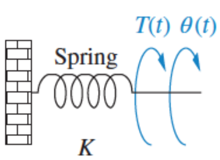
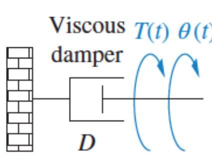
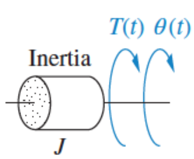
Principios de Mecatrónica
Modelado de Sistemas mecánicos

Modelado de sistemas mecánicos rotacionales

Los sistemas mecánicos de rotación se manejan de la misma manera que los sistemas mecánicos de traslación, a excepción de que el par(torque) sustituye a la fuerza y el desplazamiento angular reemplaza el desplazamiento traslacional.

Los componentes mecánicos para sistemas rotacionales son los mismos que los de los sistemas de traslación, a excepción de que los componentes se someten a *rotación* en lugar de la traslación. La siguiente tabla muestra los componentes, junto con las relaciones entre el torque y velocidad angular, así como el desplazamiento angular. Observe que los símbolos para los componentes tienen el mismo aspecto que los símbolos de traslación,

Component	Torque-angular velocity	Torque-angular displacement	Impedence $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\dfrac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Cabe destacar que el término asociado con la masa se sustituye por inercia. los valores de K, D, y J se llaman constante de elasticidad, coeficiente de fricción viscosa, y momento de inercia, respectivamente. Las impedancias de los componentes mecánicos son también resumido en la última columna de la tabla. Los valores se pueden encontrar mediante la adopción de la transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas.

Remark 1 *El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro, este sólo depende de la geometría del cuerpo. Entonces, dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia r de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:*

$$J = \sum r_i m_i.$$

De esta forma, la inercia desempeña un papel análogo al de la masa en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme y corresponde al valor escalar del momento angular longitudinal de un sólido rígido.

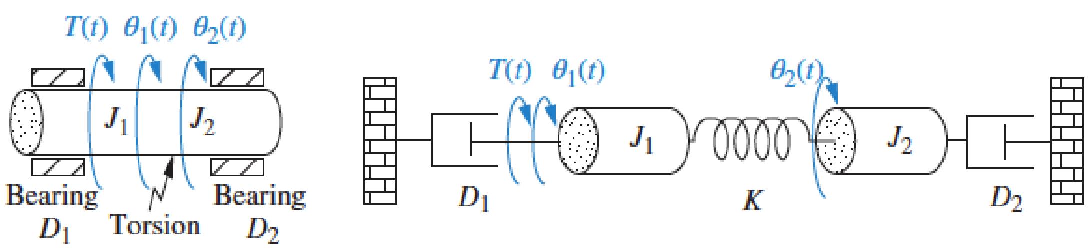
Remark 2 *Se llama torque a la capacidad de una fuerza para producir un giro o rotación alrededor de un punto.*

Remark 3 *La elasticidad a rotación está generalmente asociada a resortes de torsión o ejes delgados que presentan una relación algebraica entre el par torsor aplicado y el ángulo de giro.*

Escribir las ecuaciones de movimiento para sistemas de rotación es similar a escribir ecuaciones de sistemas de traslación. La única diferencia es que el diagrama de cuerpo libre se compone de pares en lugar de fuerzas. Obtenemos estos pares utilizando superposición.

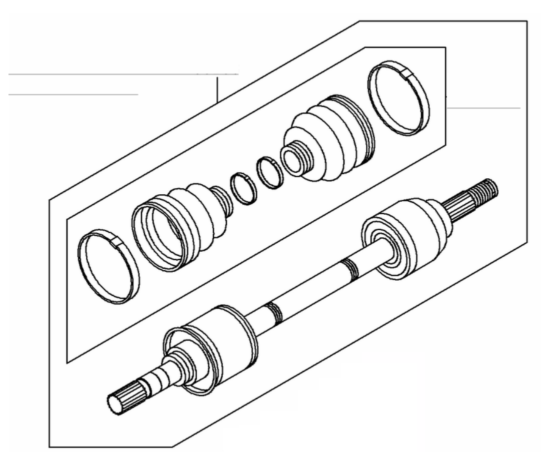
En primer lugar, hacemos girar un cuerpo, mientras mantenemos todos los demás puntos quietos y colocamos en su diagrama de cuerpo libre todos los pares de torsión debido al mismo movimiento del cuerpo. Luego, sosteniendo el cuerpo todavía, rotamos puntos adyacentes de movimiento y añadimos los pares debido al movimiento adyacente al diagrama de cuerpo libre. El proceso se repite para cada punto de movimiento. Finalmente para cada diagrama de cuerpo libre, estos pares se suman y se igualan a cero para formar las ecuaciones de movimiento.

Ejemplo 1. Encontrar la función de transferencia $\theta_2(s)/T(s)$, para el sistema rotacional mostrado a continuación. La barra está soportada por cojinetes en cada extremo y está en torsión. Se aplica un par a la izquierda, y el desplazamiento se mide a la derecha.

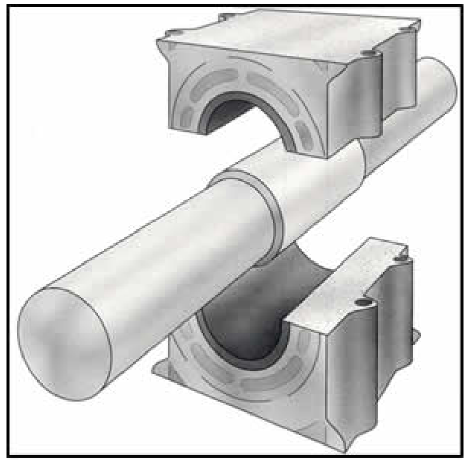


Representación fisica de los elementos

•Transmisión

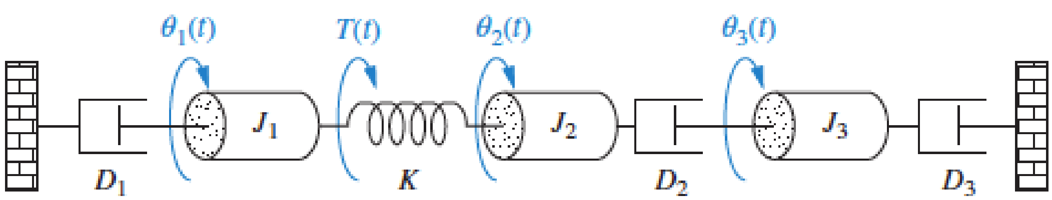


•Cojinetes: Es un elemento mecánico que reduce la fricción entre un eje y las piezas conectada y que le sirve de apoyo y reduce la ruptura de la flecha ya que facilita su desplazamiento



- Transmisión–cojinetes

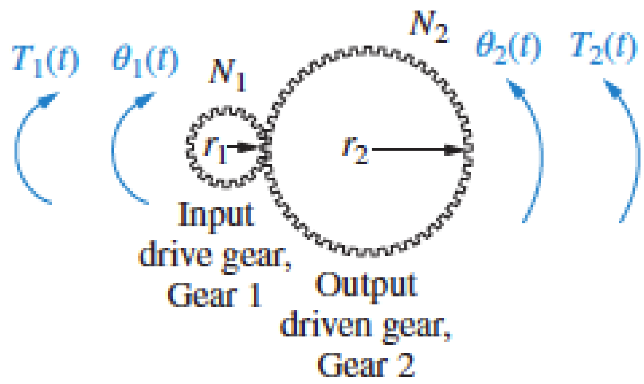
Ejemplo 2. Escribair las ecuaciones que describen al sistema siguiente.



Función de transferencia para sistemas con engranes

La interacción lineal entre dos engranes es descrita en la siguiente figura

Un engranaje de entrada con radio r_1 y dientes N_1 es rotado por medio del angulo θ_1 debido al par T_1. Una engranaje de salida con radio r_2 y dientes N_2 responde girando a través del angulo θ_2 y entregando un par T_2. De esta forma podemos encontrar la relación entre el engranaje 1, θ_1, engranaje 2 y θ_2.

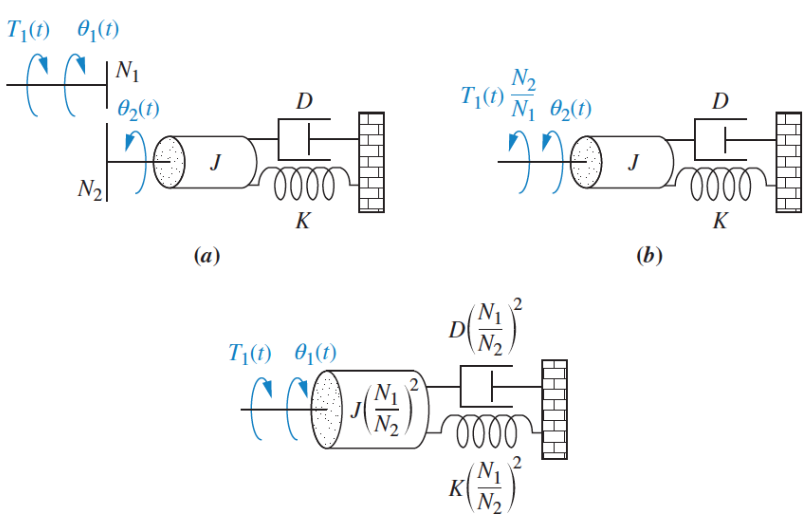


$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

$$\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2 = r_1/r_2$$

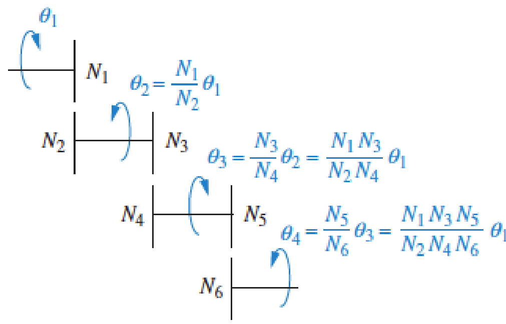
$$T_2/T_1 = N_2/N_1$$

Ejemplo 3. Encontrar la función de transferencia de la siguiente figura

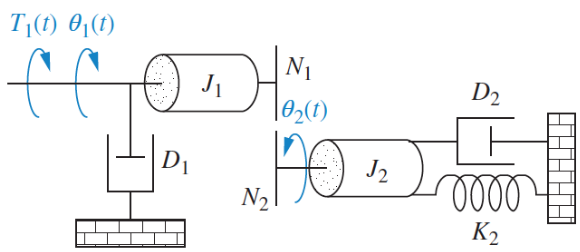


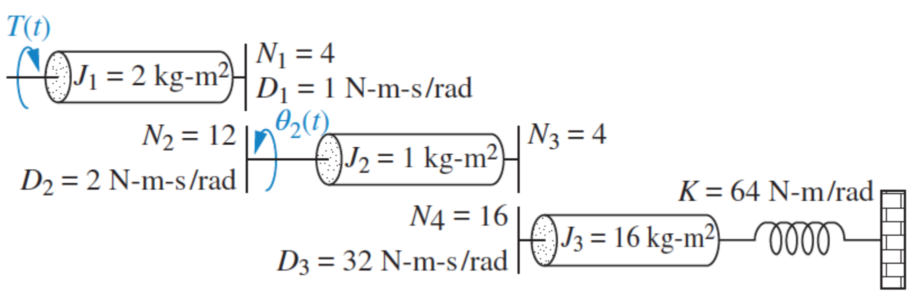
Ejemplo 4. Obtener la función de transferencia en términos de θ_1, del ejemplo anterior.

Algunas veces es necesario eliminar los engranes con radios grandes, un tren de engranajes se utiliza para implementar engranes con grandes radios por engranes de radios pequeños en cascada.

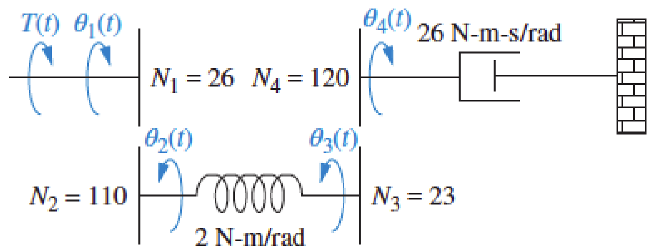


Ejemplo 5 Encontrar la función de transferencia respecto a θ_2 de las siguientes figuras.





Ejemplo 6 Encontrar la función de transferencia, $\frac{\theta_4(s)}{T(s)}$, para el sistema rotacional mostrado en la siguiente figura

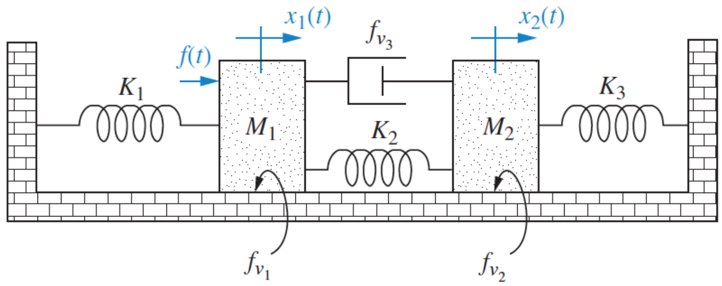


Circuitos eléctricos análogos

Ahora, mostramos las características comunes de los sistemas de las diversas disciplinas al demostrar que los sistemas mecánicos con los que trabajamos pueden representarse mediante circuitos eléctricos equivalentes. Hemos señalado la similitud entre las ecuaciones resultantes de las leyes de Kirchhoff para los sistemas eléctricos y las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos. Ahora mostramos esta coincidencia aún más convincentemente **produciendo equivalentes de circuitos eléctricos para sistemas mecánicos**. Las variables de los circuitos eléctricos se comportan exactamente como las variables análogas de los sistemas mecánicos.

Un circuito eléctrico que es análogo a un sistema de otra disciplina se llama de circuito eléctrico análogo. Los análogos se pueden obtener comparando las ecuaciones de descripción, como las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, con malla eléctrica o ecuaciones de nodos. Cuando se compará con ecuaciones de malla, el circuito eléctrico resultante se denomina serie analógica. Cuando se compara con ecuaciones de nodos, el circuito eléctrico resultante se denomina análogo paralelo.

Sistema mecánico



Ecuaciones

$$[M_1 s^2 (F_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)]X_1(s) - (f_{v_3}s + K_2)X_2(s) = F(s)$$

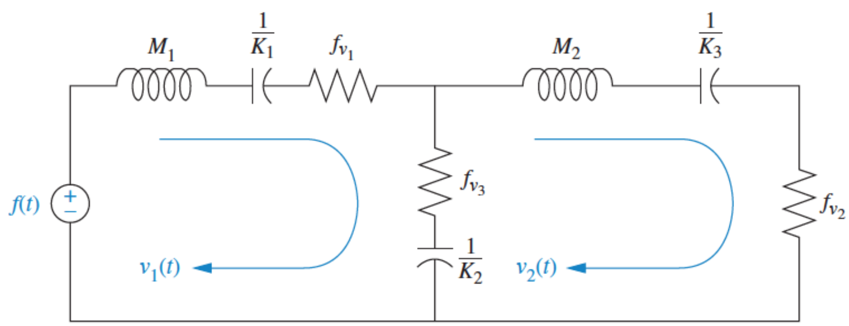
$$-(f_{v_3}s + K_2)X_1(s) + [M_2 s^2 + (f_{v_2} + f_{v_3})s + (K_2 + K_3)]X_2(s) = 0$$

La cual puede ser escrita como

$$\left[M_1 s + (f_{v_1} + f_{v_3}) + \frac{(K_1 + K_2)}{s}\right]V_1(s) - \left(f_{v_3} + \frac{K_2}{s}\right)V_2(s) = F(s)$$

$$-\left(f_{v_3} + \frac{K_2}{s}\right)V_1(s) + \left[M_2 s + (f_{v_2} + f_{v_3}) + \frac{(K_2 + K_3)}{s}\right]V_2(s) = 0$$

y su circuito equivalente sería



M_1
$\frac{1}{K_1}$
f_{v_1}
M_2
$\frac{1}{K_3}$
$f(t)$
+
−
f_{v_3}
$\frac{1}{K_2}$
f_{v_2}
$v_1(t)$
$v_2(t)$