$z =$ r*exp(i*theta) nos da el número entero complejo.

da lo mismo que $r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

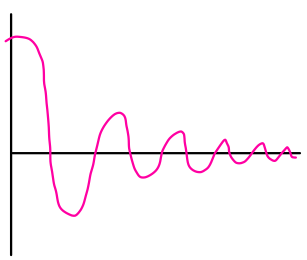
$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n (e^{i\theta})^n = \underline{r^n e^{in\theta}}$ → se eleva un número complejo.

$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \underbrace{e^{i\pi} = -1}_{\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi}$

Números complejos nos interesan para lo que sigue del curso

Ecuaciones dinámicos modelan cambios en el tiempo.

Al resolver ecuaciones diferenciales nos va a dar resultados del tipo $e^{a+bi} = e^a e^{bi}$ ⇒ se descompone en seno y coseno con la frecuencia que depende de b.



$z = re^{i\theta} \qquad z^{1/n} = r^{1/n}\,[e^{i\theta/n}]$

$z^n = r^n e^{in\theta}$

Números complejos se pueden expresar con senos y cosenos y con exponentes

Sistemas dinámicos son continuos y pueden ir decayendo.

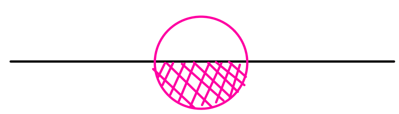
27/febrero/19

Corrección Examen

F, peso $= m\cdot g$

$= \rho_e V_e g$

$= \rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 g.$



flotación

04/marzo/19

Matrices.

Matlab: $\left.\begin{array}{l} A = [2,1;\ 1,2] \\ x = [1;2] \end{array}\right\}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⇒ $A^* x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$RC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ $RC^* x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ → matriz de rotación.

atand: función en Matlab que saca el ángulo de una matriz. La d al final significa decimales.

Matriz: transformación lineal que convierte un vector x en un vector y.

Valores y vectores propios.

$Ax = \lambda x$

$(A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0$

$\det(A - \lambda I) = 0.$

Sistema de ecuaciones tiene solución única si el determinante $\neq 0$
Si el determinante $= 0$, entonces tiene múltiples soluciones

Matlab: $A = \text{gallery}(3) = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$ → ejemplos de matrices

Polinomio característico: poly(A).
$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$

Con roots(poly(A)) sacamos las soluciones del polinomio característico. Roots = $3, 2, 1 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$.

[λ, x] = powerMethod(A)
x = [1 ; 1 ; ... ; 1]
lambda = norm(x)
x = x/lambda

$\lambda x = Ax$
$\lambda =$
$x =$

$\left|\dfrac{\lambda - \lambda_a}{\lambda}\right| > \text{eps}.$

size(A): nos regresa un vector con las dimensiones de la matriz.

En matlab con ~ se puede sustituir un valor que regresa una función pero que no queremos tomar en cuenta.

eig(A): Regresa eigenvalores de la matriz A.

Eliminación de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

magic (#): arroja una matriz # x # como cuadrado mágico.
A(1:4,3): renglones 1-4 de la tercer columna. También se puede usar end para indicar todas las columnas.
A(:,end-1): todos los renglones de la penúltima columna.

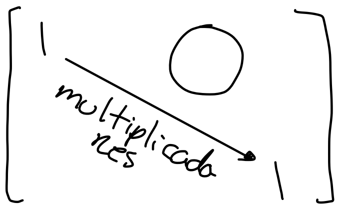
Rangos de donde a donde queremos ver nos va a ayudar mucho.

max(A(:, 3)) : máximo de la columna 3.
Con esto se puede multiplicar solo un renglón o columna por un vector.
Elimina muchas operaciones

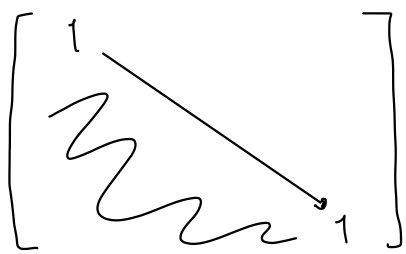
06/marzo/19

Método de Gauss.

Checar indices
i = barre renglones y j = barre columnas.

$L =$ 

P = identidad.
U = triangular superior.

Código al reves. 

11/marzo/19

Gauss era un método exacto, ahora veremos métodos iterativos.

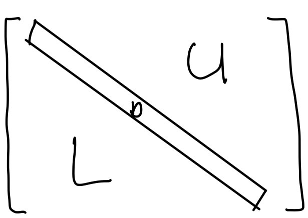
Métodos Iterativos.

- Jacobiano
- Gauss-Seidel

$Ax = b$ $\quad$ $Ax - b = 0$ $\quad$ $r_n = Ax_n - b$

$x_{n+1} = f(x_n)$

norm → ambas. $\left| \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < eps.$

$A =$  $= L + D + U$

$(L+D+U)x = b$

$Lx + Dx + Ux = b$

$\hookrightarrow Dx_{n+1} = b - (L+U)x_n$

$\boxed{x_{n+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_n)}$ $\quad$ D\(b-(L+U)x_n)

$x_{n+1} = D^{-1} * (b - (L+U) * x_n)$
$= D \backslash (b - (L+U) * x_n)$

Métodos iterativos no siempre convergen.

Matriz diagonal dominante: La diagonal de una matriz es mayor que los demás números.

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1$$

$$x_1 = \frac{4 - (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0)}{D(1,1)}$$

eig(A): regresa los eigen valores de A.

13/marzo/19

Inversa y determinante

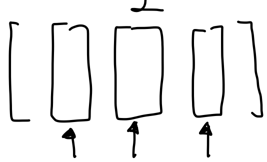
$LU = PA$

- inversa
- determinante

$$\underbrace{\cancel{\det(L)}}_{1} * \underbrace{\det(U)}_{\text{prod(diag(U))}} * \underbrace{(-1)^s}_{}$$

$Ax = b$

I



$LU = PA \rightarrow I * P$

Gauss Seidel 2:

$$x_1 = (b(1) - U(1, 2:n) * xp(2:n)) / D(1,1)$$

$A = L + U + D$

$Ax = b$

$(L + U + D)x = b$

$Lx + Ux + Dx = b$

Jacobi: $x = D^{-1} * b - D^{-1} * (L + U) * xp$

$Dx = b - Lx - Ux$

$x = D^{-1} * (b - Lx - Uxp)$ código. $\rightarrow$ $(D+L)x = b - Ux$

$x = (D+L)^{-1} * (b - Ux)$

$x = (D+L)^{-1} * b \boxed{- (D+L)^{-1} * U} * x$

Mientras más grande su radio espectral, más rápido converge.

$e_k = x - x_k$

$x_{k+1} = C + T * x_k$

$$x = \overbrace{D^{-1} * b}^{C} \overbrace{\underbrace{- D^{-1} * (L+U)}_{}}^{T} * x_k$$

$e_{k+1} \overset{=}{=} T * e_k$

$= T^k * e_0$

$e_k = x_k - x$

$x_{k+1} = C + T * x_k$

Métodos funcionan pero no para cualquier matriz. Con las que funciona son las que salen de sistemas dinámicos.

$Ax=b$ $\quad$ $r=b-Ax$ $\quad$ Gradiente.

$Ax-b=0$ $\quad$ $r_k=b-A*x_k$

20/marzo/19

Sistemas de ecuaciones $Ax=b$

Métodos iterativos

- Jacobi, Gauss Seidel
- Gradiente.
- No lineales

Errores de redondeo

error

$e=x-x*$

residual

$r=b-Ax*$

$r=b-Ax*$ $\quad$ $x_{k+1}=D^{-1}*b-D^{-1}*(L+U)*x_k$

$x_{k+1}=x_k+$ ____

$$x_{k+1}=(D+L)^{-1}*b-(D+L)^{-1}*U*x_k$$
$$=(D+L)^{-1}*b-(D+L)^{-1}*(U+D+L-D-L)*x_k$$
$$=(D+L)^{-1}*b-(D+L)^{-1}*(Ux_k+Dx_k+Lx_k-Dx_k-Lx_k)$$
$$\vdots$$
$$x_{k+1}=x_k+(D+L)^{-1}*r_k$$

$\boxed{x_{k+1}=x_k+(D+L)\backslash r_k}$ $\longrightarrow$ Matriz A tiene que ser diagonal estrictamente dominante.

Gradiente: donde avanzas más. Camino de máxima inclinación descendiente.

A tiene que ser simétrica $\rightarrow$ $A=A^T$

$f(x)=\frac{1}{2}x'*A*x-b'*x+c \longrightarrow$ derivamos $=A*x=b$.

Matriz positiva definida: $x'*A*x>0$ y es simétrica. $x\sim=0$

$$A=\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix}2>0\\10-4=6>0\end{matrix}\right\}\text{ positiva definida}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}'*\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}=[2x_1+2x_2\quad 2x_1+5x_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=$$

$$x_1(2x_1+2x_2)+x_2(2x_1+5x_2)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_2+5x_2^2$$
$$=2x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$$
$$=2(x_1+x_2)^2+3x_2^2$$

Forma cuadrática.

Curvas de nivel.

Dirección del Gradiente: derivar la función.

25 / marzo / 19

Función Cuadrática

PD minimizar $Ax=b$

Residual: $r_k = b - Ax_k$
r - gradiente.

α es un mínimo
$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$

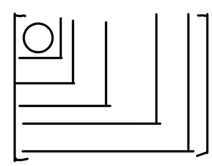
Pregunta de examen: min $f(x_{k+1})$. Demostrar que $\alpha = \dfrac{dot(r_k, r_k)}{(r_k' * A * r_k)} \rightarrow r_k * r_k'$

A simetría $\frac{1}{2}Ax^2 - bx \rightarrow$ escalares
$Ax - b$

meshgrid: Calcula una malla, o cuadrícula de una gráfica.

Menores principales $\rightarrow$ determinante de cada uno menor que 0.

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$
$r_2 = b - A * x_k$ - gradiente
$\alpha_k = \dfrac{dot(r_k, r_k)}{(r_k' * A * r_k)} \rightarrow r_k * r_k'$



Tarea Lunes: Determinar si matriz es positiva definida utilizando la triangular. Cuidado porque LU permuta.

27 / marzo / 19

Sistema de ecuaciones no lineales.

$y^2 + yz - 10 = 0$
$z + 3yz^2 - 57 = 0$

$f(x) = f(x_p) +$ derivada $* (x - x_p)$ raíces
$f(x) = 0$ ceros
$f(x) = f(x_p) +$ matriz Jacobiana $* (x - x_p)$ Newton Rhapson

$x = x_p - J(x_p) \backslash f(x_p)$

$x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} 2y + z & y \\ 3z^2 & 1 + 6zy \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$

Ejercicio: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
$3x_1 - \cos(x_2 x_3) = 3/2$
$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 = 1$
$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 = -\frac{10\pi - 3}{3}$