Principios de Mecátronica
Modelado de Sistemas Dinámicos
Clase 27-30

El modelado de sistemas dinámicos corresponde a la obtención de un conjunto de ecuaciones (algebraicas y diferenciales) matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico. En esta parte del curso se modelarán los sistemas básicos tales como:

- Modelado de circuitos eléctricos
- Modelado de sistemas mecánicos–traslaciones y rotacionales
- Modelado de sistemas electromecánicos (continuación de motores y actuadores)

Metodología

El modelado de un sistema dinámico consta de tres fases:

1 A partir de la utilidad que vaya a tener el modelo decidir cuales señales son las de entrada o excitación, las de respuesta o salida

2 Escribir las ecuaciones que relacionan las variables de entrada y salida de cada elemento del conjunto.

3 Añadir las ecuaciones que ligan unos elementos con otros.

Sistemas eléctricos

Las señales más utilizadas en el modelado de circuitos eléctricos son las tensiones $v(t)$ y las corrientes $i(t)$, aunque pueden considerarse flujos $\lambda(t)$, cargas $q(t)$, potencial $p(t)$, etc.

El modelado de un circuito eléctrico consiste en la descripción del mismo mediante una serie de ecuaciones diferenciales que liguen las tensiones e intensidades de interés (entradas, salidas, etc). Una vez que se dispone de las ecuaciones que describen cada uno de los elementos del circuito, la aplicación de las leyes de Kirchhoff permite escribir las ecuaciones diferenciales.

Así, se aplicara formalmente la *función de transferencia* para el modelado matematico de circuitos y circuitos de amplificación operacional.

Los circuitos equivalentes para redes eléctricas que se utilizaran consisten de tres componentes lineales pasivos: resistencias, capacitores e inductancias. La siguiente figura resume los componentes y su relación entre voltajes y corrientes y entre voltajes y cargas bajo la condición de condiciones iniciales igual a cero.

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Figura 1: Tabla de relaciones en sistemas pasivos

Remark 1 *La impedancia (Z) es una medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica una tensión. La impedancia extiende el concepto de resistencia a los circuitos de corriente alterna (CA), y posee tanto magnitud como fase, a diferencia* *de la resistencia, que sólo tiene magnitud. La admitancia (Y) de un circuito es la facilidad que este ofrece al paso de la corriente.*

Combinando componentes eléctricos dentro de los circuitos, se decidira la salida y entrada con el fin de encontrar su función de transferencia.

De ésta forma, nuestros principios usados para modelar son las leyes de Kirchhoff. Suma de voltajes alrededor de lazos o la suma de corrientes en los nodos

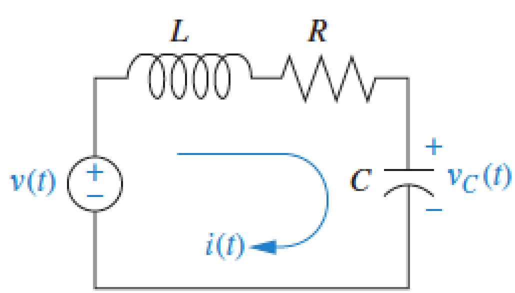
0.1. Leyes de Kirchhoff

A.- La suma de las tensiones en un bucle de corriente cerrado es cero. Las resistencias son sumideros de potencia, mientras que la batería es una fuente de potencia.

B.- La corriente que circula hacia un nodo o punto de derivación es igual a la suma de las corrientes que abandonan el nodo.

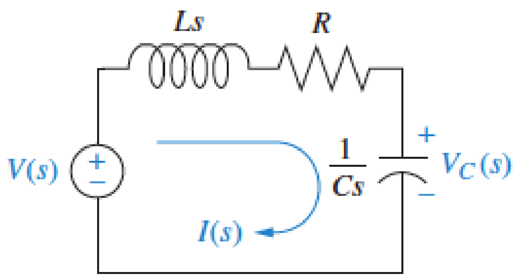
Un sólo lazo usando la ecuación diferencial

Ejemplo 1.- Encontrar la función de transferencia qué relaciona el voltaje del capacitor $V_C(s)$ y la entrada $V(s)$ de la siguiente figura



Solución.-

Ejemplo 2.- Repetir el ejemplo anterior usando análisis de nodos y sin escribir la ecuación diferencial y el circuito equivalente en transformada de Laplace dado por:

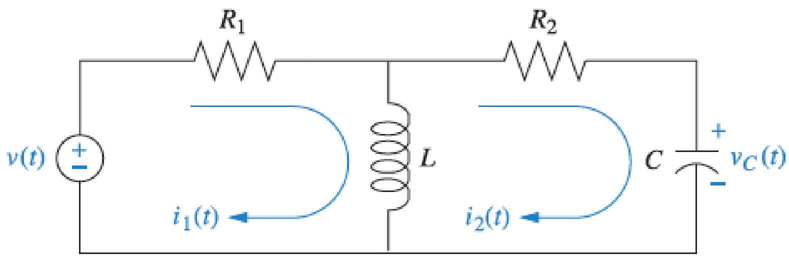


Análisis de circuitos complejos via mallas

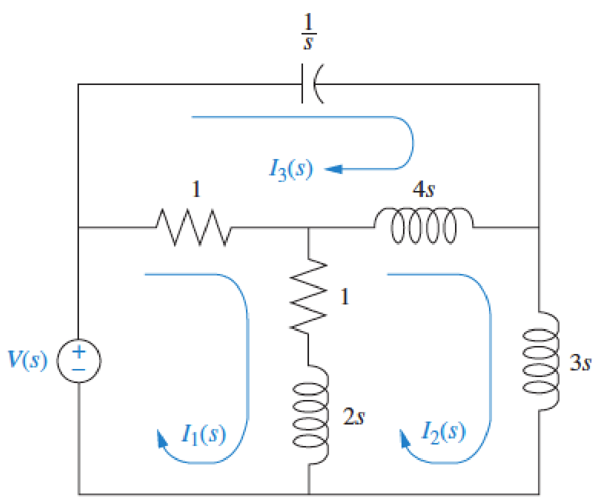
Para resolver redes eléctricas con multiples lazos y nodos, se utilizará el análisis de mallas, el cual se desarrolla bajo los siguientes puntos:

- Reemplazar los valores de los elementos pasivos por sus impedencias
- Reemplazar todas las fuentes y variables del tiempo por su transformada de Laplace
- Supongamos una corriente y una dirección de la corriente en cada malla.
- Escribir leyes de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada malla.
- Resolver las ecuaciones simultáneas para la salida
- Formas la función de transferencia.

Ejemplo 3.- Dada la siguiente red , encontrar la función de transferencia, $I_2(s)/V(s)$.



Ejemplo 4.- Dada la siguiente red , encontrar las ecuaciones que la describen y *resolver la función de transferencia,* $I_3(s)/V(s)$.



0.2. Análisis de circuitos complejos usando nodos

Frecuentemente es más fácil encontrar la función de transferencia de un circuito usando un análisis por nodos. El número de ecuaciones diferenciales simultáneas que deben ser escritas es igual al número de nodos cuyo voltaje es desconocido.

Para multiples nodos usamos las leyes de corrientes de Kirchhoff y sumamos las corrientes de flujo de cada nodo.

Remark 2 *Cuando se escriben ecuaciones con análsis de nodos, puede ser resultar conveniente representar los elementos de los circuitos por sus admitancias.*

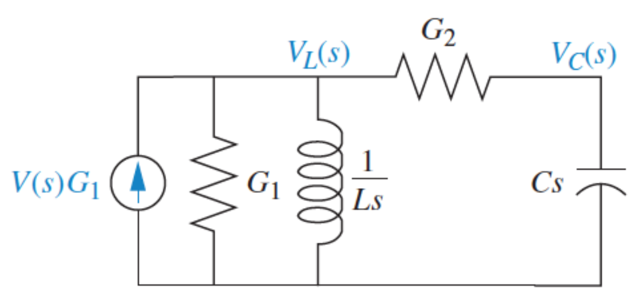
Ejemplo 5.- Encontrar la función de transferencia, $\frac{V_c(s)}{V(s)}$, para el circuito del ejemplo 3. Usando análisis de nodos.

Regularmente al escribir las ecuaciones de nodos se reemplazan fuentes de voltaje por fuentes de corriente. A fuente de corriente puede ser construida de una fuente de voltaje, reemplazando una resistencia grande en serie con la fuente de voltaje.

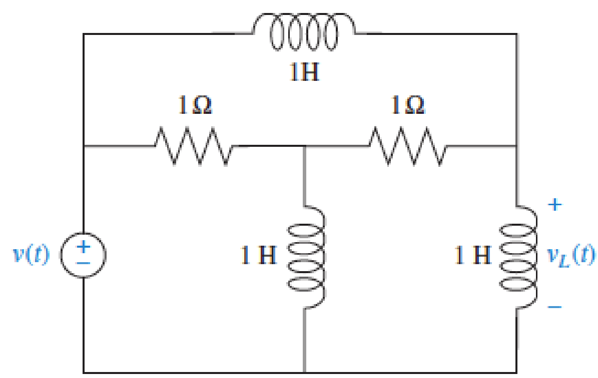
Los pasos para realizar el análisis de nodos se enumeran a continuación

- Reemplazar elementos pasivos por sus admitancias
- Reemplazar las fuentes de y sus variables en el tiempo por su transformada de Laplace
- Transformar fuentes de voltaje por fuentes de corriente
- Escribir las leyes de Kirchhoff de corrientes para cada nodo
- Resolver las ecuaciones simultáneas para la salida
- Formar la función de transferencia

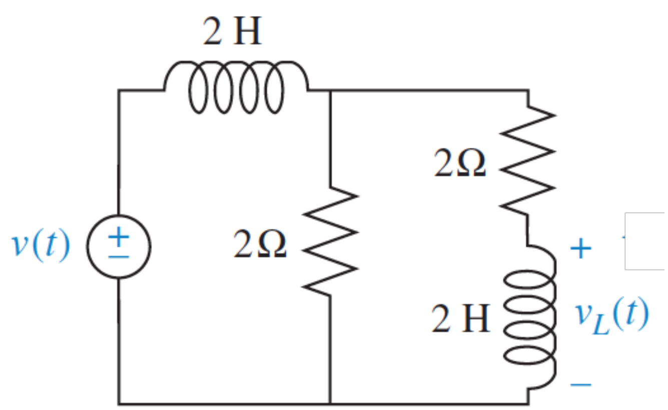
De esta forma, de la red eléctrica presentada en el ejemplo 3, podemos encontrar la función de transferencia $V_c(s)/V(s)$, usando análisis nodal y un circuito transformado con fuentes de corriente como el de la figura, donde $G_1 = \frac{1}{R_1}$ y $G_2 = \frac{1}{R_2}$.



Ejemplo 6.- Encontrar la función de transferencia $G(S) = V_L(s)/V(s)$, para el circuito dado en la siguiente figura. Resolver el problema por nodos (y para practicar lo obtienen por mallas).



Ejemplo 7.- Encontrar la función de transferencia, $V_L(s)/V(s)$, para el siguiente circuito.



1. Modelado de sistemas mecánicos

Hemos demostrado que las redes eléctricas se pueden modelar mediante una función de transferencia, $G(s)$, que relaciona algebraicamente la transformada de Laplace de la salida con la transformada de Laplace de la entrada. Ahora haremos lo mismo para los sistemas mecánicos. En esta sección nos concentramos en los sistemas mecánicos tralacionales. Después, ampliamos los conceptos a los sistemas mecánicos rotacionales. Además, una red eléctrica puede interconectarse a un sistema mecánico conectando en cascada sus funciones de transferencia, siempre que un sistema no esté cargado por el otro.

Los sistemas mecánicos, como las redes eléctricas, tienen tres componentes pasivos y lineales. Dos de ellos, el resorte y la masa, son elementos de almacenamiento de energía; uno de ellos, el amortiguador viscoso, disipa la energía. Los dos elementos de almacenamiento de energía son análogos a los dos elementos de almacenamiento de energía eléctrica, el inductor y el condensador. El disipador de energía es análogo a la resistencia eléctrica.

Los sistemas mecánicos son gobernados por la segunda ley de Newton, la cual establece para sistemas mecánicos de traslación que "la suma de fuerzas en un sistema, sean aplicadas o reactivas, son iguales a la masa por la aceleración a que esta sometida dicha masa"

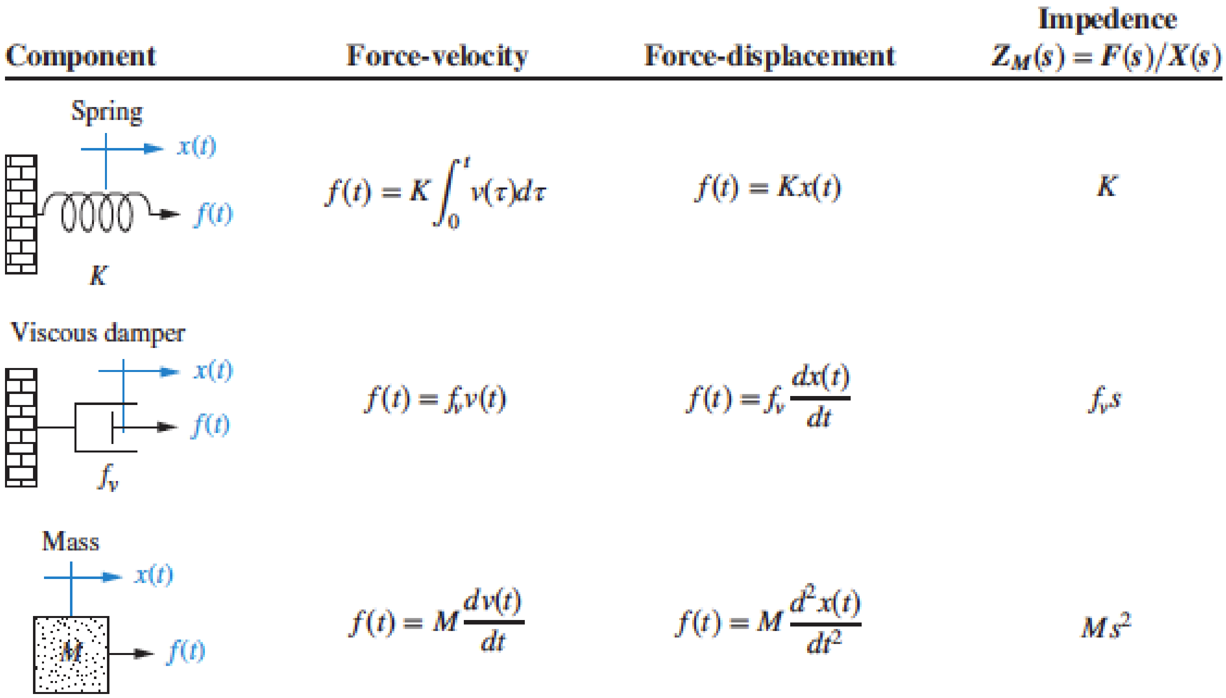
$$\sum f = ma \tag{1}$$

Cuando se trata de sistemas mecánicos de rotación la segunda ley de Newton declara que "la suma de torques es igula al momento de inercia multiplicado por la aceleración angular"

$$\sum T = J\alpha \tag{2}$$

La siguiente tabla muestra la relación fuerza-velocidad, fuerza-desplazamiento para sistemas mecánicos de traslación.

donde, K, f_v y M se llaman constante de resorte, coeficiente de fricción viscosa y masa, respectivamente.



Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring $x(t)$ $f(t)$ K	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper $x(t)$ $f(t)$ f_v	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \dfrac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass $x(t)$ M $f(t)$	$f(t) = M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Figura 2: Tabla de relaciones en sistemas mecánicos

Ejemplo 1.- Encontrar la ecuación diferencial y función de transferencia, $X(s)/F(s)$, para el siguiente bien conocido sistema.

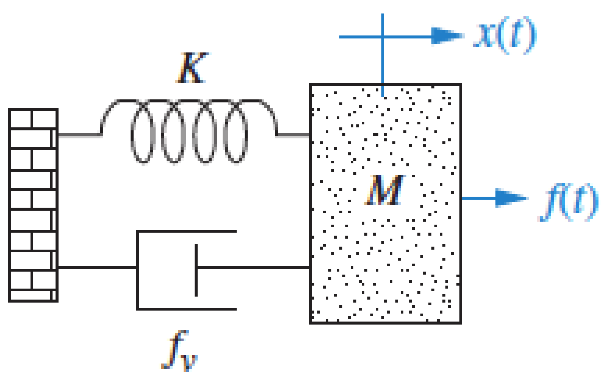
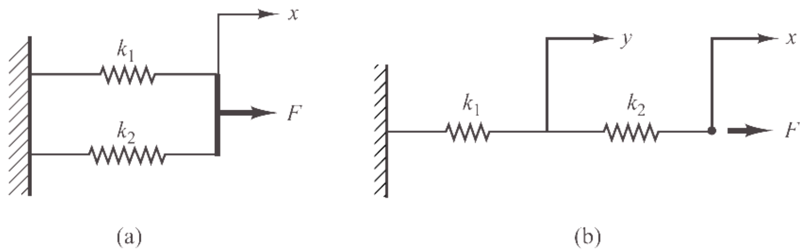


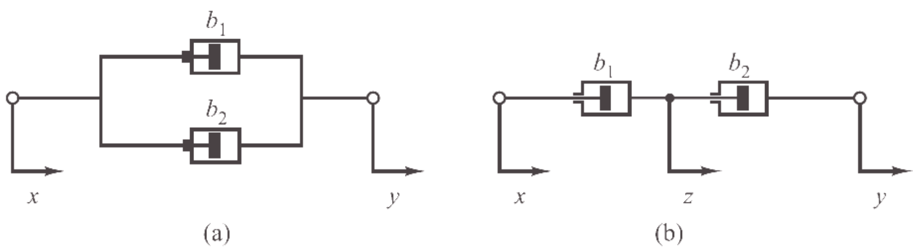
Figura 3: Tabla de relaciones en sistemas mecánicos

1.1. Fuerzas generadas en serie y paralelo

Las fuerzas resultantes para los elementos pasivos resortes y amortiguadores de los sistemas mecánicos se representan como



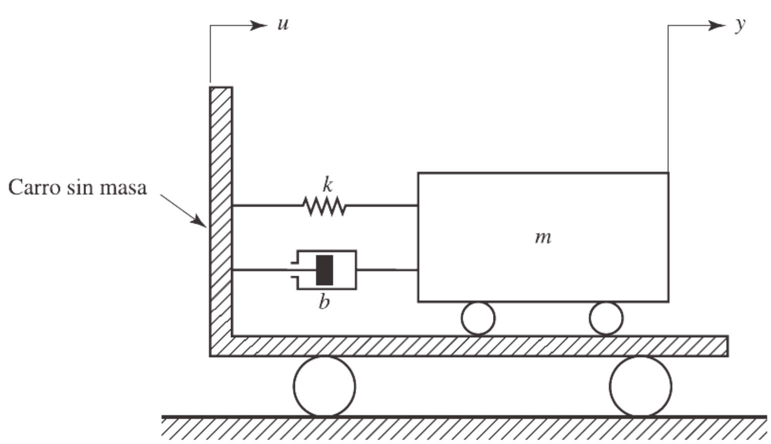
$$(a) \quad F = (k_1 + k_2)x \qquad\qquad (b) \quad F = k_1 y; \quad F = k_2(x - y)$$



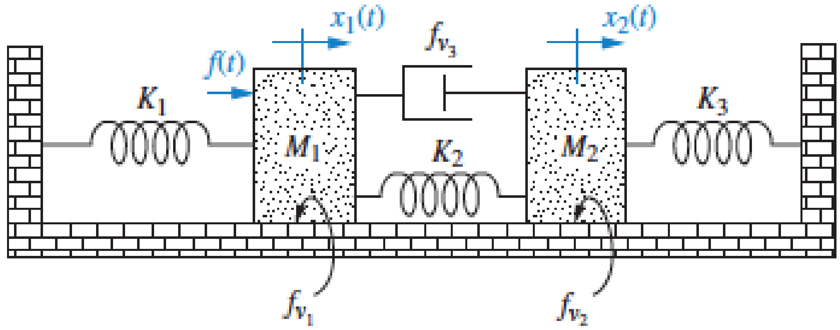
$$(a) \qquad F = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x}) \tag{3}$$

$$(b) \qquad F = b_1(\dot{z} - \dot{x}); \quad F = b_2(\dot{y} - \dot{z}) \tag{4}$$

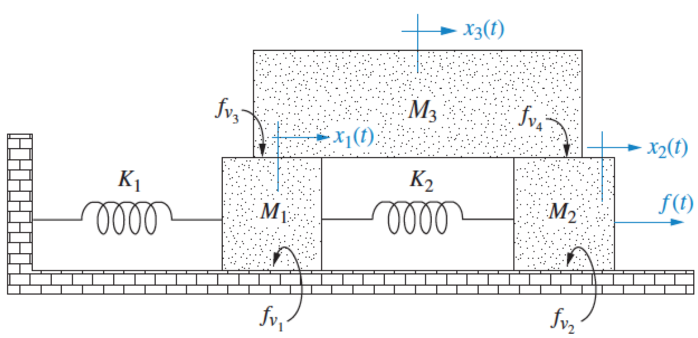
Ejemplo 2.- Encontrar la función de transferencia, $Y(s)(s)/U(s)$, para el siguiente sistema, despreciando la masa del carro y asumiendo que la fricción del amortiguador es proorcional a $\dot{y} - \dot{u}$ y que la fuerza del resorte es proporcional a $y - u$, tiene sentido esta hipótesis?



Ejemplo 3.- Encontrar la función de transferencia, $X_2(s)/F(s)$, para el siguiente sistema.



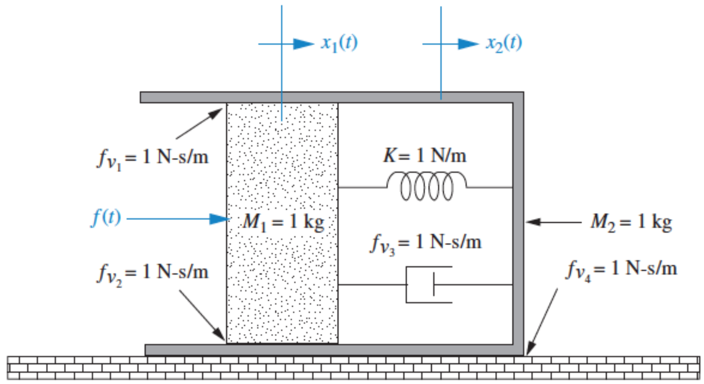
Ejemplo 4.- Encontrar las ecuaciones de movimiento para la siguiente red mecánica.



Ejemplo 5.- Encontrar la función de transferencia, $G(s) = X_2(s)/F(s)$, para el siguiente sistema.

$$G_2(s) = \frac{3s+1}{s(s^3+7s^2+5s+1)}$$

Ejemplo 6.- Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ del sistema de la siguiente figura . La entrada u es un desplazamiento. (Al igual que



el sistema del problema 2, esta es una versión simplificada de un sistema de suspensión de un automóvil o una motocicleta).