

$z = r \cdot \exp(i \cdot \theta)$  nos da el número complejo.

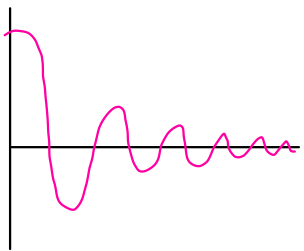
$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$  da lo mismo que  $r (\cos \theta + i \sin \theta)$   $\rightarrow$  se eleva un número complejo.

$e^{i\pi} + 1 = 0$   $\underbrace{e^{i\pi} = -1}_{\cos \pi + i \sin \pi}$

Números complejos nos interesan para lo que sigue del curso

Ecuaciones dinámicas modelan cambios en el tiempo.

Al resolver ecuaciones diferenciales nos va a dar resultados del tipo  $e^{a+bi} = e^a e^{bi} \rightarrow$  se descompone en seno y coseno con la frecuencia que depende de  $b$ .



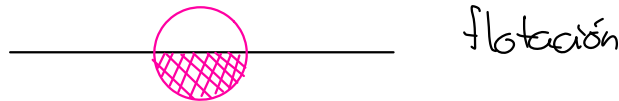
$z = r e^{i\theta}$   $z^n = r^n e^{in\theta}$   $z^n = r^n [e^{i\theta}]^n$

Números complejos se pueden expresar con senos y cosenos y con exponentes  
Sistemas dinámicos son continuos y pueden ir decayendo.

27/ febrero /19

Corrección Examen

$F, \text{ peso} = m \cdot g$   
 $= \rho \cdot V \cdot g$   
 $= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g.$



09/ marzo /19

Matrices.

Matlab:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$   $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   $\Rightarrow A \cdot x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$RC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow RC^* x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$  matriz de rotación.

**atand** = función en Matlab que saca el ángulo de una matriz  $z$ . La  $d$  al final significa decimales.

**Matriz**: transformación lineal que convierte un vector  $x$  en un vector  $y$ .

## Valores y vectores propios.

$$Ax = \lambda x$$
$$(A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0$$
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Sistema de ecuaciones tiene solución única si el determinante  $\neq 0$   
Si el determinante  $= 0$ , entonces tiene múltiples soluciones

Matlab:  $A = \text{gallery}(3) = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$  → ejemplos de matrices

Polinomio característico:  $\text{poly}(A)$ .  
 $\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ .

Con  $\text{roots}(\text{poly}(A))$  sacamos las soluciones del polinomio característico.  $\text{Roots} = 3, 2, 1 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$ .

$$[\lambda, x] = \text{powerMethod}(A)$$

$$x = [1, 1, \dots, 1]$$

$$\lambda = \text{norm}(x)$$

$$x = x / \lambda$$

$$\lambda x = Ax$$

$$\lambda =$$

$$x =$$

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_a}{\lambda} \right| > \text{eps}.$$

$\text{size}(A)$ : nos regresa un vector con las dimensiones de la matriz.

En matlab con  $\sim$  se puede sustituir un valor que regresa una función pero que no queremos tomar en cuenta.

$\text{eig}(A)$ : Regresa eigen valores de la matriz  $A$ .

## Eliminación de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$\text{magic}(\#)$ : arroja una matriz  $\# \times \#$  como cuadrado mágico.

$A(1:4, 3)$ : renglones 1-4 de la tercera columna. También se puede usar  $\text{end}$  para indicar todas las columnas.

$A(:, \text{end}-1)$ : todos los renglones de la penúltima columna.

Rangos de donde a donde queremos ver nos va a ayudar mucho.

$\max(A(:, 3))$ : máximo de la columna 3.

Con esto se puede multiplicar solo un renglón o columna por un vector.  
Elimina muchas operaciones

06/marzo/19

## Método de Gauss.

Checar índices

$i$  = buena renglones y  $j$  = buena columnas

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \bigcirc & \\ & \text{multiplicados} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$P$  = identidad.

$U$  = triangular superior.

Código al revés:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \text{Z} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss era un método exacto, ahora veremos métodos iterativos. 11/marzo/19

## Métodos Iterativos.

- Jacobiano
- Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$Ax - b = 0$$

$$r_n = Ax_n - b$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

norm. ambas.  $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < \text{eps.}$

$$A = \begin{bmatrix} & & U \\ & D & \\ L & & \end{bmatrix} = L + D + U$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$Lx + Dx + Ux = b$$

$$\hookrightarrow Dx_{n+1} = b - (L + U)x_n$$

$$x_{n+1} = D^{-1}(b - (L + U)x_n) \quad D \setminus (b - (L + U)x_n)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= D^{-1} * (b - (L + U) * x_n) \\ &= D \setminus (b - (L + U) * x_n) \end{aligned}$$

Métodos iterativos no siempre convergen.

**Matriz diagonal dominante:** la diagonal de una matriz es mayor que los demás números.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4 - (-1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0)}{D(1,1)}$$

**eig(A):** regresa los eigen valores de A.

13/marzo/19

**Inversa y determinante**

$LU = PA$   
 $\sim$  inversa  
 $\sim$  determinante

$$\cancel{\det(L)} * \det(U) * \underbrace{(-1)^s}_{\text{prod C diag (0)}}$$

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \end{bmatrix}$$

↑     ↑     ↑

$$LU = PA \rightarrow I * P$$

**Gauss Seidel 2:**

$$x_1 = (b(1) - U(1, 2:n) * x_p(2:n)) / D(1,1)$$

$$\begin{aligned} A &= L + U + D \\ Ax &= b \\ (L + U + D)x &= b \\ Lx + Ux + Dx &= b \end{aligned}$$

Jacobi:  $x = D^{-1} * b - D^{-1} * (L + U) * x_p$

$$\begin{aligned} Dx &= b - Lx - Ux \\ x &= D^{-1} * (b - Lx - Ux_p) \end{aligned} \rightarrow \text{código.} \rightarrow \begin{aligned} (D + L)x &= b - Ux \\ x &= (D + L)^{-1} * (b - Ux) \\ x &= (D + L)^{-1} * b - \boxed{(D + L)^{-1} * U} * x \end{aligned}$$

Mientras más grande su radio espectral, más rápido converge.

$$\begin{aligned} e_k &= X - x_k \\ x_{k+1} &= C + T * x_k \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\underbrace{\quad C \quad}_{x = D^{-1} * b} \quad \underbrace{\quad T \quad}_{- D^{-1} * (L + U) * x_k} \\ x &= \underbrace{D^{-1} * b}_{C} - \underbrace{D^{-1} * (L + U) * x_k}_{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= T * e_k \\ &= T^k * e_0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} e_k &= x_k - x \\ x_{k+1} &= C + T * x_k \end{aligned}$$

Métodos funcionan pero no para cualquier matriz. En las que funciona son las que salen de sistemas dinámicos.

$$Ax = b$$

$$Ax - b = 0$$

$$r = b - Ax$$

$$r_k = b - A * x_k$$

Gradiente.

20/marzo/19

## Sistemas de ecuaciones $Ax = b$

Métodos iterativos

- Jacobi, Gauss Seidel
- Gradiente.
- No lineales

## Errores de redondeo

error

$$e = x - x^*$$

residual

$$r = b - Ax^*$$

$$r = b - Ax^*$$

$$x_{k+1} = D^{-1} * b - D^{-1} * (L + U) * x_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \text{---}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (D+L)^{-1} * b - (D+L)^{-1} * U * x_k \\ &= (D+L)^{-1} * b - (D+L)^{-1} * (U + D + L - D - L) * x_k \\ &= (D+L)^{-1} * b - (D+L)^{-1} * (U x_k + D x_k + L x_k - D x_k - L x_k) \\ &\vdots \\ x_{k+1} &= x_k + (D+L)^{-1} * r_k \end{aligned}$$

$x_{k+1} = x_k + (D+L)^{-1} * r_k \rightarrow$  Matriz  $A$  tiene que ser diagonal estrictamente dominante.

Gradiente: donde crezcas más. Camino de máxima inclinación descendiente.

$A$  tiene que ser simétrica  $\rightarrow A = A^T$

$$f(x) = \frac{1}{2} x' * A * x - b' * x + c \rightarrow \text{derivamos} = A * x = b.$$

Matriz positiva definida:  $x' * A * x > 0$  y es simétrica.  $x \sim 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} 2 > 0 \\ 10 - 4 = 6 > 0 \end{array} \right\} \text{positiva definida}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' * \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} x_1(2x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + 5x_2) &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

Forma cuadrática.  
Curvas de nivel.

Dirección del Gradiente: derivar la función.

25/marzo/19

Función Cuadrática  
PD minimizar  
 $Ax=b$

Residual:  $r_k = b - Ax_k$   
r-gradiente.

$\alpha$  es un mínimo  
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$

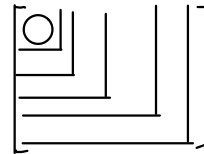
Pregunta de examen:  $\min f(x_{k+1})$ . Demostrar que  $\alpha = \frac{\text{dot}(r_k, r_k)}{(r_k' * A * r_k)} \rightarrow r_k \neq r_k'$

A simeteia  $\frac{1}{2} Ax^2 - bx \rightarrow$  escalares  
 $Ax=b$

mesh grid: Calcular una malla, o cuadrícula de una gráfica.

Menores principales  $\rightarrow$  determinante de cada uno menor que 0.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k r_k \\ r_k &= b - A * x_k \quad \text{-- gradiente} \\ \alpha_k &= \frac{\text{dot}(r_k, r_k)}{(r_k' * A * r_k)} \rightarrow r_k \neq r_k' \end{aligned}$$



Tarea Lineal: Determinar si matriz es positiva definida utilizando la triangulación  
Cuidado porque LU permuta.

27/marzo/19

Sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} y^2 + yz - 10 &= 0 \\ z + 3yz^2 - 57 &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = f(x_p) + \text{derivada} * (x - x_p)$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = f(x_p) + \text{matriz Jacobiana} * (x - x_p)$$

raíces

ceros

Newton Raphson

$$x = x_p - J(x_p) \setminus f(x_p)$$

$$x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 2y + z & y \\ 3z^2 & 1 + 6zy \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

Ejercicio:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) &= 3/2 \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_3 &= 1 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 &= -\frac{10\pi - 3}{3} \end{aligned}$$

$x'Ax > 0 \rightarrow$  Positiva definida.

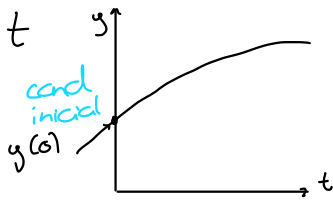
## Sistema dinámico

Sistema de ecuaciones que cambia con respecto al tiempo.

## Ecuaciones diferenciales

eqn  $\frac{dy}{dt}$

cambio  $t$



$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dt + c \Rightarrow \ln(y) = 2t + c$$

$$y = e^{2t+c} = e^{2t}e^c = Ce^{2t}$$

Ejemplo:  $y' = -2ty \rightarrow$   
 $y(0) = 4$

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2t dt \Rightarrow \ln(y) = -\frac{2t^2}{2} \Rightarrow \ln(y) = -t^2 + c \Rightarrow y = Ce^{-t^2}$$

$$4 = Ce^{-0} \Rightarrow C = 4$$

$$y' = y^2 \quad \frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y = \frac{1}{t+c}$$

$$y(1) = 1 \quad 1 = \frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 1 - 1 = 0$$

$$c = 0$$

$$y' = ty + t^3$$

$$ty' + y + 4 = 0$$

factor de integración

$$ty' + y + 4 = 0$$

$$y' + \frac{y}{t} + \frac{4}{t} = 0 \Rightarrow y' + \frac{y}{t} = -\frac{4}{t} \quad \text{sea } \mu = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln(t)} = t$$

$$\Rightarrow t \left[ y' + \frac{1}{t} \right] = t \left[ -\frac{4}{t} \right] \quad \text{Integrando} \Rightarrow ty = -4t + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{c-4t}{t} = \frac{c}{t} - 4$$

Resolver sin saltos e pasos