Versuchsname

Steven Becker und Stefan Grisad

28. Oktober 2016
WS 2016/2017

1 Theorie

Bei gekoppelten Pendel, wir die Theorie eines einzelnen Pendels benötigt. Dieses soll im nächsten Unterkapitel besprochen werden.

1.1 Fadenpendel

Ein Pendel an sich zeichnet sich dadurch aus, das eine Masse m an ein Seil der Länge l befestigt ist. Dabei wirkt auf die Masse die Kraft:

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\varphi)$$

Setzen wir nun die Reihenentwicklung für den Sinus bis zu ersten Ordnung ein: $\sin(x) \approx x$. Außerdm nutzen wir noch den Zusammenhang für die Bogenlänge $x = l\phi$. Damit ergibt sich:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Damit erhalten wir eine Differntialgleichung zweiter Ordnung. Die Lösung dieser ist eine Schwingung mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

1.2 Gekopplete Schwingung

Werden zwei Fadenpendel miteinander, zum Beispiel durch eine Feder mit der Federkonstante k, gekopplelt. So erhält man nicht nur noch eine Differentialgleichung, sondern eine Differntialgleichsungssystem der Form

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 - k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 - k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Die beiden Terme mit der Federkonstante k beschreiben, in diesem Zusammenhang den Kopplungsterm der beiden Systeme. Durch geeignete Transformation kann man das Differntialgleichungssystem in ein Eigenwertproblem umwandeln. Somit können die möglichen Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Sytems bestimmt werden.Außerdem erhält man auch noch die möglichen Schingungstypen.

1.2.1 Gleichsinnige Schwingung

Bei einer Gleichsinnigen Schwingung werden beiden Pendel zu Anfang in die gleiche Richtung ausgelenkt. Dadurch schwingen beide Massen in die gleichen Richtung und verhalten sich so wie ein einziges Federpendel mit der Frequenz

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ folgt dann für die Periodenfrequenz:

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.2.2 Gegensinnige Schwingung

Bei diesem Schwingungstyp des Systems werden beide Massen, zum Anfang, entgegengsetzt ausglenkt. Das sich nun beide Massen aufsich zu bewegen, übt die Feder noch eine Kraft auf beide Pendel. Dadurch ergibt sich einer veränderte Frequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}$$

mit der veränderten Schwingungsdauer

$$T_{=}2\pi\sqrt{\frac{l}{g+2K}}$$

Dabei sei K die Kopplungskonstante der Feder.

1.2.3 Gekoppelte Schwingung

Bei diesem Schwingungstype wird nur eines der beiden Pendel am Anfang ausgelenkt, während das andere in der Ruheposition verharrt. Nachdem das ausgelenkte Pendel losgelassen wird, überträgt dieses Energie auf das Ruhende. Dadurch beginnt diesese an zu schwingen, während das erste Pendel immer mehr zur Ruhe kommt. Neben der Energieerhaltung ist bei diesem Versuch auch eine Schwebung beobachtbar. Die Schwebungsdauer ist die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendls. Es ergibt sich für die Schwebungsdauer T_s

$$T_s = \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-}$$

,sowie die Frequenz

$$\omega_s = \omega_+ - \omega_-$$

Die Kooplungskonstante ist festgelegt durch

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = -\frac{T_+^2 T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}.$$

2 Versuchsdurchführung

Für den Versuch werden zwei Pendel und eine Feder benötigt. Die Pendel besitzen Massen mit verstellbare Höhen. Somit kann die Länge eines Pendels verändert werden. Ein Pendel wird reibungsarm mit einer Spitzenlagerung montiert. Diese Lagerung zeichnet sich dadurch aus, dass zwei Nadelspitzen jeweils in einer Nut sitzen, damit wird eine harmonische Schwnigung ermöglicht.

Zunächst müssen die Schwingungsfrequenzen jedes einzelnen Pendels gemessen werden. Dazu wird es ausgelenkt und die Zeit für 5 Schwingungen gemessen. Nachdem 10 Messreihen erfasst sind, wird eine Feder benutzt, um beide Pendel miteinander zu koppeln. Anschließend werden die beiden einzelnen Pendel des gekoppelten Systems entweder in die gleiche oder in die entgegengestzte Richtung ausgelenkt. Genau wie bei der Einzelmessung werden 10 mal 5 Schwingungen gemessen.

Am Ende des Experiment wird ein Pendel ausgelenkt während das Andere in der Ruhelage stillsteht. Nachdem das Pendel losgelassen wird kann eine Schwebung beobachtet werden. Gemessen wird bei diesem Versuch die Schwebungsfrequenz und die Schwingungsdauer bestehend aus 5 Schwingungen.

Wenn all diese Messsung mit einer Pendellänge durchgeführt wurden, verändert man durch Verschiebung des Gewichtes die Pendellänge und misst alle Schwingungen nochmal.

3 Auswertung

3.1 Messung der Schwingungsdauern

Alle Messungen wurden für zwei verschiedene Pendellängen ($l = (0.70 \pm 0.01)m$ und $l = (0.60 \pm 0.01)m$) durchgeführt, die identische Auswertung soll an dieser Stelle parallel geschehen.
Für die beiden Pendel wurden zunächst die Zeiten $5 \cdot T_1$ und $5 \cdot T_2$ für jeweils 5 Schwingungen aufgezeichnet. Die jeweiligen Mittelwerte berechnen sich gemäß:

$$\bar{T}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1} t_i \tag{1}$$

Selbiges wurde für die gleichsinnige(T_+), gegesinnige (T_-) und gekoppelte (T_G) Schwingung durchgeführt. Zur direkten Messung der Schwebungszeit T_S wurde lediglich die Zeit für einen vollen Schwebungsvorgang gemessen. Die Berechnung der Standardabweichung des Mittelwerts erfolgt in allen Fällen nach der Formel:

$$\bar{\sigma}_{\bar{T}_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2} \tag{2}$$

Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 1 bzw. 2 aufgetragen. Durch den Zusammenhang $\omega = 2\pi/T$ ergeben sich unmittelbar die dazugehörigen Frequenzen, welche in den Tabellen 3 und 4 aufgeführt sind.

	Mittelwert
$5 \cdot T_1$	$8{,}32 \pm 0{,}02$
$5 \cdot T_2$	$8{,}29 \pm 0{,}02$
$5 \cdot T_+$	$8{,}25 \pm 0{,}05$
$5 \cdot T_-$	$6{,}72 \pm 0{,}03$
$5 \cdot T_K$	$46{,}23 \pm 1{,}24$
T_S	$7{,}95 \pm 0{,}15$

Tabelle 1: Gemittelte Werte für $l = 0.7m$

	Mittelwert
$5 \cdot T_1$	$7{,}79 \pm 0{,}05$
$5 \cdot T_2$	$7{,}76 \pm 0{,}04$
$5 \cdot T_+$	$7{,}63 \pm 0{,}05$
$5 \cdot T_-$	$7{,}25 \pm 0{,}05$
$5 \cdot T_K$	$133{,}94 \pm 1{,}97$
T_S	$25{,}48 \pm 0{,}52$

Tabelle 2: Gemittelte Werte für $l = 0.6m$

	Frequenz / s^{-1}
ω_+	$3{,}81 \pm 0{,}02$
ω_-	$4{,}68 \pm 0{,}02$
ω_K	$0{,}68 \pm 0{,}02$
ω_S	$0{,}79 \pm 0{,}01$

Tabelle 3: Frequenzen für $l = 0.7m$

	Frequenz / s^{-1}
$\omega_{+,0.6}$	$4{,}12 \pm 0{,}03$
$\omega_{-,0.6}$	$4{,}34 \pm 0{,}03$
$\omega_{K,0.6}$	$0{,}23 \pm 0{,}00$
$\omega_{S,0.6}$	$0{,}25 \pm 0{,}00$

Tabelle 4: Frequenzen für $l = 0.6m$

Nun soll mit den gefundenen Werten der Kopplungsgrad K berechnet werden:

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{3}$$

Hiermit ergibt sich für den Mittelwert $\bar{K}$ als Funktion der einzelnen Mittelwerte:

$$\bar{K}_{0.7} = 0.20 \tag{4}$$

Für die erste Konfiguration ($l = 0.70m$), respektive:

$$\bar{K}_{0.6} = 0.05 \tag{5}$$

Für die zweite Konfiguration ($l = 0.60m$). Um die zugehörigen Fehler anzugeben, muss die Gaußsche-Fehlerfortpflanzung verwendet werden:

$$... \tag{6}$$

Hierzu müssen zunächst die partiellen Ableitungen nach T_+ und T_- bestimmt werden:

$$\frac{\partial K}{\partial T_+} = \frac{4 \cdot T_+ \cdot T_-^2}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial K}{\partial T_-} = -\frac{4 \cdot T_- \cdot T_+^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{8}$$

Einsetzen liefert, dass die entsprechenden Werte für den Fehler der Kopplungskonstante in der Größenordnung 10^{-3} liegen und somit vernachlässigt werden können.
Abschließend soll nun noch der Zusammenhang

$$\omega_S = |\omega_+ - \omega_-| \tag{9}$$

überprüft werden. Hierzu werden die Werte für ω_S aus ω_+ und ω_- berechnet und mit dem gemessenen Wert verglichen. Mit den Werten aus **??** ergeben sich die Kreisfrequenzen zu:

$$\omega_{S,0.7} = (0.87 \pm 0.03)\mathrm{s}^{-1} \tag{10}$$

$$\omega_{S,0.6} = (0.22 \pm 0.04)\mathrm{s}^{-1} \tag{11}$$

Die entsprechenden absoluten Fehler wurden gemäß der üblichen Formel für Summen berechnet:

$$(\Delta f(x_1, \dots, x_n))^2 = \sum_i^n (\Delta x_i)^2 \tag{12}$$

4 Messungen

4.1 Pendellänge $l = 0.70m$

$5 \cdot T_1/\mathrm{s}$	
8,50	8,29
8,35	8,29
8,32	8,30
8,26	8,23
8,26	8,38

Tabelle 5: linkes Pendel

$5 \cdot T_2/\mathrm{s}$	
8,13	8,26
8,30	8,44
8,36	8,27
8,29	8,26
8,30	8,33

Tabelle 6: Schwingungsdauer rechtes Pendel

$5 \cdot T_+/\mathrm{s}$	
8,12	8,33
8,18	8,16
8,23	8,18
8,55	8,10
8,18	8,50

Tabelle 7: Schwingungsdauer gleichsinnig

$5 \cdot T_-/\mathrm{s}$	
6,89	6,76
6,66	6,73
6,80	6,69
6,55	6,84
6,61	6,64

Tabelle 8: Schwingungsdauer gegensinnig

$5 \cdot T_K/\mathrm{s}$	
48,30	41,93
49,47	40,01
44,23	53,81
48,23	44,67
48,42	43,23

Tabelle 9: Schwingungsdauer gekoppelt

T_S/s	
7,18	8,59
7,10	8,23
7,86	8,36
7,80	8,04
8,11	8,21

Tabelle 10: Schwebungsdauer

4.2 Pendellänge $l = 0,6\mathrm{m}$

$5 \cdot T_1/\mathrm{s}$
7,86
7,61
7,76
7,78
7,92

Tabelle 11: linkes Pendel

$5 \cdot T_2$
7,86
7,83
7,64
7,80
7,67

Tabelle 12: Schwingungsdauer rechtes Pendel

$5 \cdot T_+$
7,47
7,55
7,64
7,75
7,73

Tabelle 13: Schwingunsdauer gleichsinnig

$5 \cdot T_-/\mathrm{s}$
7,15
7,21
7,38
7,13
7,36

Tabelle 14: Schwingungsdauer gegensinnig

$5 \cdot T_K/\mathrm{s}$
129,61
137,27
129,47
140,67
132,66

Tabelle 15: Schwingungsdauer gekoppelt

T_S/s
26,34
24,62
26,21
23,64
26,60

Tabelle 16: Schwebungsdauer

5 Diskussion