

# Die Wärmepumpe

**Versuch V206**

Steven Becker

steven.becker@tu-dortmund.de

und

Stefan Grisard

stefan.grisard@tu-dortmund.de

Tag der Durchführung 15.11.16

Tag der Abgabe 22.11.16

# 1 Theorie

## 1.1 Prinzip der Wärmepumpe

In der Thermodynamik fließt die Wärme immer vom warme Medium  $T_1$  zum kalte Medium  $T_2$ . Möchte man diesen Effekt umkehren, also vom Kalten zum Warmen. Kommt die Wärmepumpe zum einsatz. Denn durch Zufuhr von Energie (z.B. mechanische Arbeit) sagt der erste Hauptsatz der Thermodynamik mititels

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (1)$$

,dass die im Warmen aufgenommene Wärmemenge  $Q_1$  gleich der Summe der aus dem Kalten entnommene Wärmemenge  $Q_2$  und der zugeführten Arbeit  $A$  ist.

Jede Wärmepumpe besitzt eine sogennante Güteziffer  $\nu$ . Diese gibt das Verhältnis zwischen transportierten Wärmemenge und die dazu benötigte Arbeit  $A$ . Aus der Hauptsatz ergibt sich für ideale Voraussetzung:

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \quad (2)$$

Betrachtet man zusätzlich den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. So ergibt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen den Wärmemengen  $Q_1$  und  $Q_2$  und den Temperaturen der Medien  $T_1$  und  $T_2$ . Denn ändert sich die Temperatur der beiden Medien nicht während der Wärmeübertragung. So verschwindet die reduzierte Wärmemenge und es folgt

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (3)$$

Jedoch ist für (3) eine Vorraussetzung, das der Prozess reversibel ist. Das bedeutet die in einem thermodynamischen Prozess aufgenommene Wärme und Energie, muss bei Umkehrung des Versuches wieder zurückfließen. In der Realität ist dies durch Verlustwärme und Reibungsprozesse nie zu realisieren. Dadurch stellt sich für die reale Wärmepumpe eine andere Günterziffe  $\nu_{real}$  ein. Sie lässt sich mittels der idelaen Güteziffer

$$\nu_{id} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

abschaätzen zu:

$$\nu_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Das bedeutet je geringer die Differenz zwischen  $T_1$  und  $T_2$ , desto höher ist die Effizienz der Wärmepumpe.

## 1.2 Bestimmung der realen Güteziffer

Aus einer von  $t$  abhängigen Messreihe  $T_1$  wird der Differenzenquotient  $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$  bestimmt. Dadurch kann dann die Wärmemenge bestimmt werden:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t}$$

Durch Bestimmung einer Ausgleichsgeraden, kann der Differenzenquotient durch ein Differenzialquotient ersetzt werden. Dies soll in allen folgenden Rechnungen gelten.

man erhält:

$$\frac{dQ_1}{dt} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dt} \quad (4)$$

Wobei  $m_1 c_w$  die Wärmekapazität des Wassers im Behälter 1 ist und  $m_k c_k$  die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers sind. Mit (2) und (4) folgt dann

$$\nu_{real} = \frac{dQ_1}{dtN} \quad (5)$$

Hierbei sei  $N$  die Leistungsaufnahme des Wattmeter im Zeitraum  $d$ .

## 1.3 Bestimmung des Massendurchsatzes

Bei Betrachtung der Messreihe  $T_2$  bildet man den Differenzialquotienten  $\frac{dT_2}{dt}$ . Damit kann dann, wie oben

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt}$$

Der

die Wärmemenge, die pro Zeit  $dt$  entzogen wird, bestimmen. Da es sich bei diesem Vorgang, um eine Aggregatzustandsänderung handelt. Muss die Wärmemenge gleich der Verdampfungswärme  $L$  pro Massenzeitstückchen  $\frac{dm}{dt}$ . Also:

$$\frac{dQ_2}{dt} = L \frac{dm}{dt}$$

## 1.4 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Der Kompressor benötigt, wenn ein Gas vom Volumen  $V_a$  auf das Volumen  $V_b$  verringert die Arbeit:

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p dV \quad (6)$$

Hier sei  $p$  der Druck.

Gehen wir davon aus das der Kompressor adiabatisch arbeitet, d.h. ohne Wärme an die Umgebung abzugeben. So kann mithilfe der Poisson Gleichung

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa = p V^\kappa \quad \kappa > 1$$

die Gleichung (6) umgeschrieben.  $\kappa$  gibt das Verhältnis der Molwärme  $C_p$  und  $C_V$  a. Es folgt:

$$A_m = -p_a V_a^\kappa \int_{V_a}^{V_b} V^{-\kappa} dV = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \left( \frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - p_a \right) V_a$$

Und damit direkt für die Kompressorleistung

$$N_{mech} = \frac{dA_m}{dt} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \left( \frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt}$$

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte des Transportmediums im gasförmigen Zustand, also beim Druck  $p_a$ .

## 2 Versuchsaufbau und -durchführung

### 2.1 Versuchsaufbau

Der allgemeine Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt.

An diesem soll auf die Funktionsweise einer Wärmepumpe erklärt werden.

Die Wärmepumpe nutzt als Wärmetransportmedium das Gas Dichlodifluormethan). Beginnen wir bei unserer Betrachtung, bei Reservoir 1. In diesem wird die Temperatur  $T_1$  gemessen, während der Druck  $p_b$  wirkt. Das Gas erreicht im gasförmigen Reservoir 1. Zu diesem Zeitpunkt ist es stark erwärmt und so unter Druck komprimiert, dass es sich im Reservoir 1 wieder verflüssigt. Während dessen gibt es pro Gramm Gas die

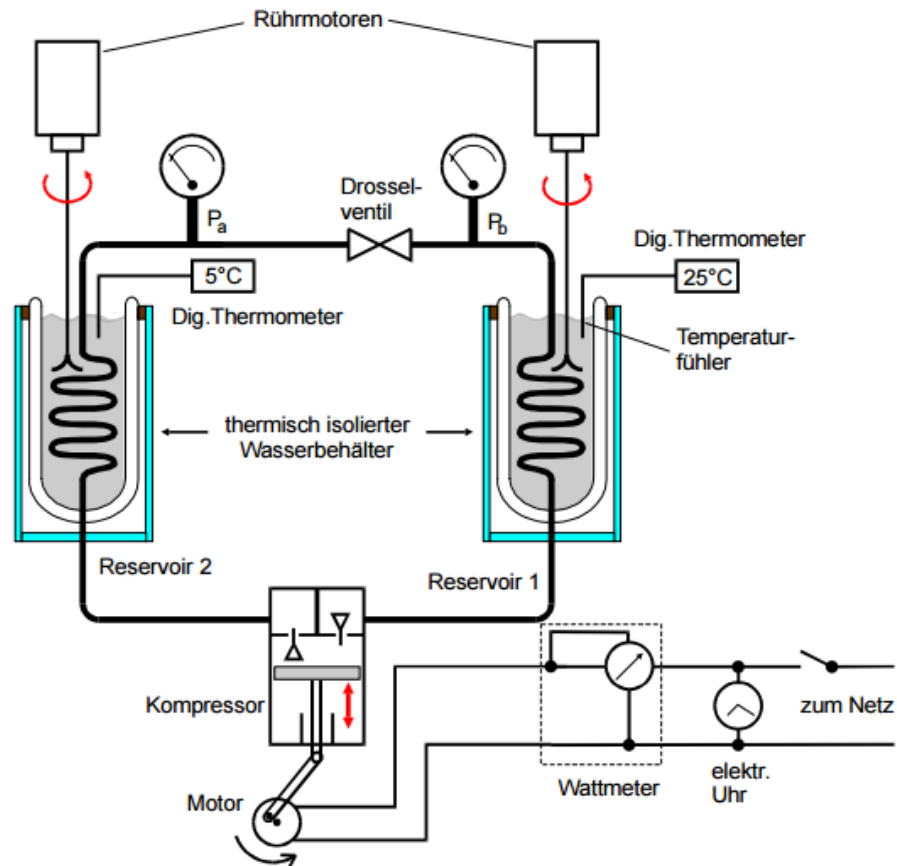


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe

Kondensationswärme  $L$  and das Reservoir ab. Dadurch wird dieses aufgeheizt. Danach fließt das wieder verflüssigte Gas durch ein Reiniger. Dieser dient dazu eine blasenfrei Flüssigkeitszufuhr zum anschließenden Drosselventil zu ermöglichen. Das Drosselventil dient dazu einen Druckunterschied  $p_b - p_a$  zwischen Reservoir 1 und 2 zu erstellen. Es dient aber gleichzeitig auch als Steuervorrichtung. Denn durch Steuerung des Druckes, soll verhindert werden das flüssiges Gas in den Kompressor fließt. Nachdem das flüssige Gas das Drosselventil passiert hat, fließt es in Reservoir 2. Dort verdampft es und nimmt die Verdampfungswärme  $L$  pro Gramm Substanz auf. Die Temperatur des Reservoirs sinkt. Danach gelangt das Gas nun in den Kompressor. Er komprimiert das Gas nahezu adiabatisch. Dadurch erhöht sich neben der Temperatur des Gases auch der Druck.

## 2.2 Versuchsdurchführung

Zu Beginn des Versuches müssen die beiden Reservoirs mit Wasser gefüllt werden. Dazu wird mit einem Messkolben die exakte Menge an Wasser (3 Liter) eingegüllt. Danach wird der Kompressor eingeschaltet. Ab jetzt wird jede Minute die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ ,

die Drücke  $p_a$  und  $p_b$  und die Leistungsaufnahme des Kompressors  $A$  abgelesen. Sobald die Temperatur  $T_1$  einen Wert von  $50^\circ\text{C}$  erreicht wird der Kompressor ausgeschaltet.

### 3 Auswertung

Im Folgenden sollen die Messergebnisse analysiert werden und die relevanten Größen aus der Theorie berechnet werden.

Die Werte für die beiden Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  sowie die Drücke  $p_a$  und  $p_b$  sind in Tabelle 1 aufgetragen.

Zeit in s	$T_1$ in K	$p_b$ in bar	$T_1$ in K	$p_b$ in bar
0	293,75	5,25	294,05	5,20
60	295,05	7,25	294,15	2,40
120	296,65	7,50	294,15	2,90
180	298,15	8,00	294,05	3,00
240	300,45	8,50	294,05	3,10
300	302,75	9,00	294,05	3,20
360	305,25	9,50	293,95	3,20
420	307,55	10,00	293,45	3,20
480	309,65	10,50	291,45	3,20
540	311,65	11,00	288,55	3,20
600	313,55	11,25	285,95	3,20
660	315,55	11,75	283,95	3,22
720	317,15	12,00	282,75	3,22
780	318,75	12,50	281,75	3,22
840	320,35	13,00	280,95	3,20
900	321,75	13,25	280,45	3,20
960	323,05	13,50	280,05	3,20
1020	324,15	14,00	279,95	3,20

**Tabelle 1:** Temperaturen und Drücke

Der zeitliche Verlauf der Temperaturen ist in den Abbildungen (...) dargestellt. Hierbei wurde mittels der Python Bibliothek *Scipy* eine Regression an eine Funktion der Form  $T_i = At^2 + Bt + C$  bestimmt. Um im späteren Verlauf eine präzisere Aussage über den Temperaturverlauf von  $T_2$  zu gewährleisten, wurde selbiges für den Zeitraum nach  $t_0 = 360\text{s}$  erneut durchgeführt ( $T_2^*$ ). In der Diskussion wird hierauf näher eingegangen. Die entsprechenden Parameter sind in Tabelle 2 zu finden.

Die gefundenen Regressionskurven erlauben es, die Differentialquotienten  $\frac{dT_1}{dt}$  und  $\frac{dT_2}{dt}$  zu berechnen. Die Werte für vier verschiedene Zeiten sind in Tabelle 3 aufgetragen, die entsprechenden Fehler  $\sigma_{dT_i}$  ergeben sich über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Hierbei

Funktion	$A$	$B$	$C$
$T_1$	$-6,77 \pm 1,67$	$3,86 \pm 0,18$	$292,45 \pm 0,39$
$T_2$	$-10,98 \pm 4,88$	$-0,67 \pm 0,52$	$295,52 \pm 1,13$
$T_2^*$	$32,83 \pm 7,24$	$-6,91 \pm 0,96$	$315,85 \pm 3,01$

**Tabelle 2:** Regressionsparameter

wurden die Zeiten  $t > t_0$  gewählt, sodass die Kurve aus Abbildung 4 verwendet werden konnte.

### 3.1 Güteziffer

Mittels des Zusammenhangs

$$\nu_{real} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dt} \frac{1}{P} \quad (7)$$

wurde die reale Güteziffer  $\nu_{real}$  berechnet. Hierbei entsprechen  $m_k c_k = 660 \text{ J/s}$  und  $c_1 c_W$  den Wärmekapazitäten von Apparatur und Wasser. Die Masse  $m_1 = V_1 \cdot \rho_w$  ergibt sich mit der Dichte des Wassers  $\rho_w \approx 1000 \text{ kg/m}^3$  und der entsprechenden Füllmenge  $V_1 = 3 \text{ l}$ . Der Wert  $c_w = 4182 \text{ J/kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  wurde der Literatur [1] entnommen. Da hier lediglich die Größe  $\frac{dT_1}{dt}$  fehlerbehaftet ist, berechnet sich der Fehler zu:

$$o_{\nu_{real}} = |const| \cdot o_{dT_1} \quad (8)$$

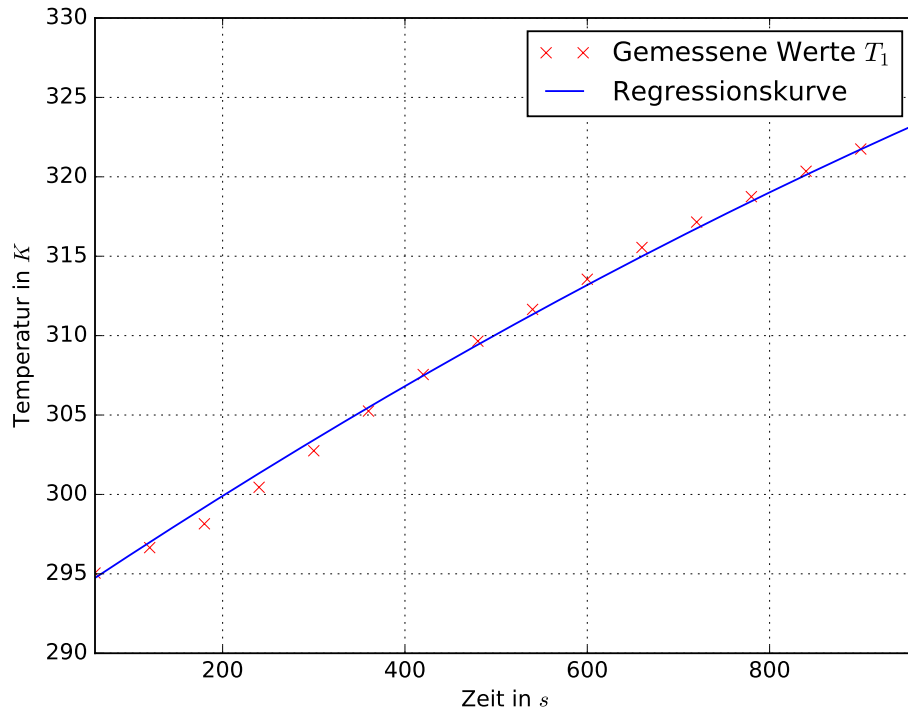
Die Ergebnisse der Rechnung, sowie die ideale Güteziffer  $\nu_{ideal}$  (formel) (fehlerunbehaftet) sind in Tabelle 3 aufgetragen.

Zeit in s	$\frac{dT_1}{dt}$ in K/s	$\frac{dT_2}{dt}$ in K/s	$\nu_{real}$	$\nu_{ideal}$
360	$0,0338 \pm 0,0021$	$-0,0454 \pm 0,0110$	$2,17 \pm 0,14$	27,01
540	$0,0313 \pm 0,0025$	$-0,0336 \pm 0,0124$	$1,97 \pm 0,16$	13,49
720	$0,0289 \pm 0,0030$	$-0,0218 \pm 0,0142$	$1,81 \pm 0,19$	9,22
900	$0,0264 \pm 0,0035$	$-0,0100 \pm 0,0162$	$1,68 \pm 0,22$	7,79

**Tabelle 3:** Differenzenquotienten und reale Güteziffer

### 3.2 Massendurchsatz und Mechanische Leistung

Zur Bestimmung des Massendurchsatzes  $\frac{dm}{dt}$  wird zunächst die Verdampfungswärme  $L$  benötigt. Hierzu wird der aus V203 [2] bekannte Zusammenhang des Druckverlaufs für



**Abbildung 2:** Temperaturverlauf  $T_1$

$p_b$  in Abhängigkeit von der Temperatur

$$p_b = p_0 \exp -\frac{L}{RT_1} \quad (9)$$

ausgenutzt. Durch einmaliges Anwenden des Logarithmus erhält man einen linearen Zusammenhang der Form:

$$\log p_b = \log p_0 - \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{T_1} \quad (10)$$

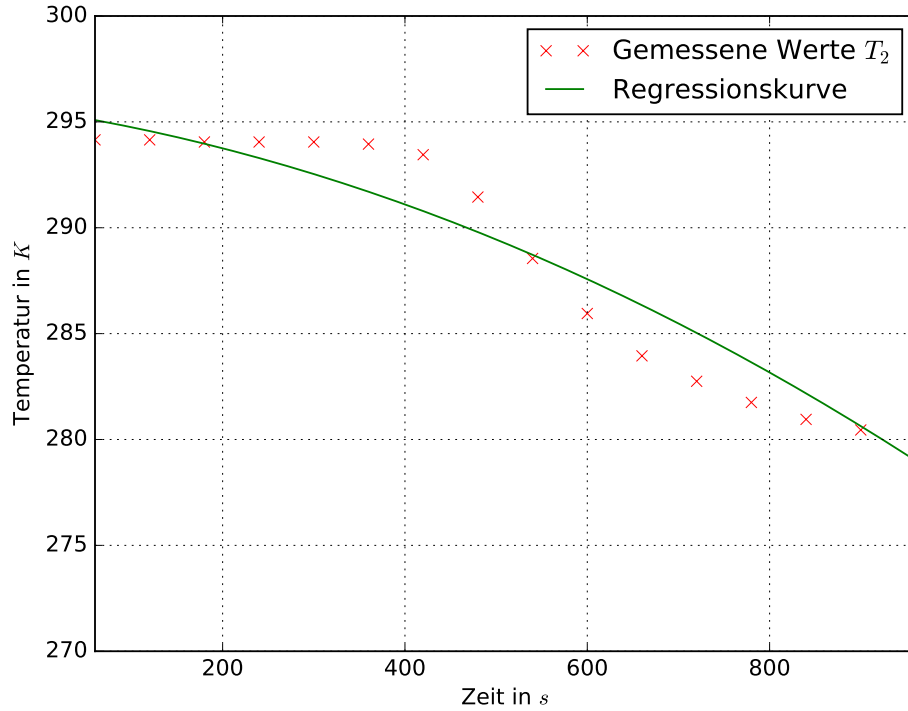
Durch halb-logarithmisches Auftragen der Werte für  $p_b$  gegen die Reziproken der Temperatur  $T_1$  (siehe Abb. 5) kann also mit Hilfe einer lineare Regression die Steigung  $-\frac{L}{R}$  ermittelt werden. Steigung und zugehöriger Fehler berechnen sich mit:

$$m = \frac{(N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i))}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad o_m = \frac{No_y^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (11)$$

Es ergibt sich:

$$-\frac{L}{R} = (-2228.58 \pm 111.63)\text{K} \quad (12)$$





**Abbildung 3:** Temperaturverlauf  $T_2$

Mit der allgemeinen Gaskonstante  $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ergibt sich  $L$  mit (8) zu:

$$L = (1.85 \pm 0.09) \cdot 10^4 \text{ J mol}^{-1} \quad (13)$$

Der Massendurchsatz berechnet sich nun mit:

$$\frac{dm}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} \frac{1}{L} \quad (14)$$

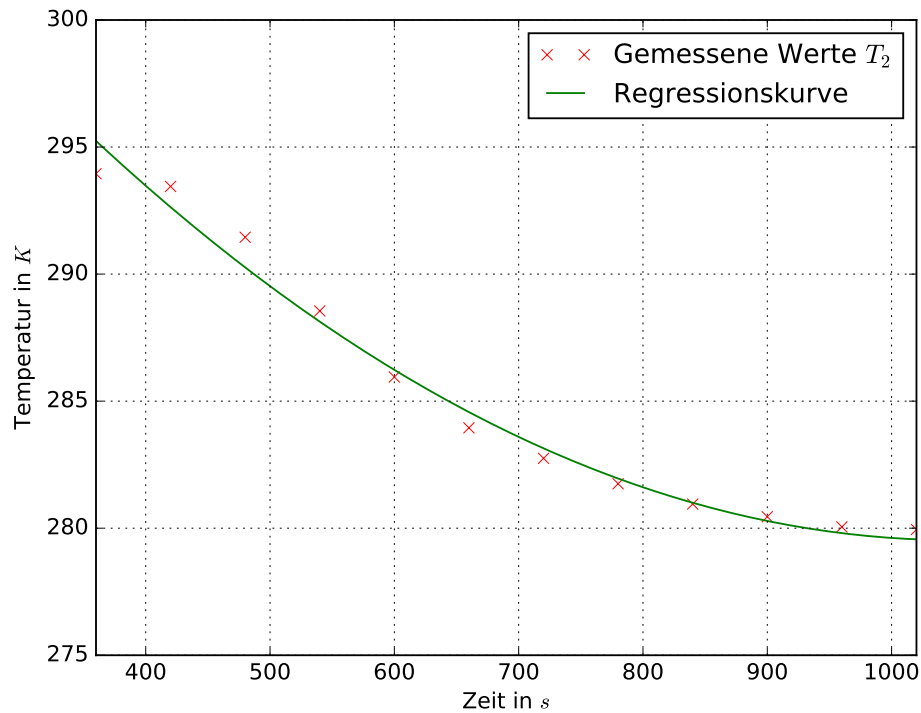
Mit der identischen Wärmekapazitäten  $m_2 c_w$  und  $m_k c_k$  wie oben. Die berechneten Werte sind in Tabelle 4 aufgetragen, der relative Fehler berechnet sich gemäß der üblichen Formel für Produkte und Quotienten:

$$\frac{o_{dm}}{|dm|} = |const| \sqrt{\left(\frac{o_{dT_2}}{|dT_2|}\right)^2 + \left(\frac{o_L}{|L|}\right)^2} \quad (15)$$

Des Weiteren wurde mittels der molaren Masse des Gases  $120,91 \text{ g mol}^{-1}$  [1] umgerechnet in die Einheit g/s.

Abschließend soll nun noch die mechanische Leistung des Kompressors errechnet werden. In Formel (x) kann  $\frac{1}{\rho}$  näherungsweise mit der idealen Gasgleichung bestimmt werden.

$$pV = nRT \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\rho_0 T_0 p_a}{T_2 p_0} \quad (16)$$



**Abbildung 4:** Temperaturverlauf  $T_2$  für  $t > 360$ s

Mit den aus der Versuchsanleitung [3] entnommenen Konstanten des Gases  $CI_2F_2C$ . Die entsprechenden Mittelwerte befinden sich in Tabelle 4.

Zeit in s	$\frac{dm}{dt}$ in g/s	$N_{mech}$ in W
360	$3,88 \pm 0,96$	$77,49 \pm 19,09$
540	$2,87 \pm 1,07$	$64,45 \pm 24,02$
720	$1,86 \pm 1,22$	$43,84 \pm 28,66$
900	$0,85 \pm 1,39$	$21,64^{+35,20}_{-21,64}$

**Tabelle 4:** Massendurchsatz und Kompressorleistung

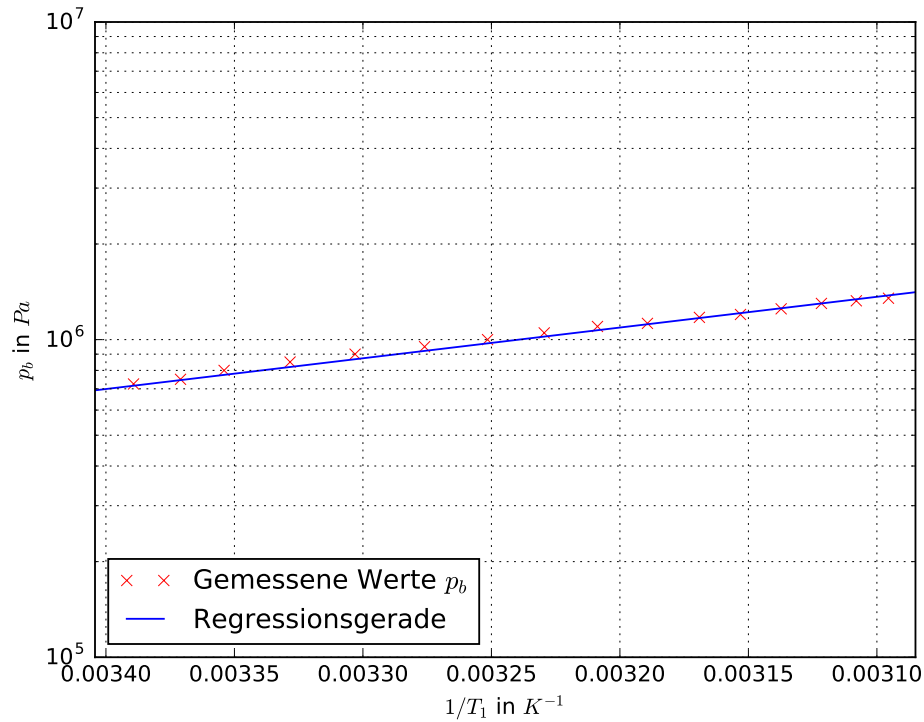


Abbildung 5: Regression der Druckkurve

## 4 Diskussion

In diesem Abschnitt sollen die gewonnen Erkenntnisse der Auswertung diskutiert werden. Zunächst zur Temperaturmessung. Hierbei zeigte sich direkt zum Beginn der Messung, dass das Thermometer zur Messung der Temperatur  $T_2$  nicht korrekt funktionierte. Während die Temperatur in Reservoir 1 anstieg, wurde in den ersten 5 Minuten eine nahezu konstante Temperatur in Reservoir 2 gemessen (siehe 1). Dies widerspricht der Physik, weswegen in der nachfolgenden Auswertung eine Betrachtung des Zeitraumes nach  $t_0 = 360s$  vorgezogen wurde. Insgesamt ist jedoch durch diese Beobachtung die Aussagekraft der Temperaturmessung als sehr gering einzustufen.

Der Vergleich der realen und idealen Gütezahl (3) bestätigt deutlich den Zusammenhang  $\nu_{real} < \nu_{ideal}$ . Ebenfalls zu erkennen ist der Effekt, dass die Gütezahl kleiner wird mit dem Anstieg der Temperaturdifferenz. Als Ursachen für die deutlich geringere reale Gütezahl sind immense Energieverluste des Systems zu nennen. Dies bestätigt sich vorallem in der Tatsache, dass die tatsächlich aufgebrauchte elektrische Leistung (im Mittel  $P = 201.9W$ ) deutlich höher ist als die genutzte mechanische Leistung (etwa für  $t = 720s$ :  $N_{mech} = 43,84W$ ). Zur Berechnung der mechanischen Leistung sei noch anzumerken, dass der errechnete Fehler (siehe ??) sehr hoch ausfällt und die somit die Signifikanz dieser

Messung als relativ gering zu bewerten ist. Dennoch erlauben die gewonnen Erkenntnisse der Auswertung die Feststellung, dass reale und ideale Effektivität einer Wärmepumpe stark voneinander abweichen.

## Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1*. Springer-Spektrum, 2014.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 206 Die Wärmepumpe*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V203.pdf>.
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 206 Die Wärmepumpe*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf>.