МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лабораторная работа №2
«Устойчивость нелинейных систем»
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:
студенты гр. R4133c
Борисов М. В.
Симонов П.
Мацуганов А. И.

Преподаватель:
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург
2021 г.

Задание 1

Дана нелинейная система.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x - 4y - \arctan 2y \end{cases}$$

1. Найти её положения равновесия
2. Линеаризовать систему около одного из положений равновесия, исследовать на устойчивость
3. Доказать устойчивость исходной системы с помощью метода функций Ляпунова
4. Построить графики исходной и линеаризованной систем

Решение

Найдём положение равновесия

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - \arctan 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ 11x_1 = -\arctan 6x_1 \end{cases}$$

$$x^* = (0,\, 0)$$

Исследуем на устойчивость около положения равновесия

$$A(x) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\dfrac{6 + 16x^2}{1 + 4x^2} \end{bmatrix}$$

$$A(x^*) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы $A(x^*)$

$$\lambda_1 = -6.30$$
$$\lambda_2 = -2.70$$

Оба числа действительные и отрицательные, значит система устойчива и имеет положение равновесия типа ”узел”.

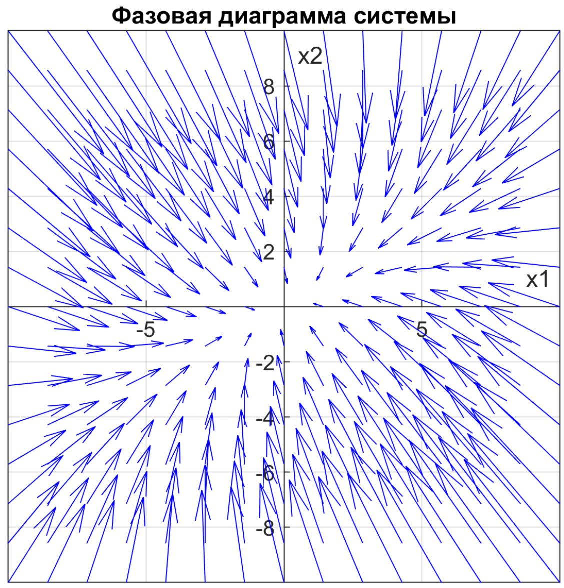

Рис. 1:

Метод функций Ляпунова

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\dot{V}(x) = 4x_1x_2 - 2x_2 \arctan 2x_2 - 6x_1^2 - 8x_2^2$$

Чтобы доказать $\dot{V}(x) < 0 \, \forall x \in X \backslash \{0\}$ достаточно показать, что

$$6x_1^2 + 8x_2^2 > 4x_1x_2$$

Член с arctan можно опустить, т.к. если выражение слева больше без него, то с ним будет ещё больше. Приведя неравенство к виду

$$3t + \frac{4}{t} = 2, \text{ где } t = \frac{x_1}{x_2}$$

получим, что данное уравнение не имеет действительных корней и всегда положительно. Таким образом $\dot{V}(x) < 0 \, \forall x \in X \backslash \{0\}$, поэтому исходная система является ассимптотически устойчивой.

Графики систем

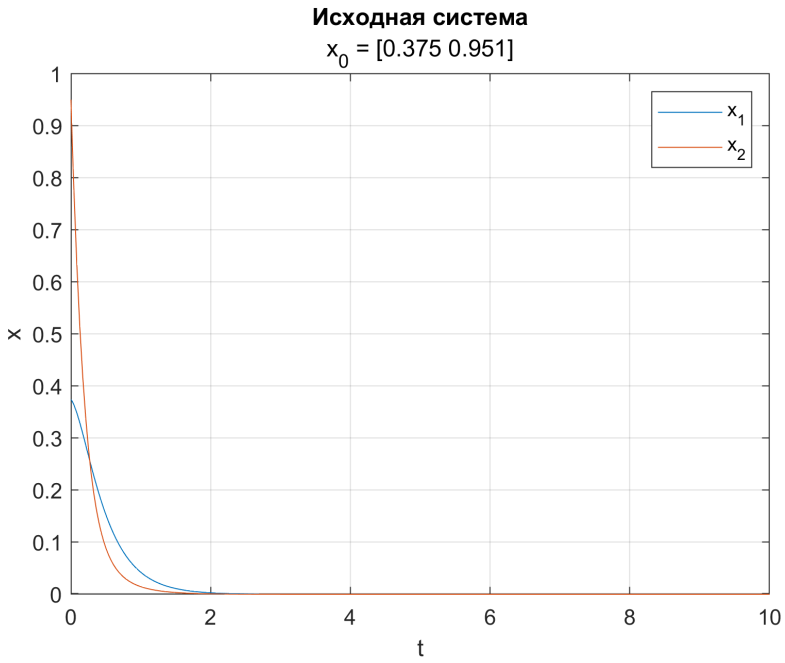

Рис. 2:

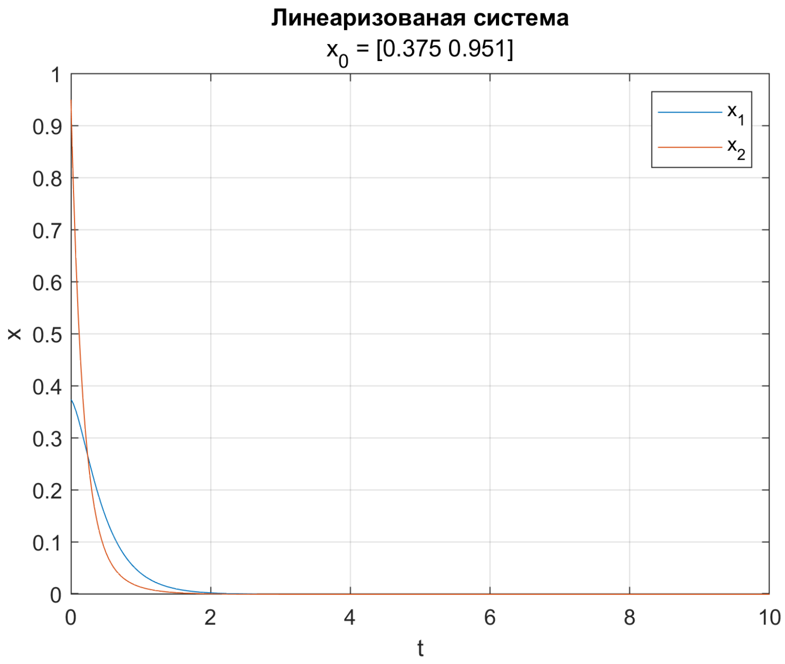

Рис. 3:

Задание 2

Дана нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi, & \sigma = c^* x \\ \xi = \varphi(\sigma, t) = \dfrac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость системы.

Решение

Проверим выполнение секторного условия

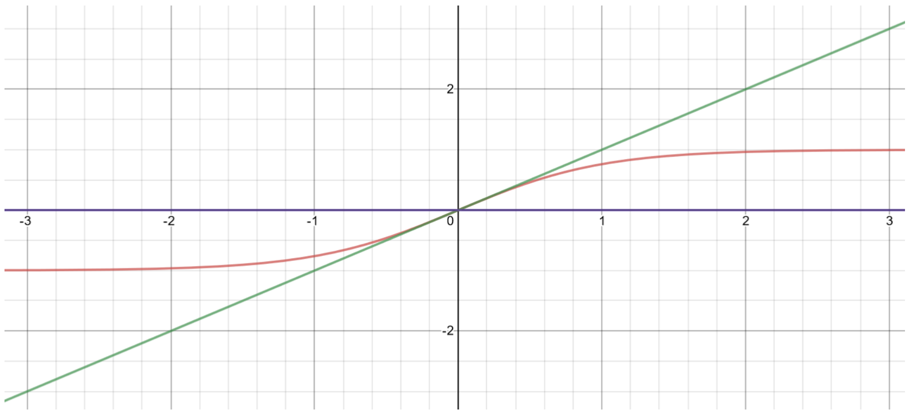

Рис. 4: $\varphi(\sigma, t)$, ограниченная сектором

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \leq \mu_2$$
$$\mu_1 \sigma \leq \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \leq \mu_2 \sigma$$
$$\mu_1 \leq \frac{4}{(e^{\sigma} + e^{-\sigma})^2} \leq \mu_2$$
$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1$$

Проверим собственные значения матрицы

Собственные числа матрицы A
$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -1$$

Матрица не имеет чисто мнимых собственных значений.

Проверим ассимптотическую устойчивость системы

Выберем $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Тогда исследуемая система примет вид $\dot{x} = Ax$. Так как собственные числа матрицы известны и $Re(\lambda) < 0$, то матрица является гурвицевой, а следовательно система ассимптотически устойчива.

Проверим «частотное условие»

$$W_0(s) = -c^*(sI-A)^{-1}b = \frac{-1}{s^2+4s+3}$$
$$Re\left\{[1+\mu_1 W_0(i\omega)]\left[1+\mu_2 W_0(i\omega)\right]^*\right\} > 0,\ \omega \in [-\infty,\ +\infty]$$
$$\frac{\omega^4+11\omega^2+6}{\omega^4+10\omega^2+9} > 0$$

Условие выполняется, следовательно система экспоненциально устойчива.

Задание 3

Дана нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi, & \sigma = c^*x \\ \xi = \varphi(\sigma) = \begin{cases} 2\sigma, & \text{при } |\sigma| < 1 \\ 2sign\sigma, & \text{при } |\sigma| \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость системы.

Решение

Проверим выполнение секторного условия

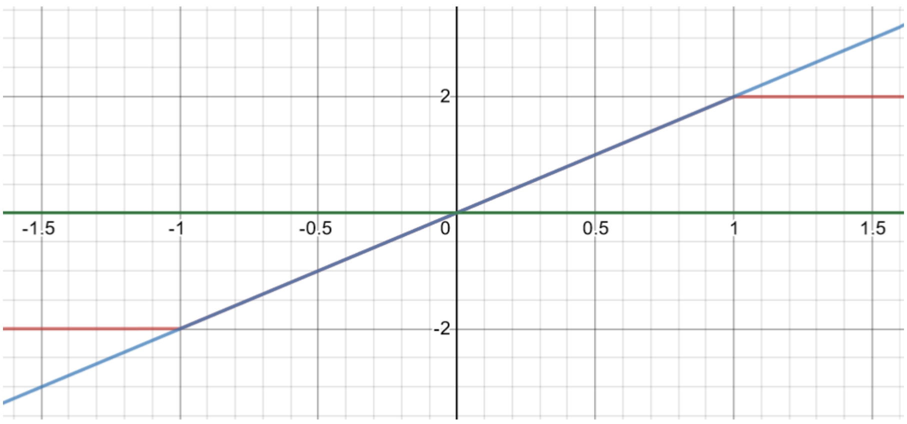

Рис. 5: $\varphi(\sigma)$, ограниченная сектором

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu_2 \leq +\infty$$
$$0 \leq \begin{cases} 2, & \text{при } |\sigma| < 1 \\ 0, & \text{при } |\sigma| \geq 1 \end{cases} \leq \mu_0$$
$$\mu_2 = 2$$

Проверим является матрица A гурвицевой

Собственные числа матрицы A

$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -1$$

Числа действительные и отрицательные, следовательно матрица гурвицева

Проверим частотное условие

$$W_0(s) = -c^*(sI - A)^{-1}b = \frac{-1}{s^2 + 4s + 3}$$
$$\mu_0^{-1} + Re\left[(1 + i\omega\nu)\, W_0(i\omega)\right] > 0,\, \omega \in [0,\, +\infty]$$
$$\frac{\omega^4 + \omega^2(10\nu + 21) + 3}{(\omega^2 + 1)^2 + 25\omega^2} > 0$$

Выбрав $\nu \geq 0$ условие выполняется, следовательно система асимптотически устойчива.

Вывод

В работе изучены методы исследования системы на устойчивость, а также теоремы для доказательства различных типов устойчивости - круговой критерий, критерий Попова и метод функций Ляпунова.