INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO, ITAM

Laboratorio de Señales y Sistemas

Páctica No. 8

Transformada de Laplace

Autores: Rebeca Baños, Víctor Hugo Flores.

Resumen

En esta práctica se realizaron ejemplos de transformada de Laplace a diferentes funciones para poder analizar la relación que tienen con la transformada de Fourier.

Esta sección debe proporcionar una descripción breve del contenido del documento y, dependiendo del tipo de documento, puede o no, motivar al lector a que lea el resto del mismo. Normalmente incluiría una oración por cada uno de los siguientes puntos: qué y cómo se hizo; qué dificultades se encontraron al resolver la práctica; cómo se resolvieron; y qué se aprendió.

Material

- Computadora con Python

Desarrollo (1-2 párrafos)

Primero diseñamos un programa en Python que realicé los cálculos y las gráficas de cada uno de los sistemas de las prácticas. Los resultados fueron los siguientes:

Después obtuvimos la función de transferencia de cada uno de los sistemas descritos por las ecuaciones diferenciales graficadas anteriormente utilizando la Transformada de Laplace. Los resultados fueron los siguientes:

a. $s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=SX(s)-3X(s)$

$Y(s)\,(s^2+4s+4)=X(s)\,(s-3)$

$H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{(s-3)}{(s^2+4s+4)}$

$z=s-3=0$

$p=(s^2+4s+4)=0$

b. $s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=X(s)$

$Y(s)\,(s^2+4s+4)=X(s)$

$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{s^2+4s+4}$

$z\neq NA$

$p\Rightarrow s^2+4s+4=0\Rightarrow -2$

c. $s^2Y(s)+20sY(s)+100Y(s)=X(s)$

$Y(s)\,(s^2+20s+100)=X(s)$

$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{s^2+20s+100}$

$z\neq NA$

$p=s^2+20s+100=0\Rightarrow -10$

d. $s^2Y(s)+Y(s)=4X(s)$

$Y(s)\,(s^2+1)=4X(s)$

$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{4}{s^2+1}$

$z\neq N.A$

$p\neq N.A.$

e. $s^3Y(s)+s^2Y(s)-7sY(s)-15Y(s)=2sX(s)+2X(s)$

$Y(s)\,(s^3+s^2-7s-15)=X(s)\,(2s+2)$

$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{(2s+2)}{(s^3+s^2-7s-15)}$

$z=2s+2=0\Rightarrow -1$

$p=s^3+s^2-7s-15=0\Rightarrow 3,\ -2-i,\ -2+i$

f. $s^2Y(s)-2sY(s)+5Y(s)=3sX(s)+12X(s)$

$Y(s)\,(s^2-2s+5)=X(s)\,(3s+12)$

$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{3s+12}{s^2-2s+5}$

$z=3s+12\Rightarrow -4$

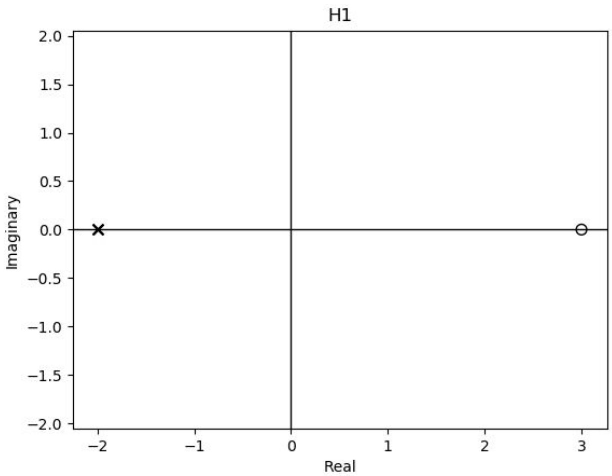
$p=s^2-2s+5=0\Rightarrow 1-2i,\ 1+2i$

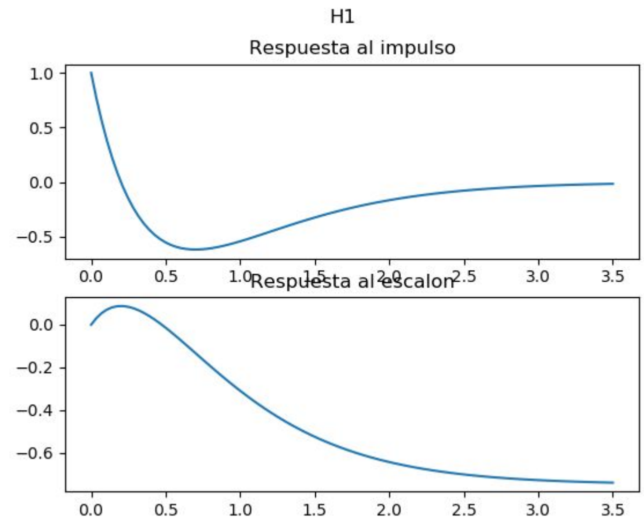
Posteriormente obtuvimos los polos y los ceros de cada función con ayuda de nuestro código en Python y la herramienta signal.tf2zpk. Los resultados de estabilidad fueron los siguientes:

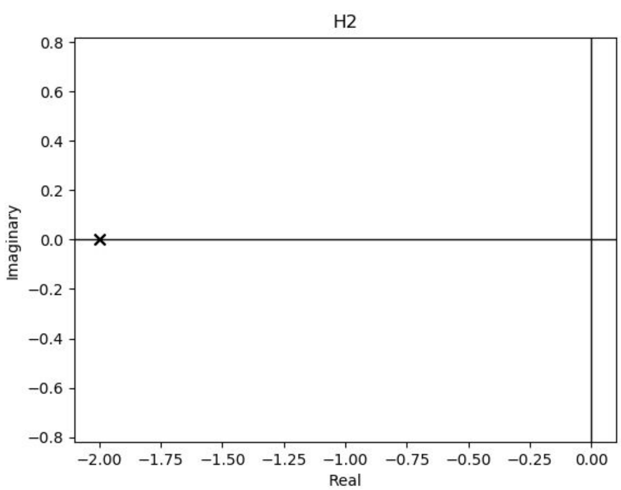
```
h1
zeros
[3.]
polos
[-2. -2.]

h2
zeros
[]
polos
[-2. -2.]

h3
zeros
[]
polos
[-10. -10.]
```

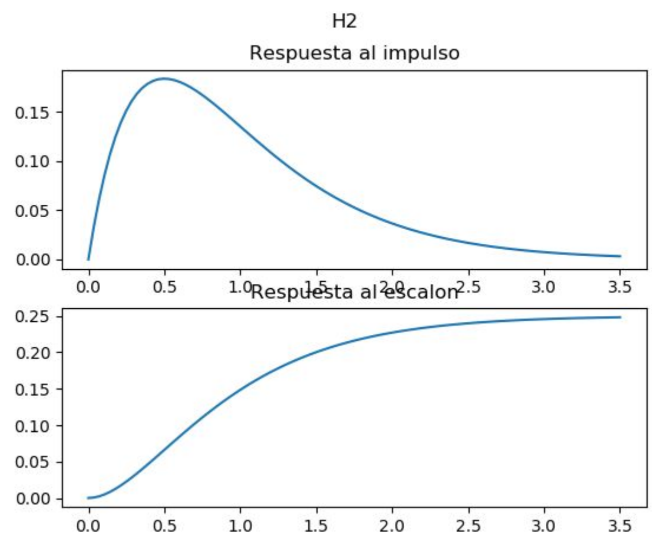
```
h4
zeros
[]
polos
[-0.+1.j  0.-1.j]

h5
zeros
[-1.]
polos
[ 3.+0.j -2.+1.j -2.-1.j]

h6
zeros
[-4.]
polos
[1.+2.j 1.-2.j]
```

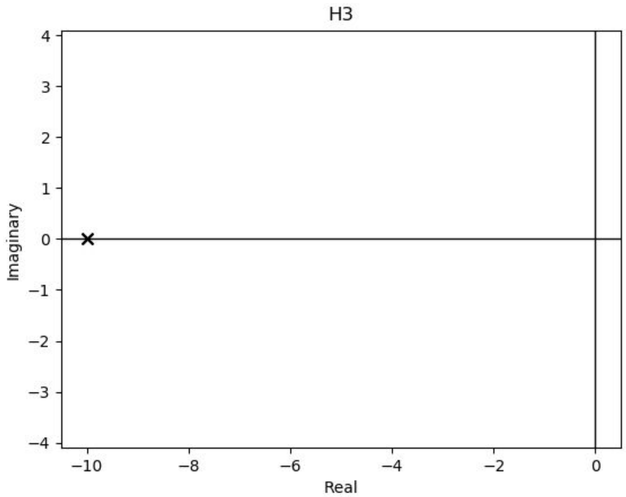
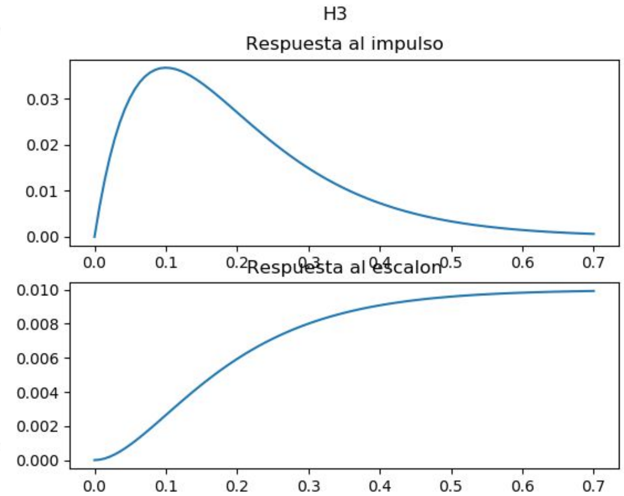
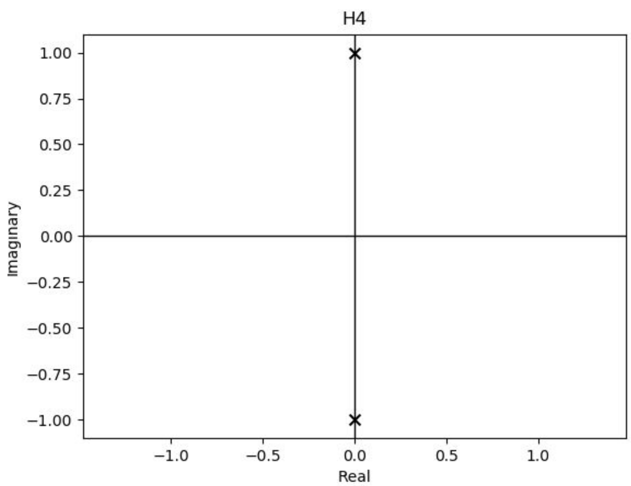
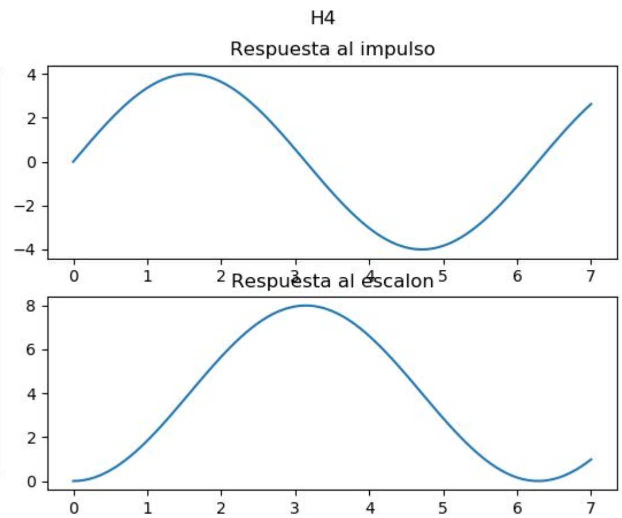
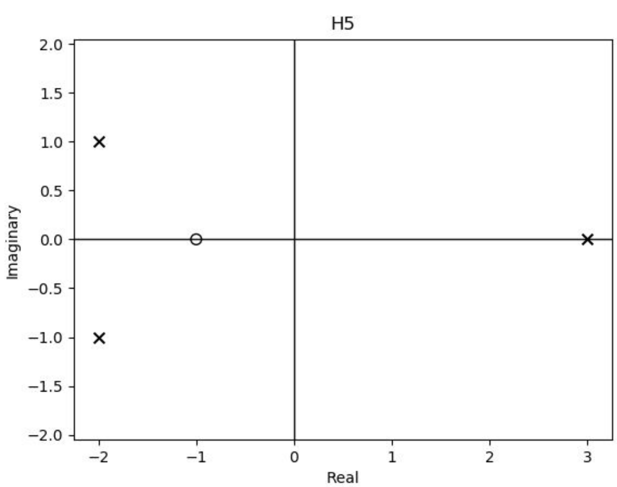
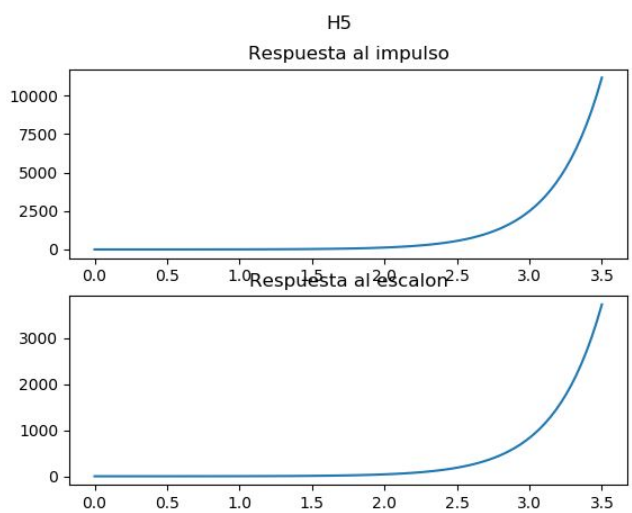
Por último graficamos la respuesta al impulso y la respuesta a escalón de cada sistema con las herramientas de Python pzmap e impulse. Los resultados fueron los siguientes:

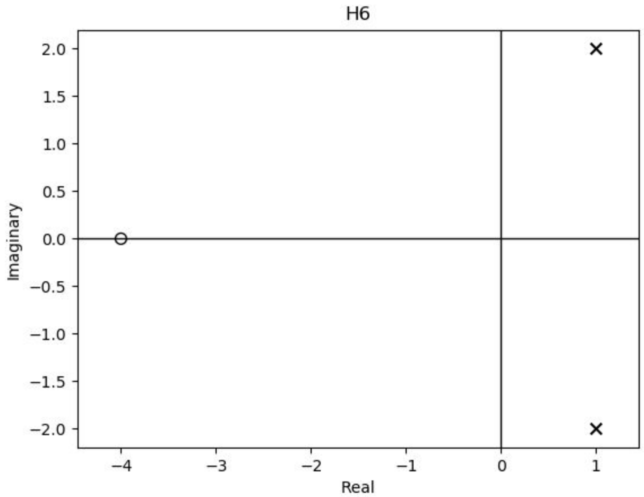

H1
Imaginary
Real

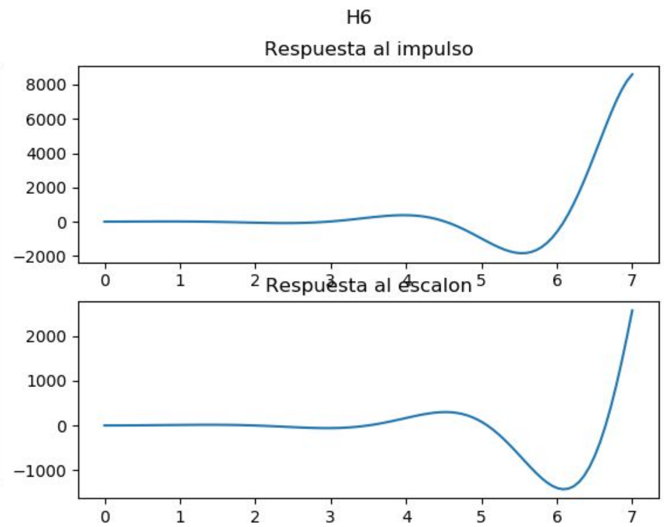

H1
Respuesta al impulso
Respuesta al escalon


H2
Imaginary
Real


H2
Respuesta al impulso
Respuesta al escalon


H3
Imaginary
Real

H3
Respuesta al impulso
Respuesta al escalon

H4
Imaginary
Real

H4
Respuesta al impulso
Respuesta al escalon

H5
Imaginary
Real

H5
Respuesta al impulso
Respuesta al escalon





Respuestas a preguntas

1. **¿Dónde deben estar ubicados los polos y los ceros en el Plano S para que un sistema sea estable?**
   Los polos tienen que estar del lado izquierdo para que el sistema sea estable, la posición de los ceros es irrelevante.

2. **¿Qué ocurre si todos sus polos se encuentran sobre el eje real positivo?**
   Significa que la respuesta impulsional va creciendo conforme aumenta el tiempo.

3. **¿Qué ocurre si todos sus polos se encuentran sobre el eje real negativo?**
   Significa que la respuesta impulsional va decreciendo conforme aumenta el tiempo.

4. **¿Qué ocurre si todos sus polos se encuentran sobre el eje imaginario?**
   La respuesta al impulso se vuelve una sinusoidal con el mismo periodo a la misma frecuencia conforme aumenta el tiempo.

5. **¿Cómo se ve afectado la respuesta del sistema dependiendo de la posición de los ceros?**
   La posición de los ceros es irrelevante en cuanto a la respuesta al impulso.

Experiencia

Fue una práctica interesante como introducción a la Transformada de Laplace ya que al sacar las respuestas a los impulsos, tomando como referencia la transformada de Fourier, fue más sencillo ya que teníamos previamente los conocimientos de Fourier.
También fue importante la parte de implementación de la transformada en Python ya que descubrimos nuevas funciones que nos ayudan a analizar de mejor manera como el

programa realiza los cálculos necesarios para encontrar los ceros y los polos de cada sistema.
Al graficar los sistemas y sus respuestas al impulso, fue mejor entender cómo se comporta la Transformada de Laplace con respecto al comportamiento de sus polos y de sus ceros.
Al inicio fue un poco difícil crear el código en python ya que no estábamos familiarizados con la librería de control y con los comandos necesarios para graficar el plano S y las respuestas al impulso como lo pedía en la práctica, pero al final logramos los resultados esperados.

Conclusiones

Esta práctica fue de gran ayuda incluso haciéndola antes que revisar Laplace en teoría ya que estamos ahora más familiarizados con las respuestas que se deben esperar en las respuestas del impulso.
Fue una práctica también muy buena para seguir reforzando lo aprendido en Python y siguiendo explorando las herramientas que este programa nos brinda y que aún no hemos revisado del todo.
Podemos seguir experimentando estas reacciones con diferentes sistemas para poder ver cómo se comporta la Transformada de Laplace en general.