

IST108

OLASILIK VE İSTATİSTİK

KESİKLİ RASTGELE DEĞİŞKENLER

İçindekiler

Bernoulli Rastgele Değişkeni

Binom Rastgele Değişkeni

Poisson Rastgele Değişkeni

Geometrik Rastgele Değişken

Negatif Binom Rastgele Değişken

Bernoulli Rastgele Değişkeni

Bir deneyin sonucunun başarılı veya başarısız olarak sınıflandırıldığını düşünelim. X rastgele değişkeni deney başarılı olduğunda 1, başarısız olduğunda 0 değerini alsın. Bu durumda $0 \leq p \leq 1$ için X 'in olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

Bu X rastgele değişkenine **Bernoulli rastgele değişkeni** denir ve beklentisi aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = 1p + 0(1 - p) = p$$

Binom Rastgele Değişkeni

p olasılıkla başarılı ve $1 - p$ olasılıkla başarısız olan birbirinden bağımsız n adet deney gerçekleştirdiğimizi düşünelim. X rastgele değişkeni, bu n adet deneyin başarılı sonuç sayısını gösteren rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkenine **(n, p) parametrelili binom rastgele değişkeni** denir ve olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Bernoulli rastgele değişkeni $(1, p)$ parametrelili binom rastgele değişkenidir.

Örnek 1

Bir şirketin ürettiği her bir cd'nin birbirinden bağımsız olarak 0,01 olasılıkla defolu olduğu biliniyor. Şirket cd'leri 10'luk paketler halinde satıyor. Satılan bir pakette 1'den fazla cd defolu çıkarsa iade garantisi veriliyor. Satılan paketlerin yüzde kaçı iade alınır?

Örnek 1

X bir paketteki defolu cd sayısını gösteren rastgele değişken olsun.

X , $(n = 10, p = 0,01)$ parametrelili binom rastgele değişkendir.

Bir paketin değiştirilme olasılığı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} (0,01)^0 (0,99)^{10} - \binom{10}{1} (0,01)^1 (0,99)^9 \\ &= 0,004 \end{aligned}$$

Satılan paketlerin yüzde 0,4'ü iade alınır.

Binom Rastgele Değişkeni

(n, p) parametrelili bir binom rastgele değişkeninin beklentisi aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = np$$

(n, p) parametrelili bir binom rastgele değişkeninin k . momenti aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$E[X^k] = npE[(Y + 1)^{k-1}]$$

Burada Y , $(n - 1, p)$ parametrelili bir binom rastgele değişkendir.

Binom Rastgele Değişkeni

Y , $(n - 1, p)$ parametrelili bir binom rastgele değişken olmak üzere, (n, p) parametrelili bir X rastgele değişkeninin varyansı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= npE[(Y + 1)^2 - 1] = npE[Y + 1] = np(E[Y] + E[1]) \\ &= np(E[Y] + 1) = np((n - 1)p + 1) \end{aligned}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = np((n - 1)p + 1) - (np)^2$$

$$Var(X) = np(1 - p)$$

Binom Rastgele Değişkeni

(n, p) parametrelili bir X binom rastgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(i) = P(X \leq i) = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$P(X = k + 1)$ ve $P(X = k)$ arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$P(X = k + 1) = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P(X = k)$$

Örnek 2

X , ($n = 6, p = 0,4$) parametrelili bir binom rastgele değişken olsun. Bu durumda X 'in alabileceği her bir değerin olasılığı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,4^0 (1 - 0,4)^{6-0} = 0,6^6 = 0,0467$$

$$P(X = k + 1) = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P(X = k)$$

$$P(X = 1) = \frac{0,4}{1-0,4} \frac{6-0}{0+1} P(X = 0) = \frac{4}{6} \frac{6}{1} 0,0467 = 0,1866$$

Örnek 2

$$P(X = 1) = 0,1866$$

$$P(X = 2) = \frac{4}{6} \frac{5}{2} P(X = 1) = \frac{4}{6} \frac{5}{2} 0,1866 = 0,3110$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{6} \frac{4}{3} P(X = 2) = \frac{4}{6} \frac{4}{3} 0,3110 = 0,2765$$

$$P(X = 4) = \frac{4}{6} \frac{3}{4} P(X = 3) = \frac{4}{6} \frac{3}{4} 0,2765 = 0,1382$$

$$P(X = 5) = \frac{4}{6} \frac{2}{5} P(X = 4) = \frac{4}{6} \frac{2}{5} 0,1382 = 0,0369$$

$$P(X = 6) = \frac{4}{6} \frac{1}{6} P(X = 5) = \frac{4}{6} \frac{1}{6} 0,0369 = 0,0041$$

Örnek 3

Tarık ve Ahmet golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p olarak veriliyor. 7'inci çukur sonunda skor Tarık lehine 4 – 3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

Örnek 3

Tarık ve Ahmet golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p olarak veriliyor. 7'inci çukur sonunda skor Tarık lehine 4 – 3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

T: Tarık'ın galip gelmesi

A: Ahmet'in galip gelmesi

$T = \{\text{En az 2 çukurdan sayı alması}\}$

$A = \{\text{Tüm çukurlardan sayı alması}\}$

Örnek 3

Tarık ve Ahmet golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p olarak veriliyor. 7'inci çukur sonunda skor Tarık lehine 4-3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

$$P(T) = \binom{3}{2} p^2 (1 - p) + p^3$$

$$P(A) = (1 - p)^3$$

Örnek 4

Olasılık dersindeki düşük katılımdan dolayı dersin hocası N öğrenciden k tanesi derse gelmezse dersi iptal etme kararı alıyor. Her öğrencinin bağımsız olarak hava güzel olunca derse gelme olasılığı p_g , kötü olunca p_k olarak veriliyor. Havanın güzel olma olasılığı p olarak veriliyorsa, o gün ders yapılmasının ihtimali nedir?

Örnek 4

Olasılık dersindeki düşük katılımdan dolayı dersin hocası N öğrenciden k tanesi derse gelmezse dersi iptal etme kararı alıyor. Her öğrencinin bağımsız olarak hava güzel olunca derse gelme olasılığı p_g , kötü olunca p_k olarak veriliyor. Havanın güzel olma olasılığı p olarak veriliyorsa, o gün ders yapılmasının ihtimali nedir?

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

$P(A) = ?$

Örnek 4

Olasılık dersindeki düşük katılımdan dolayı dersin hocası N öğrenciden k tanesi derse gelmezse dersi iptal etme kararı alıyor. Her öğrencinin bağımsız olarak hava güzel olunca derse gelme olasılığı p_g , kötü olunca p_k olarak veriliyor. Havanın güzel olma olasılığı p olarak veriliyorsa, o gün ders yapılmasının ihtimali nedir?

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

Örnek 4

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$P(A|B) = \sum_{i=N-k+1}^N \binom{N}{i} p_g^i (1 - p_g)^{N-i}$$

$$P(A|B') = \sum_{i=N-k+1}^N \binom{N}{i} p_k^i (1 - p_k)^{N-i}$$

$$P(A) = p \sum_{i=N-k+1}^N \binom{N}{i} p_g^i (1 - p_g)^{N-i} \\ + (1 - p) \sum_{i=N-k+1}^N \binom{N}{i} p_k^i (1 - p_k)^{N-i}$$

Poisson Rastgele Değişkeni

(n, p) parametrelili bir binom rastgele değişkende, n değeri büyük ve p değeri küçük ise bunu $\lambda = np$ parametrelili bir poisson rastgele değişken olarak da düşünebiliriz.

Poisson rastgele değişkene yaklaşım yapabileceğimiz durumları şöyle sıralayabiliriz;

- Bir sayfadaki hatalı karakter sayısı
- Bir ülkede 100 yaşının üzerindeki kişi sayısı
- Bir günde çevrilen yanlış telefon numarası sayısı
- İlk kullanıldığı günde arızalanan akıllı telefon sayısı

Poisson Rastgele Değişkeni

$\lambda > 0$ olmak üzere, olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen bir X rastgele değişkenine λ parametrelili poisson rastgele değişkeni denir.

$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Poisson Rastgele Değişkeni

λ parametrelili bir X poisson rastgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{i \leq a} P(X = i)$$

$P(X = i + 1)$ ve $P(X = i)$ arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$\frac{P(X=i+1)}{P(X=i)} = \frac{\lambda}{i+1}$$

Poisson Rastgele Değişkeni

λ parametrelili bir X poisson rastgele değişkeninin beklentisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda}{i} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

$i - 1 = j$ diyelim.

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$E[X] = \lambda$$

Poisson Rastgele Değişkeni

λ parametrelili bir X poisson rastgele değişkeninin varyansı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E[X^2] = \lambda(\lambda + 1)$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda$$

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3'tür.

A) Bu hafta en az bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

B) 3 günde bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3'tür.

A) Bu hafta en az bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

$$\text{Haftalık ortalama kaza sayısı} = 3 = E[X] = \lambda$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3} \frac{3^0}{0!} = 0,9502$$

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3'tür.

B) 3 günde bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3'tür.

B) 3 günde bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

Günde ortalama kaza sayısı $= 3/7 = E[X] = \lambda$

$$P(X = 1) = e^{-3/7} \frac{3/7^1}{1!} = 0,2792$$

A: 3 günde 1 kaza olması

$$P(A) = \binom{3}{1} (0,2792)^1 (0,7208)^2 = 0,3137$$

Örnek 6

Bir makine tarafından üretilen bir parçanın defolu olma olasılığı 0,1'dir. Rastgele seçilen 10 üründen en fazla 1 tanesinin defolu olma olasılığı nedir? Parçaların kalitesinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayın.

Örnek 6

X , 10 ürün içerisindeki defolu ürün sayısını gösteren rastgele değişken olsun. $n = 10$, $p = 0,1$ 'dir.

X 'i ($n = 10$, $p = 0,1$) parametrelili binom rastgele değişken olarak düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} + \binom{10}{1} (0,1)^1 (0,9)^9 \\ &= 0,7361 \end{aligned}$$

Örnek 6

X , 10 ürün içerisindeki defolu ürün sayısını gösteren rastgele değişken olsun. $n = 10$, $p = 0,1$ 'dir.

X 'i, $\lambda = np = 10 \times 0,1 = 1$ parametrelili bir poisson rastgele değişken olarak düşünebiliriz ve Poisson yaklaşımı yapabiliriz.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = e^{-1} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-1} \frac{\lambda^1}{1!} \cong 0,7358$$

Örnek 7

10^9 bit/sn hızla çalışan bir bilgisayar ağı üzerinden ikili sayıların iletilmesinde hata olasılığı 10^{-8} 'dir.

1 saniyede 5 veya daha fazla hata olma olasılığını hesaplayınız.

Örnek 7

10^9 bit/sn hızla çalışan bir bilgisayar ağı üzerinden ikili sayıların iletilmesinde hata olasılığı 10^{-8} 'dir.

1 saniyede 5 veya daha fazla hata olma olasılığını hesaplayınız.

$$\lambda = np = 10^9 10^{-8} = 10$$

N: 1 saniyede yapılan hata sayısı

$$P(N \geq 5) = 1 - P(N < 5) = 1 - \sum_{i=0}^4 e^{-10} \frac{10^i}{i!} = 0,9707$$

Geometrik Rastgele Değişken

Her birisinin başarılı olma olasılığı p olan bağımsız deneyler yapılsın. Deney başarılı olana kadar gerçekleştirilen tekrar sayısını gösteren rastgele değişkene geometrik rastgele değişken denir.

Örneğin X bir geometrik rastgele değişken ise $P(X = 3)$ demek, ilk iki deneyin başarısız ve 3. deneyin başarılı olma olasılığı demektir.

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1}p$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p)^{i-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

Örnek 8

Bir binanın girişindeki yüz tanıma sistemi %87 ihtimalle yüzleri doğru bir şekilde tanımaktadır. Bu sistemin binaya giren ilk 6 kişiyi doğru 7. kişiyi yanlış tanıması olasılığı nedir?

Örnek 8

Bir binanın girişindeki yüz tanıma sistemi %87 ihtimalle yüzleri doğru bir şekilde tanımaktadır. Bu sistemin binaya giren ilk 6 kişiyi doğru 7. kişiyi yanlış tanıması olasılığı nedir?

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1}p$$

$$P(X = 7) = 0,87^6 \times 0,13 = 0,0564$$

Örnek 9

Bir karakter dizisi bir hat üzerinden gönderiliyor. Bir karakterde hata olma olasılığı p 'dir. Hatalı bir karakter almadan önce en az 100 karakteri doğru olarak aldığımızdan %95 emin olmak istiyoruz. $p = ?$

Örnek 9

Bir karakter dizisi bir hat üzerinden gönderiliyor. Bir karakterde hata olma olasılığı p 'dir. Hatalı bir karakter almadan önce en az 100 karakteri doğru olarak aldığımızdan %95 emin olmak istiyoruz. $p = ?$

N: Hatalı bir karakter gönderilene kadar yapılan hatasız gönderim sayısı

$N=k \rightarrow k$ tane karakter doğru gönderilmiş, $k+1$. karakter hatalı

Örnek 9

Bir karakter dizisi bir hat üzerinden gönderiliyor. Bir karakterde hata olma olasılığı p 'dir. Hatalı bir karakter almadan önce en az 100 karakteri doğru olarak aldığımızdan %95 emin olmak istiyoruz. $p = ?$

N : Hatalı bir karakter gönderilene kadar yapılan hatasız gönderim sayısı

$N=k \rightarrow k$ tane karakter doğru gönderilmiş, $k+1$. karakter hatalı

$$\begin{aligned} P(N \geq 100) &= 1 - P(N < 100) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{99} [(1-p)^i p] = (1-p)^{100} = 0,95 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$p = 5,128 \times 10^{-4}$$

Negatif Binom Rastgele Değişken

Her birisinin başarılı olma olasılığı p olan bağımsız deneyler yapılsın. r . başarının i . denemede ortaya çıkma durumunu gösteren rastgele değişkene negatif binom rastgele değişken denir.

Örneğin X bir negatif binom rastgele değişken ise $r = 3$ için $P(X = 10)$ ifadesi, 3. başarılı deneyin 10. tekrarda olma olasılığı demektir.

$$P(X = i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

Örnek 10

Bir ilacın %60 etkili olduğu söyleniyor. Bir hafta boyunca ilacı alan 7. kişinin ilacın etkili olduğu 5. kişi olmasının olasılığını hesaplayınız.

Örnek 10

Bir ilacın %60 etkili olduğu söyleniyor. Bir hafta boyunca ilacı alan 7. kişinin ilacın etkili olduğu 5. kişi olmasının olasılığını hesaplayınız.

$$P(X = 7) = \binom{6}{4} 0,6^4 0,4^2 0,6 = 0,1866$$