Algoritmos Numéricos por Computadora

COM - 14105

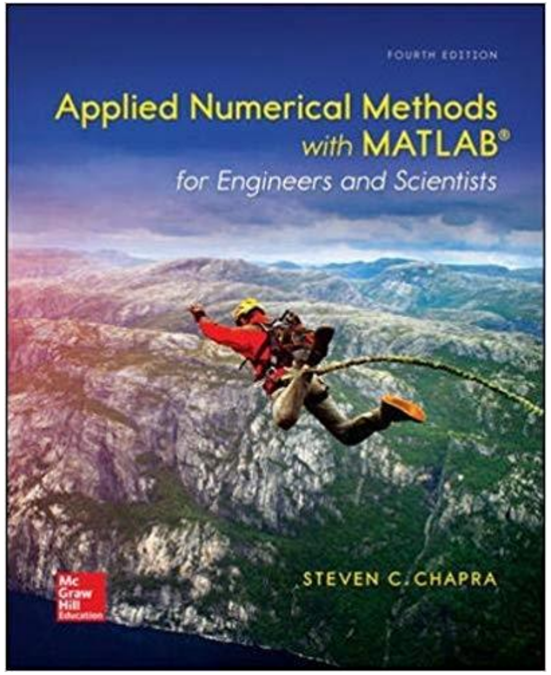
"Actually, a person does not really understand something until he can teach it to a computer"
Donald Knuth, 1974

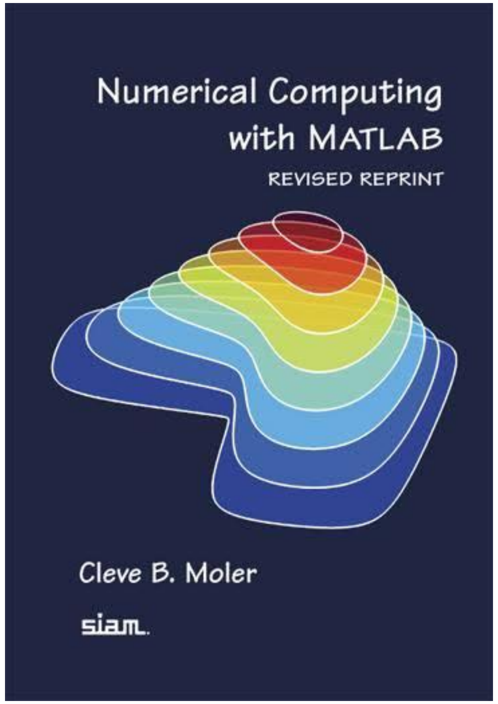
Temario

1. Introducción
    1. Modelado de sistemas dinámicos
    2. Redondeo y truncamiento
    3. Raíces de funciones y optimización
    4. Números complejos
2. Sistemas lineales
    1. Valores y vectores propios
    2. Eliminación de Gauss
    3. Factorizaciones
    4. Métodos iterativos
    5. Sistemas no lineales
3. Ecuaciones diferenciales ordinarias
    1. Interpolación e integración
    2. Soluciones analíticas sencillas
    3. Problemas con valor inicial
    4. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden
    5. ODE de orden superior
    6. Métodos de paso variable, implícitos y multipasos
    7. Problemas con valores en la frontera
4. Ecuaciones diferenciales parciales (lineales de segundo orden)

Bibliografía

Steven Chapra, *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*, McGraw- Hill, Fourth edition, 2018.





Cleve Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2008.

Valores y vectores propios

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = 0, \;\; x \neq 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Polinomio característico

```
A = gallery(3)
```

$$A = \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, and $\lambda_3 = 3$

Eliminación de Gauss

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \qquad\qquad &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Eliminación hacia adelante

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$

Sistema triangular superior

Sustitución hacia atrás

$$6.2x_3 = 6.2$$

$$2.5x_2 + (5)(1) = 2.5.$$

$$10x_1 + (-7)(-1) = 7$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

$$Ax = b$$

$$Ly = Pb$$
$$Ux = y$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$LU = PA$$

Errores de redondeo

error

$$e = x - x_*$$

residual

$$r = b - Ax_*$$

La eliminación de Gauss con pivoteo parcial produce residuales pequeños

Operador backslash

$$Ax = b$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

$$AX = B$$

$$X = A\backslash B$$

$$XA = B$$

$$X = B/A$$

Optimización multidimensional

Sistema de ecuaciones

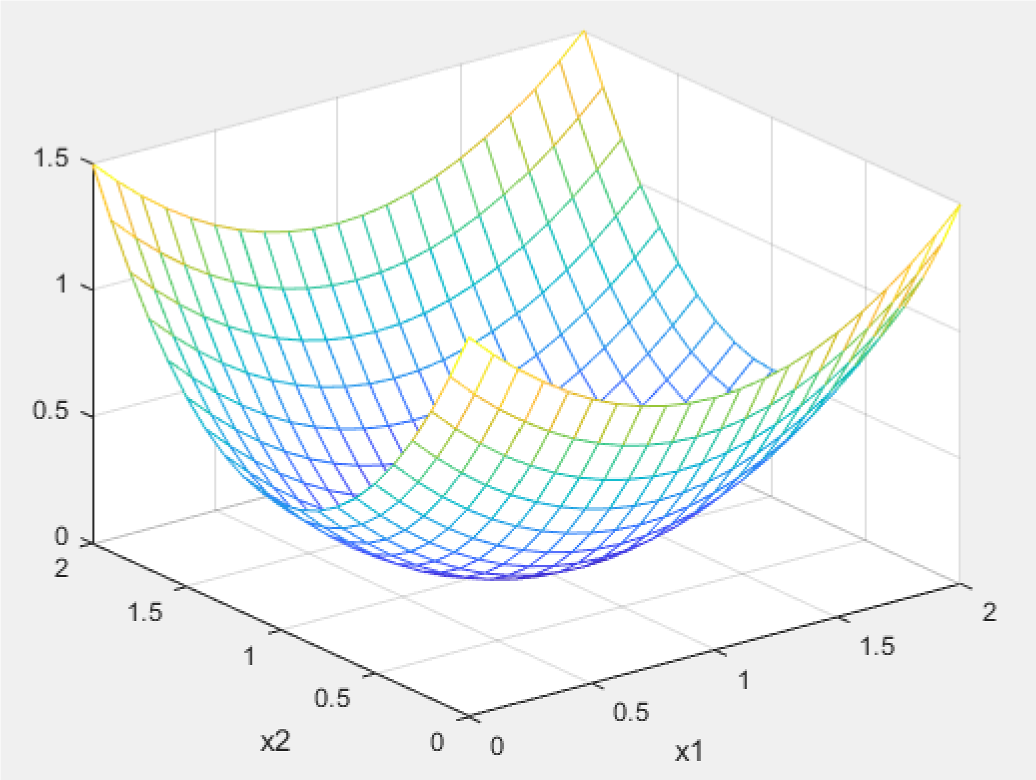
$$A*x = b$$

Función a minimizar

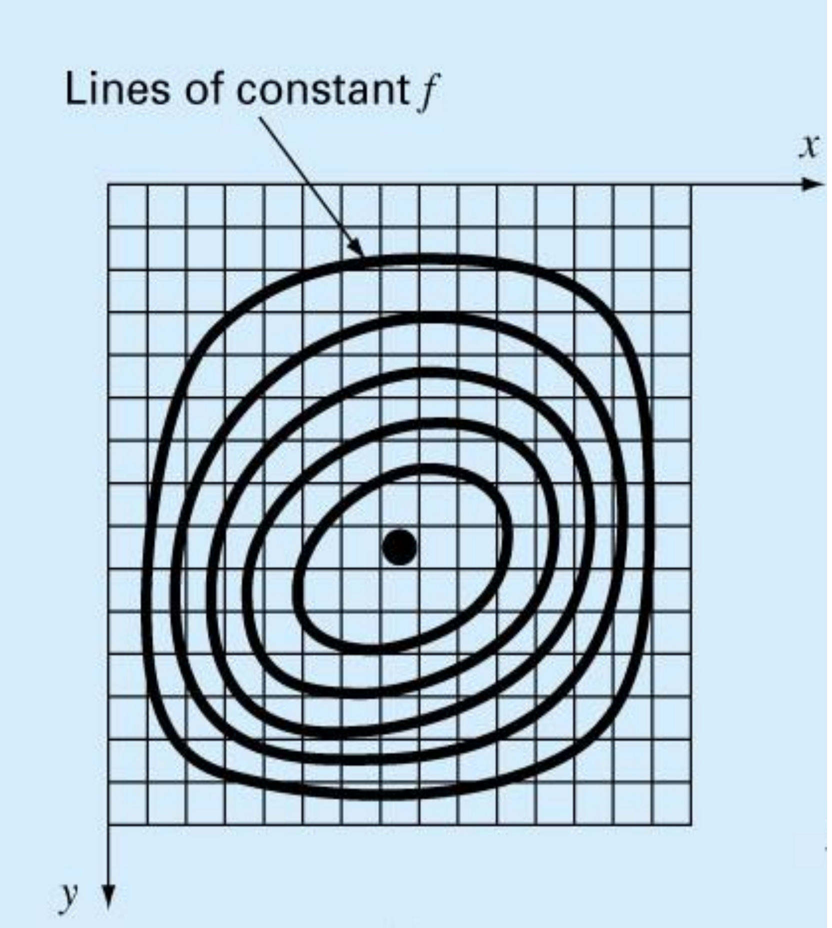
$$f(x) = \frac{1}{2} x'*A*x - b'*x + c$$

Camino de máxima inclinación (gradiente) descendente

Forma cuadrática



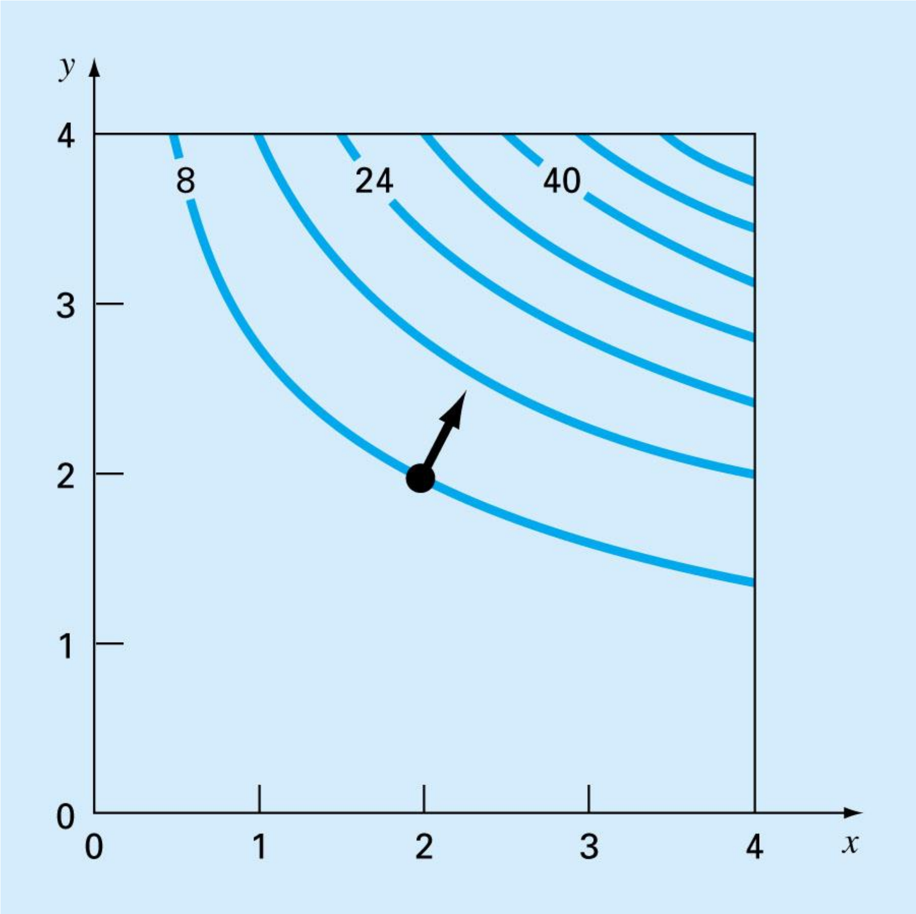
Curvas de nivel



Gradiente

$$\nabla f(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \end{matrix} \right\}$$

Gradiente



Método de máxima inclinación

- Inicia en un punto (x_i,y_i)
- Determina la dirección de descenso máximo, -gradiente
- Sigue esta dirección, h_i, hasta encontrar un mínimo en esta dirección
- Repite el proceso