01/abril/19

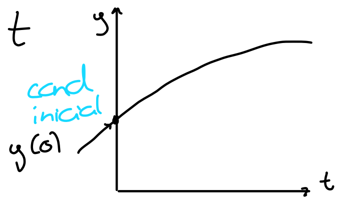
$x'Ax > 0 \longrightarrow$ Positiva Definida.

Sistema dinámico

Sistema de ecuaciones que cambia con respecto al tiempo.

Ecuaciones diferenciales

eqn $\frac{dy}{dt}$ cambio t



$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,dt + c \Rightarrow \ln(y) = 2t + C$$

$$y = e^{2t+C} = e^{2t}e^{c} = Ce^{2t}$$

Ejemplo: $y' = -2ty \Rightarrow$
$y(0) = 4$

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2t\,dt \Rightarrow \ln(y) = \frac{-\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} \Rightarrow \ln(y) = -t^2 + C \Rightarrow y = Ce^{-t^2}$$

$$4 = Ce^{-0} \Rightarrow \underline{C = 4}$$

$y' = y^2$
$y(1) = 1$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y = \frac{1}{t+c}$$

$$1 = \frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 1 - 1 = 0$$

$$\underline{c = 0}$$

$y' = ty + t^3$

$ty' + y + 4 = 0$
factor de integración

$ty' + y + 4 = 0$

$$y' + \frac{y}{t} + \frac{4}{t} = 0 \Rightarrow y' + \frac{y}{t} = -\frac{4}{t} \qquad \text{sea } \mu = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln(t)} = t$$

$$\Rightarrow t\left[y' + \frac{1}{t}\right] = t\left[\frac{-4}{t}\right]$$

Integrando $\Rightarrow ty = -4t + c$

$$\Rightarrow y = \frac{c - 4t}{t} = \frac{c}{t} - 4$$

Resolver sin saltarse pasos

08/abril/19

Ecuaciones diferenciales

$x'(t) = \frac{-t}{x}$ ecuación Generenal con constantes

$x(0)=3.$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-t}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int -t\,dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{-t^2}{2} + C \Longrightarrow x^2 + t^2 = k^2$$

axis equal

10/abril/19

Caida libre: Tangente hiperbólica.

$v(i+1) = v(i) + \underbrace{h}_{} * f(v(i))$ $\quad v = \frac{dx}{dt}$ $\quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$h = t_{i+1} - t_i$ $\quad a = \frac{dv}{dt}$

Método de Euler.

$y_{i+1} = y_i + h\, y'(x_i)$

$y' = f(x,y)$ $\quad y(x_0) = y_0$

$y_{i+1} = y_i + h\, y'(x_i)$

Calcular punto medio con la pendiente

Sacar ϕ

f tiene que ser función anónima.

22/abril/19

Función ivps pone los tres métodos que vimos juntos.
Euler es el que tiene más error, euler es de orden uno.
Los demás son de orden 2 y el ivps es de orden 4.

Método rk4: Se usa para encontrar soluciones a ecuaciones de primer orden.
Para cambiar la escala se cambian los parámetros de la función.

$F = ma$ $\quad x'' = F/m$

$a = \frac{F}{m}$ $\quad \boxed{x' = V}$

Si necesitamos n ecuaciones, necesitamos n condiciones iniciales. Esto se soluciona con un vector

$$\begin{bmatrix} x' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ F/m \end{bmatrix} \rightarrow f(t,y).$$

↳ vector y.

$y_1' = -0.5 * y_1$ $\quad y_1(0) = 4$

$y_2' = 4 - 0.3 * y_2 - 0.1 * y_1$ $\quad y_2(0) = 6$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = f(t, y_1 y_2)$$

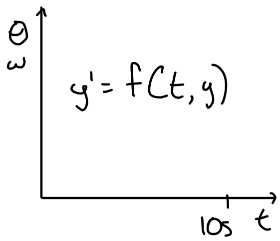
$y_1 y_2$

Tarea:
$y' = 3y - 2z \qquad y(0) = 1 \qquad f = @(t, yz)\ M * yz.$
$z' = 2y - 2z \qquad z(0) = -1$
↳ matriz de coeficientes
$f = @(t, yz)$

24/abril/19

Aplicaciones

Péndulo:



$\boxed{\theta'' = \frac{-g}{l} \operatorname{sen} \theta}$

$l = 1$

Euler: $h = 0.1$
$\qquad 0.01$

$\theta_0 = \pi/8$
$\quad = \pi/2$
$\quad = \pi$

RK4: $h = 0.1$
$\qquad 0.01$
$\qquad 1$

Movimiento de un satélite geoestacionario: Un error de euler es que no se cierra.

Proyecto: hasta
3 Live Script "bonito" con comentarios. (Buscar cómo hacerlo)
5 Tierra - Luna (Cambiar parámetros de posición inicial y ecuación)
7 Sol - Tierra - Venus
9 Sol - Tierra - Luna
10 Generalizar ivps.

Live Script: Se inserta texto de Latex u otros, se pueden insertar imágenes.

Inicialmente la velocidad va en y, ya que es perpendicular a x, la velocidad de la tierra.
En pos guardo las posiciones del satélite y de la tierra.

Tarea*: $y' = M * y \qquad y = ve^{\lambda t}, \quad y' = \lambda v e^{\lambda} \rightarrow \lambda v e^{t} = M v e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{Mv = \lambda v}$

29/abril/19

Para insertar texto en Matlab Live Script es en la pestaña Live Editor y texto. Para insertar imágenes solo se copia y pega.

[V,D]=eig(A): regresa la matriz diagonal de los eigenvalores y la matriz V donde las columnas corresponden a eigenvectores para que A*V = V*D.

$y' = Ay$

$y(t) = \underbrace{C_1 V_1}\, e^{\lambda_1 t} + \underbrace{C_2 V_2}\, e^{\lambda_2 t}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{bmatrix} v(1,1) \\ v(1,2) \end{bmatrix}}_{v(1,:)} + C_2 \underbrace{\begin{bmatrix} v(2,1) \\ v(2,2) \end{bmatrix}}_{v(2,:)}$

sol. general
sol. particular ← $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = y(0)$

$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \qquad C = v \backslash y0.$

Sistema masa resorte amortiguador.

$$mx'' + Cx' + Kx = 0$$

$$x'' = \boxed{-\frac{C}{m}x' - \frac{K}{m}x}$$

$$x' = v$$
$$v' = -\frac{C}{m}x' - \frac{K}{m}x$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \qquad y0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x \end{bmatrix}$$

Valor propio nos da la frecuencia angular.

$$y' = M * y$$

06/mayo/19

Suponer pendiente inicial. Sabemos punto inicial y punto final.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

$N = 100$ puntos

Calcular uno arriba, uno abajo y calcular el centro con bisección.

① Despejamos ecuación

$$y'' = 4y. \longrightarrow yz = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} y' = z \\ z' = 4y \end{cases} \qquad yz' = M * yz \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$yz0 = \begin{bmatrix} 1 \\ ? \end{bmatrix} 3.$$

end: último elemento del arreglo.

z0 = bisection(g, -1, 0);

Métodos de Ecuaciones Finitas.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 4y_i = 0.$$

$$y_{i-1} - (2+4h^2)y_i + y_{i+1} = 0$$

$$1 - (2+4h^2)y_1 + y_2 = 0$$
$$y_1 - (2+4h^2)y_2 + y_3 = 0$$
$$y_2 - (2+4h^2)y_3 + y_4 = 0$$
$$\vdots$$
$$y_{N-2} - (2+4h^2)y_{N-1} + 3 = 0.$$

08/mayo/19

Repaso Examen

Ecuaciones diferenciales $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$ ¿$y(t)$? Analítica syms
Numérica.

- Problemas con valores iniciales.
- Valores en la frontera.

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

↳ cómo calcular pendiente.

Método de Euler: extendemos línea a un punto y bajamos

RK4: Utiliza 4 pendientes para llegar a la solución.
Problema del péndulo.

Valores en frontera $\begin{cases} \text{shooting (ivps) + raíz (bisección)} \\ \text{diferencias finitas } \dfrac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \text{sistema ecuaciones tridiagonal G.S.} \end{cases}$

f g

$e \begin{bmatrix} -(2+4h^2) & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$

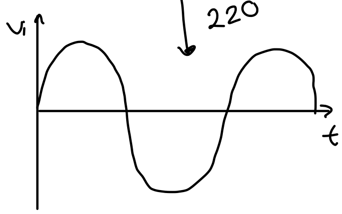
$y(1) = 1$

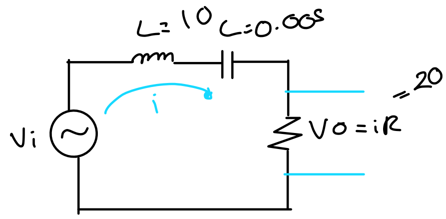
$\vdots \quad = \omega$

$y(N) = 3$

A sen ωt $= \frac{1}{\sqrt{AC}}$

220





$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = v_i$

$i'' = -\left(\frac{R}{L} i' + \frac{1}{CL} i\right) + \frac{v_i'}{L}$

(i'') $i' = x$

$x' = -\left(\frac{R}{L} x + \frac{1}{LC} i\right) + \frac{v_i'}{L}$

$\begin{bmatrix} i \\ x \end{bmatrix}' = M * \begin{bmatrix} i \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_i'}{L} \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$ $t = [0, 15]$

Derivada del seno: $A\,\text{sen}(\omega t) \Rightarrow A\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{AC}} \cdot t\right)$

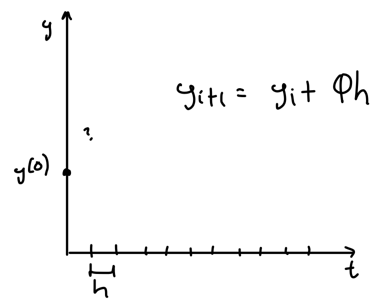
Examen:
- Shooting: Saber que hace cada linea y el problema.
- Aprender de memoria que hace ivps.
- Repasar Circuito eléctrico

15/mayo/19

Ecuaciones diferenciales (modelan sistemas dinámicos) Examen.

primer orden. $y(t)' = f(t,y)$ ¿y?

1. $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad y(0)}$



$y_{i+1} = y_i + \Phi h$

segundo orden $(F = ma = mx'')$ → $x' = v$, $v' = xv$

↓

sistema 2 de primer orden.

$xv = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ $(x\ v)' = f(t, xv)$

② $y_1' = \dfrac{4-2y_2}{t^3}$ $\quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\quad y_2' = -e^{y_1}$ $\quad y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4-2y_2}{t^3} \\ -e^{y_1} \end{bmatrix}$

el "cero" está en [1, 2]

③ $m_1 x_1'' = -(k_1+k_2)*x_1 + k_2*x_2 - b*x_1'$
$m_2 x_2'' = k_2*x_1 - (k_2+k_3)*x_2 - b*x_2'$

$x_1' = v_1$
$x_2' = v_2$
$v_1' = \dfrac{-(k_1+k_2)*x_1}{m_1} + \dfrac{k_2*x_2}{m_1} - \dfrac{b*v_1}{m_1}$
$v_2' = \dfrac{k_2*x_1}{m_2} - \dfrac{(k_2-k_3)*x_2}{m_2} - \dfrac{b*v_2}{m_2}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ = \end{matrix}$ ___x_1 ___x_2 ___v_1 ___v_2

frecuencia = $\dfrac{1}{\text{periodo}}$ eigenvalores imaginarios indican la dirección de oscilación.