

# **Trägheitsmoment**

**Versuch V101**

19. März 2017

# 1 Zielsetzung

In dem Versuch soll das Verhalten einer Kette bestehend aus Spulen (Induktivität  $L$ ) und Kondensatoren (Kapazität  $C$ ) analysiert werden. Die Untersuchung einer Kettenschaltung lässt sich mit der *Analogie* zu einem eindimensionalen Festkörper motivieren.

## 2 Theorie

### 2.1 Bestimmung der Schwingungsgleichung für eine $LC$ -Kette

Der allgemeine Aufbau eines  $LC$ -Gliedes ist in Abbildung 1 dargestellt.

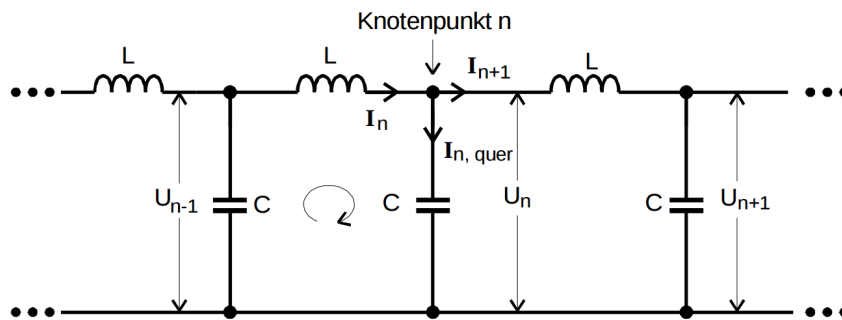


Abbildung 1: Kettenglied  $n$ .

Mit Hilfe der *Kirchhoffschen Regeln* werden die Ströme des  $n$ -ten Kettengliedes bestimmt. Es ergibt sich:

$$I_n - I_{n+1} - I_{n, \text{quer}} = 0.$$

Die Gleichung kann äquivalent auf einen Zusammenhang für die Spannung zurückgeführt werden. Man erhält dadurch eine Lösung der Form

$$U_n(t) U_0 e^{i(\omega - n\theta)t} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei beschreibt  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\theta$  die Phasenverschiebung, die durch ein Kettenglied verursacht wird. Für endlich viele Kettenglieder liegt die Kreisfrequenz in dem Intervall  $\omega \in \left[0, \frac{2}{\sqrt{LC}}\right)$ .

## 2.2 Bestimmung der Schwingungsgleichung für eine $LC_1C_2$ -Kette

Im Gegensatz zu dem im vorherigen Kapitel angesprochenen Kettenglied, werden nun zwei unterschiedliche Kondensatoren verwendet. Die Kondensatoren werden alternierend hintereinander geschaltet. Die sich nun ergebende Frequenz  $\omega_1(\theta)$  und  $\omega_2(\theta)$  sind deutlich komplizierter. Die Frequenz  $\omega_2$  besitzt bei  $\theta = 0$  einen Nullpunkt und wächst dann für  $\theta > 0$  monoton (bei Näherung mit  $\sin(\theta) \approx \theta$ ). Bei  $\theta = \frac{\pi}{2}$  erreicht sie ein Maximum (wenn man nicht nähert). Hingegen ist  $\omega_1(\theta = 0) > 0$  und besitzt bei  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ein Minimum. *Auf Grund des Unterschiedes der beiden Extrema, gibt es einen Frequenzbereich, in dem die Kettenschaltung undurchlässig wird.*

## 2.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in einer Kettenschaltung

Wichtig in diesem Zusammenhang ist die *Phasengeschwindigkeit*. Die Zeitabhängigkeit für die Phasengeschwindigkeit ist für  $\omega = \text{const} \quad \forall t$  festgelegt. Wellen, die sich mit der Phasengeschwindigkeit ausbreiten, sind *nicht* zur Informationsübermittlung geeignet. Hierzu werden Wellen benötigt, die sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* ausbreiten.

## 2.4 Der Widerstand einer unendlich langen Kette

Um den elektrischen Widerstand  $R$  (oder auch Wellenwiderstand genannt) der Kettenschaltung zu bestimmen, nutzt man die *Kirchhofschen Knotenregel* und das *ohmsche Gesetz*. Zu erwähnen ist noch, dass der Widerstand eine Frequenzabhängigkeit  $R = R(\omega)$  besitzt. Für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenzen ( $\omega_1$ ) kann der Wellenwiderstand, jedoch als  $\text{const}$  angesehen werden. Für den Fall einer *unendlich/endlich lange* Kette ist der Widerstand rein *reell*, das bedeutet, dass es zu keiner Phasenverschiebung kommt. Durch einen *Abschlusswiderstand* (betragsmäßig so groß, wie der Wellenwiderstand) am Ende der Kette ist, dies auch bei einer endlichen Kette realisierbar.

## 2.5 Randverhalten einer endlichen Kette

Je nach Endwiderstand  $r$  kann bei einer endlichen Kette zu Wellenreflexion kommen. Interessant sind folgende Fälle:

- a)  $r = \infty$  (offenes Ende)  
Betrachten wir ein offenes Ende, so ist  $U_{\text{ref}} = U_e$  und die Welle wird am Kettenende ohne Phasensprung reflektiert.
- b)  $r = 0$  (kurzgeschlossenes Ende)  
In diesem Fall ist  $U_{\text{ref}} = -U_e$ . Zusätzlich kommt es bei der reflektierten Welle zu einem Phasensprung von  $\pi$ .

c)  $r = Z$

Ist der Abschlusswiderstand genauso groß wie der Wellenwiderstand, entsteht keine Reflexion, folglich ist  $U_{ref} = 0$ . Somit kann eine unendlich lange Kette simuliert werden.

In allen anderen Fällen kommt es zu Teilreflexionen. Bei den Fällen  $r = \infty$  und  $r = 0$  erfolgt eine *Totalreflexion*.

### 3 Versuchsaufbau/-durchführung

#### 3.1 Bestimmung der Durchlasskurve für den $LC$ - und $LC_1C_2$ Kette

Zunächst wird der Versuch, nach Abbildung 2 aufgebaut.

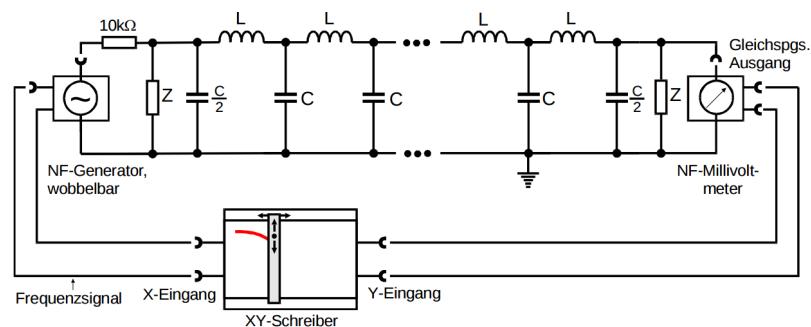
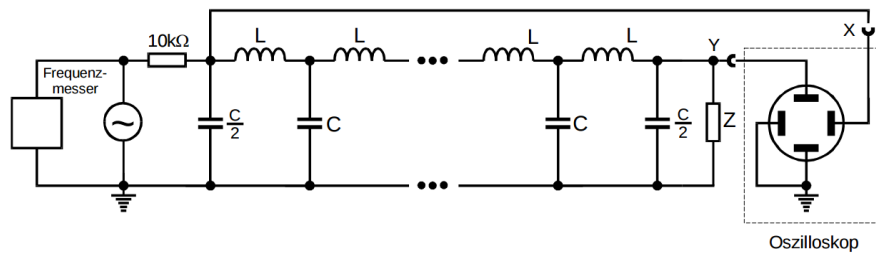


Abbildung 2: Versuchsaufbau für die Bestimmung der Durchlasskurve.

Zu Beginn wird an dem NF-Generator ein Frequenz Sweep eingestellt. In dem Frequenzbereich des Sweeps muss die Grenzfrequenz liegen, bei der die Kettenschaltung stromundurchlässig wird. Am Kettenanfang und -ende werden die Widerstände  $Z$  auf den theoretisch berechneten Wellenwiderstand eingestellt. Die am Kettenende anliegende Spannung und die vom Generator ausgegebenen Frequenzen werden an einem XY-Schreiber gegeneinander aufgetragen. Wichtig dabei ist, dass zu beliebig ausgewählten Punkten, die gerade anliegende Frequenz bekannt ist. Deshalb werden für 6 Referenzpunkte die Spannung notiert.

#### 3.2 Bestimmung der Dispersionskurve

Der Versuch wird, wie in Abbildung 3 zu sehen ist, aufgebaut. Anschließend werden für die verwendeten Bauteile die Wellenwiderstände berechnet und die An- und Abschlusswiderstände  $Z$  auf diesen Wert eingestellt. Mithilfe von Lissajous-Figuren werden nun die Frequenzen bestimmt, die eine Phasenverschiebung von  $n\pi$  hervor rufen. Anschließend kann dann mit der Anzahl der Kettenglieder auf die Phasenverschiebung pro Kettenglied geschlossen werden.



**Abbildung 3:** Versuchsaufbau für die Messung der Dispersionskurve.

### 3.3 Ausmessung der stehende Welle

Der Versuch wird nach Abb. 3 aufgebaut. Nun wird mit und ohne Wellenwiderstand  $Z$ , die Spannung mit einem Millivoltmeter gemessen. Zunächst wird die Spannung am Kettenanfang abgegriffen, um so ein frequenzabhängiges Spannungsmaximum zu finden. Für die ersten beiden Maxima werden bei allen Kettengliedern die anliegende Spannung gemessen. Für die restlichen Maxima werden nur die dazugehörigen Frequenzen notiert.

## 4 Ergebnis

- Bestimmung der Durchlasskurve liefert sehr gute Ergebnisse
- Optimierung durch mehr Referenzpunkte des Frequenzsweeps
- Auswertung der Dispersionsbeziehung zeigt solide Ergebnisse
- Dank des genauen Millivoltmeters, liefert die Messung der Phasengeschwindigkeit gute Ergebnisse
- Grund- und Ersteoberschwingung ist in der Auswertung wiederzuerkennen
- bei der abgeschlossenen Kette, ist das ungenaue einstellen des Wellenwiderstands zu bemängeln