Sayısal Analiz

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

İletişim :

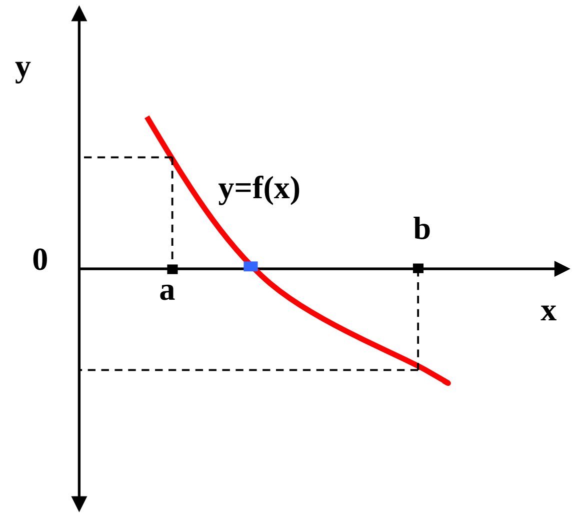
yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

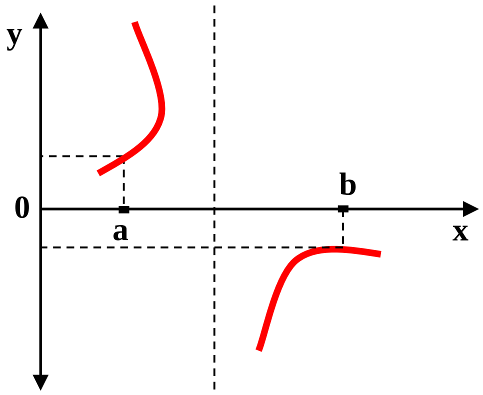
Ders İçeriği

- Basit İterasyon Yöntemi
- Yarılama (Bisection) Yöntemi
- Kiriş (secant) Yöntemi
- Örnekler

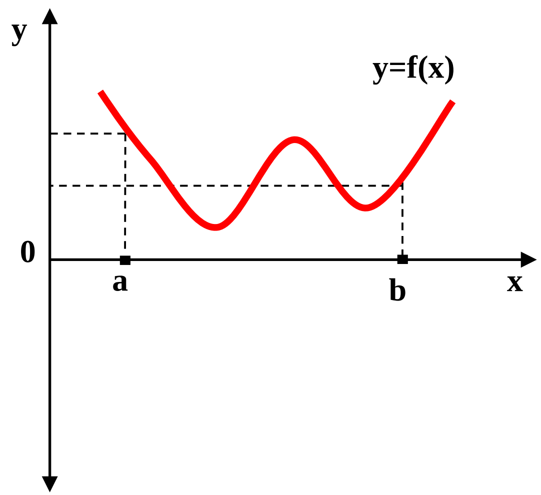
TEOREM

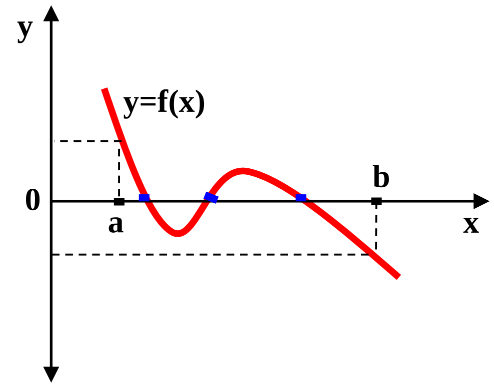
Eğer f(x), x=a ve x= b aralığında sürekli ve f(a) ile f(b) ters işaretli ise a, b aralığında en az bir kök vardır.





f(a) ve f(b) ters işaretli olmasına karşın fonksiyon süreksiz olduğundan bu aralıkta kök yoktur.



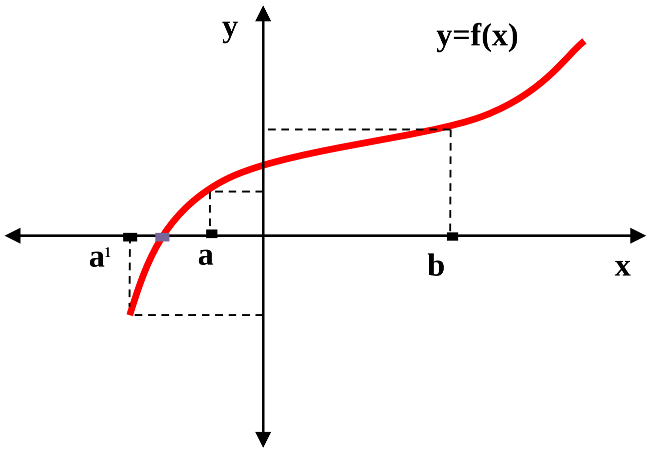


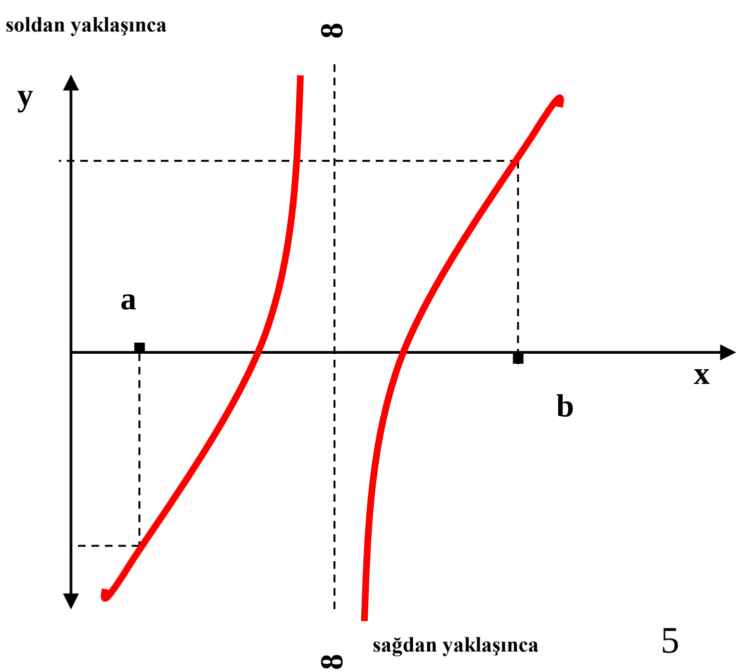
f(x) f.nu hiç x eksenini kesmediğinden kök yoktur

a, b arasında üç kök vardır

TEOREM

Eğer f(x), x=a ve x=b aralığında sürekli ve aynı zamanda x değeri arttığında f.da artıyorsa veya x değeri azaldığında f.da azalıyorsa f(x)=0 değerini sağlayan bir kök vardır.





x arttığında fonksiyonda artıyor, fakat sürekli değil. Buna rağmen iki adet kök vardır.

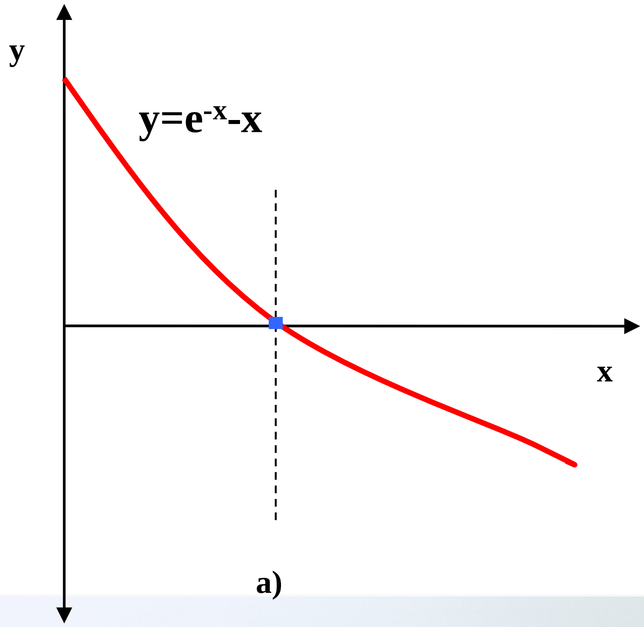
ÖRNEK

Bu f.nun kökleri grafik yöntemle iki şekilde bulunabilir.

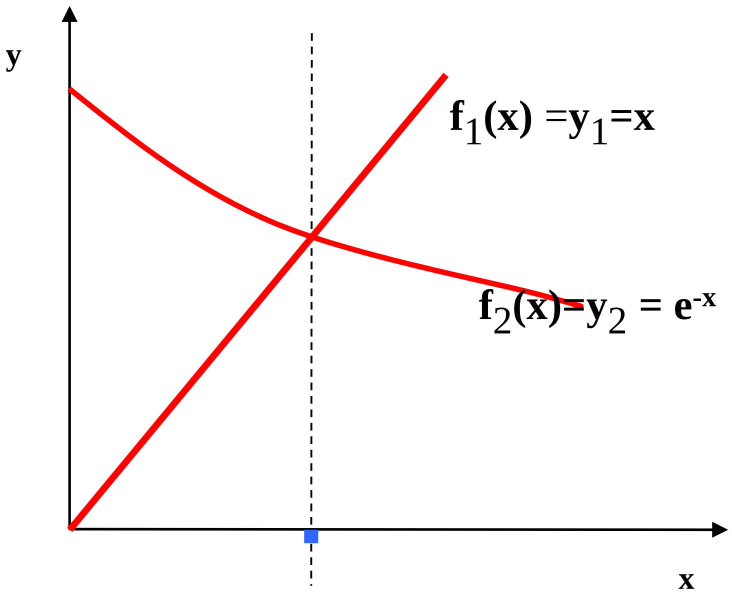
a) x ekseni kestiği yerdeki kök

b) Bileşen f.larının kesiştiği yerdeki kök.

$$e^{-x} - x = 0 \quad , \quad x = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_1 = x \quad \text{ve} \quad y_2 = e^{-x}$$

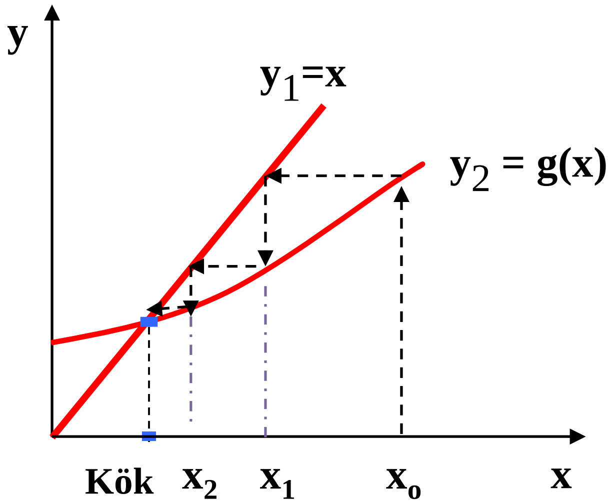


a)

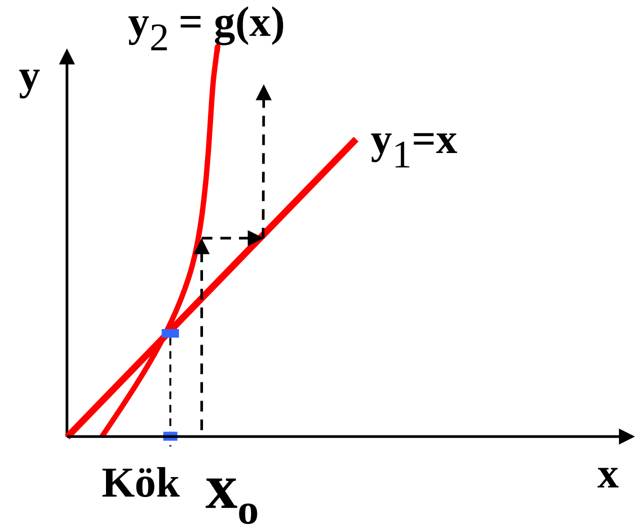


b)

Basit iterasyonun yakınsamasının ve ıraksamasının gösterimi



Yakınsak



Iraksak

Yakınsama ve ıraksama şartı

$y_1 = x \rightarrow y^{|}_1 = 1$ (Eğim)

$y_2 = g(x) \rightarrow |\, g^{|}(x_o) \,| < 1$ ise yakınsak

$|\, g^{|}(x_o) \,| > 1$ ise ıraksak

Burada $y_2 = g(x)$ f.nun eğiminin mutlak değeri $y_1 = x$ f.nun eğiminden küçük olması halinde yakınsama olmaktadır.

ÖRNEK

$y = x^2 - x - 3$ denkleminin $x_o = 1$ noktasında yakınsak mıdır ?

Çözüm :

$x = x^2 - 3$ ' den

$y_1 = x$

$y_2 = x^2 - 3 = g(x) \rightarrow | g^{|}(x_o) = 2x = 2 | > 1$

olduğundan ıraksaktır

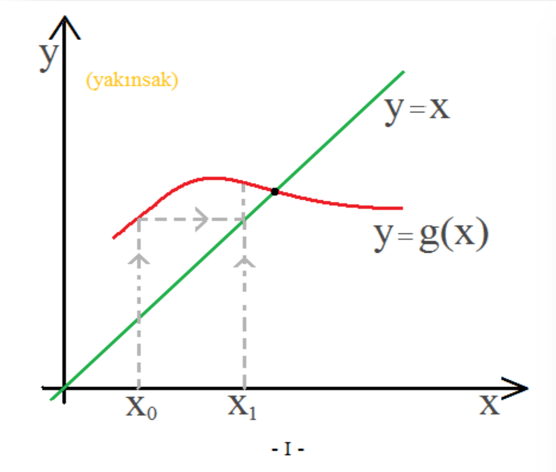
BSM

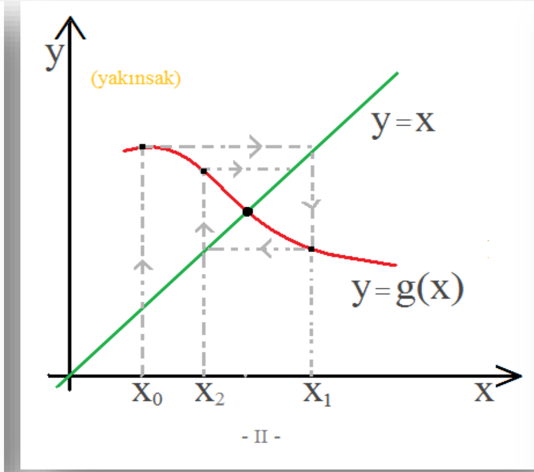
6. Hafta

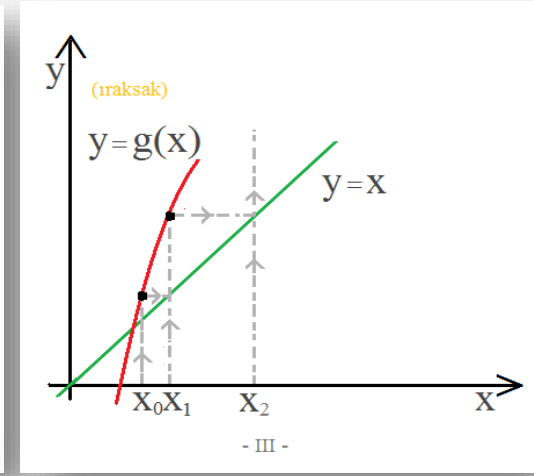
2. Sayfa

Basit İterasyon Yöntemi :

$f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ durumuna getirilir.
Bu eşitliğin anlamı $y=x$ doğrusu ile $y=g(x)$ fonksiyonunun kesişim noktasını bulmaktır.
$x=x_0$ başlangıç değeri için $g(x_0)$ değerini bularak işlem yapılırsa ;







X' in yeni değeri olarak $\mathbf{X_1=g(x_0)}$ alınır. İşlemler tekrarlanırsa
$X_1=g(x_0)$
$X_2=g(x_1)$
…
$X_n=g(x_{n-1})$ her bir işlem sonunda yeni bir **X** değeri elde edilir.

Örnek :

$f(x) = 3e^{-0.5x} - x$ denkleminin kökünü x_0=8 başlangıç değeri için ε = 0.07 mutlak hata ile bulunuz.

Verilen $\boldsymbol{f(x)}$ fonksiyonu **x=g**(x) şekline sokulursa x=3$e^{-0.5x}$ elde edilir.

$\mathbf{g}(x) = 3e^{-0.5x}$, x_0=8 , ε = 0.07 verileri ile İterasyon işlemleri gerçekleştirildiğinde;

iterasyon sayısı	x	g(x)	h=|x_n-x_{n-1}|
1	**8**	0,054946917	7,945053083
2	0,054946917	2,918701514	2,863754597
3	2,918701514	0,697161304	2,221540209
4	0,697161304	2,117066992	1,419905688
5	2,117066992	1,040892786	1,076174206
6	1,040892786	1,782765652	0,741872867
7	1,782765652	1,230264839	0,552500813
8	1,230264839	1,621707926	0,391443087
9	1,621707926	1,333435008	0,288272918
10	1,333435008	1,540173057	0,206738049
11	1,540173057	1,388919019	0,151254038
12	1,388919019	1,498032798	0,109113779
13	1,498032798	1,418494205	**0,079538593**
14	1,418494205	1,476043484	

13. iterasyondan sonra **ε = 0.07** hata ile kök değeri **x=1.4** elde edilir. (Yakınsak iterasyon)

Örnek :

$f(x) = 3\ln(x) - x$ denkleminin kökünü $x_0=2$ başlangıç değeri için $\varepsilon = 0.09$ mutlak hata ile bulunuz.

Verilen $\boldsymbol{f(x)}$ fonksiyonu **x=g**(x) şekline sokulursa $x=3\ln(x)$ elde edilir.

$\mathbf{g}(x) = 3\ln(x)$, $x_0=2$, $\varepsilon = 0.09$ verileri ile iterasyon işlemleri gerçekleştirildiğinde;

x	g(x)	h=|x_n-x_{n-1}|
2	2,079441542	**0,079441542**
2,079441542	2,196298104	0,116856563
2,196298104	2,36031979	0,164021685
2,36031979	2,576391342	0,216071552
2,576391342	2,839169145	0,262777804
2,839169145	3,130534365	0,291365219
3,130534365	3,423611141	**0,293076776**
3,423611141	3,692087649	

(Iraksak iterasyondur)

İterasyon yapılan bölgede, iterasyonun yakınsak olabilmesi için $|\,\mathbf{g}'(x)| < 1$ Iraksak olabilmesi için $|\,\mathbf{g}'(x)| > 1$ eşitsizliğini sağlaması gerekir.

ÖRNEK

$f(x)= x^3-x-1=0$ denkleminin $x_o=1.3$ civarında kökü olduğu bilindiğine göre, gerçek kökü $\varepsilon = 0.0000001$ hassasiyetle basit iterasyon yöntemiyle bulunuz.

Bu denklemin $x_o=1.3$ civarında kökü olduğu bilindiğine göre önce şartları sağlayıp sağlamadığına bakalım.

Çözüm:

Denklemi; $x=g(x)$ şeklinde yazılım. (Yani $x=g(x)$ dönüşümü yapılır)

a) $x=x^3-1 \rightarrow g(x)= x^3-1$

ve $g^1(x)=3x^2$ olur.

$| g^1(x_o) | = | 3x^2 | = 5.07 > 1$

olduğu için yaklaşım çok zordur. Yani kök yoktur.

b) $f(x) = x(x^2 - 1) - 1 = 0$' dan

$$x = \frac{1}{x^2 - 1} \longrightarrow g^{|}(x) = \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 5.46 > 1$$

$|g^{1}(x_o)| = 5.46 > 1$ olduğu için yaklaşım çok zor.

c) $x^3 = x + 1$ ' den

$$x = (x+1)^{1/3} \rightarrow g^{|}(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = 0.19 < 1$$

Olduğu için yaklaşım vardır. Yani köke ulaşılır.

c) şıkkı yakınsama şartını yerine getirdiğinden iterasyon bu şekilde başlatılır.

$X_{k+1} = g(x_k)$ yaklaşımıyla köke ulaşılmaya çalışılır.
$X_1 = g(x_o)$ olacaktır.

k=0 için

$x_1 = g(x_o) = (x+1)^{1/3} = (1.3+1)^{1/3} \rightarrow \quad x_1 = 1.3200061$

Mutlak $_{hata}$

$Et = x_1 - x_o$

$= 1.3200061 - 1.3$

$= 0.0200061$

$|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir.

Bağıl hata

$\varepsilon_t = E_t / x_1$

$= 0.0200061 / 1.3200061$

$= 0.015156 \rightarrow$ % 1,5156

$k = 1$ için $\rightarrow x_2 = g(x_1) = (x1+1)^{1/3} = (1.320006+1)^{1/3}$
$= 1.323822$

$E_t = x_2 - x_1 = 1.323822 - 1.320006 = 0.003816$

$\varepsilon_t = E_t / x_2 = 0.003816 / 1.323822 = 0.002882$

$|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir

$k = 2$ için $\rightarrow x_3 = g(x_2) = (x_2+1)^{1/3} = (1.323822+1)^{1/3}$
$= 1.324547$

$E_t = x_3 - x_2 = 1.324547 - 1.323822 = 0.0007254$

$\varepsilon_t = E_t /_{x3} = 0.000547$

$|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir

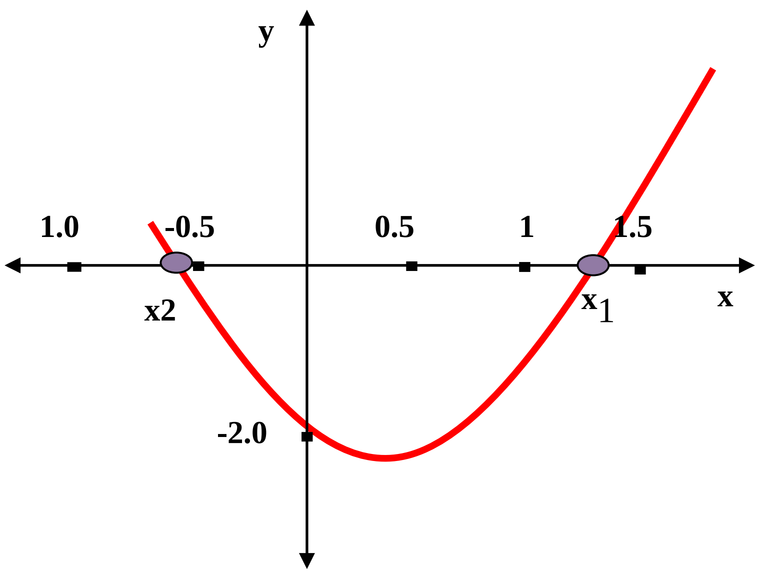
		E_t	ε_t
k= 3 için	x_4= 1.3246856	0.0001378	0.00010
k= 4 için	x_5= 1.3247118	0.0000261	0.000019
k= 5 için	x_6= 1.3247168	0.0000049	0.0000037
k= 6 için	x_7= 1.3247177	0.00000094	0.00000071
k= 7 için	x_8= 1.3247179	0.00000017	0.00000013
k= 8 için	x_9= 1.3247179	0.00000003	0.00000002

9 iterasyon sonunda 0.0000001 hassasiyetle köke yaklaşılmıştır.

İterasyonu sonlandırmak için $|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartına bakılır (ε_k daha önce anlatılmıştı). ε_k problemi çözen kişi tarafından belirlenen çok küçük bir sayıdır. Köke yaklaşma hassasiyeti ne ölçüde isteniyorsa ε_k ona göre seçilir.

ÖRNEK

$f(x)= 2x^4-3x-2=0$ fks.nun $x_o= 1.3$ ve $x_o= -0.5$ civarında kökleri olduğu bilindiğine göre $\varepsilon_k= 0.0000001$ hassasiyetle basit iterasyon yöntemiyle denklemin köklerini bulunuz



Çözüm:

Denklem; x=g(x) şeklinde yazılım. (Yani x=g(x) dönüşümü yapılır)

Öncelikle x_o= 1.3 civarındaki kökü arayalım.

1. Adım $3x = (2x^4 - 2)$

$$x = \frac{(2x^4 - 2)}{3} \rightarrow g^{|}(x) = \frac{8}{3}x^3 \rightarrow g^{|}(1.3) = |-4.506| > 1 \text{ ol.dan uygun değ}$$

2. Adım

$$x(2x^3 - 3) - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{2x^3 - 3} \rightarrow g^{|}(x) = \frac{-12x^2}{(2x^3 - 3)^2} \rightarrow g^{|}(1.3) = |-10.43| > 1 \text{ ol.dan uygun degildir}$$

3. Adım

$$x = \left(\frac{3x + 2}{2}\right)^{1/4} \rightarrow g^{|}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3x + 2}{2}\right)^{-3/4}\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow g^{|}(1.3) = |0.167| < 1 \text{ ol.dan uygundur}$$

$X_{k+1} = g(x_k)$ yaklaşımıyla köke ulaşılmaya çalışılır.
$X_1 = g(x_o)$ olacak.

$x_0 = 1.3$
$x_1 = 1.3105558$
$x_2 = 1.3123108$
$x_3 = 1.3126019$
$x_4 = 1.3126502$
$x_5 = 1.3126582$
$x_6 = 1.3126595$
$x_7 = 1.3126597$

8 iterasyon sonucunda 0.0000001 hassasiyetle kök bulunmuştur.

İterasyona son vermek için $|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartı aranır.

ε_k problemi çözen tarafından saptanır. Ne kadar küçük olursa iterasyon sayısı o kadar artar. ε_k seçiminde köke yaklaşma hassasiyetine göre karar verilir.

x_o=-0.5 yakınlarındaki kök için

1) $$x=\frac{\left(2x^4-2\right)}{3}\rightarrow g^{|}(x)=\frac{8}{3}x^3\rightarrow g^{|}(0.5)=\left|-0.33\right|<1 \text{ ol.dan uygundur}$$

x_0= -0.5	x_1= -0.6250
x_2= -0.5649	x_3= -0.5988
x_4= -0.5810	x_5= -0.5967
x_6= -0.5855	x_7= -0.5883
x_8= -0.5868	x_9= -0.5876
x_{10}= -0.5872	**x_{11}= -0.5874**

12 iterasyon sonucunda 0.0000001 hassasiyetle kök bulunmuştur.

ÖDEV

$f(x) = x^3 - 4.Sin(x)$ denkleminin

x_o=1.5 civarında bir kökünün olduğu bilindiğine göre kökü ε_k =0.0000001 yaklaşımla basit iterasyon yöntemini kullanarak bulunuz.

(x radyan alınacak)

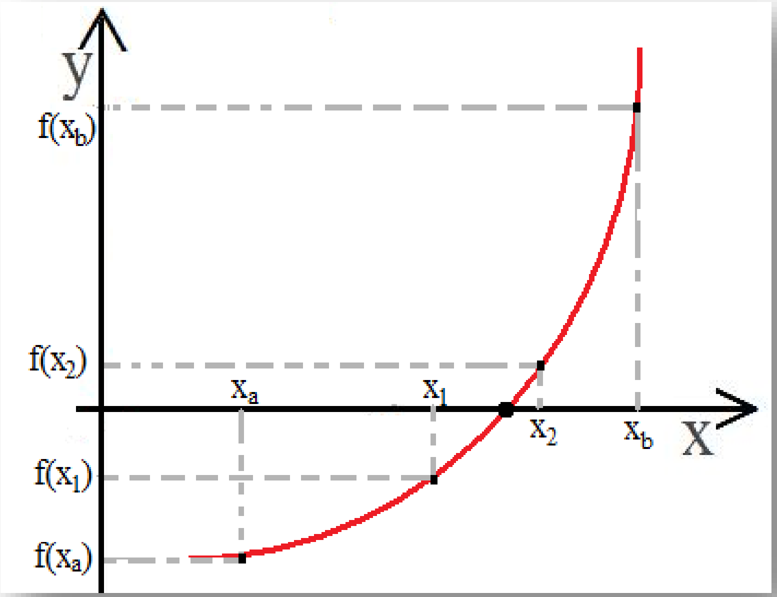
Yarılama (Bisection) Yöntemi :

$\mathbf{X_a}$, $\mathbf{X_b}$ başlangıç değerleri için $\mathbf{f(X_a)}$ ve $\mathbf{f(X_b)}$ değerleri zıt işaretli, böyle başlangıç noktaları bulunabiliyorsa kökün $\mathbf{X_a}$ ve $\mathbf{X_b}$ arasında olacağı açıktır.

Bir bilinmeyenli bir denklem $f(x)=0$ biçiminde yazılabilir. Denkleminin kökleri $I_0=[a,b]$ aralığında ve bu aralıkta f fonksiyonu sürekli olsun.

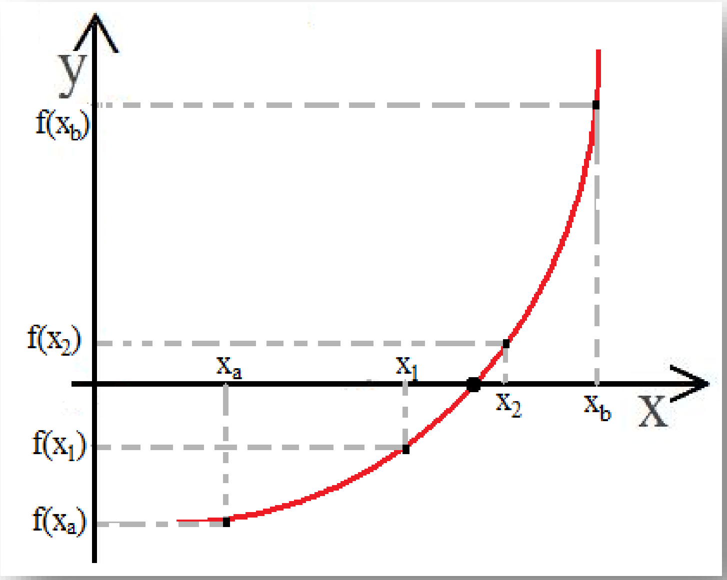
Aralığı ikiye bölme yöntemi ardışık olarak kökün bulunduğu aralığın uzunluğunu ikiye bölerek kökü içeren aralık uzunluğunu istenildiği kadar daraltan bir yöntemdir.

$\mathbf{X_a}$ ile $\mathbf{X_b}$ aralığını küçülterek $\mathbf{x_1}=\dfrac{\mathbf{x_a}+\mathbf{x_b}}{2}$ ile yeni bir $\mathbf{x_1}$ ve $\mathbf{f(x_1)}$ değerleri bulunur. $\mathbf{f(x_1)}, \mathbf{f(x_a)}$ ile aynı işaretli $\mathbf{f(x_b)}$ ile zıt işaretli olduğundan kök $\mathbf{X_1}$ ile $\mathbf{X_b}$ arasındadır.



Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Yarılama (İkiye Bölme veya Bisection) Yöntemi :



O halde yönteme göre bu iki aralığı daraltmalıyız.

Yani $\mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{x_1} + \mathbf{x_b}}{2}$ ile yeni x ve $f(x_2)$ değerlerini bulalım.

Grafikten $f(x_1)$ ile $f(x_2)$' nin zıt işaretli olduğu görülür. Dolayısıyla kök $\mathbf{X_1}$ ile $\mathbf{X_2}$ arasındadır, bu aralık ikiye bölünerek köke bir adım daha yaklaşılacaktır.

İşlemler son iki x değerinin farkının mutlak değeri verilen bir **ε** değerine eşit veya küçük olana kadar devam eder.

İşlemler $|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ olduğunda işlem sonlandırılır ve kök değerin $\mathbf{x_n}$ olduğu kabul edilir.

Örnek : $f(x)$**=x³-6.5x²+13x-8** fonksiyonunu **[a=1,75, b=2.5]** aralığında **ε=0,8** hata ile yarılama metodu ile çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= f(1,75) = 0,203125 \\ f(b) &= f(2,5) = -0,25 \end{aligned}\right\}$$ Zıt işaretli olduğundan kök mevcuttur.

$$\left. c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,75+2,5}{2} = 2,125 \right\} \quad f(c_1) = f(2,125) = \mathbf{-1,13086}$$

$$\left. c_2 = \frac{a+c_1}{2} = \frac{1,75+2,125}{2} = 1,9375 \right\} \quad f(c_2) = f(1,9375) = \mathbf{-0,93970}$$

iterasyon	C=(a+b)/2	X	f(x)
		1,75	0,078125
		2,5	-0,25
1	2,125	2,125	-0,068359375
2	1,9375	1,9375	0,029052734
3	2,03125	2,03125	-0,016082764
4	1,984375	1,98438	0,007686615
5	2,0078125	2,00781	-0,003936291
6	1,99609375	1,99609	0,001945436
7	2,001953125	2,00195	-0,000978462
8	1,999023438	1,99902	0,000487803
9	2,000488281	2,00049	-0,00024426
10	**1,99975586**	1,9998	0,00012204

İşlemlere devam edildiğinde
$x_{kök}$ = 1,99975586 bulunur

Örnek :

f(x) = x3 + 2x2 + 6x + 3 = 0 denkleminin -1 < x < 0 aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir.

Bu kök bu aralıkta yarılama yöntemiyle ε = 0:06 hata ile hesaplayınız.

Çözüm:

$x_L = -1 \qquad x_U = 0$ ve

$f(x_L) = f(-1) = -2 \qquad f(x_U) = f(0) = 3$ Buradan,

$f(x_L)\, f(x_U) < 0$ olduğundan $-1 < x_k < 0$ olacak şekilde bir kök vardır.

- $x_k = \dfrac{x_L + x_U}{2} = \dfrac{-1+0}{2} = -0.5, \qquad f(x_k) = f(-0.5) = 0.375 \Rightarrow x_L = -1,$

$$x_U = x_k = -0.5$$

$$f(-0.5) = 0.375 \qquad f(-1) = -2.0$$

$|x_k - x_L| = |-1+0.5| = 0.5 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-1-0.5}{2} = -0.75 \qquad f(x_k) = f(-0.75) = -0.796\,88 \Rightarrow x_L = x_k = -0.75,$

$$x_U = -0.5$$

$$f(-0.75) = -0.796\,875 \qquad f(-0.5) = 0.375$$

$|-0.5+0.75| = 0.25 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.75-0.5}{2} = -0.625 \qquad f(x_k) = f(-0.625) = -0.212\,89 \Rightarrow$

$$x_L = x_k = -0.625, \qquad x_U = -0.5$$

$$f(-0.625) = -0.212\,891 \qquad f(-0.5) = 0.375$$

$|-0.625+0.5| = 0.125 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.625 - 0.5}{2} = -0.5625 \qquad f(x_k) = f(-0.5625) = 0.0798 \Rightarrow x_L = -0.625,$

$x_U = \quad x_k = -0.5625$

$f(-0.625) = -0.212891 \qquad f(-0.5625) = 0.0798340$

$|-0.625 + 0.5625| = 0.0625 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.625 - 0.5625}{2} = -0.59375 \qquad f(x_k) = f(-0.59375) = -0.0667 \Rightarrow x_L = -0.59375,$

$x_U = x_k = \quad -0.5625$

$f(-0.59375) = -0.066719 \qquad f(-0.5625) = 0.0798340$

$|-0.59375 + 0.5625| = 0.03125 < \varepsilon$ olduğundan verilen denklemin yaklaşık kökü $\varepsilon = 0.05$ hata ile $x_k = -0.59375$ dir.

x	$f(x)$
-1	-2
0	3
-0.5	0.375
-0.75	-0.79688
-0.625	-0.21289
-0.5625	0.0798
-0.59375	-0.0667

Örnek : $f(x) = \exp(x) - x - 2 = 0$ *denkleminin* $1 < x < 1.8$ *aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü* ***aralık yarılama yöntemiyle*** $\varepsilon = 0.06$ *hata ile hesaplayınız.*

Çözüm: $f(1) = -0.281\,718\,172$ $\quad f(1.8) = 2.249\,647\,46$

$f(1)f(1.8) < 0$ olduğundan

$f(x)$ fonksiyonunun $1 < x < 1.8$ aralığında bir kökü vardır.

- $x_k = \dfrac{1+1.8}{2} = 1.4$ $\quad f(1.4) = 0.655\,199\,967 \Rightarrow x_L = 1,$ $\quad x_U = x_k = 1.4$

  $f(1) = -0.281\,718\,172$ $\quad f(1.4) = 0.655\,199\,967$

  $|x_k - x_L| = |1.4 - 1| = 0.4 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{1+1.4}{2} = 1.2$ $\quad f(1.2) = 0.120\,116\,923 \Rightarrow x_L = 1,$ $\quad x_U = x_k = 1.2$

  $f(1) = -0.281\,718\,172$ $\quad f(1.2) = 0.120\,116\,923$

  $|x_k - x_L| = |1.2 - 1| = 0.2 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{1+1.2}{2} = 1.1$ $\quad f(1.1) = -0.09583\,39761 \Rightarrow x_L = x_k = 1.1,$ $\quad x_U = 1.2$

  $f(1.1) = -0.09583\,39761$ $\quad f(1.2) = 0.120\,116\,923$

  $|x_k - x_L| = |1.2 - 1.1| = 0.1 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{1.2+1.1}{2} = 1.15$ $\quad f(1.15) = 0.00819290969 \Rightarrow x_L = 1.1, \quad x_U = x_k = 1.15$

$f(1.1) = -0.0958339761 \qquad f(1.15) = 0.00819290969$

$|x_k - x_L| = |1.1 - 1.15| = 0.05 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{1.1+1.15}{2} = 1.125$ $\quad f(1.125) = -0.0447831511 \Rightarrow x_L = x_k = 1.125, \quad x_U = 1.15$

$f(1.125) = -0.0447831511 \qquad f(1.15) = 0.00819290969$

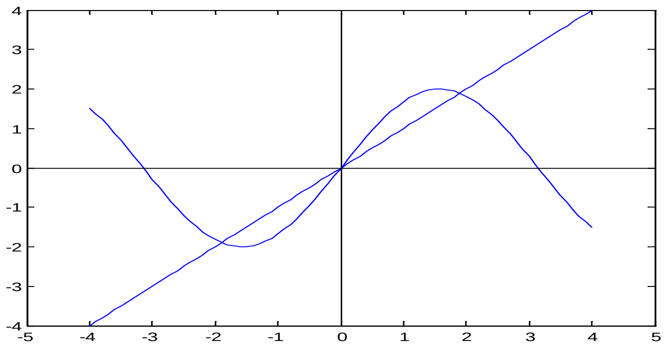
$|x_k - x_L| = |1.125 - 1.15| = 0.025 < \varepsilon = 0.06$ olduğundan

verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 1.125$ tir.

Örnek

x-2sin$x$=0 denkleminin köklerini ε=0.001 den daha küçük mutlak hata ile bulmaya çalışalım.

x-2sin$x$=0 denklemini x=2sin$x$ biçiminde yazalım. Bu denklemin kökleri y=sin$x$ eğrisi ile y=x doğrusunun kesiştiği noktalardır. Aşağıdaki grafikten görüldüğü gibi üç tane kök söz konusudur. Bunlardan biri x_1=0 , diğer ikisinden pozitif olanı $x_2 \in [1,3]$ dır. Üçüncü kök $x_3 = -x_2$ dir.

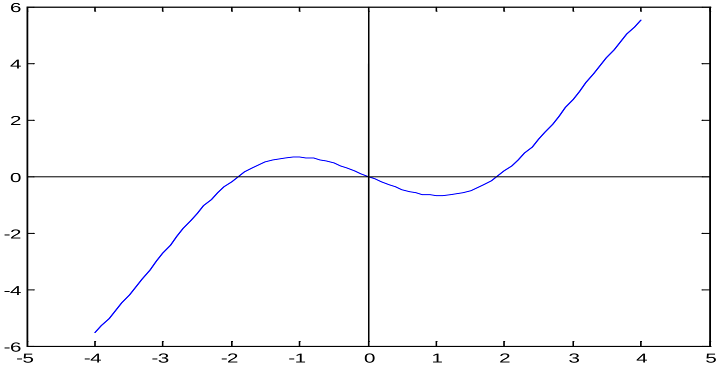


Kökleri ve yerlerini fonksiyonunun grafiğini çizerek de tespit edebiliriz. [-4,4] aralığında fonksiyonunun grafiği aşağıdadır.

Pozitif kök $x_2 \in I_0 = [1,3]$ dır.

$$\varepsilon_{\bar{x}_2} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} \leq 0.001$$

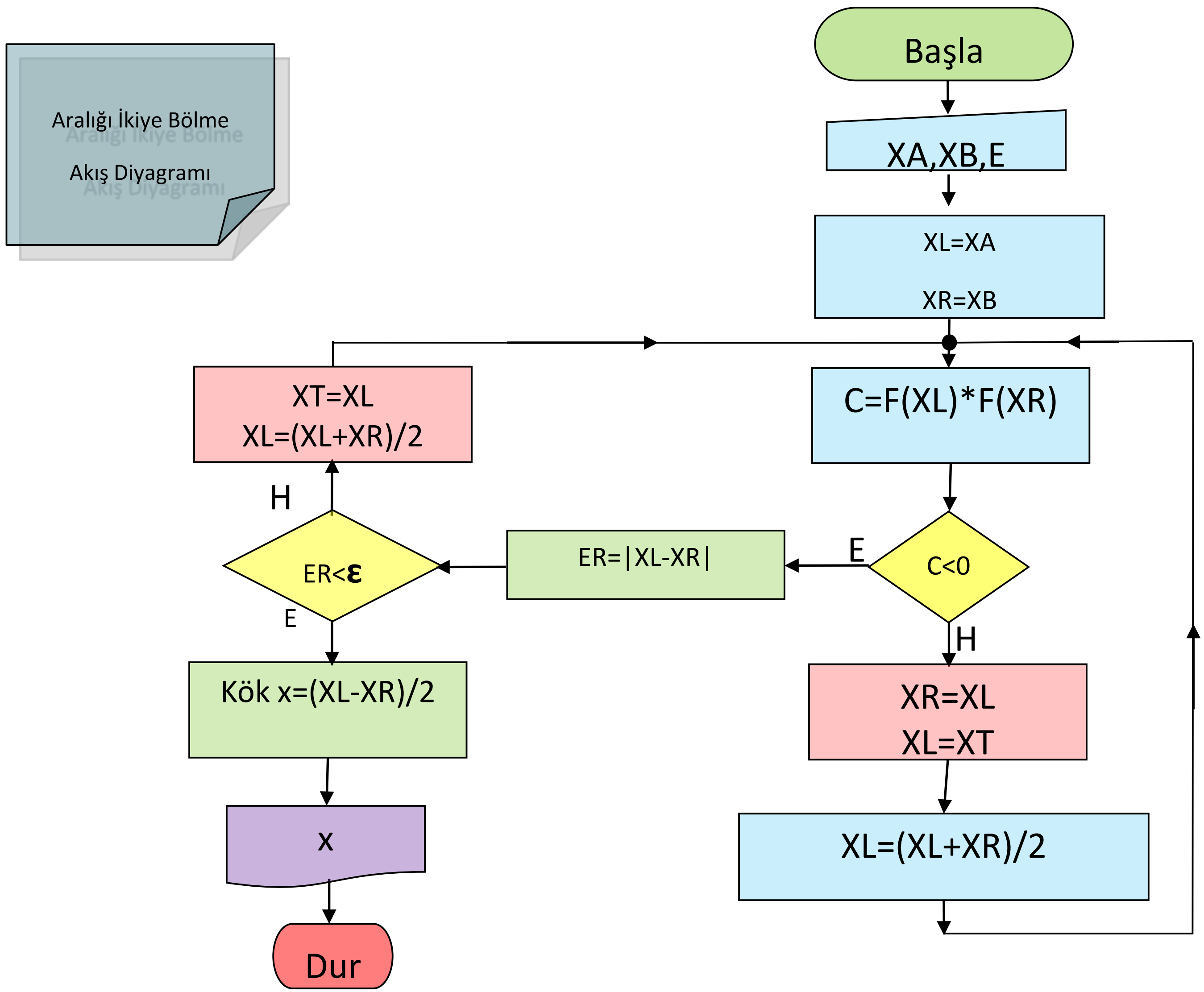
olması için $n \geq 10$ olmalıdır.



BSM

6. Hafta

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri



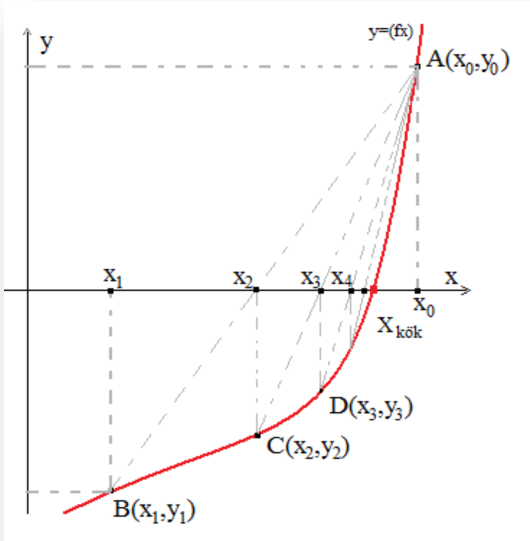
Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

```
%----    Aralığı İkiye Bölme Yöntemi    ------------------
clear all;
% f(x) = k1 * x^2 + k2 * x + k3 olmak üzere:
k1 = 1; k2 = -7;     k3 = 10;
% [a , b] aralığına ait değerler giriliyor
a(1) = 1;    b(1) = 4;
%İlk yarılama işlemi yapılıyor
x(1) = (a(1) + b(1)) / 2;
f_x = k1 * x(1)^2 + k2 * x(1) + k3;
epsilon = 0.03;
k = 1;   % İterasyon başlangıç değeri veriliyor.
while abs(f_x) >= epsilon
    x(k+1) = (a(k) + b(k)) / 2;
        f_x = k1 * x(k+1)^2 + k2 * x(k+1) + k3;
        f_b = k1 * b(k)^2 + k2 * b(k) + k3;
        if f_x * f_b < 0
            a(k+1) = x(k+1);     b(k+1) = b(k);
        else
            a(k+1) = a(k);        b(k+1) = x(k+1);
        end
k = k + 1;
end
k = k-1;
disp(['iterasyon sayisi:']);
disp(k);
disp(['Yaklaşık kök degeri: ']);
disp(int2str(x(k)));
```

Kiriş (secant) Yöntemi :

Grafikteki A ve B noktaları arasındaki kirişin denklemini yazalım ,

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$



A ve B nokatalarının oluşturduğu kirişin ekseninini kestiği nokta bu denklemde ;

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

Böylece x_0 ve x_1 gibi bilinen başlangıç noktalarıyla gerçek kök $x_{kök}$ ‘e daha yakın bir kökü $f(x)$ fonksiyonunun türevine gerek kalmadan bulabiliriz.

İşlemlere devam ederek yeni kiriş noktaları bularak bunların x eksenini kestiği noktalarından gerçek köke daha da yaklaşabiliriz.

A ve C noktalarını oluşturan kirişe göre;

$$x_3 = x_0 - \frac{(x_2 - x_0)y_0}{y_2 - y_0}$$

olur.

İşlemler benzer şekilde devam ettirildiğinden, genel ifadeyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_0 - \frac{(x_n - x_0)y_0}{y_n - y_0}}$$

Önceki yöntemlerle olduğu gibi burada da mutlak hatanın verilen bir **ε** değerinden küçük olana kadar işlemlere devam edilir.

Yöntem her zaman yakınsak olması nedeniyle **A** noktasındaki $\boldsymbol{f(x_0)}$ noktasına karşılık gelen **B,C,D** gibi hesaplanan noktalardaki değerleri ile zıt işaretli olması gerekir.

Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Kiriş yöntemi

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} y_i$$

Örnek : $f(x) = e^{-x} - x = 0$

denkleminin köklerini $(0,1)$ *aralığında* ***Kiriş Yöntemi*** *ile hesaplayınız.*

Çözüm:

$$f(0) = 1.0 \quad f(1) = -0.632\,120\,559 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

olduğundan bu aralıkta bir kök vardır.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = f(x_1) = -0.632\,120\,559$$

- $x_2 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1 = 1 - \dfrac{1-0}{-0.632120559 - 1}(-0.632120559) = 0.612\,699$,

$$f(0.612\,699) = y_2 = -0.07\,081\,27$$

- $x_3 = x_2 - \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = 0.612\,699 - \dfrac{(0.612\,699 - 1)}{(-0.07\,081\,27 + 0.632\,120)}(-0.07\,081\,27) = 0.563\,838$

$$|x_3 - x_2| = |0.563\,838 - 0.612\,699| = 0.048\,861$$

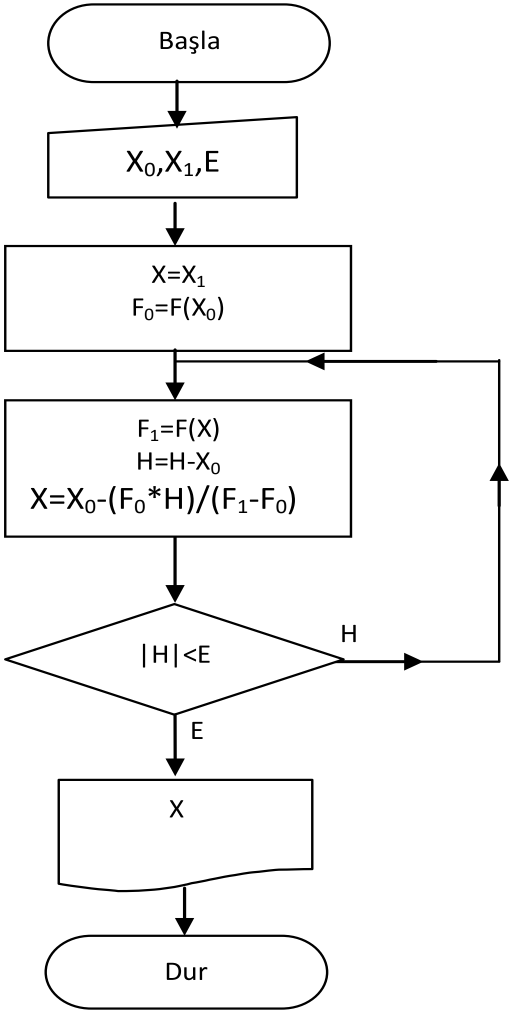
$$f(0.563\,838) = y_3 = 0.00518297,$$

- $x_4 = 0.567170$ $\quad |x_4 - x_3| = |0.567170 - 0.563\,838\,| = 0.003\,332$
- $x_5 = 0.567143$ $\quad |x_5 - x_4| = |0.567143 - 0.567170| = 2.7 \times 10^{-5}$
- $x_6 = 0.567143$ $\quad |x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567143| = 0$

O halde verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 0.567143$ dir.

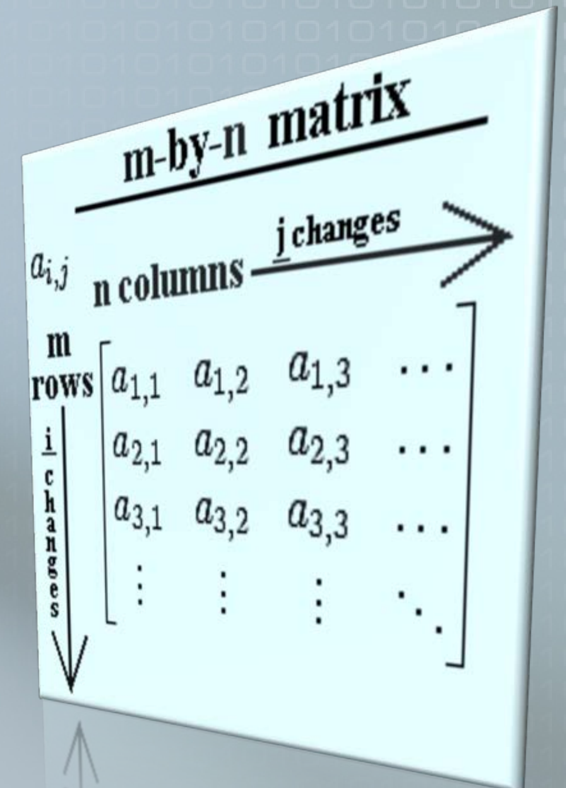
Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Kiriş Yöntemi



Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar



Sonraki Hafta :

Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözümleri…