INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO, ITAM
Laboratorio de Señales y Sistemas

Páctica No. 5
Series de Fourier para Señales Continuas

Autores: Rebeca Baños, Víctor Hugo Flores.

Resumen (1 párrafo, ~5-9 líneas)
En esta práctica se realizaron diferentes gráficas de señales continuas para representar la serie de Fourier con ayuda de la herramienta de Python. El objetivo de la práctica era analizar gráficamente cómo se comportan las series de Fourier y su relación con las señales con las que trabajamos día a día. Parte del análisis fue observar los efectos secundarios que las series de fourier pueden generar en cada tipo de señal.

Material

- Computadora con programa Python

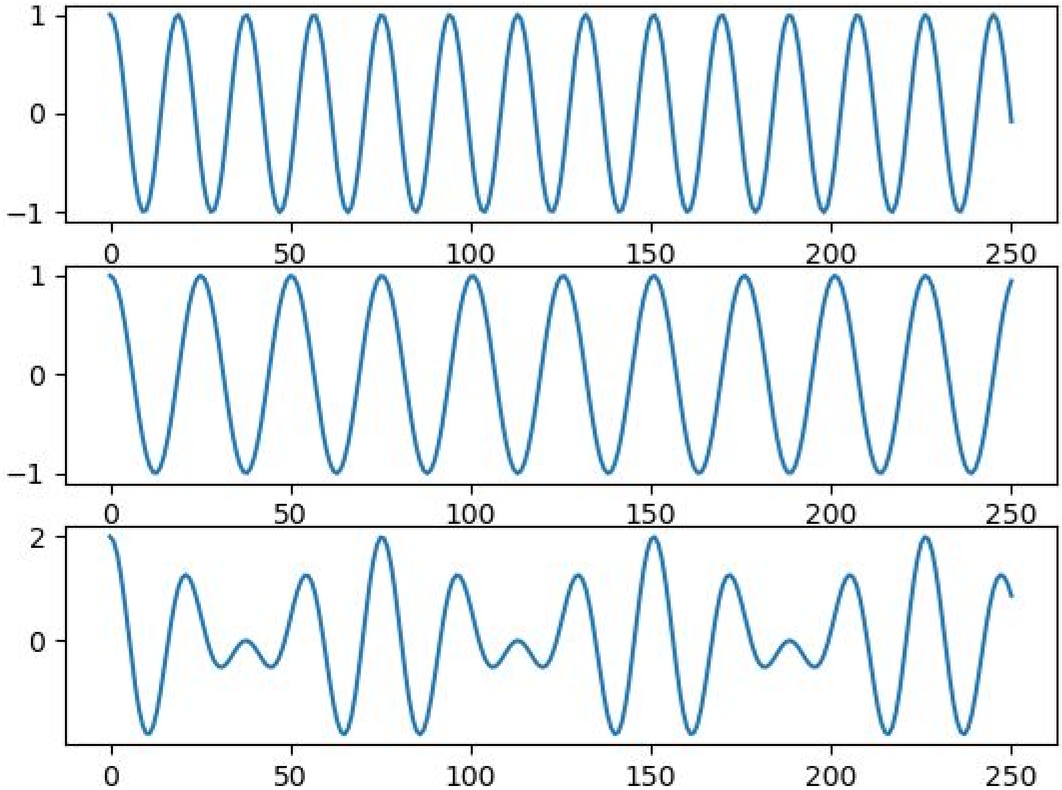
Desarrollo
Comenzamos la práctica graficando una señal sencilla en Python y analizando su periodo:

$$f_1(t) = cos(\tfrac{t}{3}) + cos(\tfrac{t}{4})$$

Para calcular el periodo, tuvimos que separar la ecuación entera en los componentes de la suma de cosenos, esto también lo hicimos gráficamente para entender mejor como el periodo de la suma se conforma de sacar el mínimo común múltiplo del periodo de cada componente de la suma. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi,\quad T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \quad \rightarrow \quad T = 24\pi$ (mínimo común múltiplo)

La gráfica resultante fue la siguiente:



Fue conveniente separar las señales ya que se pueden apreciar mejor los dos periodos que componen a la señal completa y la suma de los mismos.
Posteriormente pasamos a graficar una segunda señal esta vez con 3 términos:

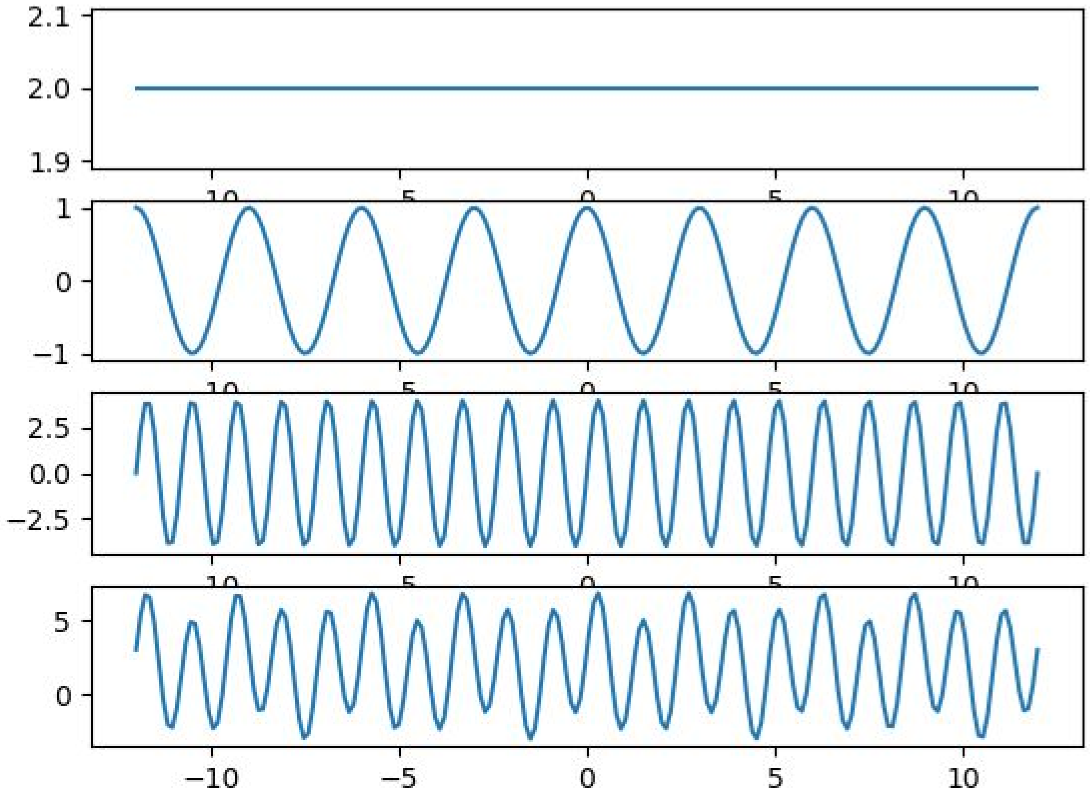
$$f_2(t) = 2 + cos(\frac{2\pi}{3}t) + sen(\frac{5\pi}{3}t)$$

Para analizar el periodo de esta señal acudimos a los pasos que seguimos para la primer con ayuda de las gráficas de cada componente para entender mejor cuál era el periodo de cada elemento de la suma así como el de la señal completa, estos son los resultados:

$T = 2 = 0$ (cte), $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow T = 3$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5\pi}{3} \rightarrow T = \frac{6}{5}$,

Mínimo común múltiplo: $T = \frac{30}{15} = 6$

Lo que con la gráfica pudimos comprobar:



Después pasamos a comprobar matemáticamente la serie de Fourier para la siguiente señal:

$$X(t)=\begin{cases} -1 & para -\dfrac{T}{2}<t<0 \\ 1 & para\ 0<t<\dfrac{T}{2} \end{cases}$$, donde el periodo es T

$$X(t)=\frac{4}{\pi}\left[sen(\omega_0\cdot t)+\frac{1}{3}sen(3\cdot\omega_0\cdot t)+\frac{1}{5}sen(5\cdot\omega_0\cdot t)+\dots\right]$$

El resultado fue el siguiente:

Tomando una onda cuadrada $f(x)$ de longitud $2L$.
En el rango $[0,2L]$, esto se puede escribir como:

$$f(x) = 2[H(x/L) - H(x/L - 1)] - 1$$

donde $H(x)$ es la función escalón. Como $f(x) = f(2L-x)$, la función es impar, por lo tanto $a_0 = a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

lo que se reduce a:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$

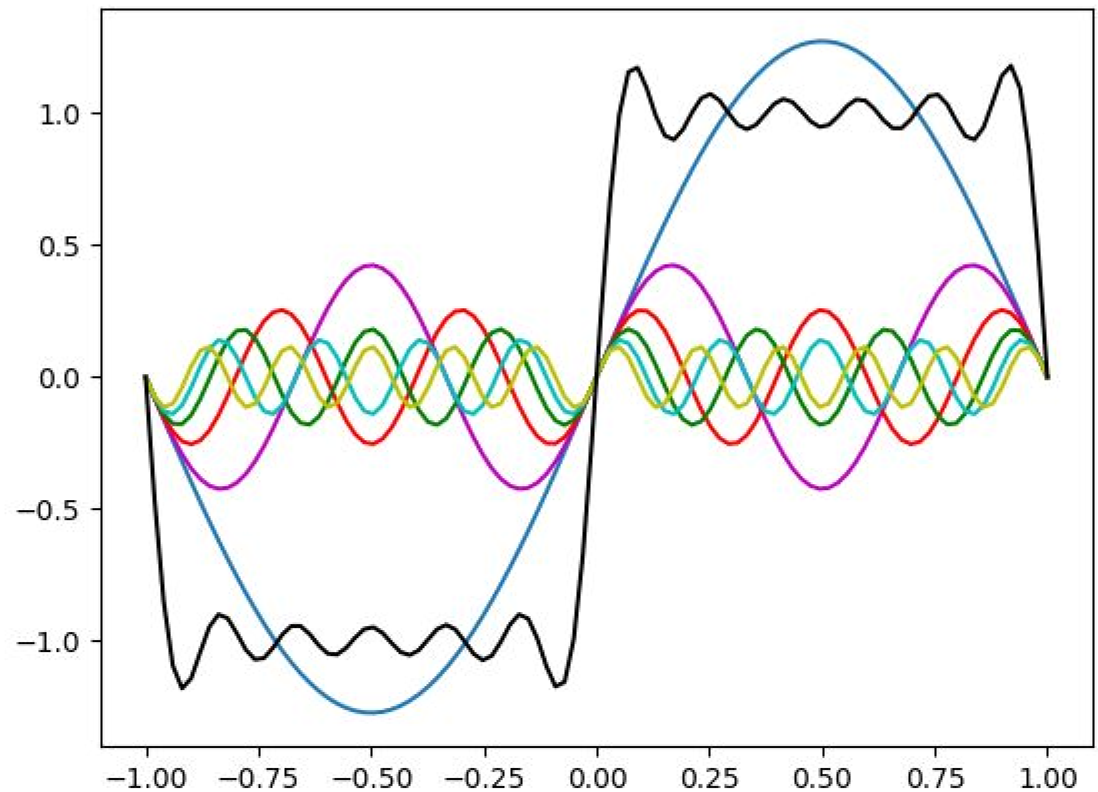
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar}\end{cases}$$

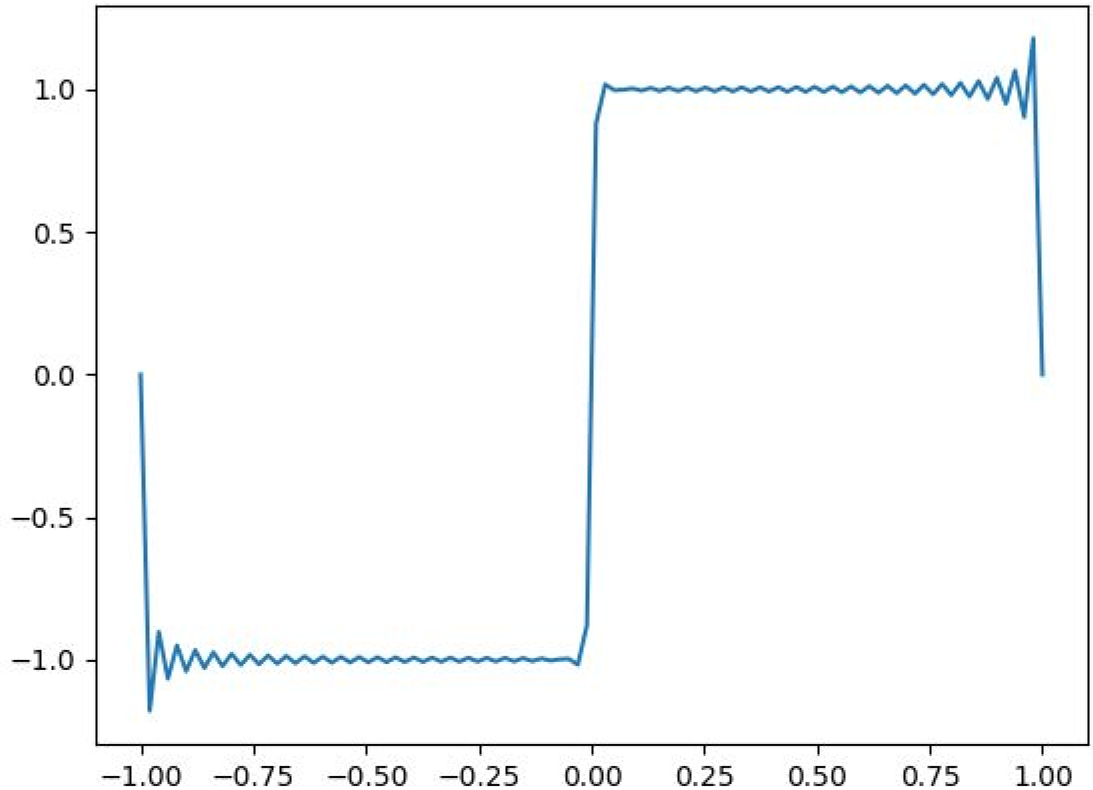
Por lo tanto la serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Luego, pasamos a hacer la gráfica de los primeros 4 elementos de la señal demostrada anteriormente, y la suma de estos términos tomando el periodo como T=2, por lo que $\omega=\pi$.
La gráfica resultante fue la siguiente:



Posteriormente, pasamos a realizar un programa en Python en donde se calcularon y graficaron los primeros 50 armónicos de la señal cuadrada X(t) (que fue la anterior). El resultado de la gráfica fue la siguiente:

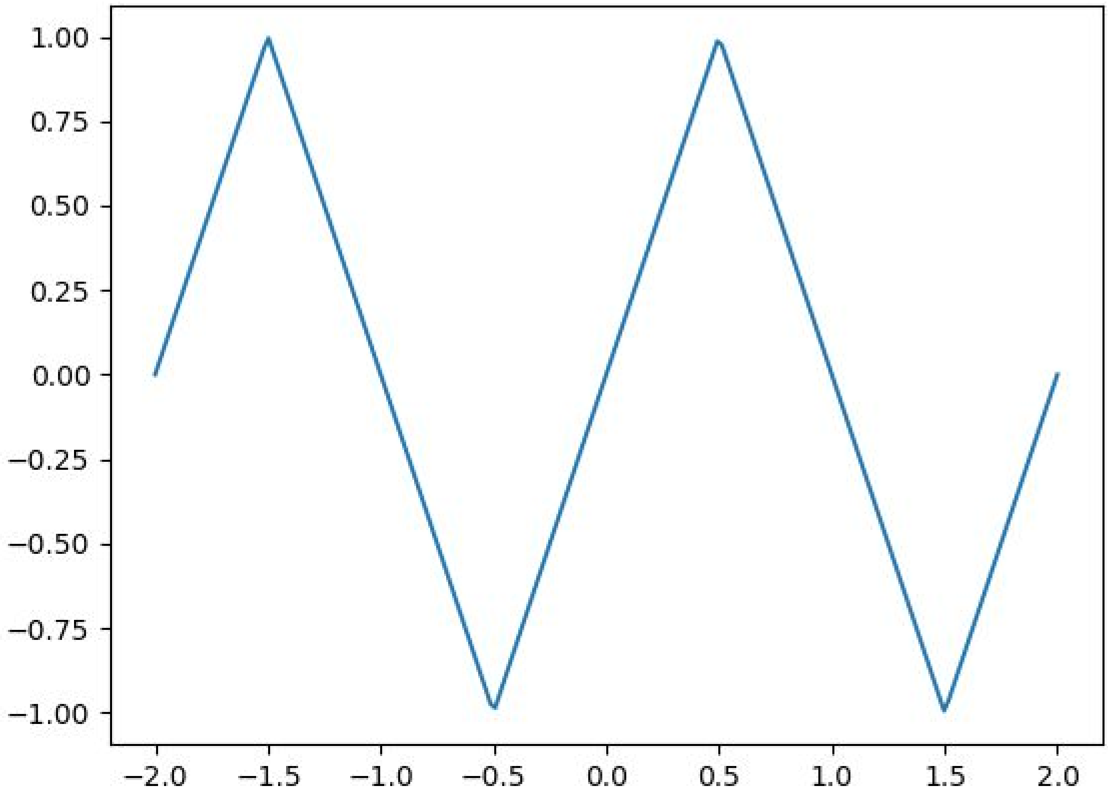


Después realizamos otro programa en Python pero esta vez la señal a calcular y graficar los primeros 50 armónicos era una señal triangular, que era la siguiente:

$$X(t)=\begin{cases} 2\cdot t & para\ 0<t<\dfrac{T}{4} \\ 2\cdot(1-t) & para\ \dfrac{T}{4}<t<\dfrac{3\cdot T}{4} \\ 2\cdot t & para\ \dfrac{3\cdot T}{4}<t<T \end{cases}$$, donde el periodo es T

$$X(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[sen(\omega_0\cdot t)-\frac{1}{9}sen(3\cdot\omega_0\cdot t)+\frac{1}{25}sen(5\cdot\omega_0\cdot t)-\frac{1}{49}sen(7\cdot\omega_0\cdot t)+\dots\right]$$

El resultado de la gráfica obtenida fue el siguiente:

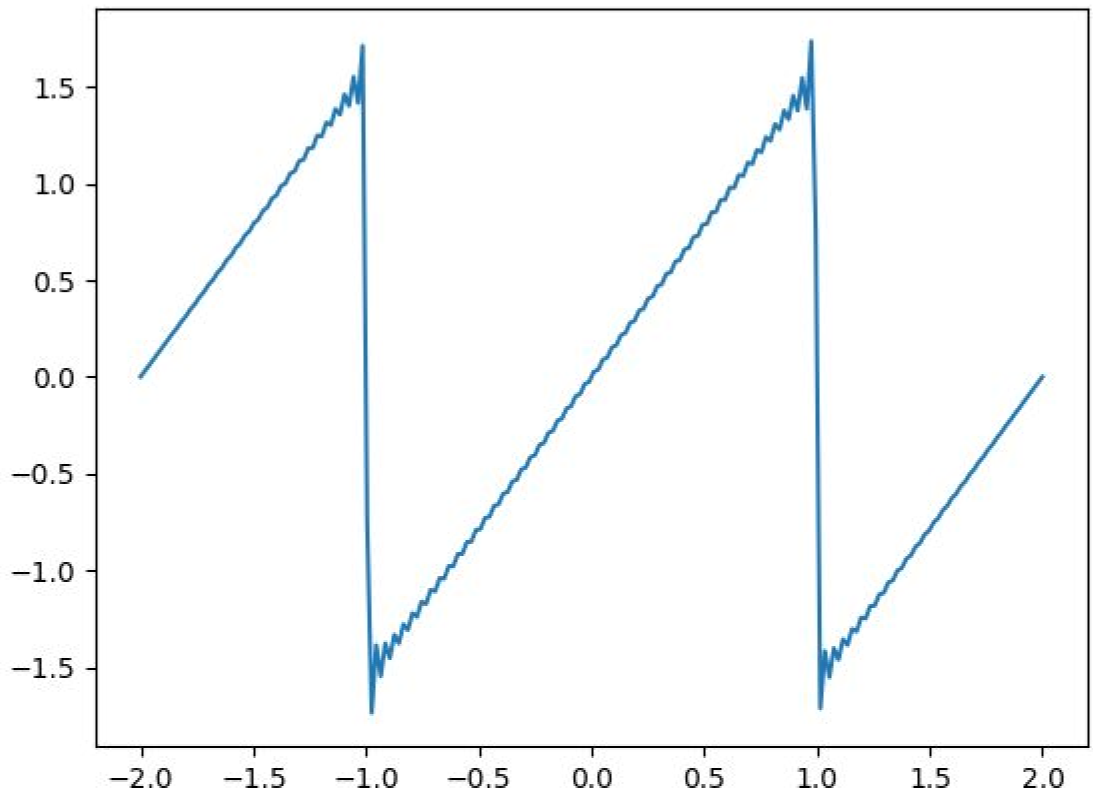


Lo que comprueba que nuestro programa es correcto, ya que es una señal triangular.
Por último, realizamos una función en Python la que calculaba y graficaba los primeros 50 armónicos de la señal tipo sierra, la cual está dada por:

$$X(t) = t \quad para \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$, donde el periodo es T

$$X(t) = \frac{2}{\pi}\left[sen(\omega_0 \cdot t) - \frac{1}{2} sen(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{3} sen(3 \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{1}{4} sen(4 \cdot \omega_0 \cdot t) + \dots \right]$$

El resultado de nuestra gráfica fue el siguiente:



Por la apariencia de la gráfica podemos notar que los 50 armónicos obtenidos son los correctos.

Respuestas a preguntas

1. **¿Qué periodo es mayor, el de cada término por separado o el de la señal sumada completa?**
   El de la señal sumada es mayor, ya que tiene que ser mayor a los elementos de la señal por separado y solo puede pasar esto si es mayor el de la señal sumada.

2. **¿Qué efecto describe el fenómeno de Gibbs y cómo se identifica en una señal reconstruida?**
   El fenómeno de Gibbs es la descripción del comportamiento que tiene la serie de Fourier asociada a una función definida a trozos periódica en una discontinuidad no evitable de salto finito.
   Cuando la función que se está desarrollando en Serie de Fourier tiene discontinuidades,no es posible que haya una buena convergencia en los entornos de las mismas.
   En tales entornos, las sumas parciales muestran tanto sobrevalores como subvalores alrededor del valor real de la función.

Experiencia (1-4 párrafos)
Al iniciar la práctica con lo más básico como obtener los periodos de señales y cómo se comporta un periodo cuando la señal tiene varios componentes, reforzamos lo aprendido de series de Fourier en teoría.
Al graficar las señales por partes, se puede notar de mejor manera como el periodo va cambiando en cada elemento y como al juntarlos crean una nueva onda, que es el nuevo periodo.
Fue interesante crear los métodos que calculan las 50 armónicas ya que al inicio tuvimos problemas en nuestro código ya que no notamos al principio que el signo no se alteraba de manera adecuada, esto fue por falta de paréntesis al elevar el -1 al número correcto, ya que si era par el signo es positivo y si era impar el signo es negativo. Al notar este error y corregirlo, la gráfia resulto correcta.
El graficar también el inciso 5 de la práctica, la gráfica seguí la curva correcta, pero no la forma (cuadrada con el fenómeno de Gibbs), esto fue ya que los valores que calculamos al inicio no eran los suficientes para crear la onda correcta, al definir bien el intervalo de la gráfica y el valor de los 50 armónicos, llegamos al resultado esperado.

Conclusiones (1-3 párrafos)
Fue una práctica bastante interesante ya que se reforzó de manera eficiente el concepto de las series de fourier teóricamente y prácticamente se visualizaron las señales, lo cual nos ayuda a incorporarnos con las señales que nos rodean.
Fue importante tener muy claro los efectos que pueden tener las señales con la serie de Fourier ya que el cambio que estas sufren es algo común una vez demostrado, pero que al inicio es difícil de comprender.
En cuanto a los demás fenómenos que se presentan con señales distintas es importante tenerlos en cuenta para considerarlos en el momento de hacer el análisis de las señales.