Señales y Sistemas.

Edgar Francisco Roman-Rangel
francisco.roman@itam.mx.

Introducción.

¿De qué se trata Señales y Sistemas?

- Procesamiento de Señales (operaciones básicas)
- Propiedades de los sistemas y su impacto en las señales
- Análisis de señales en el dominio del tiempo.
- Análisis de señales en el dominio de la frecuencia
- Análisis y diseño de filtros

Señales:
- Abstracciones matemáticas de fenómenos
- Funciones de una, o más, variables independientes (típicamente tiempo o espacio), las cuales contienen información.

Sistemas:
- Contexto en el que las señales existen.
- Operadores que procesan señales.

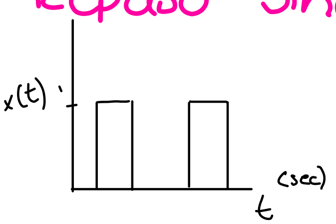
Ejemplos:
- Sistema auditivo
- Sistema visual.
- Control de temperatura en una habitación.
- Mercado de valores.
- Redes neuronales artificiales.
- Cualquier fenómeno puede ser entendido como señal.

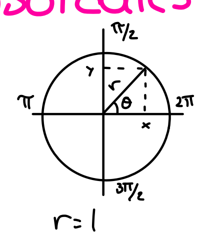
Logística

1er examen parcial	15%
2do examen parcial	15%
Tareas y participación	10%
Laboratorio (aprobado)	20%
Examen final (aprobado)	20%
Proyecto	20%

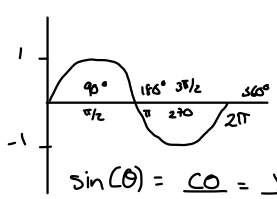
Repaso Sinosoidales

14/agosto/19

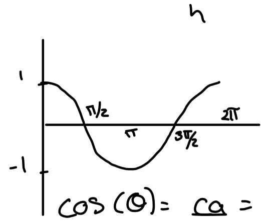




r=1
(círculo unitario)



$\sin(\theta) = \frac{co}{h} = \frac{y}{r} = y$

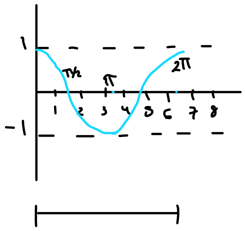


$\cos(\theta) = \frac{ca}{h} = \frac{x}{r} = x$

Sinosoidal

$f(t) = \cos(\omega t)$

- ω → frecuencia (constante)
- t → tiempo (s, variable)
- ωt ↳ tiempo ↳ ángulo



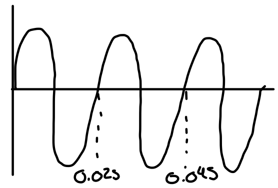
T: periodo

$f(t) = \cos(\omega t) \rightarrow \omega = 1$
$= \cos(t)$

Periodo: cuando se completa un ciclo en el círculo unitario.
Un ciclo ocurre cada T segundos.
El valor más pequeño de T para el cual $f(t+T) = f(t), \ \forall t.$

Señales Periodicas: cuando T es finita, es decir, termina los ciclos.
Señales Aperiodicas: cuando T es infinita.

Ejemplo: $\frac{1 \text{ ciclo}}{0.02s} = 50$ ciclos/s $=$ 50 Hz.

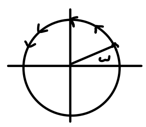


T= 0.02 s.

Frecuencia: número de ciclos completados por segundo. (Hz). "Taza de repetición". $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

Frecuencia radial: (frecuencia angular): (ω). en radianes. $\boxed{\omega = 2\pi f} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

$f(t) = \cos(\omega t)$ rad/s
$f(t) = \cos(2\pi f t)$ ciclos/s.



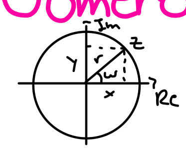
Ejemplo: Para una señal de 50 Hz. $f(t) = \cos(2\pi \cdot 50t) = \cos(100\pi t)$ ¿Cuánto vale ω?
$\omega = 100\pi$

Identidades sin- cos

$\sin(\omega) = \cos(\omega - 90°)$
$= \cos(\omega - \pi/2)$
$-\sin(\omega) = \cos(\omega + 90°)$

$\cos(\omega) = \sin(\omega t + 90°)$
$= \sin(\omega + \pi/2)$
$= -\sin(\omega - 90°)$

Números Complejos



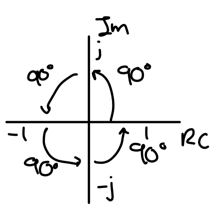
$x = r\cos(\omega)$
$y = r\sin(\omega)$

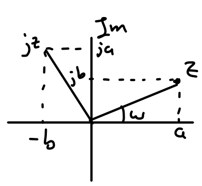
$z = x + jy \longrightarrow z = r\underbrace{(\cos(\omega) + j\sin(\omega))}_{e^{j\omega}}$ → posición angular.
$z = |r| \angle \omega$

r → distancia del origen al círculo.

r=1

Rotación
$j^0 = 1$
$j^1 = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = j^2 \cdot j^1 = -j$
$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$
$j^5 = j^4 \cdot j^1 = j$





¿jz? Si, $z = a + jb$, entonces $jz = j(a + jb)$
$= -b + ja$

Si $z = re^{j\omega}$ entonces $jz = jre^{j\omega}$
$= e^{j90°}re^{j\omega} \rightarrow$ por $z = \cancel{r}^{1}(\cancel{\cos(\omega)}^{0} + j\cancel{\sin(\omega)}^{1})$

Fórmula de Euler

$$z = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -\sin(\omega) + j\cos(\omega) = jz$$

$$= j\underbrace{\left(j\sin(\omega) + \cos(\omega)\right)}_{z}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int j\, d\omega$$

$$\ln z = j\omega$$

$$e^{\ln z} = e^{j\omega}$$

$$z = e^{j\omega} \Rightarrow e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$$

Caso particular de Fórmula Euler

$$\omega = \pi$$

$$e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi)$$

$$e^{j\pi} = -1 + j0$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$ → Identidad de Euler

Series McLaurin

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$ evaluada en 0.

$f(x) = \cos(x)$, $x=0$ → tarea.

Tarea: Demostrar que se cumple la igualdad de la fórmula de Euler, usando series de McLaurin (hasta 6 términos)