Trägheitsmoment eines Kegles

Steven Becker

18. Januar 2017

1 Das Trägheitsmoment eines Kegels

Es soll das Trägheitsmoment eines Kegels (homogene Massenverteilung, Radius R und Höhe H) bei einer Drehung um die z-Achse bestimmt werden. Wir starten mit der allgemeinen Formel für das Trägheitsmoment:

$$I = \int_V \rho(\vec{r}) r_\perp^2 \, \mathrm{d}V \tag{1}$$

Es soll eine Drehung um die z-Achse betrachtet werden $\Rightarrow \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2$.

Da ein Kegel eine Zylindersymmetrie aufweißt, nutzen wir Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten werden in $r_\perp^2$ eingesetz:

$$r_\perp^2 = (r\cos(\phi))^2 + (r\sin(\phi))^2 = r^2$$

Nun muss noch eine Bedingung für $z(r)$ bzw. für $r(z)$ gefunden werden.

1.1 Methode A

Bei Methode A sei z abhängig vom Radius mit $z = \frac{rH}{R} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{zR}{H}$ (bei $r = 0$ ist $z = 0$ und bei $r = R$ ist $z = H$). Wenn wir jetzt in (1) einsetzen erhalten wir:

$$I = \rho \int_V r^2 \, \mathrm{d}V = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{rH}{R}} \underbrace{r}_{\text{JD}} r^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$$

JD ist die Jacobi Determinante. Wir müssen jetzt noch $r = \frac{hR}{H}$ einsetzen (damit der Satz von Fubini nicht verletzt wird):

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{rH}{R}} \frac{z^3 R^3}{H^3} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$$

Das integrieren wir jetzt:

$$\begin{aligned} I = \rho 2\pi \int_0^R \left[\frac{1}{4} z^4 \frac{R^3}{H^3} \right]_{z=0}^{z=\frac{rH}{R}} \mathrm{d}r &= \rho \frac{1}{2}\pi \int_0^R r^4 \frac{H}{R} \, \mathrm{d}r \\ &= \rho \frac{1}{2}\pi \frac{1}{5} H R^4 \end{aligned}$$

Mit $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 H}$ folgt

$$= \frac{3}{10} M R^2$$

1.2 Methode B

Bei Methode B sei r abhängig von z mit $r = \frac{zR}{H}$. Es wird wieder in (1) eingesetzt:

$$I = \rho \int_V r^2 \,\mathrm{d}V = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\frac{zH}{R}} \underset{\text{JD}}{r} \, r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi$$

Dieses Mal muss r nicht ersetzen werden. Wir lösen das Integral mit:

$$\begin{aligned} I = \rho 2\pi \int_0^H \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{r=\frac{zR}{H}} \mathrm{d}z &= \rho \frac{1}{2} \pi \int_0^H z^4 \frac{R^4}{H^4} \,\mathrm{d}r \\ &= \rho \frac{1}{2} \pi \frac{1}{5} H R^4 s \end{aligned}$$

Mit $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 H}$ folgt

$$= \frac{3}{10} M R^2$$

Methode A ist, auf Grund der zusätzlichen substitution, nicht zu empfehlen. Benutzt lieber Methode B.