11 / febrero / 19

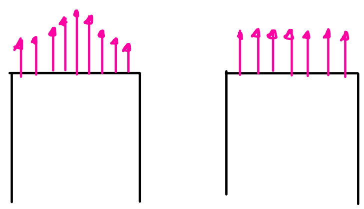
Esfuerzo, Deformación y Carga Axial.

Esfuerzo: la resistencia a la fractura depende de la fuerza, del área transversal A y del material de la varilla.

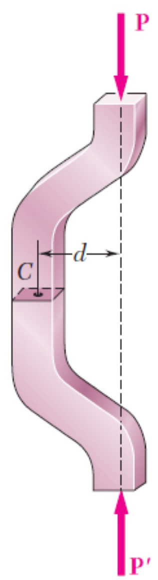
$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \quad \frac{N}{m^2} = \text{Pascal}$$

Carga Axial: Pasa por el centroide.

Signo positivo mientra está en tensión. Si está a compresión es negativo



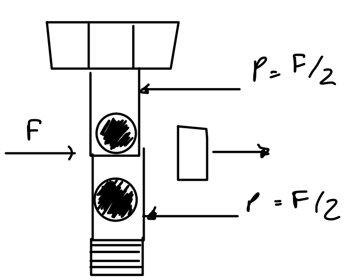
Supondremos que la carga es uniforme.



Siempre hay que considerar una carga adicional.

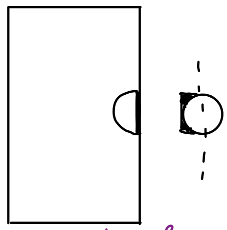
Esfuerzo Cortante: se aplican en tornillos Fuerzas transversales P y P'. (Pernos, pasadores y remaches).

$$\boxed{\tau_{prom} = \frac{P}{A}}$$



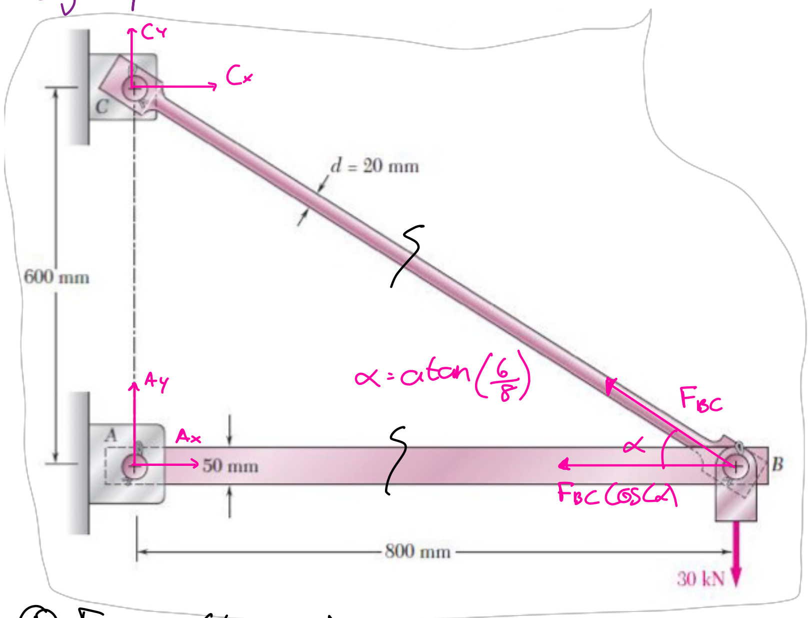
$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}.$$

Esfuerzo de apoyo en conexiones: fuerzas elementales distribuidas en la superficie interior de medio cilindro



$$\sigma_k = \frac{P}{A}.$$

Ejemplo 1:



$\alpha = 36.87$

① $\sum M_A = \emptyset;$

$-(30\,kN)(800m) + F_{BC}\,sen(\alpha)(800m) = \emptyset;$

$\therefore\ F_{BC} = \dfrac{(30)(800)}{sen(\alpha)(800)} = \boxed{50\,kN}$

elemento F_{BC}.

② $\sum F_x = \emptyset;$

$A_x - F_{BC}\cos(\alpha) = \emptyset,$

$A_x = F_{BC}\cos(\alpha) = \boxed{40\,kN}$

Determine el esfuerzo normal en el elemento AB y BC.

① $F_{AB} = (40\,kN)$

$A_{AB} = (50\,mm)(30\,mm)$

$\sigma_{AB} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{40\,kN}{(50\,mm \times 30\,mm)} = \boxed{26\,MP}$

Si cargamos con 40 KN se rompera en el extremo superior en lugar de en medio.

② $F_{BC} = 50\,kN$

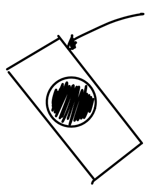
$A_{BC} = 314\times10^{-4}\,m^2 = \pi(10\,mm)^2$

σ_{BC}: esfuerzo Normal $= \boxed{1.59\,MP}$

$$\sigma_C = \frac{50\,kN}{(40\,mm - 25\,mm)(20\,mm)} = \boxed{167\,MP}$$

Determine el esfuerzo cortante en las conexiones.

Conexión C:



$F_{BC} = 50\,kN$

$A = \pi r^2$

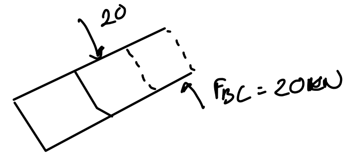
$= \pi\left(\frac{25\,mm}{2}\right)^2$

$\tau_C = \dfrac{50\,kN}{A_C}$

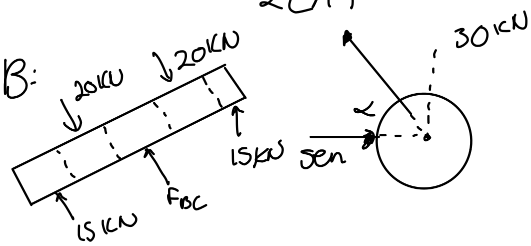
$T_C = \boxed{102\,MP.}$

esfuerzo promedio cortante

Conexión A: $\tau_A = \dfrac{40\,kN}{2(A)} = \boxed{40.7\,MP}$



Conexión B:



$$\tau = \frac{\sqrt{(F_y 3 + F_x 3)}}{\pi\cdot(12.5\,mm)^2}$$

$F_y = 30\,kN$

$F_x = 20\,kN.$

20/febrero/19

Esfuerzo: $\sigma = \frac{F}{A}$

Deformación: $\epsilon = \frac{\delta}{L}$

Solo se consideran fuerzas que son perpendiculares a la sección transversal.

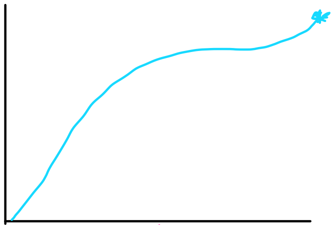


Diagrama de esfuerzo.

Punto de fluencia: antes de este el cuerpo puede regresar a su tamaño original

Módulo de Young: E coeficiente.

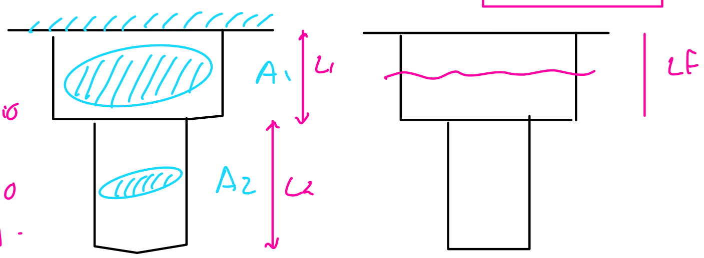
$\sigma = \frac{P}{A}$, $\epsilon = \frac{\delta}{L}$, $\sigma = E\epsilon$

Partiendo de $\sigma = E\epsilon$, $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA}$ que $\epsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \epsilon L$

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{AE}}$$

Aluminio (E_1)

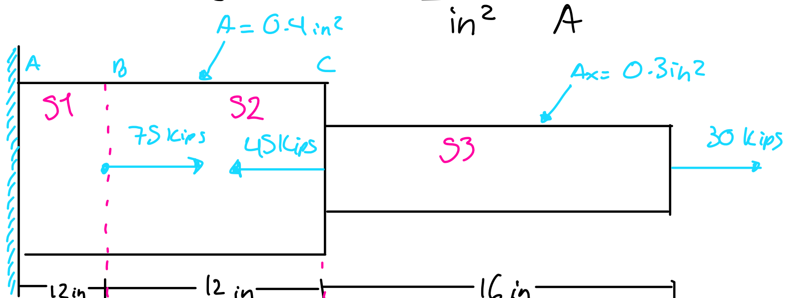
Acero (E_2).



$\delta_T = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2}$

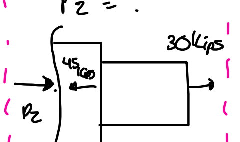
$\delta_T = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_j}$

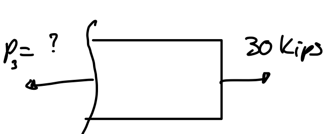
Ejemplo 1: Determine la deformación de la varilla de acero bajo las cargas dadas. ($E = 29 \times 10^6$ Psi) $\frac{lb}{in^2}$ $\frac{F}{A}$



Calcular la deformación de cada sección y finalmente sumarlas.
Se empieza siempre del lado que no está empotrado.

δ_{S1}	δ_{S2}	δ_{S3}
$L_1 = 12in$	$L_2 = 12$	$L_3 = 16\ in$
$A_1 = 0.9\ in^2$	$A_2 = 0.9\ in^2$	$A_3 = 0.3\ in^2$
$P_1 = ?$	$P_2 = ?$	$P_3 = ?$

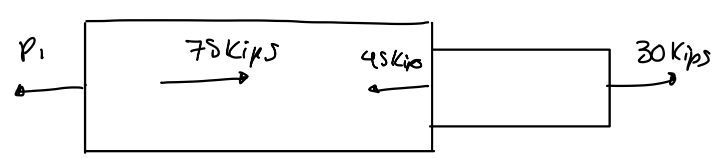




$P_2 = -45 + 30$

$P_2 = -15 Kips$

$P_3 = 30 Kips$



$-P_3 + 75 Kips - 45 Kips + 30 Kips = \emptyset$

$P_3 = 60 Kips$

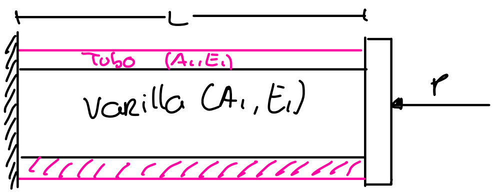
$$\delta_T = \frac{(60\,\text{Kips})(12)}{(0.9)\,E} + \frac{(-15\,\text{Kips})(12)}{(0.9)(E)} + \frac{(30\,\text{Kips})(16)}{(0.3)\,E} = \boxed{75.86\times10^{-6}\ \text{in}}$$

27 / febrero / 19

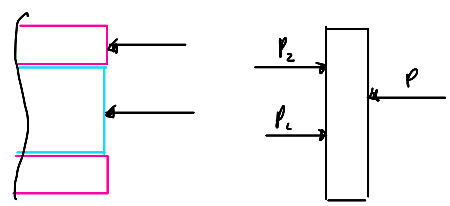
Elementos estáticamente indeterminados.

Ejemplo:

Una varilla de longitud L_1, A_1 y E_1 se ha colocado dentro de un tubo con la misma longitud L_1 pero con A_2 y E_2 ¿Cuál es la deformación de la varilla y del tubo cuando una fuerza P se aplica en la la placa rígida como se muestra en la figura?



Del ejemplo (1)...



$$P = P_1 + P_2 \ldots (E1)$$

$$\delta = \frac{P(L_1)}{A_1(E)}$$

Deformación de cada elemento:

$$\delta_T = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad ; \quad \delta_v = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} \quad \therefore \boxed{\delta_T = \delta_v}$$

Siguiendo...

$$\frac{P_2}{A_2 E_2} = \frac{P_1}{A_1 E_1} \ldots (E_3)$$

$$P = P_1 + P_2 \ldots (E_1)$$

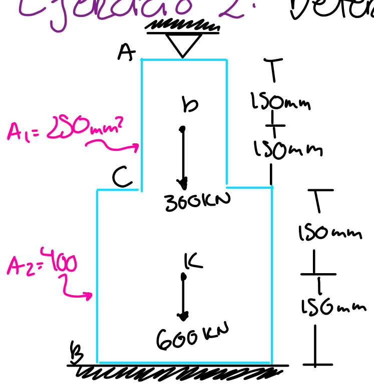
De (1): $P_1 = P - P_2$

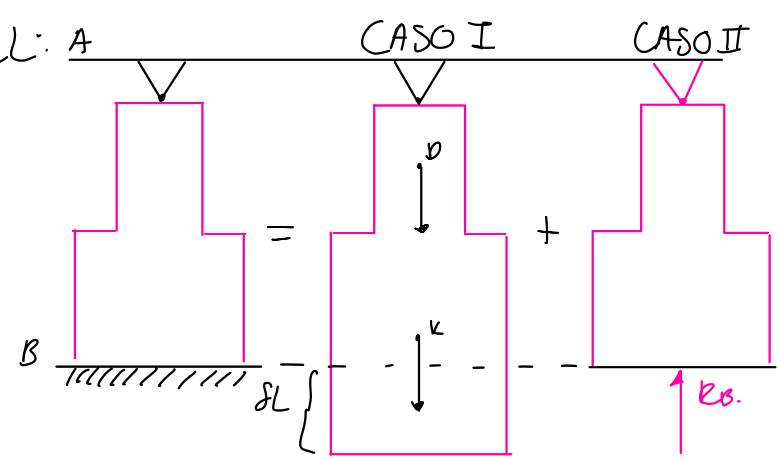
$$\frac{P_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{P - P_2}{A_1 \cdot E_1}$$

Despejamos $\boxed{P_2 \Longrightarrow \dfrac{P(A_2 E_2)}{A_1 E_1 + A_2 E_2}}$

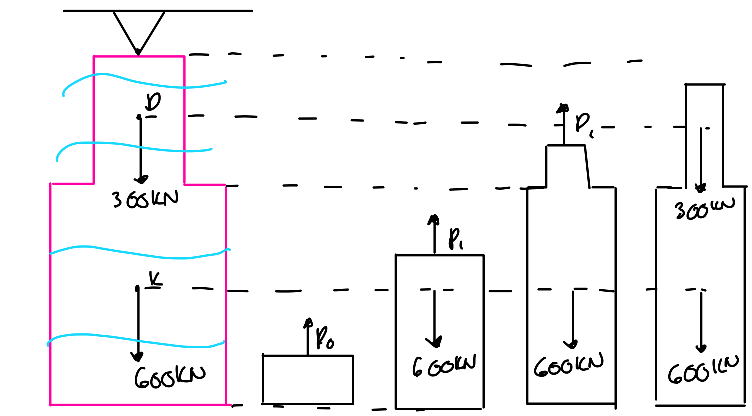
Despejamos $\boxed{P_1 \Longrightarrow \dfrac{P(A_1 E_1)}{A_1 E_1 + A_2 E_2}}$

Ejercicio 2: Determinar las reacciones en A y en B. Suponiendo un ensamble ajustado en ambos apoyos antes de que apliquen las cargas.





Para caso I:

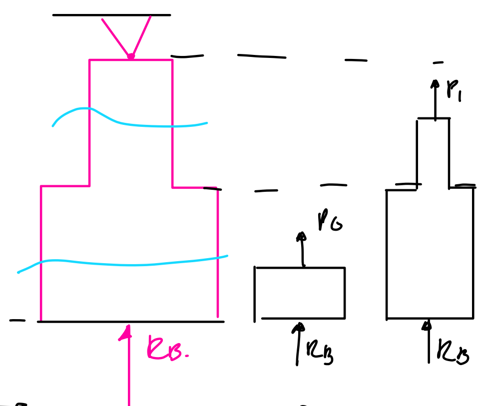


$P_0 = \emptyset$ KN
$P_1 = 600$ kN
$P_2 = 600$ kN
$P_3 = 900$ kN

$$\delta_1 = \frac{(0)(150\times10^{-3})}{(400\times10^{-6})E} + \frac{(600\,kN)(150\times10^{-3})}{(400\times10^{-6})E} + \frac{(600\,kN)(150\times10^{-3})}{(250\times10^{-6})E} + \frac{(900\,kN)(150\times10^{-3})}{(250\times10^{-6})E}$$

$$\delta_E = \frac{1.125\times10^{6}}{E}$$

Para caso II:



$$\left.\begin{array}{l} P_0 = -R_B \\ P_1 = -R_B \end{array}\right\} \Rightarrow P_0 = P_1 = -R_B$$

$$\delta_R = \frac{P_0(300\times10^{-3})}{(400\times10^{-6})E} + \frac{P_1(300\times10^{-3})}{(250\times10^{-6})E}$$

$$\delta_R = \frac{-R_B(300\times10^{-3})}{E}\left(\frac{1}{400\times10^{-6}} + \frac{1}{250\times10^{-6}}\right)$$

$$\delta_R = \frac{-1.95\times10^{3}}{E} R_B$$

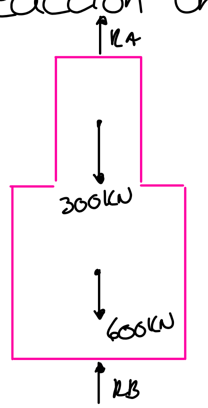
Teniendo que $\delta_E + \delta_R = \emptyset$, entonces

$$\frac{-1.95\times10^{3}R_B}{E} + \frac{1.25\times10^{6}}{E} = \emptyset, \quad R_B = \frac{1.25\times10^{6}}{1.95\times10^{3}}$$

$R_B = 577$ kN

Reacción en el apoyo B

Reacción en A:



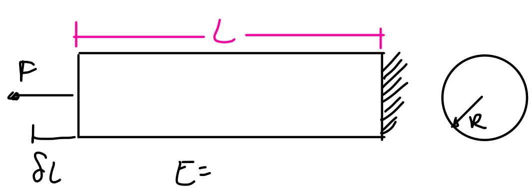
$R_A = -300$ kN $- 600$ kN $+ R_B = \emptyset$

$R_A = -900$ kN $+ 577$ kN

$R_A = -323$ kN

Reacción en el apoyo A.

Proyecto Opcional: Modelar en NX elemento finito.



$$\delta_L = \frac{PL}{AE}$$

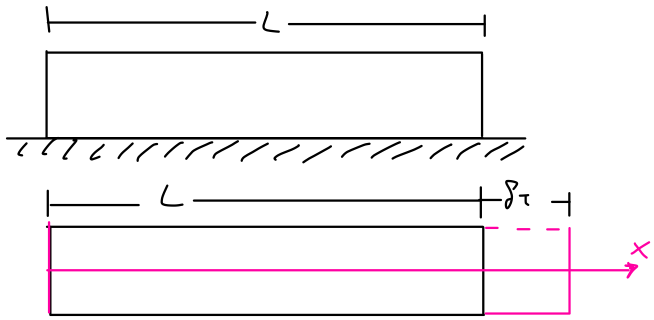
$L = 10$ cm
$R = 2$ cm

Aluminio

$$F = \begin{cases} 10\,N \\ 30\,N \\ 90\,N \\ 120\,N \\ 500\,N \end{cases}$$

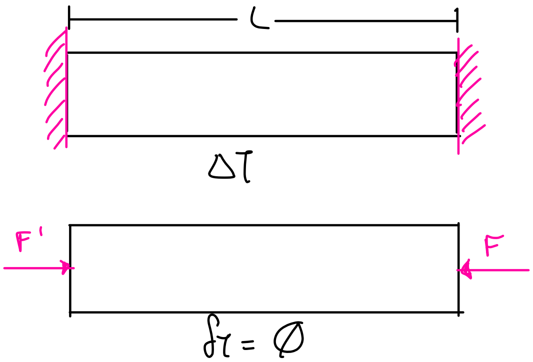
04/marzo/19

Problemas que involucran cambios de temperatura



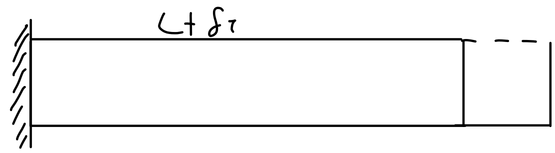
$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad \dots (1)$$

α = coeficiente de la expansión térmica
ΔT = Cambio de temperatura
L = longitud inicial.



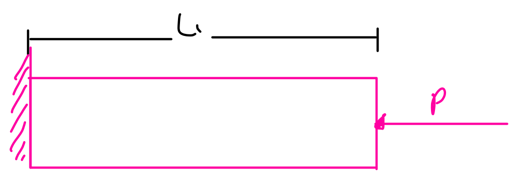
Problema estáticamente indeterminado.

A



$$\boxed{\delta_T = \alpha(\Delta T)L.}$$

B



$$\boxed{\delta_T = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}}$$

$$\delta_F + \delta_T = \varnothing$$

$$\frac{P \cdot L}{A \cdot E} + \alpha(\Delta T)L = \varnothing$$

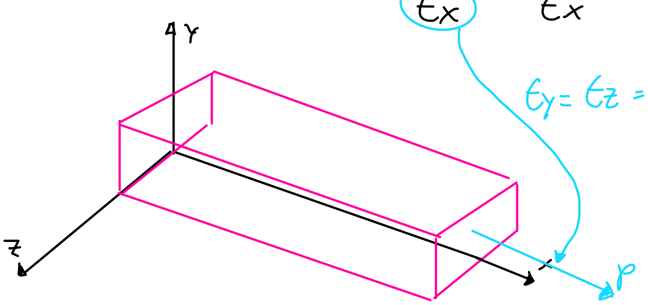
$$P_z = \frac{-\alpha(\Delta T)L \cdot AE}{L_1}$$

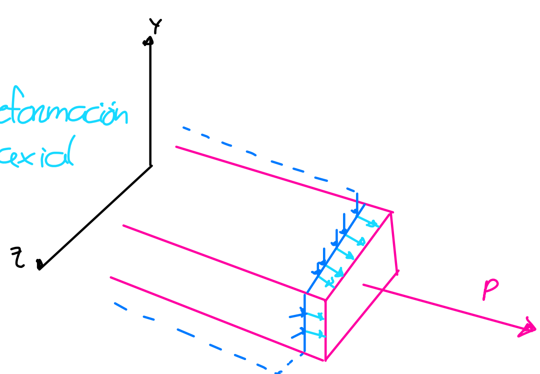
$$\boxed{P = -\alpha(\Delta T) \cdot AE}$$

Relación de Poisson

$$\nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

$\epsilon_y = \epsilon_z$ = Deformación axial

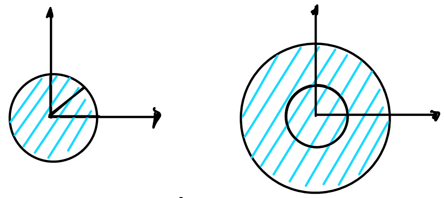




13 /marzo/19

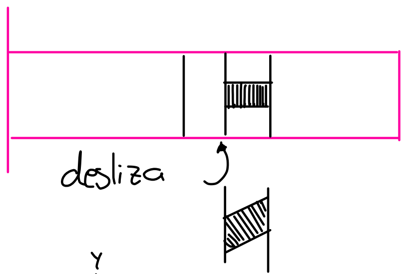
Torsión

Tiene muchas aplicaciones para transmitir potencia o torque.



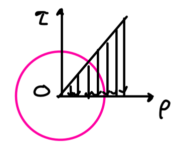
$\boxed{A = A_r}$

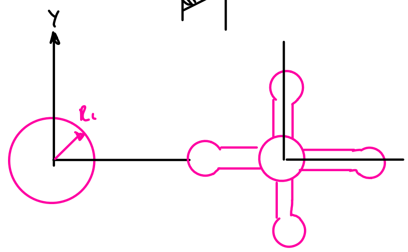
Cuando giran los ejes circulares mantienen su forma plana.



$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\pi C^4}$$



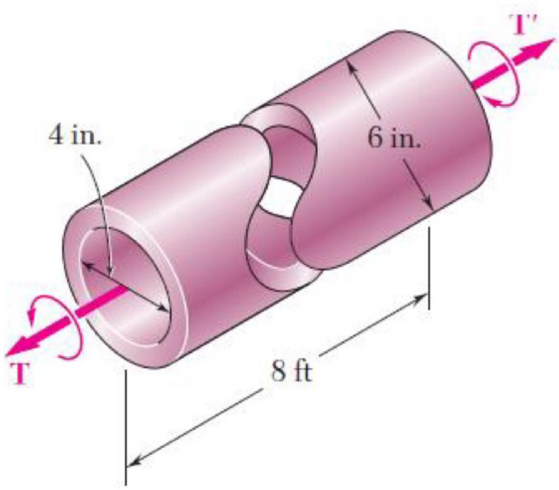


$A_1 = A_2$

Esfuerzo cortante máximo: τ_{max}

Esfuerzo cortante permisible: τ_{perm}

El diseño preliminar de un eje grande que conecta a un motor con un generador requiere el uso de un eje hueco con diámetros interior y exterior de 4 in. y 6 in., respectivamente. Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi, determine el máximo par que puede ser transmitido *a*) por el eje como fue diseñado, *b*) por un eje sólido del mismo peso,



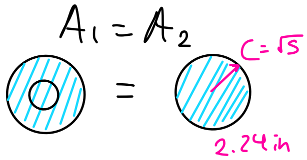
$$\tau_{MAX} = \frac{TC}{J}$$

$$\tau_{perm} = 12\text{ksi}\ \frac{k\ \text{libras}}{in^2}$$

$$T = \frac{J\,\tau_{MAX}}{C} = \frac{\frac{1}{2}\pi(C_2^4 - C_1^4)(12\text{ Ksi})}{3}$$

$$T = \frac{\frac{1}{2}\pi(3^4 - 2^4)(12\text{Kis})}{3} = 408\ lb\cdot in.$$

b) $A_1 = A_2$

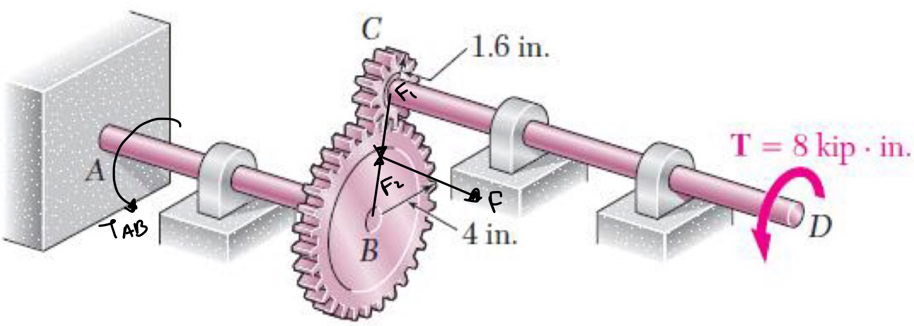


$$\pi(3\,in^2 - 2\,in^2) = \pi c^2$$

$$c = \sqrt{5}$$

$$T = \frac{J\,\tau_{MAX}}{C} = \frac{\frac{1}{2}\pi(\sqrt{5})^4(12\text{ Kis})}{\sqrt{5}\ in} \Rightarrow T = 210.74\ lb\cdot in$$

3.21 Un par de torsión de magnitud $T = 8$ kip · in. se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 7.5 ksi en cada eje, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.



$$F_1 = \frac{T_{CD}}{r_1} = \frac{8 \text{ Kip in}}{r_1}$$

$$F_1 = \frac{T_{AB}}{r_2}$$

$$\frac{T_{CB}}{r_1} = \frac{T_{AB}}{r_2}$$

$$T_{AB} = \frac{r_1}{r_2} T_{CD} = \frac{4 \text{ in}}{1.6 \text{ in}} (8 \text{ Kips} \cdot \text{in}) = T_{AB} = 20 \text{ Kip} \cdot \text{in}$$

Para la flecha CD: $\tau_{MAX} = \frac{TC}{\frac{1}{2}\pi C^4}$; $\tau_{perm} = 7.5$ Ksi

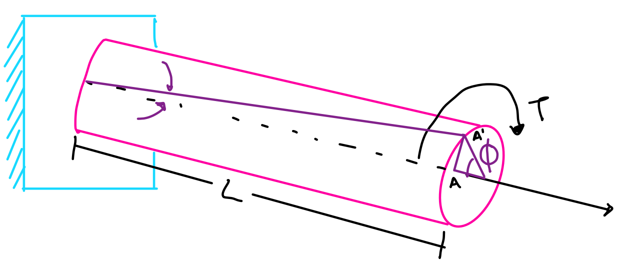
$$\frac{1}{2}\pi C^3 \tau_{MAX} = T \Rightarrow C^3 = \frac{2T}{\tau_{MAX} \cdot \pi} = \frac{2(8 \text{ Kp in})}{(7.5 \text{ Ksi})(\pi)} \Rightarrow C = 0.88 \text{ in}$$

Para la flecha AB:

$$C_2^3 = \frac{2T}{\tau_{MAX} \cdot \pi} = \frac{2(20 \text{ Kip} \cdot \text{in})}{(7.5 \text{ Ksi})(\pi)} \Rightarrow C = 1.69 \text{ in.}$$

20/marzo/19

Angulo de giro en el rango elástico



$$L\gamma_{MAX} = C\phi \quad \dots (1)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{TC}{J} \quad \dots (2)$$

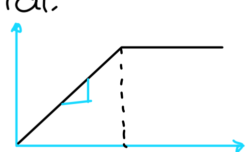
Esfuerzo máximo = $\frac{\text{Torque (radio)}}{\text{M. polar Inercia}}$

$$J = \frac{\pi}{2} C^4$$

Ley de Hooke: A) Caso de un esfuerzo axial.

$$\sigma = E \, \epsilon$$

Módulo de Young



B) Caso de un esfuerzo rotacional

Deformación

$$\tau_{MAX} = G \, \gamma_{MAX} \quad \dots (3)$$

Esfuerzo cortante

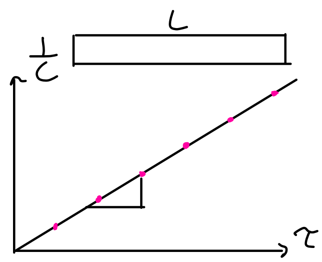
módulo rigidez

Sustituyendo (3) en (2)

$$\tau_{MAX} = \frac{TC}{J} \Rightarrow G\gamma_{MAX} = \frac{TC}{J} \Rightarrow \gamma_{MAX} = \frac{TC}{J} \quad \dots (4)$$

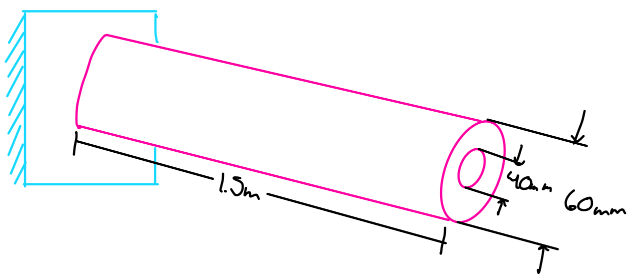
Sustituyendo (4) en (1):

$$\phi = \frac{L\cdot\gamma_{MAX}}{C} = \frac{LT\cancel{C}}{JG\cancel{C}} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{LT}{JG}}$$ → Siempre en radianes



T	ϕ
100 Nm	0.1 rad
200 Nm	0.5 rad

Ejemplo: ¿Qué par de torsión deberá aplicarse al extremo del eje para producir un giro de 2°? $G = 77.6$ pa.

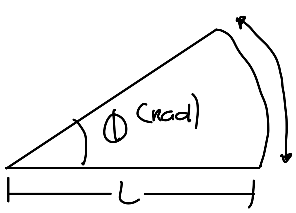


$$\phi = \frac{L\cdot T}{J\cdot G}$$

$$T = \frac{\phi\cdot J\cdot G}{L} \Rightarrow T = \frac{(\frac{\pi}{90})(1.02\times10^{-6})(77.6\,pa)}{1.5m}$$

$$\frac{\pi}{2}(C_2^2 - C_1^2) = \frac{\pi}{2}(30^4 - 20^4) = \frac{\pi}{2}(0.030^4 - 0.020^4) = \frac{\pi}{2}(0.00000081 - 0.00000016)$$
$$= 1.02\times10^{-6}$$

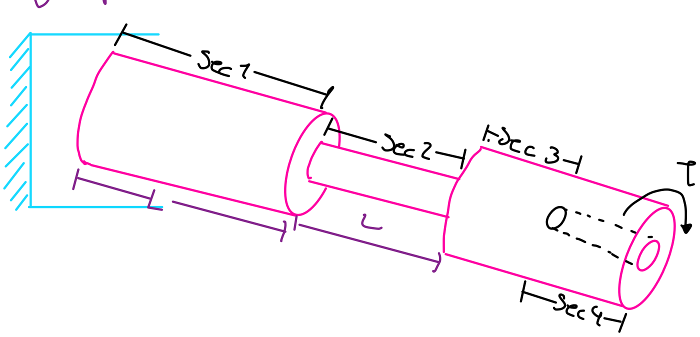
$$T = \frac{(\frac{\pi}{90})(1.02\times10^{-6})(77.6\,pa)}{1.5m} \Rightarrow T = 1.829\ kN\cdot m$$



$$A\times C = \phi\cdot L$$
$$= (rad)\,L(m)$$

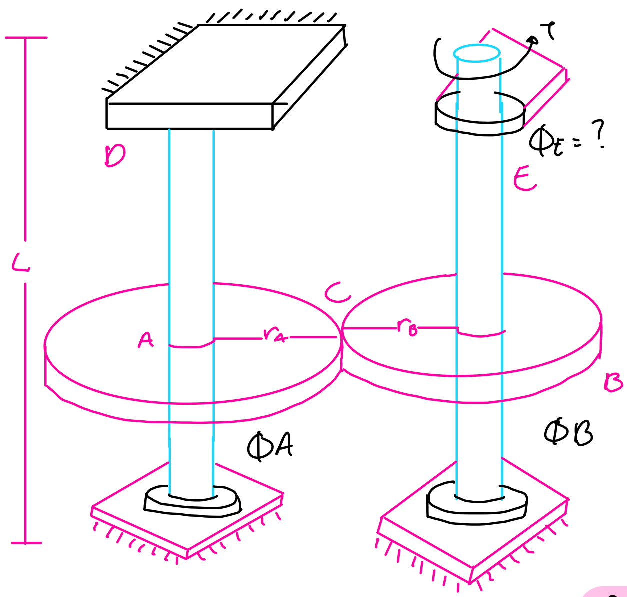
- La fórmula $\phi = \frac{T\cdot L}{J\cdot G}$ únicamente puede usarse si el eje homogéneo (G = cte) y además si se tiene una sección transversal uniforme.

Ejemplo 01:



$$\phi = \sum_{i}^{n} \frac{L_i\cdot T_i}{J_i\cdot G_i}$$

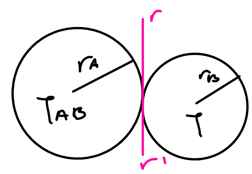
Ejemplo 2: Para el ensamble de la figura sabiendo que $r_A = 2r_B$. Determine el ángulo de rotación del extremo E. Cuando el par T se aplica en E.



$$\phi_{EB} = \phi_E - \phi_B.$$

1. $\phi_A = \dfrac{T_{AB} \cdot L}{J \cdot G} \quad \ldots (1)$

2.

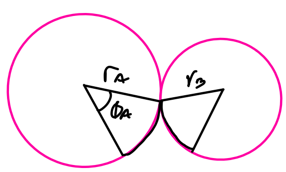


$T_{AB} = r_A \cdot F$
$T = r_B \cdot F'$

$$\frac{T_{AB}}{r_A} = \frac{T}{r_B} \Rightarrow T_{AB} = \frac{r_A}{r_B} \cdot T \Rightarrow T_{AB} = \frac{2r_A}{r_B} \cdot T$$

$$T_{AB} = 2T$$

$$\phi_A = \frac{2TL}{J \cdot G}$$



$r_A \cdot \phi_A = r_B \phi_B$
$(2r_B)\phi_A = r_B \phi_B$
$\phi_B = 2\phi_A$

Continuando...

$$\phi_E = \phi_{EB} + \phi_B$$
$$\phi_E = \frac{T \cdot L}{J \cdot G} + 2\left(\frac{2T \cdot L}{J \cdot G}\right) \Rightarrow \phi_E = \frac{5T \cdot L}{J \cdot G}$$

25 / marzo / 19

Diseño de ejes de transmisión

Comercialmente... $\begin{cases} \text{Velocidad angular (rpm)} \\ \text{Potencia (hp)} \end{cases}$

De la dinámica rotacional de un cuerpo rígido.

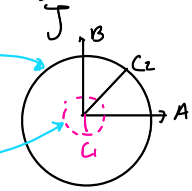
$\boxed{P = T \cdot \omega} \quad \ldots (1)$

P = potencia
T = torque
ω = velocidad Angular (rad/seg)
$\omega = 2\pi f$
f = frecuencia (1/seg) Hertz (Hz).

$T_{MAX} = \dfrac{T C_2}{J} \quad \ldots (2)$

$J = \frac{1}{2}\pi C_2^4$

$J = \frac{1}{2}(C_2^4 - C_1^4)$



De la ec. (1)
$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$

Sust. en (2): $\dfrac{T_{MAX}}{T} = \dfrac{C_2}{J}$