IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

RASTGELE DEĞİŞKENLER, BEKLENTİ, VARYANS

İçindekiler

Rastgele Değişken

Örnek uzayın elemanlarına karşılık gelen, sayısal değerlere sahip ilgilendiğimiz niceliklere **rastgele değişken** denir.

Bir rastgele değişkenin değeri, deneyin sonucu tarafından belirlenir.

Rastgele değişkenin belirli bir değere sahip olması olasılığı ilişkili olduğu örnek uzay elemanlarının olasılığına karşılık gelir.

Örneğin X, iki adet zarın üstte gelen yüzlerindeki sayıların toplamı olan bir rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin değerinin 5 olma olasılığını inceleyebiliriz.

$$P(X = 5) = P(\{1,4\}, \{4,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}) = \frac{4}{36}$$

Rastgele Değişken

Rastgele değişkenlerin fonksiyonları da birer rastgele değişkendir.

Örneğin X ve Y rastgele değişkenler olsun.

Bu durumda $X+Y$, $4X$, $5XY$, X^3, $\tan Y$ de birer rastgele değişkendir.

Örnek 1

Bir kişinin her biri arızalı ya da sağlam olabilen iki elektronik parça satın aldığını varsayalım. Bu durumda alınabilecek parçaların olasılıkları aşağıdaki gibi olsun.

$P(\{a,a\}) = 0{,}25 \rightarrow$ İki parçanın da arızalı olması durumu.

$P(\{s,s\}) = 0{,}35 \rightarrow$ İki parçanın da sağlam olması durumu.

$P(\{a,s\}) = 0{,}20$

$P(\{s,a\}) = 0{,}20$

X, satın alma işlemindeki sağlam parça sayısını gösteren rastgele değişken olsun.

Örnek 1

Bu durumda;

$P(X = 0) = 0,25$

$P(X = 1) = 0,40$

$P(X = 2) = 0,35$

Örnek 1

I, en az bir sağlam parça olması durumunu gösteren rastgele değişken ve A, bu durumu ifade eden olay olsun.

$$I = \begin{cases} 1 & X = 1 \, veya \, X = 2 \, ise \\ 0 & X = 0 \, ise \end{cases}$$

A olayı ortaya çıkarsa I 1 olacak, çıkmazsa 0 olacak.

Burada I rastgele değişkenine A olayı için **gösterge rastgele değişken** denir.

$$P(I = 0) = 0{,}25$$

$$P(I = 1) = 0{,}75$$

Gösterge Rastgele Değişken

Bir A olayı için I gösterge rastgele değişkeni aşağıdaki şekilde de gösterilebilir.

$$I = \begin{cases} 1 & A\ gerçekleşir\ ise \\ 0 & A\ gerçekleşmez\ ise \end{cases}$$

Kesikli Rastgele Değişken

Mümkün değerler kümesi bir dizi olan rastgele değişkene **kesiklidir** denir.

Bu tür rastgele değişkenlere **kesikli rastgele değişken** denir.

Örneğin mümkün değerler kümesi pozitif tamsayılar olan rastgele değişken kesiklidir.

Kesikli Rastgele Değişken

Kesikli rastgele değişkenlerin **olasılık kitle fonksiyonu** mevcuttur.

$p(a)$, kesikli X rastgele değişkeninin olasılık kitle fonksiyonu olsun.

$p(a) = P(X = a)$

X rastgele değişkeni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ değerlerini alıyor olsun.

$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

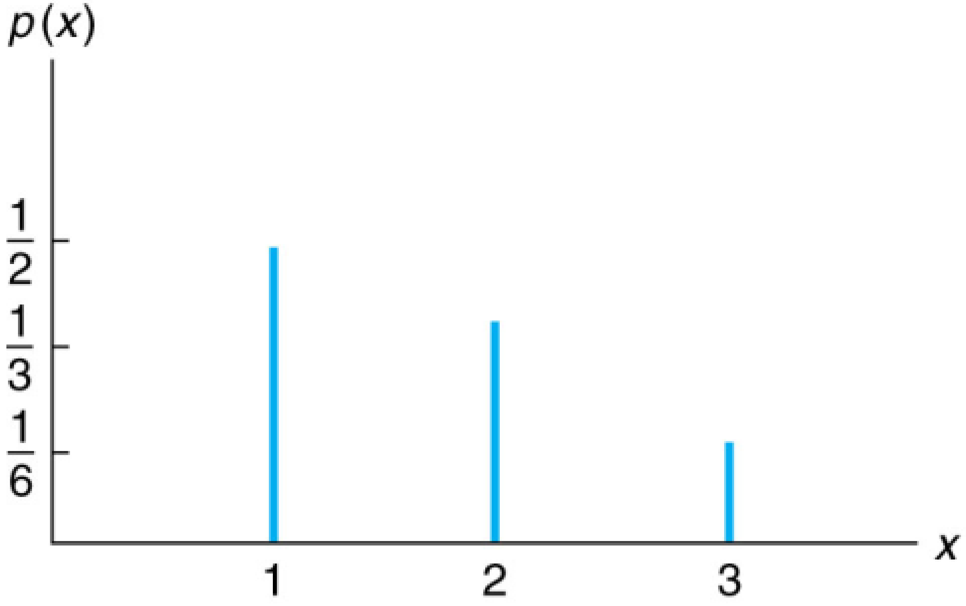
Örnek 2

X rastgele değişkeni 1, 2 ve 3 değerlerini alabilsin.

$p(1) = \frac{1}{2}$ ve $p(2) = \frac{1}{3}$ ise $p(3)$ nedir?

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + p(3) = 1 \rightarrow p(3) = \frac{1}{6}$$

X rastgele değişkeninin olasılık kitle fonksiyonu olan $p(x)$'in grafiği yan tarafta görülmektedir.



Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Bir X rastgele değişkeninin **birikimli dağılım fonksiyonu** veya kısaca **dağılım fonksiyonu** F, herhangi bir x gerçek sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

X rastgele değişkeninin, bir x değerine eşit ya da küçük olma olasılığı.

$X \sim F$ gösterimi, F'nin, X'in dağılım fonksiyonu olduğunu ifade eder.

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Kesikli rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu, olasılık kitle fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$F(a) = \sum_{tüm\ x \le a} p(x)$

X'in değerleri $x_1 < x_2 < x_3$ … şeklinde olsun. Bu durumda F bir basamak fonksiyonudur.

$[x_{i-1}, x_i)$ aralığında F'nin değeri sabittir.

x_i'de $p(x_i)$ büyüklüğünde bir adım sıçrar.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a) + P(a < X \leq b) \\ &= P(X = a) + F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X \leq b) - P(X = b) \\ &= F(b) - F(a) - P(X = b) \end{aligned}$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

$$P(a \leq X < b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) - P(X = b)$$
$$= P(X = a) + F(b) - F(a) - P(X = b)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

Örnek 3

X rastgele değişkeni aşağıdaki dağılım fonksiyonuna sahip olsun.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \; ise \\ 1 - e^{(-x^2)} & x > 0 \; ise \end{cases}$$

X, rastgele değişkeninin 1'den büyük olma olasılığı nedir?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$P(X > 1) = 1 - F(1)$$

$$P(X > 1) \; = 1 - (1 - e^{-1})$$

$$P(X > 1) = 0{,}368$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

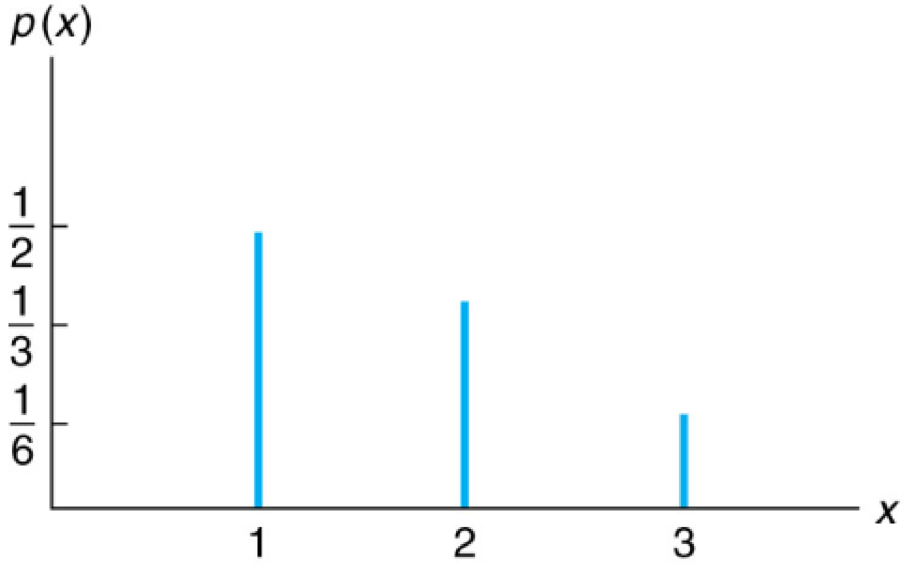
Örnek 2 için

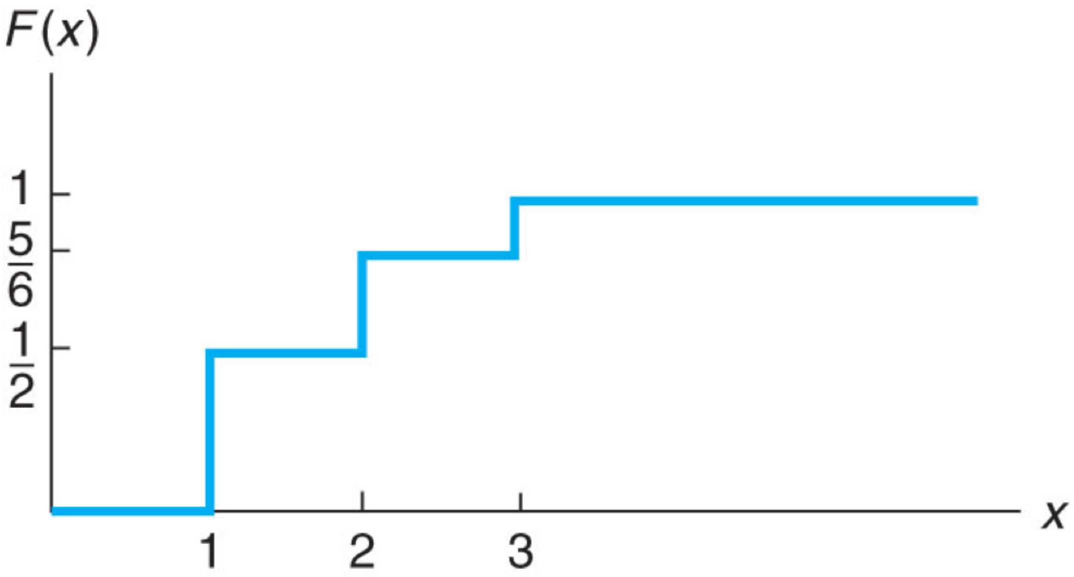
$$p(1) = \frac{1}{2}\ ,\ p(2) = \frac{1}{3}\ ,\ p(3) = \frac{1}{6}$$

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le a < 2 \\ \frac{5}{6} & 2 \le a < 3 \\ 1 & a \ge 3 \end{cases}$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Örnek 2 için $p(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki gibidir.





Beklenti

Bir X kesikli rastgele değişkeninin $x_1, x_2, x_3, \ldots$ değerlerini aldığını düşünelim.

X rastgele değişkeninin **beklentisi** (**beklenen değeri**) $E[X]$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$E[X] = \sum_i \; x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Beklenti, X'in alabildiği mümkün değerlerin ağırlıklı ortalamasıdır.

X'in her bir değeri varsayılan olasılığı ile ağırlıklandırılır.

Örnek 4

X rastgele değişkeninin olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$p(0) = \frac{1}{7} \quad \text{ve} \quad p(1) = \frac{2}{7} \quad \text{ve} \quad p(2) = \frac{4}{7}$$

Bu durumda X'in beklentisi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{7}\right) + 1\left(\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{10}{7}$$

Örnek 5

X, atılan hilesiz bir zarın sonucunu gösteren rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin beklentisi nedir?

Örnek 5

X, atılan hilesiz bir zarın sonucunu gösteren rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin beklentisi nedir?

$$p(1) = \frac{1}{6}\ , p(2) = \frac{1}{6}, p(3) = \frac{1}{6}, p(4) = \frac{1}{6}, p(5) = \frac{1}{6}, p(6) = \frac{1}{6}$$

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E[X] = \frac{7}{2}$$

Beklenti

I, A olayı için gösterge rastgele değişken olsun.

I gösterge rastgele değişkeninin beklentisi nedir?

Beklenti

I, A olayı için gösterge rastgele değişken olsun.

I gösterge rastgele değişkeninin beklentisi nedir?

$$I = \begin{cases} 0 & A \text{ olayı gerçekleşmemiş ise} \\ 1 & A \text{ olayı gerçekleşmiş ise} \end{cases}$$

$$E[I] = 0P(A') + 1P(A)$$

$$E[I] = P(A)$$

Beklenti

Bir X rastgele değişkeninin olasılık dağılımı verilmiş olsun.

- Kesikli ise olasılık kitle fonksiyonu
- Sürekli ise olasılık yoğunluk fonksiyonu

X'in bir fonksiyonunun, örneğin $g(X)$ fonksiyonunun beklenen değerini nasıl hesaplarız?

$g(X)$'in dağılımı, X'in dağılım bilgisinden hesaplanabilir.

$g(X)$'in dağılımını bulduğumuzda $E[g(X)]$'i hesaplayabiliriz.

Örnek 6

X'in aşağıdaki olasılık kitle fonksiyonuna sahip olduğunu varsayalım.

$p(0) = 0{,}2 \quad p(1) = 0{,}5 \quad p(2) = 0{,}3$

$E[X^2]$ nedir?

Örnek 6

X'in aşağıdaki olasılık kitle fonksiyonuna sahip olduğunu varsayalım.

$p(0) = 0{,}2 \quad p(1) = 0{,}5 \quad p(2) = 0{,}3$

$E[X^2]$ nedir?

$Y = X^2$

$p_Y(0) = P(Y = 0^2) = 0{,}2$

$p_Y(1) = P(Y = 1^2) = 0{,}5$

$p_Y(4) = P(Y = 2^2) = 0{,}3$

$E[X^2] = E[Y] = 0(0{,}2) + 1(0{,}5) + 4(0{,}3) = 1{,}7$

Örnek 7

Ayşe, hava güzel olduğunda 5km'lik yurtla okul arasındaki yolu 7km/saat hızla yürüyerek alıyor; hava kötü olduğunda okula 50km/saat hızla giden otobüse binerek geliyor. Ayşe'nin bulunduğu yerde %65 ihtimalle hava güzel oluyorsa yurttan çıkıp okula varana kadar geçen sürenin (saat) beklentisini bulun?

Örnek 7

$$p(z) = \begin{cases} 0,65 & z = \frac{5}{7} saat \\ 0,35 & z = \frac{5}{50} saat \end{cases}$$

$$E[Z] = \frac{5}{7} 0,65 + \frac{5}{50} 0,35 = 0,4993 \; saat$$

Beklenti

Önceki örneklerimizde anlatılan rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının beklenen değerini formüllerle ifade ederek daha rahat hesaplayabiliriz.

$X, p(x)$ olasılık kitle fonksiyonuna sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda gerçek değerli herhangi bir g fonksiyonu için

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$$

Örnek 8

Örnek 6’nın formül kullanılarak çözümü aşağıdaki gibidir.

X’in aşağıdaki olasılık kitle fonksiyonuna sahip olduğunu varsayalım.

$p(0) = 0{,}2 \quad p(1) = 0{,}5 \quad p(2) = 0{,}3$

$E[X^2]$ nedir?

$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$

$E[X^2] = \sum_{x=0}^{2} x^2 p(x) = 0^2(0{,}2) + 1^2(0{,}5) + 2^2(0{,}3) = 1{,}7$

Beklentinin Özellikleri

a ve b sabitse

$E[aX + b] = aE[X] + b$

Bir sabitin beklentisi kendisidir.

$a = 0$ ise $E[b] = b$

Sabitle çarpılan bir rastgele değişkenin beklentisi nedir?

$b = 0$ ise $E[aX] = aE[X]$

Beklentinin Özellikleri

n adet rastgele değişkenin toplamlarının beklentisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + \cdots + E[X_n]$$

Beklenti, Ortalama ve Moment

X rastgele değişkeninin beklenen değeri olan $E[X]$'e aynı zamanda X'in **ortalaması** ya da **birinci momenti** de denir.

$(n \geq 1)$ olmak üzere $E[X^n]$'e ise X'in $\boldsymbol{n}$**'inci momenti** denir.

$E[X^n] = \sum_x x^n p(x)$ $\quad$ X kesikli ise

Örnek 9

Bir inşaat firması 3 farklı iş için kâr olarak 10000TL, 20000TL ve 40000TL teklif vermiştir. Firmanın işleri kazanma olasılıkları sırasıyla 0,2 ve 0,8 ve 0,3 ise firmanın beklenen toplam kazancı nedir?

Örnek 9

X_i, firmanın i. işten gelen kazancını gösteren rastgele değişken olsun ($i = 1,2,3$).

$$Toplam\ Kazanç = X_1 + X_2 + X_3$$

$$E[Toplam\ Kazanç] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$$

$$E[X_1] = 10000(0,2) + 0(0,8) = 2000$$

$$E[X_2] = 20000(0,8) + 0(0,2) = 16000$$

$$E[X_3] = 40000(0,3) + 0(0,7) = 12000$$

$$E[Toplam\ Kazanç] = 2000 + 16000 + 12000 = 30000TL$$

Varyans

Beklenti, rastgele değişkenin ağırlıklı ortalaması hakkında bilgi verir.

Yayılımı veya değişimi hakkında bilgi vermez.

$W = 0, \quad 1\ olasılıkla$

$$Y = \begin{cases} -1, & \frac{1}{2}\ olasılıkla \\ 1, & \frac{1}{2}\ olasılıkla \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} -100, & \frac{1}{2}\ olasılıkla \\ 100, & \frac{1}{2}\ olasılıkla \end{cases}$$

Varyans

Yukarıdaki tüm rastgele değişkenlerin beklentileri aynıdır. Yani 0'dır.

Yayılımları farklıdır.

Y'nin yayılımı W'dan daha yüksektir.

Z'nin yayılımı Y'den daha yüksektir.

Varyans

Bir X rastgele değişkeninin değişimi, ortalamasından ne kadar uzakta olduğuna bakılarak ölçülebilir.

X, μ ortalamaya sahip ($E[X] = \mu$) bir rastgele değişken ise bu rastgele değişkenin varyansını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Varyans

$$
\begin{aligned}
Var(X) = E[(X-\mu)^2] \\
&= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - 2\mu\mu + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2 \\
&= E[X^2] - (E[X])^2
\end{aligned}
$$

Örnek 10

X, hilesiz bir zar atıldığında gelen sonucu gösteren rastgele değişken olsun. Bu rastgele değişkenin varyansını hesaplayınız.

Örnek 10

X, hilesiz bir zar atıldığında gelen sonucu gösteren rastgele değişken olsun. Bu rastgele değişkenin varyansını hesaplayınız.

$Var(X) =?$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X] = \frac{7}{2}$ Örnek 5'ten

$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6}$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

Varyans

I, A olayı için gösterge rastgele değişken olsun.

I gösterge rastgele değişkeninin varyansı nedir?

$$I = \begin{cases} 0 & A\ olayı\ gerçekleşmemiş\ ise \\ 1 & A\ olayı\ gerçekleşmiş\ ise \end{cases}$$

Varyans

$$Var(I) = E[I^2] - (E[I])^2$$

$$E[I^2] = 0^2P(A') + 1^2P(A) = P(A)$$

$$E[I] = 0P(A') + 1P(A) = P(A)$$

$$\begin{aligned} Var(I) &= E[I^2] - (E[I])^2 \\ &= P(A) - (P(A))^2 \\ &= P(A)[1 - P(A)] \\ &= P(A)P(A') \end{aligned}$$

Varyansın Özellikleri

a ve b sabitse

$$Var(aX + b) = a^2Var(X)$$

n adet rastgele değişken bağımsız ise toplamlarının varyansını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$