Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Versuch V207

Steven Becker
steven.becker@tu-dortmund.de
und
Stefan Grisard
stefan.grisard@tu-dortmund.de

Tag der Durchführung 22.11.16
Tag der Abgabe 29.11.16

Zielsetzung

Im Versuch 207 soll das Verhalten der sogenannten *dynamischen Viskosität* von destilliertem Wasser untersucht werden. Hierzu wird das Kugelfall-Viskosimeter verwendet, das auf eine Erfindung von Fritz Höppler aus dem Jahre 1932 zurück geht.

1 Theorie

Die Strömung einer Flüssigkeit wird als *laminar* bezeichnet, wenn die *innere Reibung* eine Kraft F_R verursacht, die wesentlich größer ist als die strömungserzeugende Kraft F_B. Die Strömungslinien verlaufen ohne Verwirbelungen nebeneinander. In diesem Fall ergibt sich der Betrag der Reibungskraft auf eine Kugel mit Radius R, die sich mit einer Geschwindigkeit v durch die Flüssigkeit bewegt, mittels des empirisch gefundenen *Stokesschen Gesetzes*:

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot R \tag{1}$$

Hierbei handelt es sich bei η um die anfangs erwähnte *dynamische Viskosität*, deren Abhängigkeit von der Temperatur T durch eine Funktion der Form

$$\eta(T) = \mathrm{A} \cdot \exp(\frac{B}{T}) \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R} \tag{2}$$

beschrieben werden kann (*Andredesche Funktion*).
Fällt ein Körper in einer viskosen Flüssigkeit nach unten, so wirkt neben der Gewichts- und Reibungskraft ebenfalls eine nach oben gerichtete Auftriebskraft F_A, deren Betrag sich aus dem *Prinzip des Archimedes* ergibt.

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \tag{3}$$

Hierbei ist ρ_{Fl} die Dichte der Flüssigkeit und V_K das Volumen des Körpers (hier: Kugel). Durch das Ansteigen der Reibungskraft mit der Geschwindigkeit, stellt sich nach kurzer Zeit im Kräftgleichgewicht eine konstante Geschwindigkeit v_0 ein.

$$6\pi \cdot \eta \cdot v_0 \cdot R_K = (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot \frac{4}{3}\pi R_K^3 \cdot g \Leftrightarrow \eta = \frac{2(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot R_K^2 \cdot g}{9v_0} \tag{4}$$

Mit der Dichte des Körpers ρ_K. Durch Ersetzen der Geschwindigkeit $v_0 = s/t$ ergibt sich:

$$\eta = \frac{2(\rho_K - \rho_{Fl}) R_K^2 \cdot g \cdot t}{9s} := K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t \tag{5}$$

Hierbei ist K nun eine Konstante, die lediglich von der Geometrie der Kugel und der Fallstrecke abhängt. Sie dient der einfachen Handhabung im späteren Verlauf.

Um den Fluss verschiedener Medien in ähnlichen Körpern qualitativ vergleichen zu können, definiert man in der Strömungslehre die sogenannte *Reynoldsche Zahl* R_e. Für Zylinder mit Durchmesser d ergibt sie sich zu:

$$R_e = \frac{\rho_{Fl} \cdot v_0 \cdot d}{\eta} \tag{6}$$

Ist die *Reynoldsche Zahl* zweier Anordnungen (z.B. Fluss von Honig in einem Rohr mit Durchmesser 1m und Fluss von Wasser in einem Rohr mit Durchmesser 1cm) gleich, so ist das Strömungs- bzw. Turbulenzverhalten der Theorie nach identisch. Aus diesem Grund kann durch das Bestimmen der *Reynoldschen Zahl* beurteilt werden, ob eine Strömung laminar ist oder nicht. Als Grenzwert für laminare Strömungen findet man in der Literatur (hier zitieren):

$$\text{Strömung laminar} \Leftrightarrow R_e < 2320 \tag{7}$$

2 Versuchsaufbau/-durchführung

Das verwendete Kugelfall-Viskosimeter ist in Skizze 1 abgebildet. Das mit destilliertem Wasser gefüllte Fallrohr ist mit zwei Messmarken versehen, die eine Geschwindigkeitsmessung über das Weg-Zeit-Gesetz ermöglichen. Es befindet sich innerhalb eines mit Wasser gefüllten Zylinders, dessen Temperatur über ein Thermostat reguliert wird. Der Zylinder lässt sich um 180° drehen und ist um einen kleinen Winkel geneigt, sodass ein unkontrolliertes Stoßen zwischen Kugel und Rohrwand vermieden wird. Der Durchmesser des Rohres ist geringfügig größer als jener der verwendeten Glaskugeln.
Zunächst wird das Fallen in destilliertem Wasser einer Kugel κ_{Kl} mit Radius R_{Kl} bei Raumtemperatur beobachtet, deren Proportionalitätsfaktor K_{Kl} (5) aus der Praktikumsanleitung [1] bekannt ist. Die Fallzeit T_{Kl}, sprich die Zeit zwischen dem Passieren der oberen und unteren Marke, wird zehn mal gemessen. Hierbei wird jeweils ein Vorgang mit zwei Stoppuhren gemessen und anschließend der Zylinder um 180° gedreht, sodass die Kugel erneut hinab fällt. Danach wird selbiges mit einer zweiten, größeren Kugel κ_{Gr} ($R_{Gr} > R_{Kl}$) durchgeführt. Dies ermöglicht später mittels der Annahme, dass die Viskosität bei konstanter Temperatur gleich bleibt, die Berechnung der Konstante K_{Gr} der zweiten Kugel.
Mit Hilfe des Thermostats wird nun die Temperatur der Flüssigkeit im Fallrohr auf zehn verschiedene Werte geregelt und jeweils die Fallzeit der großen Kugel T_{Gr} zwei mal aufgenommen.

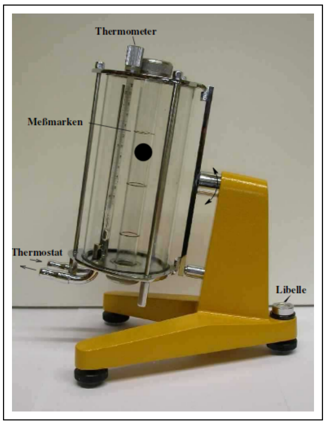

Abbildung 1: Kugelfall-Viskosimeter [1]

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Kugeldichten

In Tabelle 1 sind die gemessenen Radien und Masses der Kugel einzusehen.

	Radius in $\mathrm{m} \cdot 10^{-3}$			Masse in $\mathrm{kg} \cdot 10^{-3}$		
Kugel 1	7,565	7,5625	7,565	4,45	4,44	4,44
Kugel 2	7,65	7,65	7,65	4,6	4,6	4,61

Tabelle 1: Abmessung der Kugeln

Der Mittelwert der Messreihen wird mittels

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} x_i \tag{8}$$

berechnet. Dabei wird der zugehörige Fehler durch

$$\bar{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{9}$$

bestimmt.

Für die Messungen aus 1 ergeben sich folgende gemittelten Werte:

$$
\begin{aligned}
\overline{m}_1 &= (0{,}0044 \pm 10^{-6})\,\mathrm{kg}\\
\overline{m}_2 &= (0{,}0046 \pm 10^{-6})\,\mathrm{kg}\\
\\
\overline{r}_1 &= (0{,}0076 \pm 10^{-7})\,\mathrm{m}\\
\overline{r}_2 &= (0{,}0077 \pm 0)\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Mithilfe der gemittelten Werte und der Formel

$$
\rho = \frac{m}{V_k} \qquad \text{mit}\, V_k = \frac{4}{3}\pi r^3
$$

können die Dichten der Kugeln bestimmt werden. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= (2451{,}0 \pm 1{,}6)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\
\rho_2 &= (2454{,}7 \pm 1{,}5)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
\end{aligned}
$$

3.2 Bestimmung der Viskosität von Wasser bei Zimmertemperatur

Um die Viskosität zu bestimmen wird neben der Dichte von Wasser die Fallzeit von der kleinen Kugel benötigt. Die gemessenen Werte sind in Tabelle **??** abgebildet.

Fallzeit t_1 in s
12,7
12,8
12,9
12,8
12,8
12,8
12,7
12,7
12,7
12,8

Tabelle 2: Fallzeiten der kleinen Kugel im Viskosimeter bei 20 °C

Gemittelt ergibt sich

$$\bar{t}_1 = (12{,}78 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}. \tag{11}$$

Mittels der Gleichung (5) ergibt sich als Viskosität für Wasser bei 20 °C:

$$\eta_{20} = (0{,}0014 \pm 10^{-5})\,\mathrm{Pa\,s} \tag{12}$$

Für die Dichte von Wasser bei 20 °C wurde als Literaturwert $\rho_{20} = 998{,}21\,\mathrm{kg/m^3}$ angenommen.

3.3 Bestimmungen der Apperaturkonstante für die große Kugel

Um die Apperaturkonstante für die große Kugel zu bestimmen nutzt man die Gleichung (5). Diese wird umgestellt zu

$$\Leftrightarrow \quad K_g = \frac{\eta}{(\rho_2 - \rho_{20})\,\bar{t}_2}$$

Hierbeisei)$\bar{t}_2$ die Fallzeit der zweiten Kugel im Viskosimeter. Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 3 dargestellt.

Fallzeit t_2 in s
97,3
97,6
97,4
97,8
97,2
97,3
97,2
97,3
97,6
97,7

Tabelle 3: Fallzeiten der großen Kugel im Viskosimeter bei 20 °C

Als gemittelte Zeit ergibt sich:

$$\bar{t}_2 = (97{,}44 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}. \tag{13}$$

Mit dem Ergebnis aus (12) folgt für die Apperaturkonstante

$$K_g = (9{,}98 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{Pa\,m^3}}{\mathrm{kg}} \tag{14}$$

3.4 Bestimmung der Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur

Das prinzipielle Verfahren zu Berechnung der Viskosotät η ist das Selbe, wie im Unterkapitel 3.2. Lediglich die Dichte von Wasser ist nicht mehr konstant. Als Dichte des Wasser wurden folgende Dichten angenommen:

Temperatur in K	Dichte ρ in kg/m^3
303,16	995,65
308,16	994,00
313,16	992,20
318,16	990,20
323,16	988,00
328,16	985,70
333,16	983,20
338,16	980,60
343,16	977,8

Tabelle 4: Temperaturabhängige Dichte von Wasser

Bei den späteren Berechnungen wurde für die Dichte von Waser, bei den Temperaturen 336,16 K und 339,16 K der Wert 983,20 kg/m^3 angenommen.

Für die Fallzeit der großen Kugel wurden die in Tabelle 5 dargestellten Werte bestimmt:

Temperatur in K	Fallzeit t in s		$\bar{t}$ in s
303,16	96,9	97,0	$97 \pm 0{,}04$
308,16	93,6	93,7	$93{,}7 \pm 0{,}05$
313,16	92,6	93	$92{,}8 \pm 0{,}11$
318,16	90,4	90,5	$90{,}4 \pm 0{,}03$
323,16	87,7	87,5	$87{,}6 \pm 0{,}06$
328,16	83,4	83,4	$83{,}4 \pm 0{,}03$
333,16	81,4	81,3	$81{,}4 \pm 0{,}01$
336,16	79,6	79,6	$79{,}6 \pm 0$
339,16	78,0	77,6	$77{,}8 \pm 0{,}13$
343,16	73,0	73,2	$73{,}1 \pm 0{,}05$

Tabelle 5: Fallzeiten der großen Kugel im Viskosimeter bei unterschiedlichen Temperaturen

Das Ergebnis der Viskositätsberechnung ist in Tabelle 6 aufgelistet. Die Fehler der Berechnungen sind in der Größenordnung $\pm 10^{-6}$ und werden deshalb in der Tabelle nicht aufgeführt.

Temperatur in K	Viskosität η Pa s
303,16	0,001 41
308,16	0,001 37
313,16	0,001 35
318,16	0,001 32
323,16	0,001 28
328,16	0,001 22
333,16	0,001 20
336,16	0,001 17
339,16	0,001 14
343,16	0,001 08

Tabelle 6: Viskoität von Wasser bei unterschiedlichen Temperaturen

4 Diskussion

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 207 Das Kugelfallviskosimeter nach Höppler*. 2016. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf`.