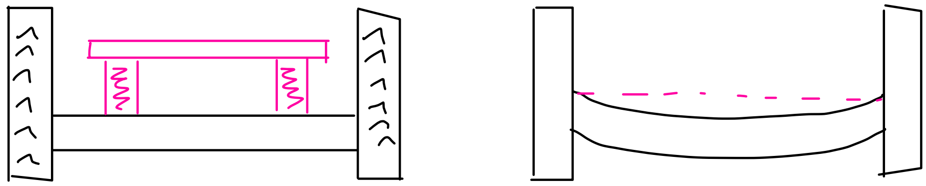
27/marzo/19

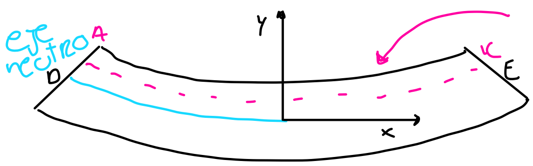
# Flexión

Vigas importantes por todas sus aplicaciones.
Estudiaremos los esfuerzos y las deformaciones.



Esfuerzos = $\sigma_x$

Deformaciones = $\epsilon_x$




Compresión
$\epsilon_x$ (-)
$\sigma_x$ (-)

$\rho$ = radio del círculo DE
$\theta$ = ángulo central
$L$ = longitud de DE

$$\boxed{L = \rho\theta}$$

Considerando ahora el arco JK

$$\boxed{L' = (\rho - y)\theta}$$

Y = distancia entre arco DE y arco AK.

Como la longitud original del Arco JK era igual a L.

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta \Rightarrow \boxed{\delta = y\theta}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}}$$

Deformación

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

C = distancia máxima a la superficie neutra.
$\epsilon_m$ = máximo valor absoluto de la deformación

$$\epsilon_m = \frac{C}{\rho} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{C}{\epsilon_m}}$$

Si la sustituimos en la ecuación anterior:

$$\boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{C} \cdot \epsilon_m} \quad \dots (3)$$

→ Ley de Hooke $\quad \sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

De la ecuación 3: $E \cdot \epsilon_x = \frac{-y}{C}(E \cdot \epsilon_x)$ $\quad \therefore \quad \boxed{\sigma_x = \frac{-y}{C}\sigma_m}$

$$\sigma_m = \frac{M \cdot C}{I}$$

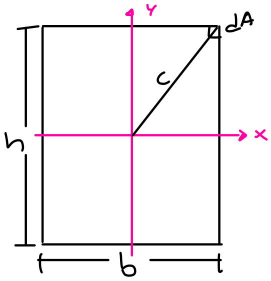
M = momento
C = distancia máxima
I = Momento de inercia.

$$\sigma_x = \frac{-y}{C} \cdot \frac{MC}{I}$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{-yM}{I}}$$

Esfuerzo de deformación ...(4)

$(\sigma_x < 0)$ Compresión por encima del eje neutro cuando $(y > 0)$ y $(M > 0)$

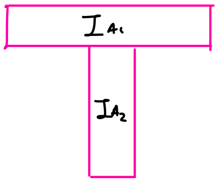



$$I = \int r\, dA.$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12} b h^3}$$

De la ecuación (4)

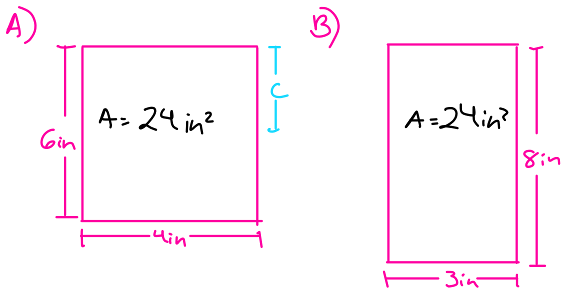
$$\sigma_m = -\frac{Mc}{I} \Rightarrow \frac{I}{C} = \text{módulo elástico de la sección transversal } (S)$$




$$\sigma_m = -\frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{h}{2}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{6} b \cdot h^2}$$

El eje neutro pasa justo por el eje de simetría de la sección transversal.

Ejemplo: Calcular el módulo elástico de las 2 vigas con las siguientes secciones transversales.



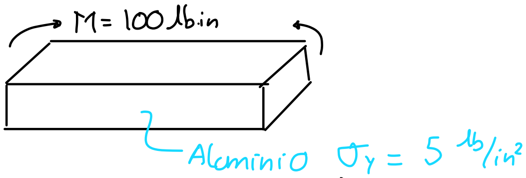

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b \cdot h^2$$

$$S = \frac{1}{6} b \cdot h \cdot h = \frac{1}{6} \cdot A \cdot h = \frac{1}{6}(24\,in)(6\,in) \Rightarrow S = 24\,in^3$$

$$S = \frac{1}{6}(24\,in)(8\,in) \Rightarrow S = 32\,in^3$$

Consideramos:

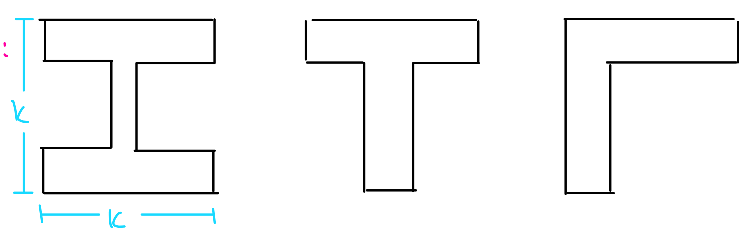
1. Material
2. Geometría.



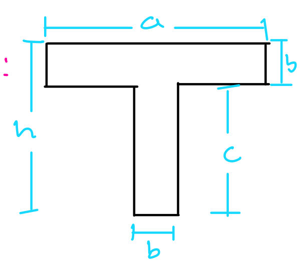

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad \text{Para A)}: \sigma_m = \frac{100\,lb \cdot in}{24\,in^3} = 4.16\,\frac{lb}{in^2}$$

$$\text{Para B)}: \sigma_m = \frac{100\,lb \cdot in}{32\,in^3} = 3.125\,\frac{lb}{in^2}$$

Perfiles Comerciales:




Momento de Inercia:

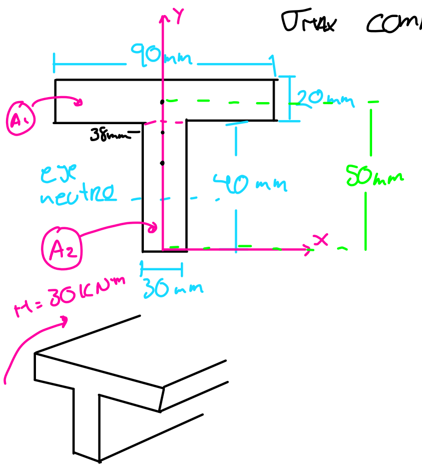



$I = ?$

**Ejercicio:** Una sección de hierro colado que se somete a un par de KN·m. Si E= 165 Gra

Determine: a) $\sigma_{max}$ tensión = ?  B) Radio de curvatura.

$\sigma_{max}$ compresión = ?




$$\boxed{\sigma_{MAX} = \frac{M \cdot C}{I}}$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 \rightarrow$$

a) Calcular el centroide de la sección transversal de la viga.

| Sección | Área (A) | $\bar{y}$ | $\bar{y}A$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $(90)(20) = 1800\,mm^2$ | 50 mm | 90,000 $mm^2$ |
| $A_2$ | $(30)(40) = 1200\,mm^2$ | 20 mm | 24,000 $mm^2$ |

↳ distancia eje x a centro de sección

$$\bar{Y} \sum A_y = \sum \bar{y} A_i$$

$\bar{Y}$ = Centroide del perfil original

$$\bar{Y} = \frac{(90\times10^3\,mm^3 + 24\times10^3\,mm^3)}{3000\,mm^2} \Rightarrow \bar{Y} = 38\,mm$$ centroide general

2) Calcular el momento de inercia. Teorema de los ejes paralelos.

$$\boxed{I_{x'} = \sum_{i=1}^{n} (I_i + A_i d_i^2)}$$

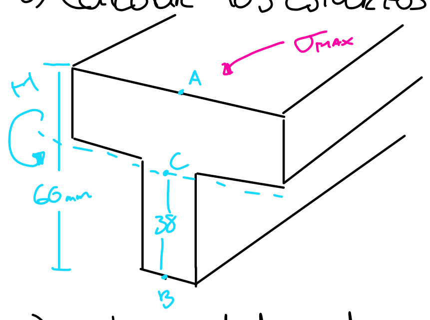
$$= \left(\frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 d_1^2\right) + \left(\frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{12}(90)(20)^3 + (1800)(12)^2\right) + \left(\frac{1}{12}(30)(40)^3 + (1200)(18)\right)$$

$I_{x'} = 868 \times 10^{-9}\,m^4$

Momento de inercia de $A_1$.

3) Calcular los esfuerzos de tensión y de compresión

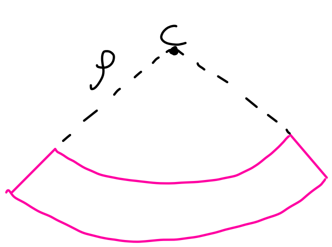


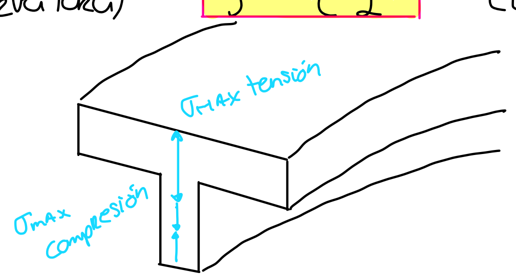

$$\sigma_{MAX}\ \text{tensión} = \frac{(3\,KN\cdot m)(22\times10^{-3}\,m)}{868\times10^{-9}\,m^4} \Rightarrow \sigma_{MAX}\ \text{tensión} = 76.0\,Mpa$$

$$\sigma_{MAX}\ \text{compresión} = \frac{-(3\,KN\cdot m)(38\times10^{-3}\,m)}{868\times10^{-9}\,{}^4m} \Rightarrow \sigma_{max}\ \text{compresión} = -131.3\,Mpa$$

4) Cálculo del radio de curvatura: (Inverso del radio de curvatura)

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} = \frac{(3\,KN\cdot m)}{(165.6\,Pa)(868\times10^{-9}\,m^4)} = 20.45\times10^{-3}\,m^{-1}$$

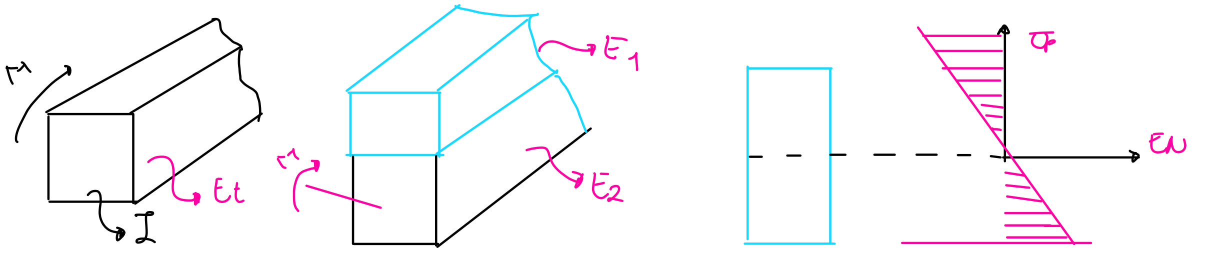


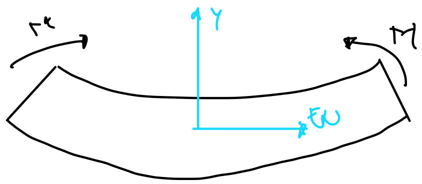



Examen Parcial 2: Temas de esfuerzo y deformación axial y torsión.

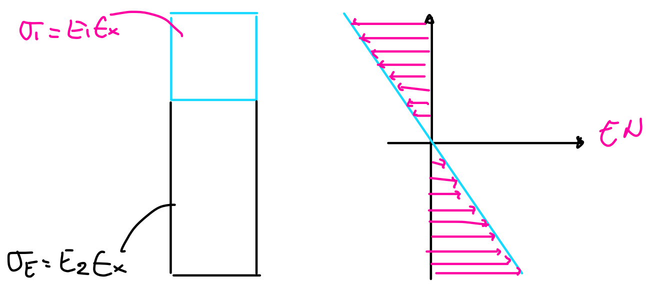
03/abril/19

## Flexión de elementos hechos de varios materiales




$\boxed{\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}}$ Deformación




Por la ley de Hooke: $\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \varepsilon_x \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_x \end{aligned}\right\} \ldots (1)$

Por otra parte: $\sigma = \frac{F}{A}$

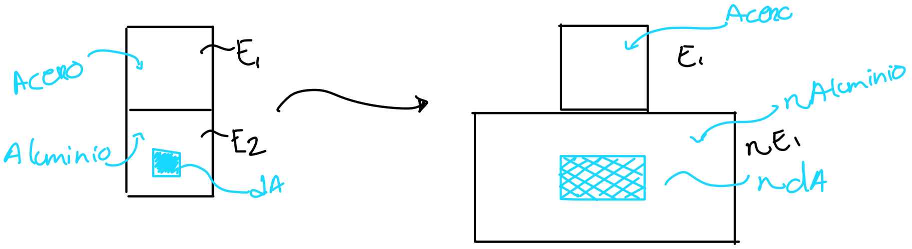
$$dF_1 = \sigma_1\, dA = E_1 \left(\frac{-y}{\rho}\right) dA \ \ldots (2)$$

$$dF_2 = \sigma_2\, dA = E_2 \left(\frac{-y}{\rho}\right) dA \ \ldots (3)$$

Definimos: $n = \frac{E_2}{E_1}$ sustitución

$$dF_2 = n E_1 \left(\frac{-y}{\rho}\right) dA \ \ldots (4)$$

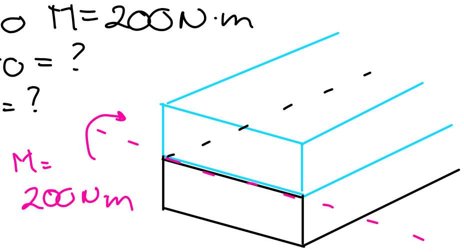
$$\left\{\begin{aligned} dF_1 &= E_1 \left(\frac{-y}{\rho}\right) dA \\ dF_2 &= n E_1 \left(\frac{-y}{\rho}\right) dA \end{aligned}\right\}$$

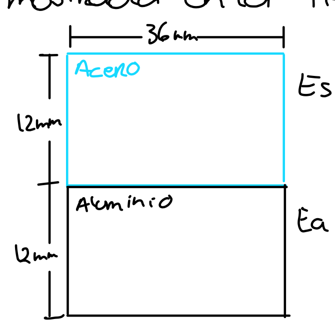



**Ejercicio**: Una barra de acero ($E_s = 210$ GPa) y una barra de Aluminio ($E_a: 70$ GPa) se unen para formar una barra compuesta mostrada en la fig. (1). Si se aplica un momento $M = 200$ N·m

A) $\sigma_{max}$ aluminio = ?

B) $\sigma_{max}$ acero = ?



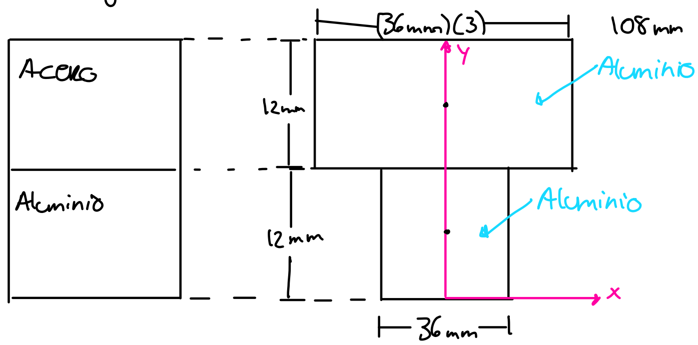



① Calcular el factor n

$$n = \frac{E_s}{E_a} = \frac{210\ GPa}{70\ GPa} = 3;$$

numerador: material más elástico
denominador: menor módulo de Young.

② Dibujar la sección transformada.

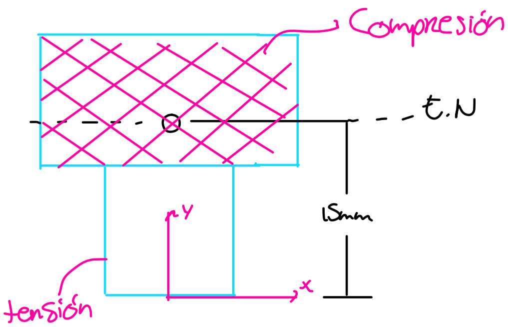



③ Calcular el centroide.

$$\bar{y} = \Sigma A = \Sigma \bar{y} A_i$$

$$\bar{y} = \frac{(18mm)(108mm)(12mm) + (6mm)(36mm)(12mm)}{(36mm)(12mm) + (108mm)(12mm)}$$

$$\bar{y} = 9mm$$




④ Calcular el momento de inercia.

$$I_x = \Sigma I_i + A_i d_i^2$$

$$= \frac{1}{12}(108)(12)^3 + (108 \times 12)(3)^2 + \frac{1}{12}(30)(12)^3 + (36 \times 12)(9)^2$$

$$I_x = 67{,}392\ mm^4$$

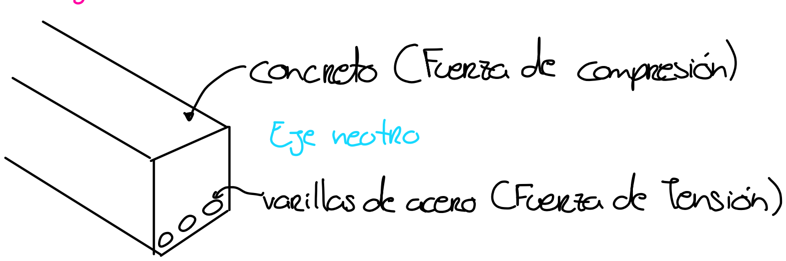
$$= 6.7392 \times 10^{-8}\ m^4$$

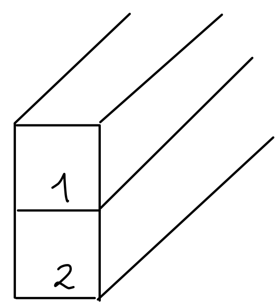
a) $\sigma_{max}$ aluminio $= \frac{MC}{I} = \frac{(200\ N\cdot m)(15 \times 10^{-3})}{6.7392 \times 10^{-8}} = 44.57\ MPa$

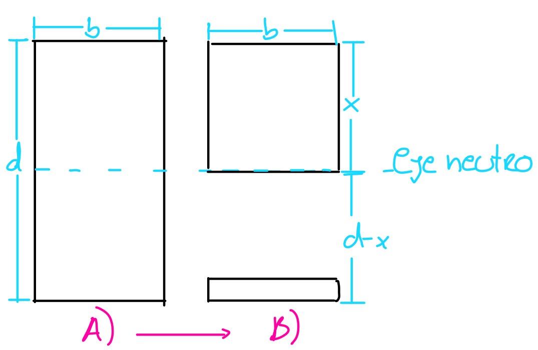
b) $\sigma_{max}$ acero $= \frac{MC}{I} = \frac{(200\ N\cdot m)(9 \times 10^{-3}\ m)}{6.7392 \times 10^{-8}} = -80.23\ MPa$

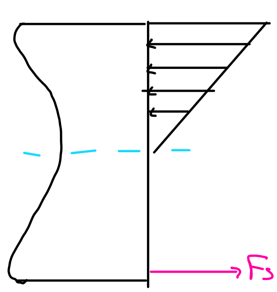
22/abril/19

## Vigas de concreto reforzado.



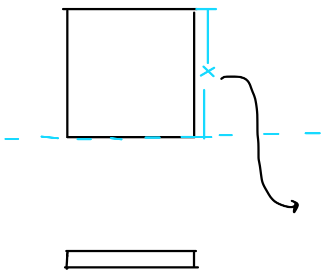

Primer momento de inercia = magnitud geométrica que se define para un área

$$(bx)\left(\frac{x}{2}\right) - nA_s(d-x) = \varnothing \ldots (1)$$

$$\frac{bx^2}{2} + nA_s x - nA_s d = \varnothing$$

↳ cuadrática.

↳ Para conocer la posición del eje neutro



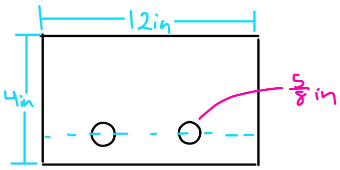

$$T = \frac{Mc}{I}$$

**Ejemplo:** Una viga de concreto reforzado tiene varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de $3.6\times10^6$ psi para el concreto. El módulo de elasticidad para el acero es de $29\times10^6$ psi. Considere un momento flector de 40 Kips·in

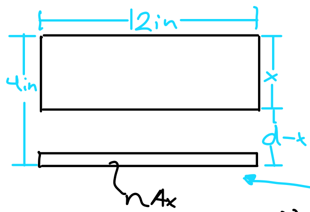
a) Esfuerzo máximo en el concreto

b) Esfuerzo máximo en el acero.

fig. (A)




A) Sección Transformada




$$A_s = (2)\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\,in^2\right)\right)$$

\# de varillas

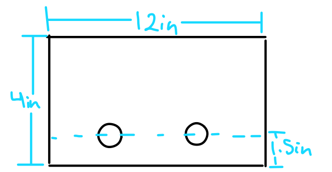
$$\boxed{A_s = 0.614\,in^2}$$

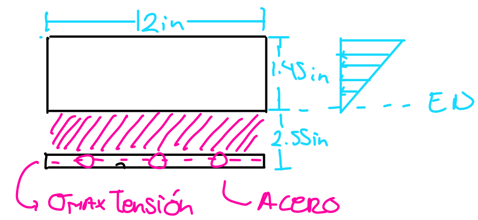
B) Calcular = $nA_s$

$n = \frac{E_s}{E_c}$ = Cociente entre el Módulo de elasticidad del acero y el Módulo de elasticidad del concreto.

$$n = \frac{29\times10^6\,psi}{3.6\times10^6\,psi} \Rightarrow \boxed{n = 8.06}$$

$$nA_s = (8.06)(0.614\,in^2) = \boxed{nA_s = 4.95\,in^2}$$




c) Eje neutro

$$(bx)\left(\frac{x}{2}\right) - nA_s(d-x) = \emptyset$$

$$(12)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - 4.95in^2(4-x) = \emptyset$$

$$6x^2 + 4.95x - 19.8 = \emptyset$$

$$x_1 = -2.27\,in$$

$$\boxed{x_2 = 1.45\,in}$$

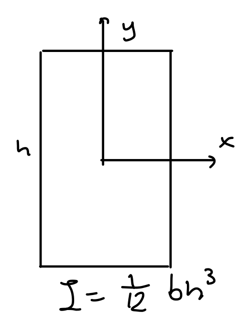
A) Esfuerzo máximo de Compresión

$$\sigma_{MAX} = \frac{MC}{I} = \frac{(40\,Kips\cdot in)(1.45\,in)}{\frac{1}{3}(12)(1.45)^3 + nA_s(2.55)^2}$$

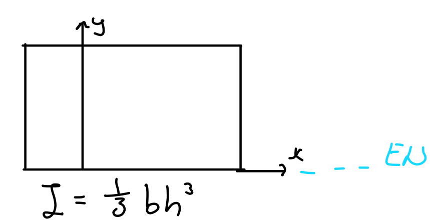
$$\boxed{\sigma_{MAX} = 1.307\,Kips.}$$

$$\sigma_{MAX}\ tensión = (n)\frac{MC}{I} = \frac{(8.06)(40\,Kips\,in)(2.55\,in)}{I}$$

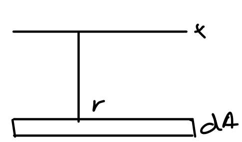
$$\boxed{\sigma_{MAX}\ tensión = 18.52\,Kips}$$




$$I = \frac{1}{12}bh^3$$




$$I = \frac{1}{3}bh^3$$

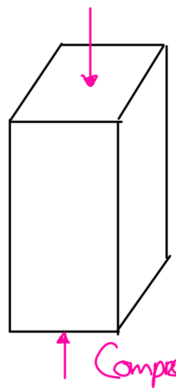



$$I = \int x^2 dA$$

$$I = Ar^2$$

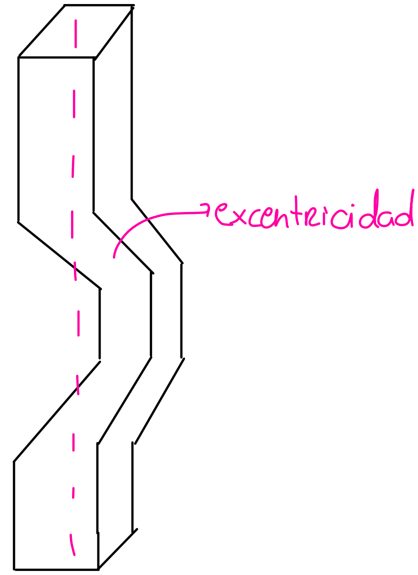
24/abril/19

# Unidad 6: Columnas

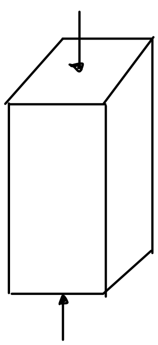


Compresión

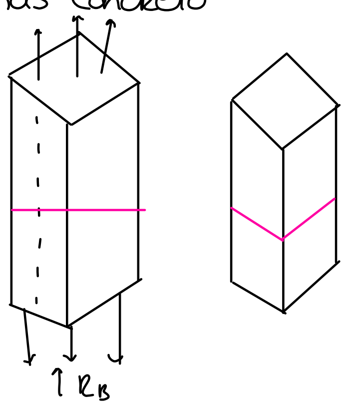
- Sec transversal uniforme
- Elemento delgado
- Soportar cargas axiales.



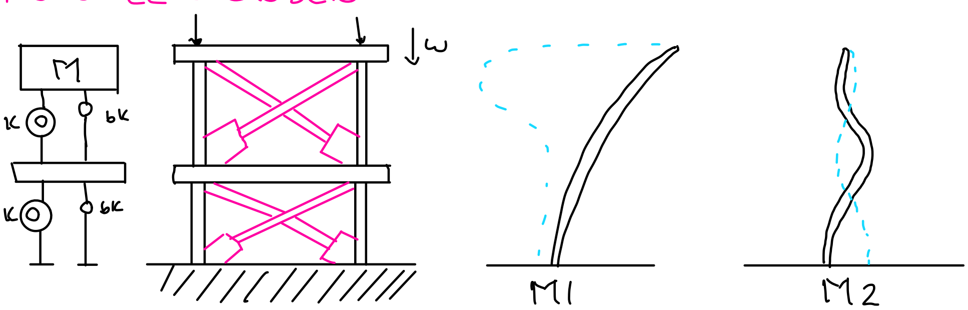

Un sólo material

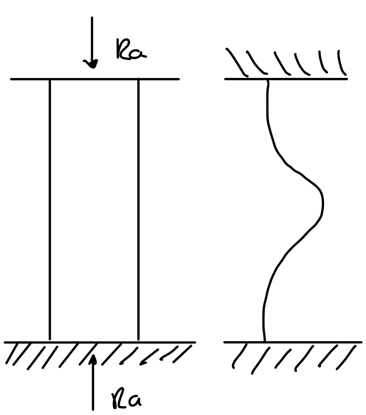


Columnas concreto



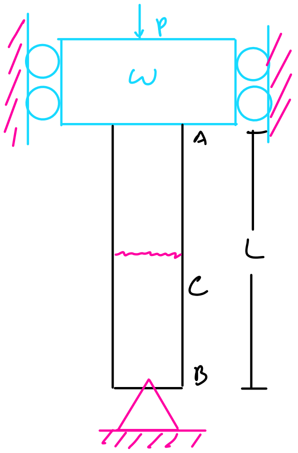

## Modos de oscilación

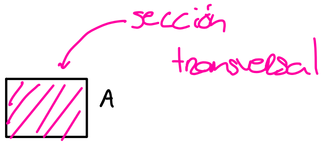


# Estabilidad Estructural - Continuación

Planteamos el diseño de una columna con las siguientes características.



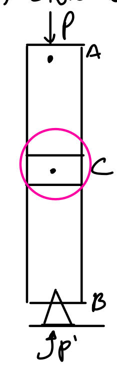




$\sigma = \frac{P}{A}$ Esfuerzo

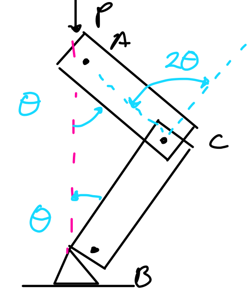
$\delta = \frac{PL}{AE}$ Deformación

Considerando un modelo simplificado

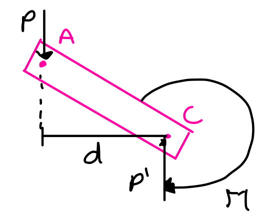
a) Sistema estable




b) Sistema inestable.

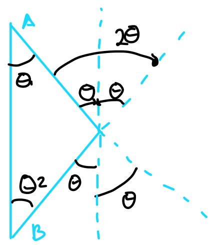



→ Diagrama de cuerpo libre.




Momento 1: $M_1 = P(L/2)\,\text{sen}\,\theta \ldots (1)$

P y P' se encuentran perfectamente alineadas




Momento 2: $M_2 = K(2\theta) \ldots (2)$

↳ constante de rigidez.

Si $M_1 = M_2$

$P(L/2)\,\text{sen}\,\theta = K(2\theta)$

$PL = \frac{(2K\theta)\cdot 2}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\text{sen}\,\theta}};$

$\text{sen}\,\theta \approx \theta;$

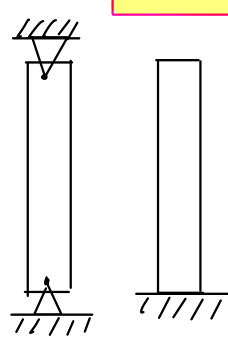
$P_{cr}$ = carga crítica: $\frac{4K}{L}$

$\Rightarrow$ Si $P < P_{cr} \longrightarrow$ Sist. Estable

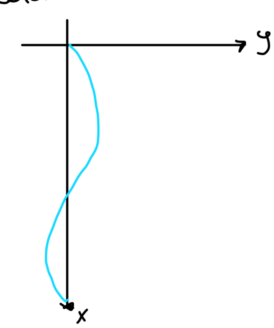
Si $P > P_{cr} \longrightarrow$ Sist. Inestable.

Fórmula de Euler para columnas Articuladas

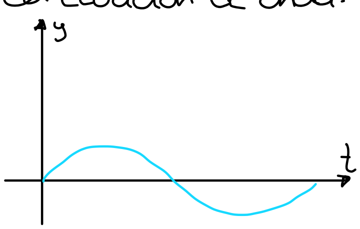
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}} \ldots (3)$$



Columna



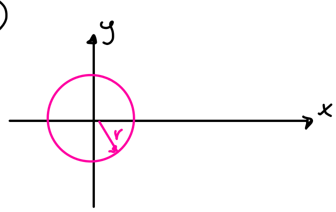

La ecuación de onda.



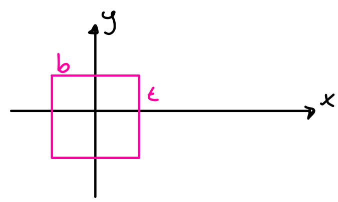

$$\boxed{\frac{dy^2}{dt^2} + Py = M}$$

Columna con sección transversal, circular o cuadrada:

A)



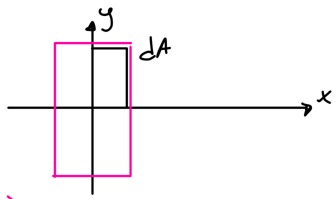

B)



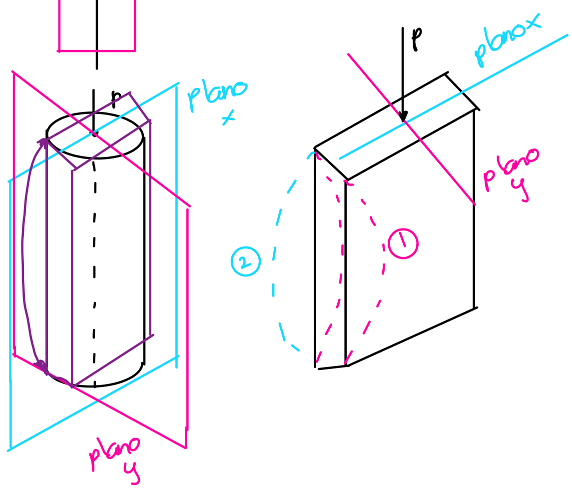

$I_x = I_y$

$I = \Sigma\, dA \cdot r^2$

c)

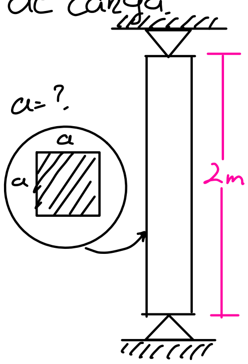



$I_x > I_y$
$I = I_{min}$




**Ejercicio:** Una columna articulada de 2m de longitud y sección transversal cuadrada debe hacerce de madera. Si $E = 13\ GPa$; y $\sigma_{perm} = 12\ MPa$ y usando un factor de seguridad de 2.5, para calcular la carga crítica de pandeo de Euler.

A) Determine el tamaño de la sección transversal si la columna debe soportar 200 KN de carga.




$E = 13 \times 10^9\ Pa$
$\sigma_{perm} = 12 \times 10^6\ Pa$
$N = 2.5$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Despejando I:

$$I = \frac{P_{cr} \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E}$$

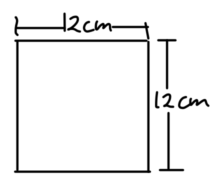
$$P_{cr} = 2.5(P)$$
$$= 2.5(200\ kN)$$
$$P_{cr} = 500\ kN$$

$$a^4 = \frac{(P_{cr} \cdot L^2)\,12}{\pi^2 \cdot E}$$

$$a^4 = \sqrt{\frac{(500\,kN)(2m)^2(12)}{\pi^2 (13\,GPa)}}$$

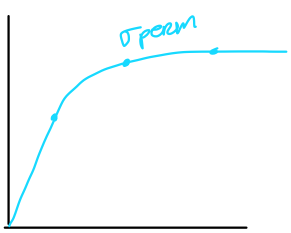
$a = 0.11$ metros

$a = 11.6\ cm$



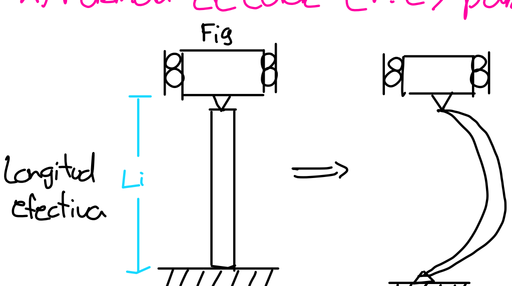

Considerando N.

$$\sigma = \frac{N \cdot P}{A} = \frac{(500\,kN)}{(0.116m)^2} \Rightarrow \sigma = 36.6\ MPa.$$




13 / mayo / 19

A) Fórmula de Euler (F.E) para columnas articuladas.




$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{L_c^2} \ ; \ L_c = L_i \ ; \ P_{cr} < P_{perm.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A}$$

$I = r^2 A$

$I$: momento de inercia

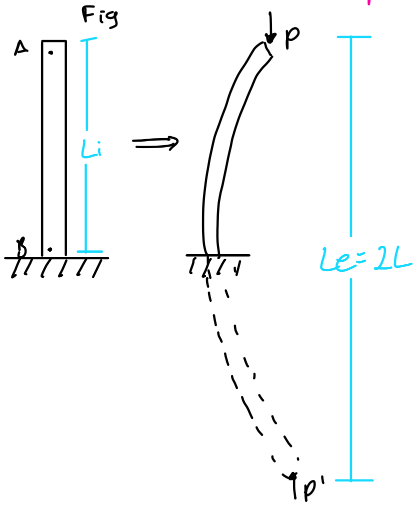
$r$: radio de giro

$A$ = Área.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{Lc^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E \cancel{A} r^2}{Lc^2 \cancel{A}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(Lc/r)^2}}$$ = relación de esbeltez.

## B) Fórmula de Euler para columnas con un extremo libre en A y empotrado en B.

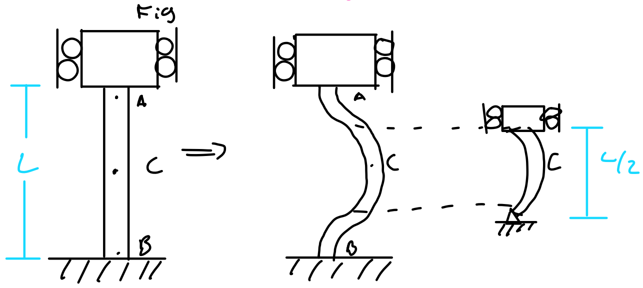
Fig




$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{Le^2}, \quad Lc = 2L, \quad \sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(Lc/r)^2}$$ → relación de esbeltez.

## C) Fórmula de Euler con los dos extremos empotrados.

Fig

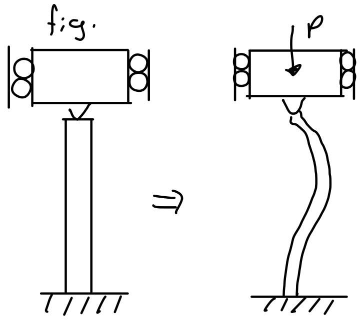



$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{Lc^2}, \quad Lc = L/2 \qquad \sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(Lc/r)^2}$$

↳ relación de esbeltez.

## d) Fórmula de Euler para una columna con extremo fijo en B y extremo articulado en A.

fig.

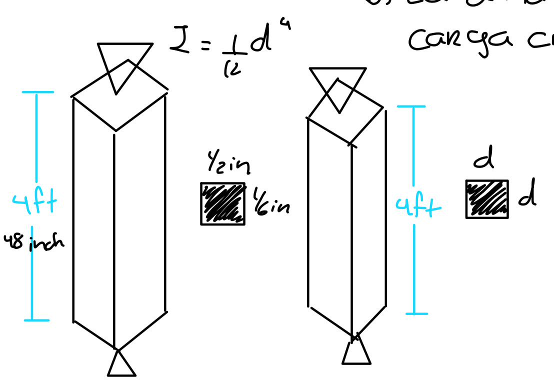



$$P_{CR} = \frac{(20.19) E \cdot I}{Lc^2}, \quad Lc = 0.7 L$$

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(Lc/r)^2}$$

**Ejemplo:** Determine a) La carga crítica para la columna de acero

b) La dimensión d tal que la columna de Aluminio soporte la misma carga crítica.




Acero $E = 29 \times 10^9$ psi Aluminio $E = 10.1 \times 10^6$ psi

a) es $P_{CR}$ para la Columna de Acero

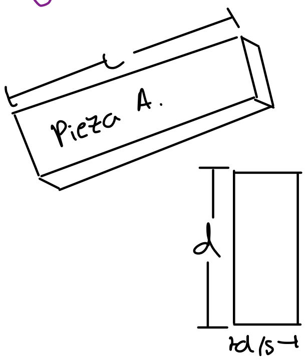
$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{Lc^2} = \frac{\pi^2 (29 \times 10^6 psi)(0.5 in)^4}{12 (48 in)^2} = 647.01 \text{ lb}$$

Def 1 = Plano xz

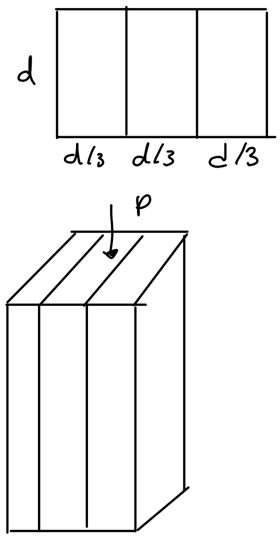
Def 2 = Plano yz

$$647.01 = \frac{\pi^2 (10.1 \times 10^6 psi)\, d^4}{12(48in)^2} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{(647.01)(12)(48in)^2}{\pi^2\,(10.1 \times 10^6 psi)}} \approx \boxed{0.67 in.}$$

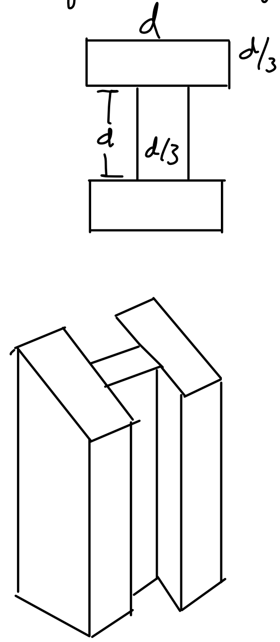
## Ejercicio 2:




Primera Configuración




Segunda Configuración.

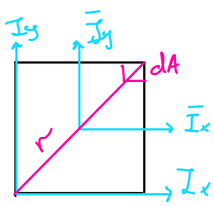



$d = 3in$

$E = 24 \times 10^6 psi$

$L_1 = 6 ft.$

- Considere que el extremo B esta fijo y el extremo A está articulado
- ¿Para qué configuración, la columna soporta mayor carga crítica?




15 / mayo / 19