [Yam93] Yamada et al.. First-order quasi-phase matched LiNbO₃ waveguide periodically poled by applying an external field for efficient blue second-harmonic generation, Appl. Phys. Lett. 62 (5), 435 (1993).

8.9 Komponenten des NLO-Versuchs:

- Innolas Spitlight 300; Blitzlampengepumpter Nd:YAG Laser
- Internes SHG und THG Modul
- Photodiode DET10A (Thorlabs)
- Energiemessgerät Field MaxII-Top mit Energiesensor J-25MB-HE
- Digitales Speicheroszilloskop (200 MHz Bandbreite)
- Stellarnet Faseroptisches Kompaktspektrometer
- Indikatorplättchen (Thorlabs)
 - VRC1: 250-540 nm
 - VRC2: 400-640 nm
800-1700 nm
- Imbusschlüsselsatz
- Keramikplättchen
- 2x Beam Dump (Coherent)
- Graufilter
- 50 Ω Vorwiderstand für das Oszilloskop
- Zerstreuungslinse ($f = -50$ mm)
- 4x Schutzbrille (315-532 D LB6 + I LB 7 + R LB 5 / 1030–1100 DR LB 7 + I LB8)