

Gekoppelte Schwingkreise

Versuch V355

Steven Becker

steven.becker@tu-dortmund.de

und

Stefan Grisard

stefan.grisard@tu-dortmund.de

Tag der Durchführung: 10.01.17

Tag der Abgabe: 17.01.17

Zielsetzung

Im Versuch 355 *Gekoppelte Schwingkreise* soll das Verhalten gekoppelter schwingungsfähiger Systeme untersucht werden. Hierzu werden zwei kapazitiv gekoppelte elektrische Schwingkreise verwendet.

1 Theorie

Der prinzipielle Aufbau ist in Abb. 1 einzusehen. Unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln erhält man folgendes gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Ströme I_1 und I_2 :

$$\begin{aligned} L \ddot{I}_1 + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_k} (I_1 - I_2) &= 0 \\ L \ddot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 + \frac{1}{C_k} (I_1 - I_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

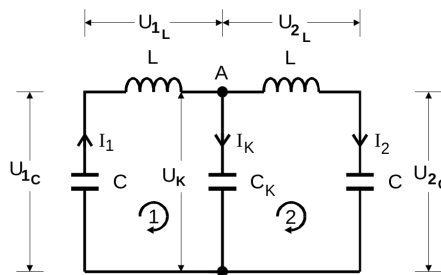


Abbildung 1: Prinzipschaltbild zweier kapazitiv gekoppelter Schwingkreise
[anleitung355]

Eine Hauptachsentransformation des Systems erhält man trivialerweise durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} (I_1 + I_2) &= 0 \\ L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right) (I_1 - I_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Relativgröße $(I_1 + I_2)$ schwingt also harmonisch mit den Frequenzen:

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (3)$$

Die Größe $(I_1 - I_2)$ entsprechend mit der Frequenz:

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right)^{-1}}} \quad (4)$$

Die beiden Frequenzen entsprechen genau jenen Frequenzen der Fundamentalschwingungen: Gleich- und gegenphasige Schwingung bei betragsmäßig gleichen Anfangsamplituden (in Analogie zum gekoppelten Pendel aus der Mechanik). Allgemein gilt $\nu^+ < \nu^-$.

Alle weiteren Lösungen des Systems (2) erhält man durch Superposition. Wird lediglich der linke Schwingkreis zu Schwingungen angeregt, so entstehen sogenannte Schwebungsvorgänge, die im Versuch untersucht werden sollen. Hierbei oszilliert die Energie des gekoppelten Systems mit der Schwebungsfrequenz ν_{schwebe} zwischen den Schwingssystemen.

$$\nu_{\text{schwebe}} = \nu^- - \nu^+ \quad (5)$$

Innerhalb dieser enhüllenden Schwingung der einzelnen Amplituden führen die Oszillatoren die Schwingungsfrequenz ν_{schwing} aus.

$$\nu_{\text{schwing}} = \nu^- + \nu^+ \quad (6)$$

Wird das System im linken Zweig des Aufbaus durch eine Wechselspannung mit Amplitude $|U|$ und Frequenz ω angeregt, so ergibt sich für den Betrag des Stroms I_2 :

$$|I_2(\omega)| = |U| \left(4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Hierbei entspricht R einem in beiden Zweigen des Aufbaus geschalteten ohmschen Widerstand und $Z(\omega)$ der Vereinfachung:

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right) \quad (8)$$

Der Strom I_2 erreicht Maxima für die Fundamentalfrequenzen ω^+ bzw. ω^- . Diese Gegebenheit wird im Versuch ausgenutzt um die Fundamentalschwingungen experimentell zu bestimmen.

2 Versuchsaufbau/-durchführung

2.1 Justage

Zunächst ist es erforderlich die beiden Schwingkreise auf die selbe Resonanzfrequenz einzustellen. Hierzu wird der Aufbau gemäß Abbildung 2 verwendet, der je einmal für beide

Schwingkreise aufgebaut wird. Im Falle der Resonanz verschwindet die Phasendifferenz zwischen Generatorspannung und Schwingkreisstrom, was sich mittels der Betrachtung von Lissajou Figuren feststellen lässt. Hierbei ist der Phasenversatz zwischen Strom und Spannung von $\frac{\pi}{2}$ zu beachten. Die Lissajou-Figur im angesprochenen Fall entspricht also einem Kreis. Die variable Kapazität des zweiten Schwingkreises wird so eingestellt, dass die Resonanzfrequenzen übereinstimmen.

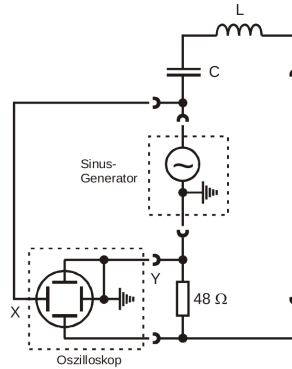


Abbildung 2: Aufbau zur Bestimmung der Resonanzfrequenz [anleitung355]

2.2 Untersuchung der Schwebungen

Unter variablem Kopplungskondensator C_k soll das Verhältnis zwischen Schwebungs- und Schwingungsfrequenz ermittelt werden. Hierzu wird der Aufbau gemäß Abbildung 3 genutzt. Im linken Schwingkreis wird dabei eine Rechteck-Spannung angelegt. Auf dem Oszilloskop wird die Anzahl Schwingungsmaxima innerhalb eines Schwebungsbauches abgezählt.

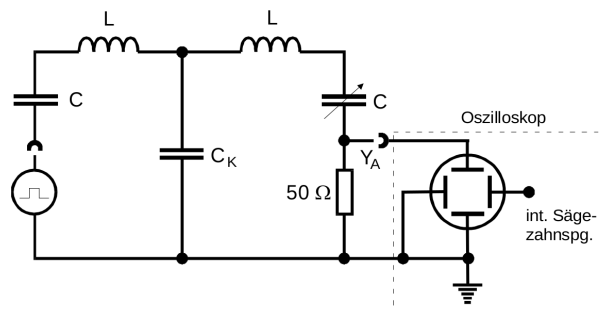


Abbildung 3: Aufbau zur Untersuchung der Schwebungsvorgänge [anleitung355]

2.3 Messung der Fundamentalschwingungen

Die experimentelle Bestimmung der Größen ν^+ und ν^- soll durch zwei verschiedene Methoden geschehen. Zunächst wird der Aufbau 3 geringfügig modifiziert. Die Rechteckspannung wird durch eine Sinusspannung ersetzt und auf den X-Eingang des Oszilloskops gelegt, welches auf die X-Y-Option eingestellt wird. Die Phase zwischen der Generatorspannung und der abfallenden Spannung am $48\,\Omega$ Widerstand verschwindet für die Resonanzfrequenzen. Für variable C_k werden also jene Frequenzen ermittelt, für die sich die Lissajou-Figur als Gerade darstellt.

Wie in der Theorie erwähnt, erreicht der Strom I_2 und damit auch die über den Widerstand abfallende Spannung zwei Maxima für die Fundamentalfrequenzen. Das Oszilloskop wird auf den Y-T-Betrieb umgeschaltet und der Spannungsverlauf in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Hierzu wird ein Frequenzsweep der Periode 1 s verwendet. Aus Anfangs- und Endfrequenz, sowie den mit dem Oszilloskop gemessenen Zeitdistanzen der Maxima zum Anfangspunkt des Sweeps, können die Fundamentalfrequenzen in der Auswertung berechnet werden.

3 Auswertung

Die für den Versuch verwendeten konstanten Bauelemente, mit den Werten

$$\begin{aligned} L &= 23,954\,\text{mH} \\ C &= 0,7932\,\text{nF} \\ C_{\text{sp}} &= 0,028\,\text{nF} \end{aligned} \tag{9}$$

wurden als fehlerfrei angenommen. Hingegen wurde der veränderbare Kondensator C_k mit einem relativen Fehler von 20% behaftet. Die resultierenden Fehler wurden alle mit der Python Bibliothek *uncertainties* bestimmt.

3.1 Bestimmung des Verhältnisses von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz

Die bei verschieden eingestellten C_k gezählten Schwingungsmaxima pro einer halben Schwebungsperiode (ein 'Bauch') werden in Tabelle 1 aufgelistet. Zusätzlich befindet sich in der Tabelle noch das Verhältnis zur Schwebungsperiode. Bestimmt wurde dies mittels

$$n = \frac{1}{\text{Anzahl der Schwingungsmaxima}}$$

Die Wahl des Fehlers für die Anzahl der Schwingungsmaxima wird in der Diskussion besprochen.

Tabelle 1: Anzahl der Schwingungsmaxima bei verschiedenen Kapazitäten C_k

C_k in nF	Anzahl der Schwingungsmaxima	Verhältnis n
$1,0 \pm 0,2$	$1,0 \pm 1,0$	$1,0 \pm 1,0$
$2,2 \pm 0,4$	$1,0 \pm 1,0$	$1,0 \pm 1,0$
$2,7 \pm 0,5$	$2,0 \pm 1,0$	$0,5 \pm 0,2$
$4,7 \pm 0,9$	$2,0 \pm 1,0$	$0,5 \pm 0,2$
$6,8 \pm 1,4$	$3,0 \pm 1,0$	$0,3 \pm 0,1$
$8,2 \pm 1,6$	$3,0 \pm 1,0$	$0,3 \pm 0,1$
$10,0 \pm 2,0$	$4,0 \pm 1,0$	$0,2 \pm 0,1$
$12,0 \pm 2,4$	$5,0 \pm 1,0$	$0,2 \pm 0,0$

3.2 Bestimmung der theoretischen Fundamentalfrequenzen

Um die theoretischen Fundamentalfrequenzen zu bestimmen, werden Gleichung (??) und (??). Für die erste Fundamentalfrequenz (gleichphasiges Schwingen) ergibt sich der theoretische Wert

$$\nu_{+ \text{ theo}} = 36,5 \text{ kHz.} \quad (10)$$

Und für die gegenphasigen Fundamentalfrequenzen ergibt sich in Abhängigkeit von C_k die in Tabelle 2 zu findenden Werte.

Tabelle 2: Theoretisch bestimmte Fundamentalfrequenzen

C_k in nF	$\nu_{- \text{ theo}}$ in kHz
$1,0 \pm 0,2$	$58,7 \pm 3,6$
$2,2 \pm 0,4$	$47,9 \pm 2,0$
$2,7 \pm 0,5$	$46,0 \pm 1,7$
$4,7 \pm 0,9$	$42,2 \pm 1,1$
$6,8 \pm 1,4$	$40,5 \pm 0,8$
$8,2 \pm 1,6$	$39,9 \pm 0,6$
$10,0 \pm 2,0$	$39,3 \pm 0,5$
$12,0 \pm 2,4$	$38,9 \pm 0,5$

3.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mithilfe erzwungener Schwingungen

Die bei verschieden eingestellten C_k bestimmten Fundamentalfrequenzen ν_+ (gleichphasige Schwingung) und ν_- (gegenphasige Schwingung) sind in Tabelle 3 zu finden. Zusätzlich ist

in der Tabelle das Verhältnis der gemessenen Frequenzen zu den theoretisch errechneten Frequenzen dargestellt. Die Verhältnisse werden mit

$$n_+ = \frac{\nu_+}{\nu_{+ \text{ theo}}} \quad n_- = \frac{\nu_-}{\nu_{- \text{ theo}}} \quad (11)$$

berechnet.

Tabelle 3: Gemessene Fundamentalfrequenzen bei einer erzwungenen Schwingungen und das Verhältnis zu den Theoriewerten

C_k in nF	Frequenz ν_- in kHz	Frequenz ν_+ in kHz	Verhältnis n_-	Verhältnis n_+
$1,0 \pm 0,2$	$76,9 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,3 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,0$
$2,2 \pm 0,4$	$62,5 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,3 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,0$
$2,7 \pm 0,5$	$55,8 \pm 1,0$	$32,3 \pm 1,0$	$1,2 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$4,7 \pm 0,9$	$47,6 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,1 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$6,8 \pm 1,4$	$43,5 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,1 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$8,2 \pm 1,6$	$41,7 \pm 1,0$	$32,3 \pm 1,0$	$1,0 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$10,0 \pm 2,0$	$40,0 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,0 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$12,0 \pm 2,4$	$38,6 \pm 1,0$	$33,3 \pm 1,0$	$1,0 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$

Die angenommenen Messfehler für ν_+ und ν_- werden in der Diskussiun besprochen. In Abbildung 4 sind die Messwerte grraphisch dargestellt.

3.4 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mithilfe der 'Sweep-Methode'

Zunächst müssen die Grundeinstellung des 'Sweeps' besprochen werden. Die Periodendauer eines Sweeps beträgt $P = 1$ s. Die Startfrequenz beträgt $\nu_{\text{sta}} = 15,67$ kHz und Endfrequenz $\nu_{\text{end}} = 96,15$ kHz. Da der Generator die Spannung linear erhöht kann so eine Gerade bestimmt werden, um zu jedem Zeitpunkt auf die gerade anliegende Frequenz zu schließen. Die Parameter der Geradengleichung lauten:

$$b = 15,67 \text{ kHz} \quad m = \frac{\nu_{\text{end}} - \nu_{\text{sta}}}{P} = 80,48 \frac{\text{kHz}}{\text{s}}$$

Insgesamt folgt dann für die Geradengleichung

$$g(t) = mt + b = 80,48 t + 15,67 \quad (12)$$

Die gemessenen Zeitabstände sind in Tabelle 4 dargestellt.

Mithilfe von Formel (12) kann dann auf die Frequenz geschlossen werden (siehe Tabelle 5. Äquivalent zu Formel (11) wurden die in 5 angegebenen Verhältnisse bestimmt. Die angenommenen Fehler für die Zeitabstände Δt_+ und Δt_- werden in der Diskussion besprochen. Die Messwerte in der Abbildung 4 einmal aufgetragen.

Tabelle 4: Gemessene Zeitabstände bei unterschiedlichen C_k

C_k in nF	Abstand Δt_-	Abstand Δt_+
$1,0 \pm 0,2$	$792,0 \pm 5,0$	$212,0 \pm 5,0$
$2,2 \pm 0,4$	$552,0 \pm 5,0$	$212,0 \pm 5,0$
$2,7 \pm 0,5$	$492,0 \pm 5,0$	$212,0 \pm 5,0$
$4,7 \pm 0,9$	$396,0 \pm 5,0$	$216,0 \pm 5,0$
$6,8 \pm 1,4$	$352,0 \pm 5,0$	$212,0 \pm 5,0$
$8,2 \pm 1,6$	$328,0 \pm 5,0$	$216,0 \pm 5,0$
$10,0 \pm 2,0$	$308,0 \pm 5,0$	$216,0 \pm 5,0$
$12,0 \pm 2,4$	$292,0 \pm 5,0$	$212,0 \pm 5,0$

Tabelle 5: Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mit der 'Sweep-Methode' und zusätzlich das Verhältnis zu den Theoriewerten

C_k in nF	Frequenz ν_- in kHz	Frequenz ν_+ in kHz	Verhältnis n_-	Verhältnis n_+
$1,0 \pm 0,2$	$79,4 \pm 0,4$	$32,7 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,0$
$2,2 \pm 0,4$	$60,1 \pm 0,4$	$32,7 \pm 0,4$	$1,3 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,0$
$2,7 \pm 0,5$	$55,3 \pm 0,4$	$32,7 \pm 0,4$	$1,2 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$4,7 \pm 0,9$	$47,5 \pm 0,4$	$33,1 \pm 0,4$	$1,1 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$6,8 \pm 1,4$	$44,0 \pm 0,4$	$32,7 \pm 0,4$	$1,1 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$8,2 \pm 1,6$	$42,1 \pm 0,4$	$33,1 \pm 0,4$	$1,1 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$10,0 \pm 2,0$	$40,5 \pm 0,4$	$33,1 \pm 0,4$	$1,0 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$
$12,0 \pm 2,4$	$39,2 \pm 0,4$	$32,7 \pm 0,4$	$1,0 \pm 0,0$	$0,9 \pm 0,0$

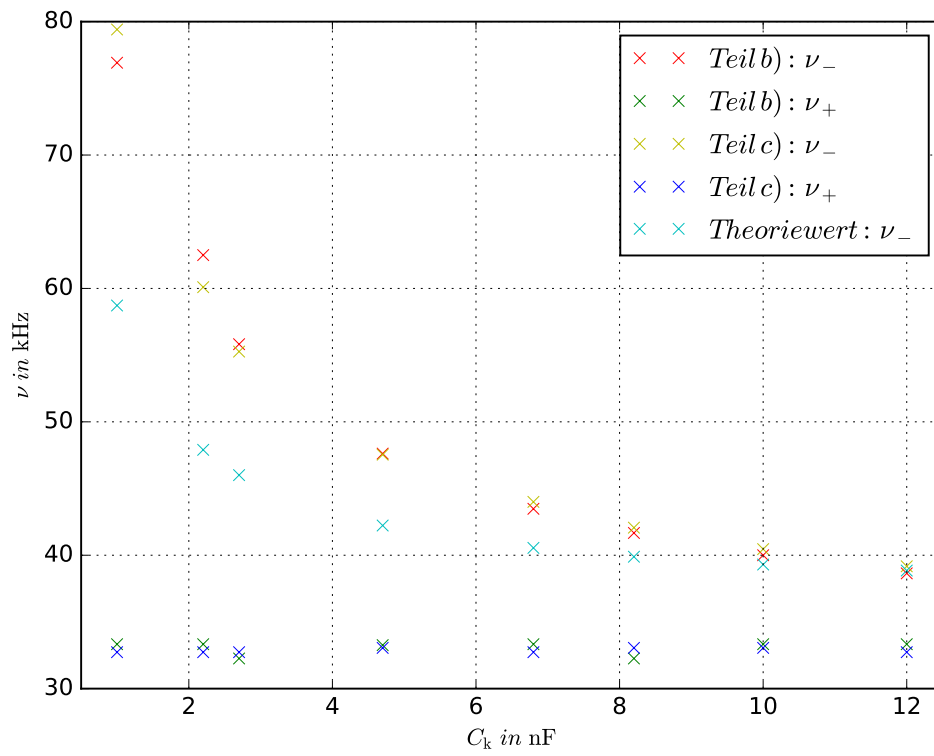


Abbildung 4: Darstellung der Frequenzen in Abhängigkeit der verschiedenen C_k

4 Diskussion

Im folgenden Abschnitt sollen die Aussagekraft der Ergebnisse im Bezug auf die Rahmenbedingungen des Versuches diskutiert werden. Es sei hierbei zunächst die Annahme von fehlerfreien Bauelementen (vgl. (9)) bemängelt werden. Die Annahme stimmt mit der Realität keines falls überein. Hierdurch wird die Qualität der Ergebnisse beeinträchtigt. Hierdurch lässt sich, aber wahrscheinlich erklärenw warum die Abweichung zwischen Theorie und Praxis relativ groß war (vgl. dazu die Tabellen 3 und 5). Die in den Tabellen 3 und 5 angenommen Fehler sind darauf zu zurückzuführen, dass sich die Frequenz ν_+ , bei Änderung der Kapazität C_k , nicht ändern sollte. Mit der Abweichung soll also sichergestellt werden, dass alle ν_+ in der selben Menge liegen. Den in Tabelle 1 definierte Fehler, wurde dshalb eingeführt da das Ozilloskop eine weitere Fehlerquelle widerspiegelt. Die Skala bzw. die Auflösung des Ozilloskop schränkte, zusätzlich das genaue ablesen, soweit ein das ein großer Fehler in 1 realistisch scheint. Die Ungenauigkeit des Ozilloskop, trübt auch die Ergebnisse der andern Teilversuche.