МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лабораторная работа №1
«Устойчивость линейных систем»
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:
студенты гр. R3425
Борисов М. В.
Симонов П.
Мацуганов А. И.

Преподаватель:
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург
2020 г.

Задание 1

Дана каноническая модель системы в пространстве состояний.

$$\begin{cases} \dot{x} = & Ax + bu \\ y = & Cx \end{cases}$$

Перейти к функциональной модели ”вход-выход” и построить передаточную функцию системы.

Дано

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

Передаточная функция системы выражается известным соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}b \tag{1}$$

Подставляя в 1 данные задания получаем

$$W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + s^2 + 4s - 6}$$

Из полученного выражения легко получить систему по модели ”вход-выход”, зная что

$$a(s)y = b(s)u$$
$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Получаем

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$$

Задание 2

Дана функциональная модель системы в пространстве ”вход-выход” с нулевыми начальными данными. Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

Дано

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$$

Решение

Систему вида

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

легко представить её в виде модели в пространстве состояний составив соответствующие матрицы A, B и C следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Подставляя это в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 + x_2 + u \\ \dot{x_2} = -3x_1 + x_3 - 2u \\ \dot{x_3} = 4x_1 + u \\ \quad y = x_1 \end{cases}$$

Задание 3

Дана система в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

, где $x \in \mathbb{R}^3$, B – единичная матрица размера 3×3.

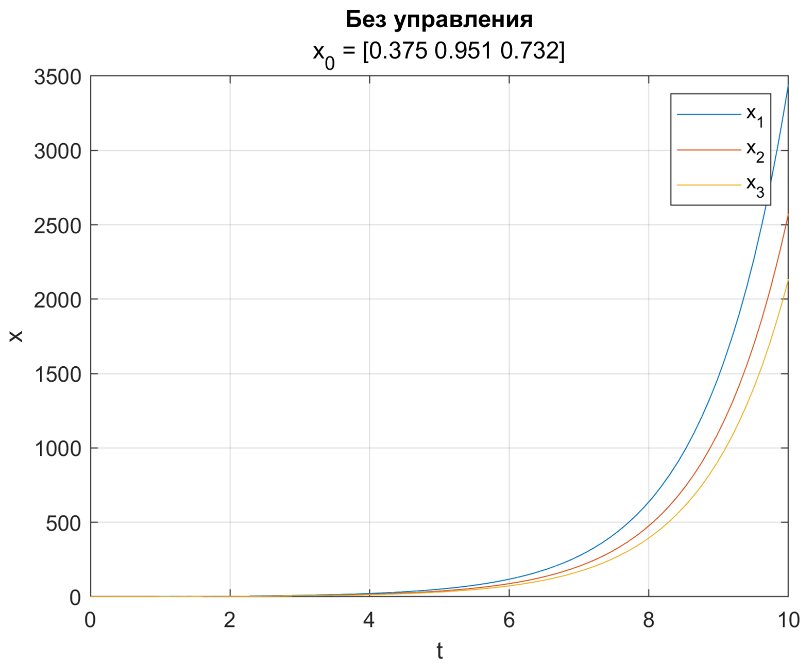
1. Промоделировать данную систему в MATLAB. Вывести графики для каждой переменной от времени.
2. Найти собственные числа матрицы A, убедиться в неустойчивости системы
3. Найти границу коэффициента усиления k^* такую, что при любых $k < k^*$ регулятор вида $u = kx$ будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы.
4. Найти собственные числа матрицы замкнутой системы, построить графики решения

Дано

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение

Без управления

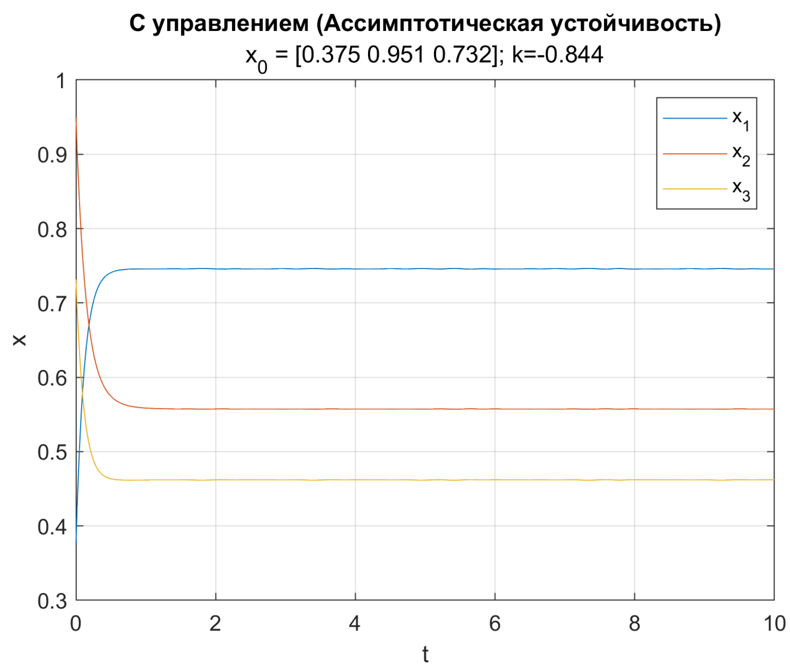


Собственные числа матрицы A,

$$\lambda_1 = 0.84$$
$$\lambda_2 = -7.67$$
$$\lambda_3 = -4.17$$

Система очевидно неустойчива.

С управлением. Асимптотическая устойчивость



Коэффициент усиления $k^* = -0.844$,
Матрица замкнутой системы

$$A^* = A + Bk^* = \begin{bmatrix} -3.844 & 1 & 5 \\ 3 & -4.844 & 1 \\ 3 & 0 & -4.844 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A^*,

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -8.52$$
$$\lambda_3 = -5.01$$

Ниже приведён код, использованный для выполнения задания.

```
rng(42); % репродуцируемые случайные значения

clear
clc
close all

img_path = ”.\..\img\”;

if ~exist(img_path, 'dir')
    mkdir(img_path)
end

%% Дано
A = [-3 1 5;...
     3 -4 1;...
     3 0 -4];
B = eye(3);

%% Моделирование
x0 = rand(3, 1); % ненулевые начальные условия
t0 = 0;
tf = 10;
tspan = [t0 tf]; % время моделирования

%% С ненулевыми начальными условиями без управления
dxdt = @(t, x) A*x; % моделируемая система

[t, y] = ode45(dxdt, tspan, x0);

h = figure;
plot(t, y);
title(”Без управления”);
subtitle(sprintf('x_0 = [%0.3f %0.3f %0.3f]', x0));
xlabel('t');
ylabel('x');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
grid on

```

```
print(h, img_path + "no_control", '-dpng', '-r300')

lambda_open = eig(A);

%% Те же начальные условия, но с управлением
% (ассимптотическая устойчивость)
k = -max(real(eig(A))); % граничный коэффициент усиления k*
u = @(x) k*x; % управление системы
dxdt = @(t, x) A*x + B*u(x); % моделируемая система

[t, y] = ode45(dxdt, tspan, x0);

h = figure;
plot(t, y);
title("С управлением (Ассимптотическая устойчивость)");
subtitle(sprintf('x_0 = [%0.3f %0.3f %0.3f]; k=%0.3f', x0, k));
xlabel('t');
ylabel('x');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
grid on

print(h, img_path + "assymp_control", '-dpng', '-r300')

lambda_closed = eig(A + k*B);
```

Вывод

В работе изучены представления систем - вход-выход и вход-состояние-выход -, методы перехода от одной формы к другой, а также рассмотрена система с пропорциональным регулятором обеспечивающим устойчивость системы.