

Sayısal Analiz

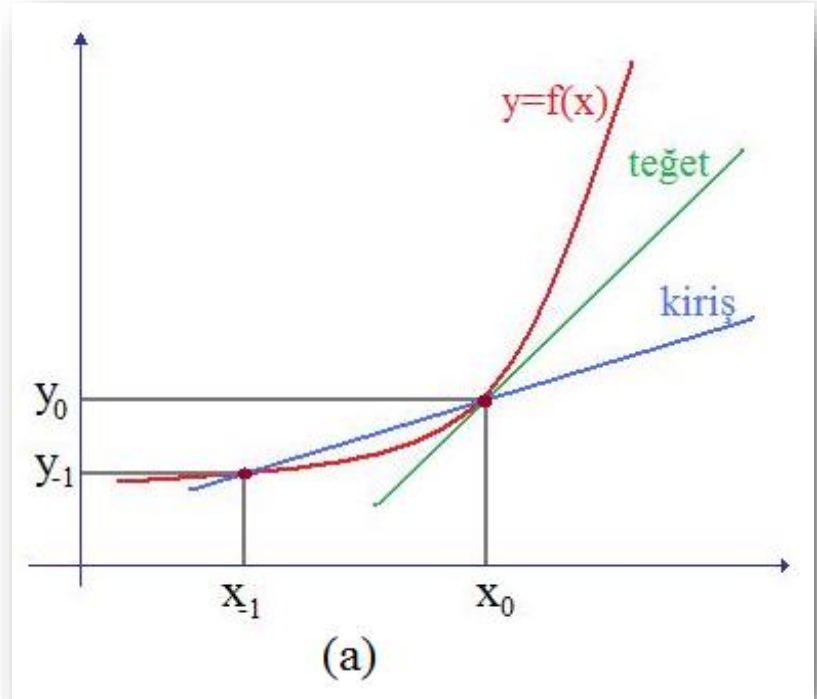
Sayısal Türev

- Sayısal türev ,
- Sonlu farklarla sayısal türev ,
- Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama ,
- Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama ,
- Polinomlarla Sayısal Türev ,



Tanım : Bir takım ayırık noktalarda değeri bilinen bir $f(x)$ fonksiyonunun bir noktadaki türevini yaklaşık olarak bulma işlemidir.

- ❑ Matematikte fonksiyonların analitik türev ve integral işlemleri fonksiyonuna bağlı hesaplanabilir, ancak analitik olarak integral veya türev almak mümkün olmadığı durumlarda sayısal türev ve sayısal integral işlemleri kullanılması gereklidir. Dolayısıyla birçok mühendislik probleminde değişim oranları kullanılır.
- ❑ Örnek olarak bir arabanın bir saatte aldığı yol veya bir akarsuda bir saniyede akan su miktarı, bir ülkenin yıllık nüfus artış hızı gibi. Bu örneklerde görüldüğü gibi iki farklı değişken arasında bir oran aranmaktadır.



Tanım

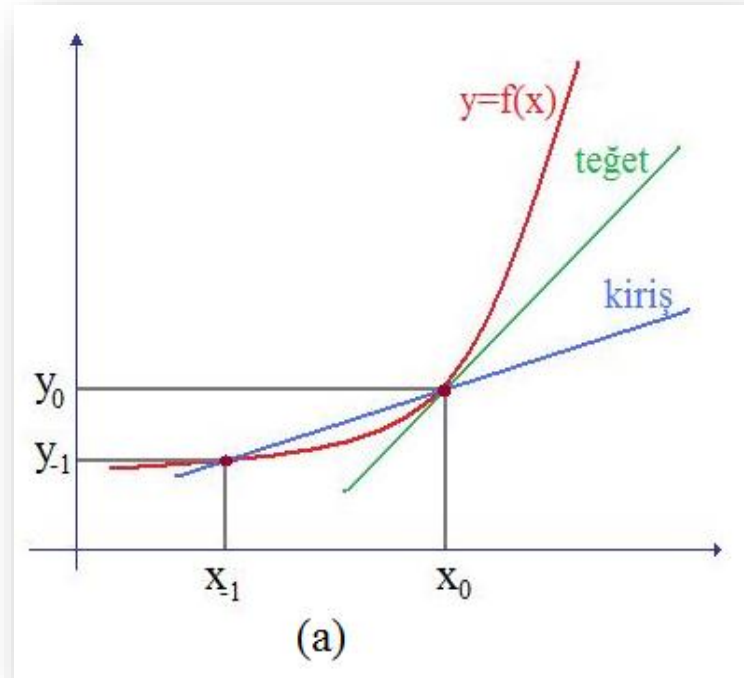
Türev' e geometrik açıdan bakıldığında bir fonksiyona ilişkin eğrinin her hangi bir x noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle x noktasındaki teğetin eğimi olarak görülebilir.

Diğer yandan türev, bir gözlemler veya ölçümler değerinin türevi ile, ölçülen veya gözlenen değerlerin uzaklığa veya zamana bağlı değişimini yansıtır.

Şekil 'de gösterildiği gibi $y=f(x)$ fonksiyonunda,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Limit değeri türevi ifade eder.



Geri Fark ile sayısal türev

Sonlu fark tablolarının elde edilmesinde incelediğimiz ileri, geri ve merkezi farkları kullanarak bir fonksiyonun gözlem veya ölçüm değerlerinin (sayısal türevlerinin) hesaplanması kolaylıkla yapılabilir

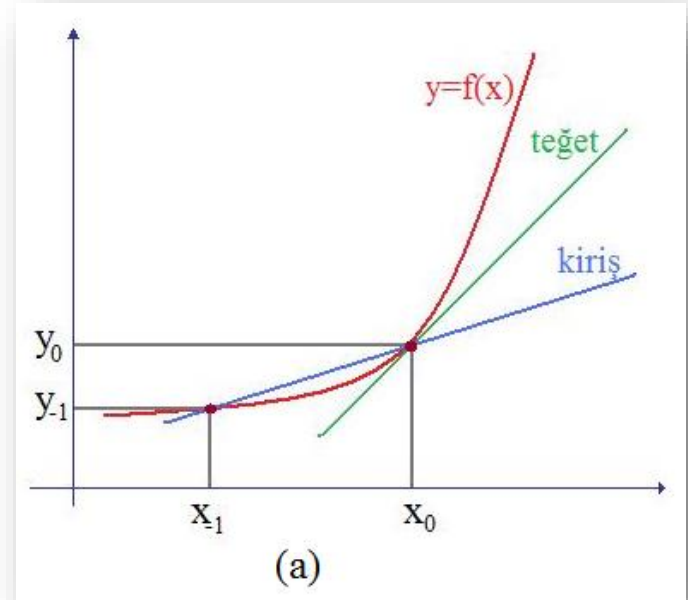
teğetin eğimi

$$y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

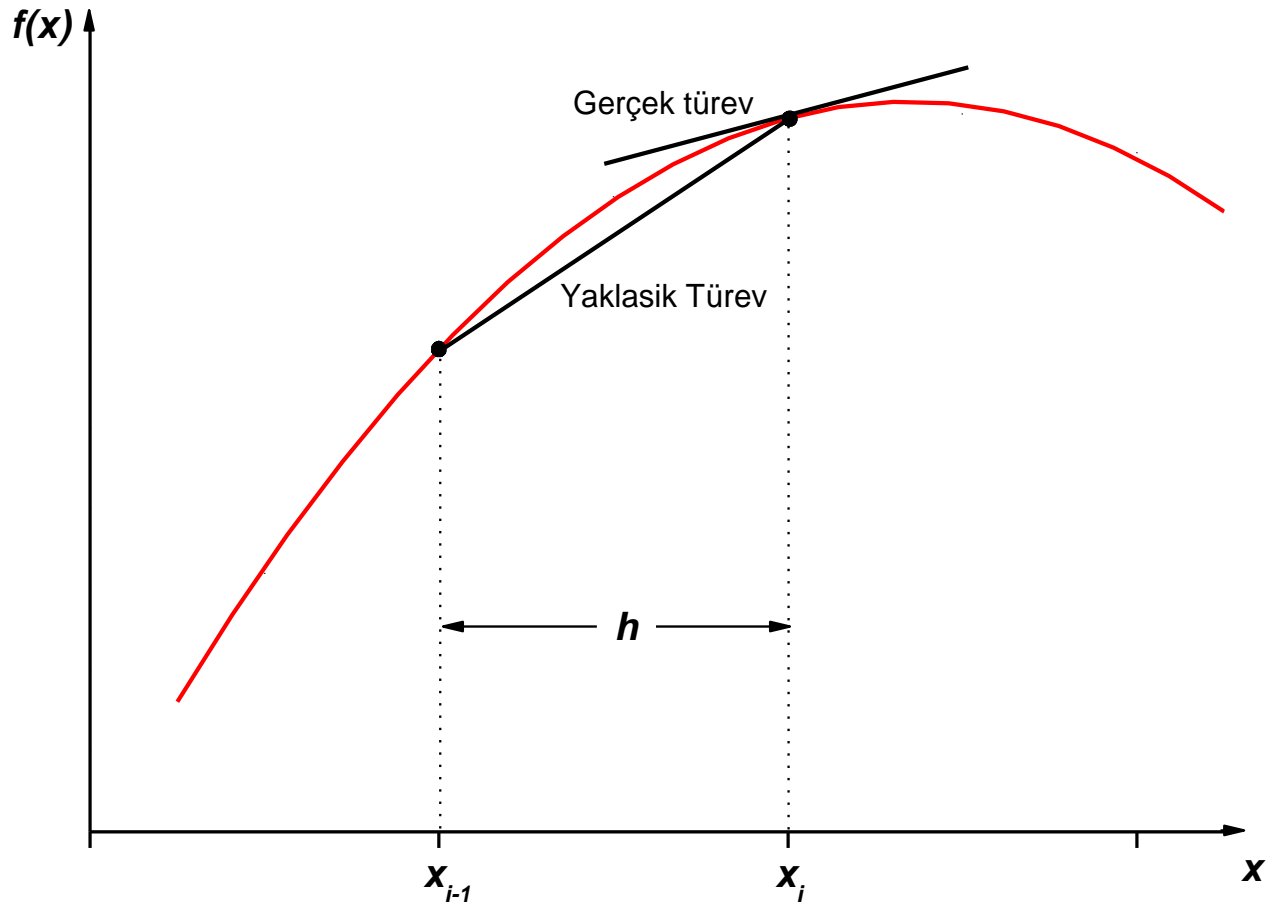
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0) - y(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

kirişin eğimi

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} \cong \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x}$$



Birinci türev için geriye yaklaştırmanın grafiksel gösterimi.



Geri doğru sonlu farklar ile sayısal türevler

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4}))}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

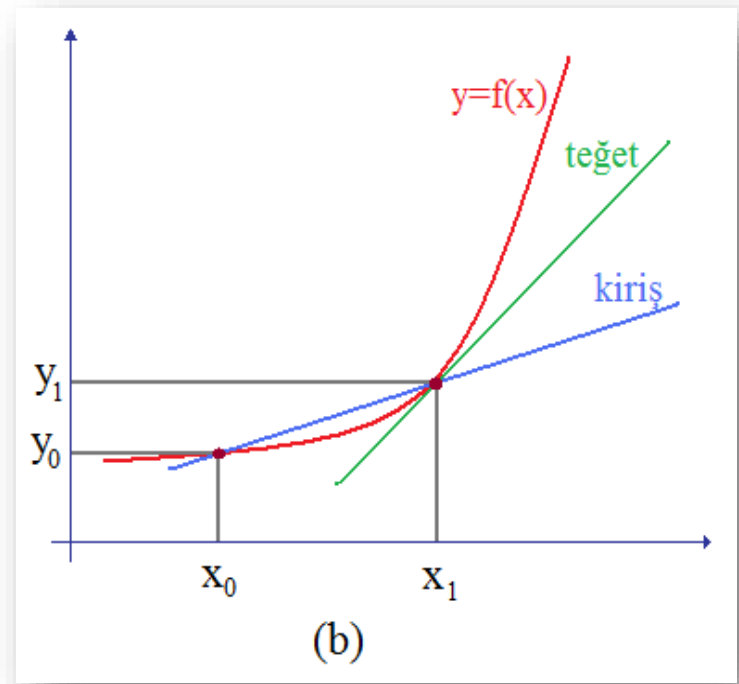
$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4}))}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5}))}{h^4}$$

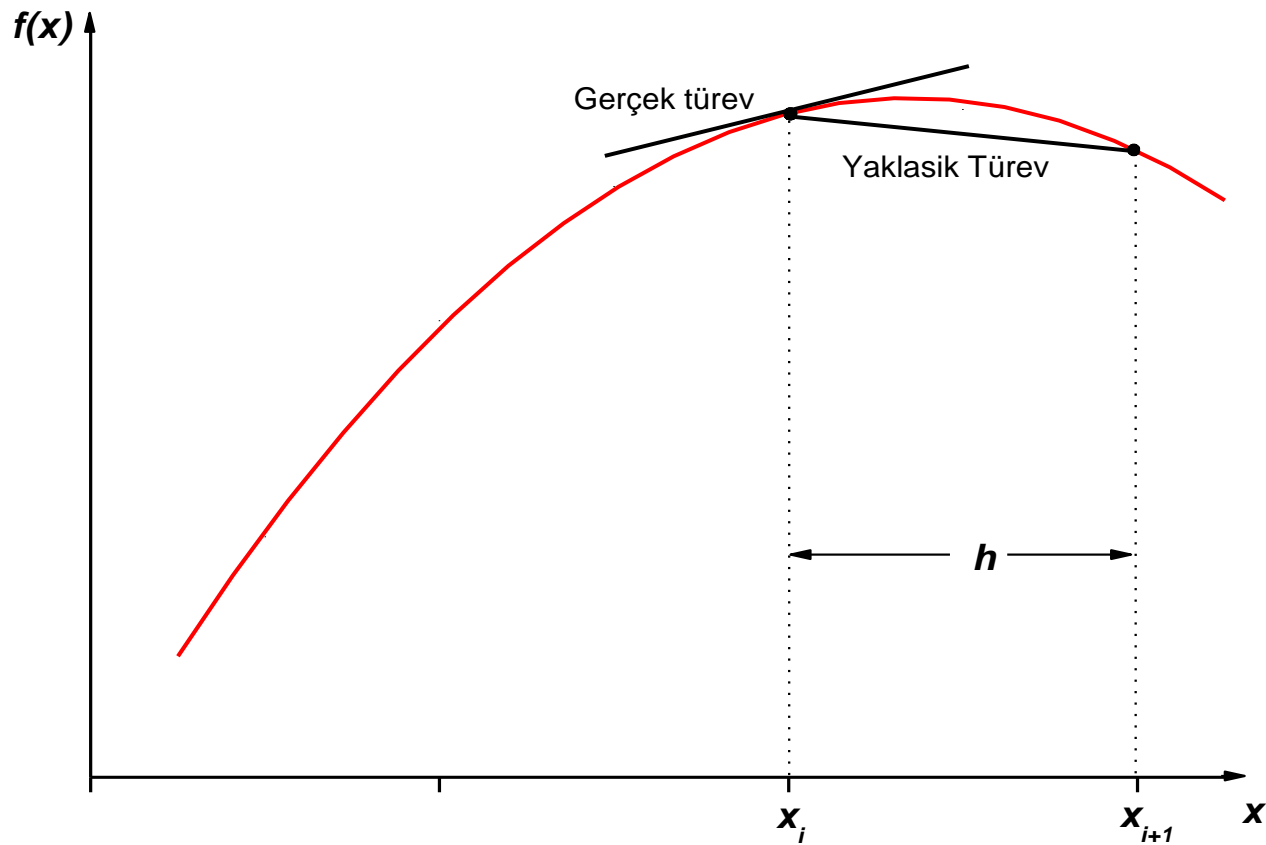
İleri Fark ile sayısal türev

$$y'(x_0) = \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x=x_0}$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \cong \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}$$

kirişin eğimi = $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$



Birinci türev için ileriye doğru yaklaşımın grafiksel gösterimi.



İleri doğru sonlu farklar ile sayısal türevler

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

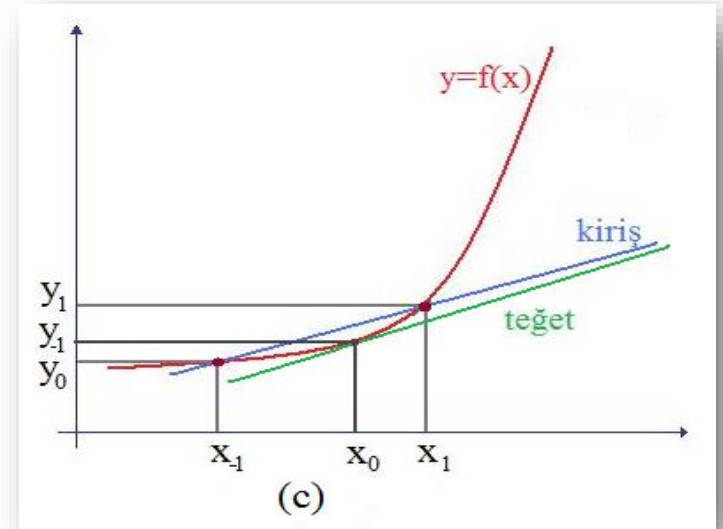
$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

Merkezi farklarla sayısal türev

$$y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$\text{kirişim eğimi} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x}$$

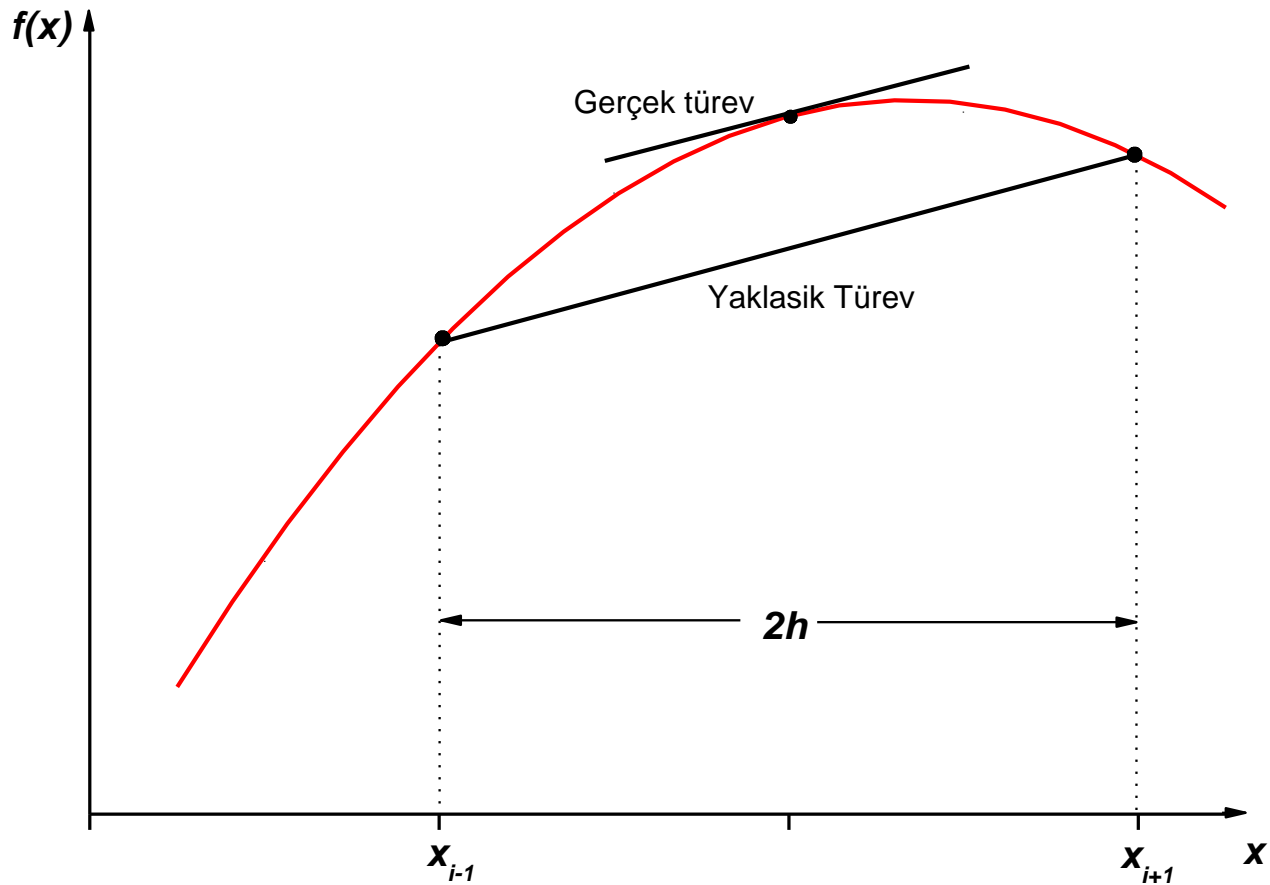


Üst mertebeden türevlerin hesaplanmasında, örneğin ikinci mertebe türevlerin sonlu farklara göre hesaplanmasında, birinci mertebe türevlerin tekrar türevleri hesaplanarak elde edilir.

İkinci Mertebe türevin geri farklarla hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0) - y'(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\nabla y_0}{\Delta x} - \frac{\nabla y_{-1}}{\Delta x} \right] = \frac{1}{\Delta x^2} [\nabla y_0 - \nabla y_{-1}] = \frac{1}{\Delta x^2} \nabla^2 y_0$$

Birinci türev için simetrik fark yaklaşımını grafiksel gösterimi.



Merkezi farklarla sayısal türev

İkinci Mertebe türevin ileri farklarla hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0 + \Delta x) - y'(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \right] = \frac{1}{\Delta x^2} [\Delta y_1 - \Delta y_0] = \frac{1}{\Delta x^2} \Delta^2 y_0$$

ve ikinci mertebe türevin Merkezi fark ile hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0 + \Delta x) - y'(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{\delta y_1}{2\Delta x} - \frac{\delta y_0}{2\Delta x} \right] = \frac{1}{(2\Delta x)^2} \delta^2 y_0$$

Üçüncü mertebeden sayısal türevlerin hesaplanmasında ikinci mertebe türev eşitlikleri kullanılarak elde edilir.

Merkezi Farklar ile sayısal türevler

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{6h^4}$$

Sayısal Türev

Örnek 1:

$y=e^x$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasındaki eğimini (türevini) $\Delta x=0.1$ adım aralığı olarak, geri farklar, ileri farklar ve merkezi farklar yöntemlerine göre hesaplayınız, bağıntıdan analitik yolla gerçek değerini bularak sonuçlarını karşılaştırınız. ?

a) Geri farklar yöntemine göre;

$$y'(x_0) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x}$$

$$y=e^x$$

$$y_{-1} = e^x|_{x=1.0-0.1=0.9} = 2.459$$

$$y_0 = e^x|_{x=1} = 2.7182$$

$$\rightarrow = \frac{2.7182 - 2.459}{0.1} = 2.586$$

Sayısal Türev

b) ileri farklar yöntemine göre ;

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

$$y_1 = e^x \big|_{x=1+\Delta x=1.1} = 3.0042 = (3.0042 - 2.71829)/0.1 = 2.8591$$

c) Merkezi farklar yöntemine göre ;

$$y'(x_0) = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x}$$

$$y'(x_0) = (y_1 - y_{-1})/(2\Delta x) = (3.0042 - 2.4596)/(2*0.1) = 2.7230$$

d) Analitik karşılaştırma ;

$$y_d' = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad y'(1) = e^1 = 2,71828$$

$$e_b = \frac{|y_d' - y_b'|}{y_d'} = \frac{|2,71828 - 2,8591|}{2,71828} = \%5.18$$

$$e_a = \frac{|y_d' - y_a'|}{y_d'} = \frac{|2,71828 - 2,58678|}{2,71828} = \%4.83$$

$$e_c = \frac{|y_d' - y_c'|}{y_d'} = \frac{|2,71828 - 2,7230|}{2,71828} = \%0.167$$

ÖRNEK:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ $x = 4$ de $h = 0.01$ için Birinci Türevini Merkezi Fark formülü ile hesaplayınız.

$$f'(x) = \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h}$$

$$f'(4) = \frac{f(4 + 0.005) - f(4 - 0.005)}{0.01} = 13 \quad (\text{gerçek değer} = 13)$$

Sayısal Türev

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(5) = ?$$

$$f''(5) = ?$$

Analitik çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(5) = 0,2$$

$$f''(5) = -0,04$$

Sayısal çözüm:

$$f'(5) = \frac{\ln(5 + 0,01) - \ln(5)}{5,01 - 5} = \frac{1,6114435915 - 1,609437912}{0,01} \Rightarrow f'(5) = 0,199800$$

$$f''(5) = \frac{\ln(5,02) - 2\ln(5,01) + \ln(5)}{(0,01)^2} = \frac{1,613429934 - 2 * 1,611435915 + 1,609437912}{0,0001} = -0,0398405$$

Matlab

$y(x)=x^2$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki türevini hesaplayınız

```
>> y=inline('x^2');  
>> a=3;x=3;  
>> h=0.5;  
>> iturev=(y(a+h)-y(a))/h;  
>> mturev=(y(a+h)-y(a-h))/(2*h);  
>> gturev=(y(a)-y(a-h))/h;  
>> aturev=inline('2*x');  
>> disp(num2str(h))  
0.5  
>> disp(num2str(iturev))  
6.5  
>> disp(num2str(mturev))  
6  
>> disp(num2str(gturev))  
5.5  
>> disp(num2str(aturev(a)))  
6
```

Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama

Bir $f(x)$ fonksiyonun $x+\Delta x$ noktasındaki değerini yaklaşık olarak hesaplamak için Taylor seri açılımından yararlanılır. Taylor seri açılımı:

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} F'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} F''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} F'''(x_0) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} F^n(x_0) \quad \text{ile verilir.}$$

Burada $\Delta x = (x - x_0)$ farkını ve F', F'', \dots, F^n türev mertebesini gösterir.

Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx ' in mertebesine eşit olur.

Örneğin verilen Taylor serisinde üçüncü terim' den sonraki terimler atılacak olursa, yapılan hatanın mertebesi **3** olacaktır.

Taylor serisinde ikinci terimden sonraki terimler atılacak olursa,

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \Delta x F'(x_0) \quad \text{ve bu ifadeden } F'(x_0) \text{ çekilirse,}$$

$$F'(x_0) = [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] / \Delta x = \Delta F_0 / \Delta x \quad \text{olarak bulunur.}$$

Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama

Birinci mertebeden geri fark türev eşitliği elde edilmiş olur.

Benzer şekilde elde edilen ileri fark ve geri fark türev eşitlikleri kullanılarak (farkları alınarak) merkezi fark türev eşitliği elde edilebilir.

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \Delta x F'(x_0)$$

$$F(x_0 - \Delta x) = F(x_0) - \Delta x F'(x_0)$$

Farklarından

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0 - \Delta x) = 2\Delta x F'(x_0)$$

ve

$$F'(x_0) = [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0 - \Delta x)] / 2\Delta x = \delta F(x_0) / 2\Delta x$$

Taylor serisinde daha fazla sayıda terim kullanarak (burada ilk iki terimi kullanmış olduk) yapılan türev alma işleminde hata değeri azaltılabilir ve yeni türev bağıntıları geliştirmek mümkündür.


Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama


Örnek 2:


Yeni birinci mertebeden bir türev bağıntısı elde etmek için Taylor serisini

$$F(x_0 + m\Delta x) = F(x_0) + \frac{m\Delta x}{1!} F'(x_0) + \frac{(m\Delta x)^2}{2!} F''(x_0) + \frac{(m\Delta x)^3}{3!} F'''(x_0) + \dots + \frac{(m\Delta x)^n}{n!} F^n(x_0)$$

şeklinde yazalım. Sırasıyla Taylor serisinde **m=1**, **m=2** ve **m=3** alarak 3 eşitlik oluşturalım ve serilerin ilk üç teriminden sonraki terimleri ihmal edelim. Elde etmiş olduğumuz her bir seriyi sırasıyla a,b ve c gibi katsayılarla çarpalım:

m=1 için a  $F_1 = F(x_0) + \Delta x F'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} F''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} F'''(x_0)$

m=2 için b  $F_2 = F(x_0) + 2\Delta x F'(x_0) + \frac{(4\Delta x^2)}{2!} F''(x_0) + \frac{(8\Delta x^3)}{3!} F'''(x_0)$

m=3 için c  $F_3 = F(x_0) + 3\Delta x F'(x_0) + \frac{(9\Delta x^2)}{2!} F''(x_0) + \frac{(27\Delta x^3)}{3!} F'''(x_0)$



$$aF_1 + bF_2 + cF_3 = F(x_0)(a+b+c) + \Delta x F'(x_0)(a+2b+3c) + \Delta x^2 F''(x_0)(a+4b+9c)/2 + \Delta x^3 F'''(x_0)(a+8b+27c)/6$$

Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama

Birinci mertebeden bir türev tanımı çıkartacağımızdan bulunacak y' ifadesi içerisinde y_0, y_1, y_2, y_3 gibi dört noktayı alıp y_0'', y_0''' lü terimleri yok edersek hata **$R(h^3)$** olur.

y_0'' ve y_0''' lü terimlerin yok olması için bunların katsayıları sıfır olmalıdır. Yani ;

$$a+4b+9c = 0 \quad a+8b+27c=0 \quad \text{olması gerekir.}$$

Bu homojen denklemin çözümü için a, b ve c tam sayı olmak üzere a keyfi olarak seçilip

$b=k_1a$ ve $c=k_2a$ olarak ifade edilirse yukarıdaki denklemlerden ;

$$a(1+4k_1 + 9k_2)=0 \quad a(1+8k_1 + 27k_2)=0 \quad \text{elde edilir.}$$

$$a \neq 0 \text{ olduğundan buradan } 1+4k_1 + 9k_2=0 \quad 1+8k_1 + 27k_2=0 \quad \text{yazılır,}$$

bu denklemlerden k_1 ve k_2 çözülürse,

$$k_1=-1/2 \text{ ve } k_2=1/9 \quad \text{bulunur.} \quad \text{O halde } b= -a/2, c=a/9 \text{ elde edilir.}$$

Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama

a, b ve **c** katsayıları tamsayı olması gerektiğinden **a** değeri hem **2** ye hem de **9**' a bölünebilmelidir.

Yani **a=18** olmak zorundadır. Böylece **a=18**, **b=-9** ve **c=2** olarak belirlenmiş olur.

a, b, c katsayıları yerine yazılarak birinci mertebeden bir türev bağıntısı:

$$F'(x_0) = [2F_3 - 9F_2 + 18F_1 - 11F(x_0)] / 6\Delta x + O(\Delta x^3)$$

Burada **$O(\Delta x^3)$** yapılan hatanın derecesini gösterir.

veya **$18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 11y_0 + 6hy_0' + 3/2h^4y_0^{(4)} + \dots$** elde edilir ,

buradan da

$$y_0' = \frac{2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0}{6h} + R(h^3) \text{ olur}$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

Daha önceki interpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz, ileri fark interpolasyon ifadesi:

$$Y_n = y_0 + n\Delta y_0 + [n(n-1)/2!] \Delta^2 y_0 + [n(n-1)(n-2)/3!] \Delta^3 y_0 + \dots$$

n' ye göre türevi $\frac{dy_n}{dn}$ alınır, $\frac{dy_n}{dn} = \Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2 - 6n + 2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$

Burada $n = \frac{x - x_0}{\Delta x}$, $\frac{dx}{dn} = \Delta x$ ve $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn}$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2 - 6n + 2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right] \text{ elde edilir.}$$

$x=x_0$ noktasındaki türev için $n=0$ olur ve $y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn} \Big|_{n=0}$

$$y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \dots \right] \text{ olur.}$$

Benzer işlemi Geri yön interpolasyon ifadesi

$$y_n = y_0 + n\nabla y_0 + [n(n+1)/2!] \nabla^2 y_0 + [n(n+1)(n+2)/3!] \nabla^3 y_0 + \dots \text{ için yapılırsa,}$$

genel bir ifade olarak $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn}$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[\nabla y_0 + \frac{1}{2} \nabla^2 y_0 + \frac{1}{3} \nabla^3 y_0 + \dots \right] \text{ elde edilir.}$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

Örnek 4:

$y=e^x$, $x \in [0, 5]$ ve $\Delta x=1.0$ aralığında fonksiyonun ileri fark tablosunu hazırlayarak $x=2$ noktasındaki türevi ileri yön (Newton-Gregory) bağıntısı ile hesaplayınız?

İleri fark türev bağıntısı

$$y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \dots \right]$$

$X_0=2$ için (temel satır)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1.0	1.718	2.944	5.0940
1	2.718	4.662	8.038	13.7720
2	7.38	12.7	21.81	37.500
3	20.08	34.51	59.31	
4	54.59	93.82		
5	148.41			

$$Y' = (1/1)[12.7 - (1/2)21.81 + (1/3)37.5] = 14.2950$$

Fonksiyonun $x=2$ noktasındaki gerçek türev değeri ise $y' = e^2 = 7.3891$ bu problemde $x=2$ noktası var olduğundan $n=0$ alınmış oldu.

Polinomlarla Sayısal Türev :

Örneğin $y(x)=ax^2+bx+c$ polinomunu ele alacak olursak

$x_0=0, x_1=h, x_2=2h$ noktalarındaki değerleri y_0, y_1, y_2 ise

$$x_0=0 \quad y_0=c$$

$$x_1=h \quad y_1=Ah^2+Bh+c$$

$$x_2=2h \quad y_2=4Ah^2+2Bh+c \quad \text{üç eşitlikten ; } B = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$$

elde edilir. Ayrıca $x=0$ da $y'(0)=y'_0=B$ olduğundan $y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$ sonlu farklar bağıntısı elde edilir.

Bu ise daha önce elde edilmiş olan yüksek mertebeden ileri yön sonlu fark bağıntısının aynıdır.

Eğer $x_0=0, x_1=h, x_2=3h$ aralıkları için y_0, y_1 ve y_2 verilmiş olsaydı

$$x_0=0 \quad y_0=c$$

$$x_1=h \quad y_1=Ah^2+Bh+c$$

$$x_2=3h \quad y_2=9h^2+3Bh+c \quad \text{elde edilir ve bunlardan } y'(0) = y'_0 = \frac{-8y_0 + 9y_1 - y_2}{6h}$$

elde edilirdi.

Polinomlarla Sayısal Türev :

Örnek 5:

x	0	1	2	3	4	5
Y=f(x)	1	0.5	8.0	35.5	95.0	198.5

Tablodaki bilgiler bir polinoma aittir. Polinom kaçınıcı dereceden ve bu polinomun terimleri içersinde en büyük dereceli olanın kat sayısını bulunuz.

Geri yönlü sonlu farklar kullanılabileceği gibi biz burada ileri yön sonlu farkları bulalım.

x	y	Δ	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	-0.5	8	12
1	0.5	7.5	20	12
2	8.0	27.5	32	12
3	35.5	59.5	44	
4	95.0	103.5		
5	198.5			

Görüldüğü gibi 3. Farklar sabit olduğundan polinom 3. Derecedendir. Üçüncü türevin sonlu farklar cinsinden

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\Delta^3 y}{h^3} + R(h)$$

Olup hatayı ihmal ederek ve x in verilen değerlerinden $h=1$ olduğu hatırlanırsa üçüncü dereceden polinomun

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\Delta^3 y}{h^3} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{12}{1} = 12$$

Ardışık integrasyonu ile aranan polinomun

$$y = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \quad \text{olduğu ortaya çıkar}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3c_3 x^2 + 2c_2 x + c_1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 6c_3 x + 2c_2$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6c_3 = 12$$

MATLAB'da türev işlemi `polyder()`, ve `diff()` fonksiyonları kullanılır.

Polinomların türevi alınacak ise `polyder` (katsayılar) komutu ile kullanılır.

Örnek: $f(x) = 4x^5 - x^3 + 2x^2 - 20$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

```
>> k=[4, 0, -1, 2, 0, -20]
k =
     4     0    -1     2     0    -20
>> polyder(k)
ans =
    20     0    -3     4     0
```

Sonuç $f'(x) = 20x^4 - 3x^2 + 4x$

diff() ile Türev

Eğer bir fonksiyonu türevi alınacak ise `diff()` komutu kullanılır.

Örnek: $f(x) = \sin(x)/x$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

```
>> f='sin(x)/x';  
>> diff(f)  
ans =  
  
cos(x)/x-sin(x)/x^2  
>>
```

Burada fonksiyon $f=\sin(x)/x$ şeklinde tanımlandığı gibi istenirse.

```
>>syms x  
>>f=sin(x)/x;  
>>diff(f)  
ans=  
cos(x)/x-sin(x)/x^2
```

İkinci dereceden türev

```
>> syms y
>> f=x^2*y^3*cos(2*x)^2
f =
    x^2*y^3*cos(2*x)^2
>> simplify(diff(diff(f,x),x))
ans =
    -2*y^3*(-cos(2*x)^2+8*x*cos(2*x)*sin(2*x)-4*x^2+8*x^2*cos(2*x)^2)
```

Eğer fonksiyonun belli yerlerdeki türevleri isteniyor ise bu durumda $\text{diff}(y) ./ \text{diff}(x)$ ile türev hesaplanabilir.

$f(x) = \sin(x)/x$ fonksiyonunun türevini $[0, \pi]$ aralığında hesaplayınız.

```
>> x=0:0.5:2
x=
    0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
>> f=sin(x)
f=
    0    0.4794    0.8415    0.9975    0.9093
>> diff(f) ./ diff(x)
ans=
    0.9589    0.7241    0.3120   -0.1764
```

Kaynaklar :

Sayısal Analiz

S. Akpınar

Mühendisler için Sayısal Yöntemler

(Steven C. Chapra & Raymond P. Canale)

