МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лабораторная работа №4
«Дискретные системы»
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:
студенты гр. R4133c
Борисов М. В.
Симонов П.
Мацуганов А. И.

Преподаватель:
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург
2021 г.

Задание 1

Дана каноническая модель дискретной системы в пространстве состояний.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Начальные данные - нулевые.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ \text{-}0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Перейти к функциональной модели "вход-выход"
2. Построить передаточную функцию системы

Решение

Передаточная функция системы выражается известным соотношением

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}b \tag{1}$$

Подставляя в (1) данные задания получаем

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ \text{-}0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \frac{0.2\lambda^2 - 0.89\lambda - 0.3}{\lambda^3 - 0.2\lambda^2 - 0.3\lambda - 0.1} \tag{2}$$

Из полученного выражения легко получить систему по модели "вход-выход", зная что

$$a(\lambda)\tilde{y} = b(\lambda)\tilde{u}$$
$$W(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$$

Получаем

$$y_{k+3} - 0.2y_{k+2} - 0.3y_{k+1} - 0.1y_k = 0.2u_{k+2} - 0.89u_{k+1} - 0.3u_k$$

Задание 2

Дана функциональная модель дискретной системы в пространстве "вход-выход". Начальные данные - нулевые.

$$y_{k+3} + 0.1y_{k+2} - 0.2y_{k+1} - 0.3y_k = 0.3u_{k+2} + 0.01u_{k+1} + 0.06u_k \tag{3}$$

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

Решение

Систему вида

$$y_{k+3} + a_1 y_{k+2} + a_2 y_{k+1} + a_3 y_k = b_1 u_{k+2} + b_2 u_{k+1} + b_3 u_k$$

легко представить в виде модели в пространстве состояний составив соответствующие матрицы A, B и C следующим образом:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.01 \\ 0.06 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Задание 3

Дана передаточная функция устойчивой непрерывной системы

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5} \tag{4}$$

1. Построить переходную функцию данной системы
2. Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Эйлера.
3. Получить оценку на шаг дискретезации, при котором система будет устойчивой.
4. Построить переходную функцию полученной дискретной системы с разными шагами дискретизации - при котором система устойчива и при котором неустойчива.
5. Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Тастина.
6. Построить переходную функцию полученной системы.

Решение

Переходная функция исходной системы

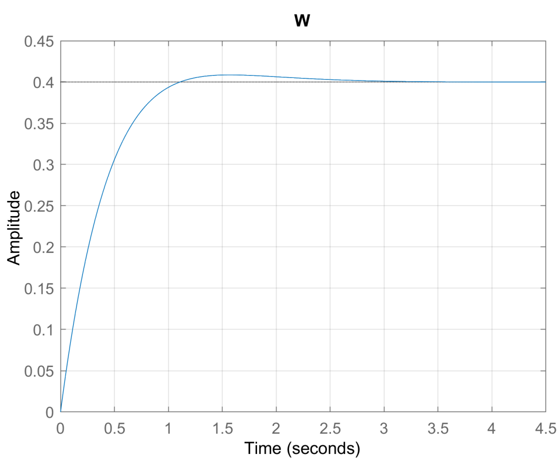

Рис. 1: Переходной процесс исходной системы

Дискретизация системы

Оценка дискретизации

$$h < \min \frac{2\,|\mathrm{Re}\, s(A)|}{|s(A)|^2} \qquad (5)$$
$$h < 0.8$$

Дискретизация по Эйлеру

$$W(z) = \frac{hz + 2h^2 - h}{z^2 + (4\,h - 2)\;z + 5\,h^2 - 4\,h + 1} \qquad (6)$$

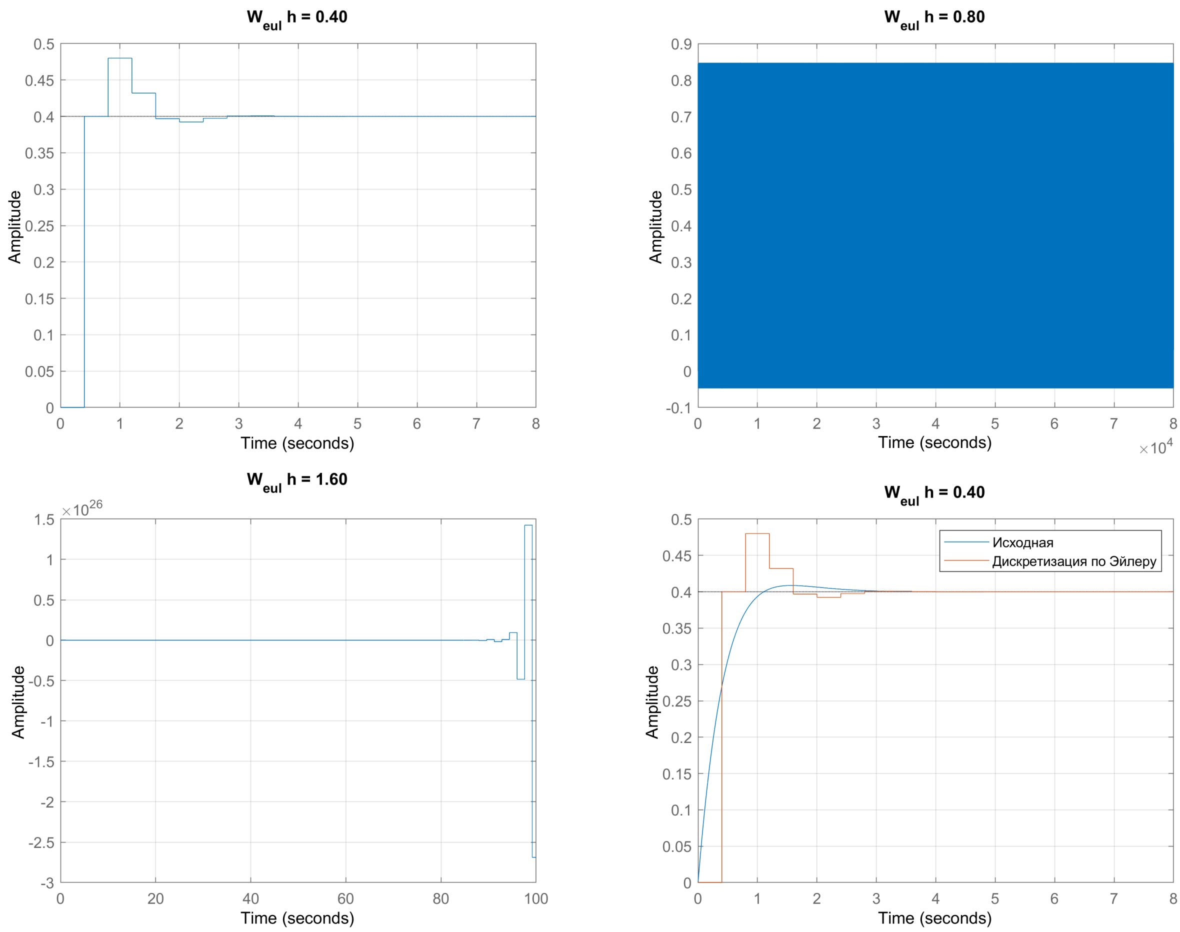

Рис. 2: Переходной процесс системы дискретизированной по Эйлеру

Дискретизация по Тастину

$$W(z) = \frac{(h+1)z^2 + 2hz + h - 1}{(5\,h^2 + 8\,h + 4)\;z^2 + (10\,h^2 - 8)\;z + 5\,h^2 - 8\,h + 4} \qquad (7)$$

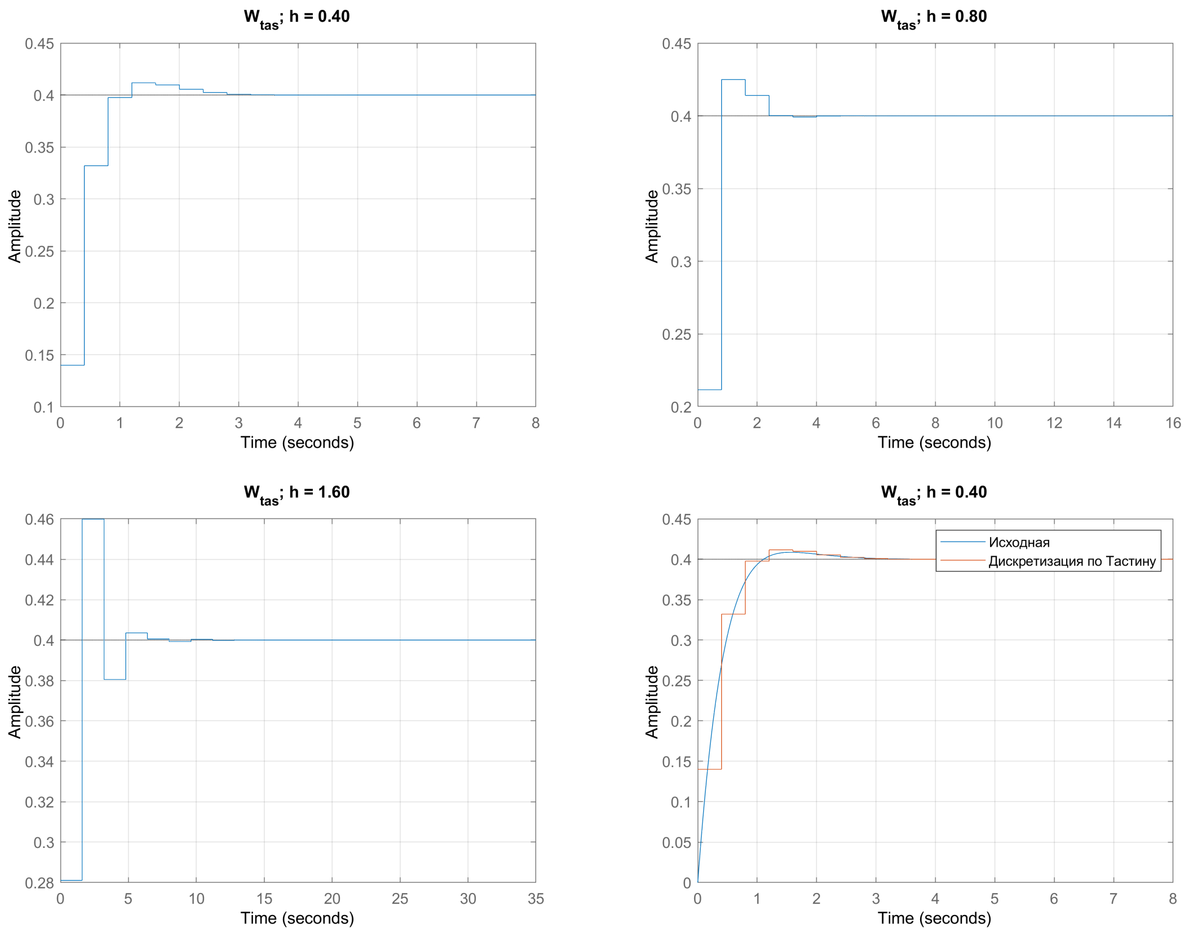

Рис. 3: Переходной процесс системы дискретизированной по Эйлеру

Вывод

В лабораторной работе изучены и исследованы дискретные системы и их представления. В задании 3 показана эквивалентность непрерывной и дискретной систем при условии верного шага дискретизации.
Рассмотрены методы дискретизации Эйлера и Тастина, наглядно показано влияние шага дискретизации на динамику системы. Также показано, что метод Эйлера при значении дискретизации больше оценочного даёт неустойчивую систему, в то время как метод Тастина всегда даёт устойчивую систему.
Однако для каждой дискретной системы характерны перерегулирование и более длительный переходный процесс, чем для непрерывной и при снижении шага дискретизации данные параметры приближаются к параметрам непрерывной системы.

Листинг к Заданию 3

```
clear
clc
close all

img_path = ".\..\img\";

```

```
if exist(img_path, 'dir')
   rmdir(img_path, 's');
end

mkdir(img_path);

%% Дано
initial_nom = [1 2];
initial_den = [1 4 5];

syms s h z;

W = makeW(initial_nom, initial_den);
W_eul = subs(W, s, (s-1)/h);
W_tas = subs(W, s, 2/h*(s-1)/(s+1));

prettyLatex(subs(W_eul, s, z), z)
prettyLatex(subs(W_tas, s, z), z)

A = poly2sym(initial_den, s);
h_est = eval(min(2*abs(real(solve(A)))./abs(solve(A)).^2));

p = figure;
stepplot(sym2tfs(W));
title('W');
grid on
print(p, img_path + "init.png", '-dpng', '-r300');

for h_i = [h_est/2, h_est, h_est*2, h_est*100]
    p = figure;
    stepplot(sym2tfz(subs(W_eul, h, h_i), h_i));
    grid on
    title(sprintf('W_{eul} h = %0.2f', h_i));
    print(p, img_path + "eul" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
     '-dpng', '-r300');

    p = figure;
    stepplot(sym2tfs(W));
    hold on
    stepplot(sym2tfz(subs(W_eul, h, h_i), h_i));
    grid on
    title(sprintf('W_{eul} h = %0.2f', h_i));
    legend("Исходная", "Дискретизация по Эйлеру");
    print(p, img_path + "init-eul" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
     '-dpng', '-r300');

end

for h_i = [h_est/2, h_est, h_est*2, h_est*100]
    p = figure;
```

```
    stepplot(sym2tfz(subs(W_tas, h, h_i), h_i));
    grid on
    title(sprintf('W_{tas}; h = %0.2f', h_i));
    print(p, img_path + ”tas” + sprintf('h%g', h_i) + ”.png”,...
     '-dpng', '-r300');

    p = figure;
    stepplot(sym2tfs(W));
    hold on
    stepplot(sym2tfz(subs(W_tas, h, h_i), h_i));
    grid on
    title(sprintf('W_{tas}; h = %0.2f', h_i));
    legend(”Исходная”, ”Дискретизация по Тастину”);
    print(p, img_path + ”init-tas” + sprintf('h%g', h_i) + ”.png”,...
     '-dpng', '-r300');
end

function W = makeW(nom, den)
    syms s;
    W = poly2sym(nom, s)/poly2sym(den, s);
end

function TF = sym2tfs(W)
    [num, den] = numden(W);
    tfn = sym2poly(num);
    tfd = sym2poly(den);
    TF = tf(tfn, tfd);
end

function TF = sym2tfz(W, delay)
    [num, den] = numden(W);
    tfn = sym2poly(num);
    tfd = sym2poly(den);
    TF = tf(tfn, tfd, delay);
end

function str = prettyLatex(W, s)
    [num, den] = numden(W);
    num = simplify(collect(num, s));
    den = simplify(collect(den,s));
    str = latex(num/den);
end
```