*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Лабораторная работа №5
«Системы с запаздыванием»
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:
студенты гр. R4133c
Борисов М. В.
Симонов П.
Мацуганов А. И.

Преподаватель:
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург
2021 г.

Задание 1

Дана система с задержкой

$$\dot{x}(t) = -\operatorname{sgn} x(t-h),\ t \geq 0,\ h > 0 \tag{1}$$

$h = 2$ - постоянная задержка, $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h, 0]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-2, -1)\,, \\ -t - 0.5, & t \in [-1, 0]\,. \end{cases}$$

Используя метод шагов, построить график решения системы (1).

Решение

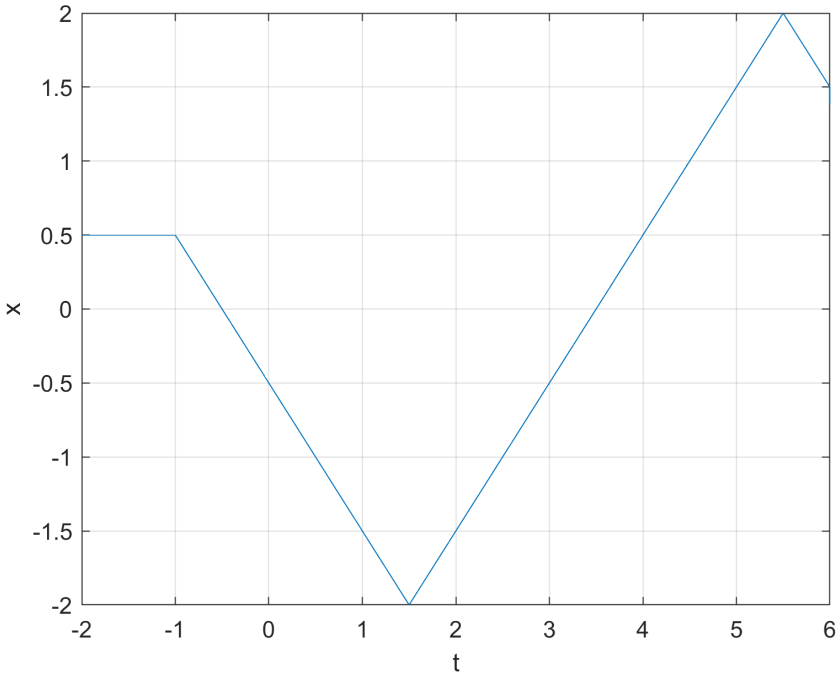

Рис. 1: График решения системы после трёх шагов

Шаг 1 $\quad t \in [0,\ 2]$

$x(0) = \varphi(0) = -0.5$

$$\dot{x} = \begin{cases} -1, & t \in (0,\ 1.5] \\ 1, & t \in (1.5,\ 2] \end{cases} \tag{2}$$

$t \in (0,\ 1.5]$

$$x(t) = -t + C = |C = x(0) + 0 = -0.5| = -t - 0.5 \tag{3}$$

$t \in (1.5,\ 2]$

$$x(t) = t + C = |C = x(1.5) - 1.5 = -3.5| = t - 3.5 \tag{4}$$

Шаг 2 $t \in [2,\, 4]$

$$\dot{x} = 1,\, t \in (2,\, 4] \tag{5}$$

$t \in (2,\, 4]$

$$x(t) = t + C = |C = x(2) - 2 = -3.5| = -t - 3.5 \tag{6}$$

Шаг 3 $t \in [4,\, 6]$

$$\dot{x} = \begin{cases} 1,\, t \in (4,\, 5.5] \\ -1,\, t \in (5.5,\, 6] \end{cases} \tag{7}$$

$t \in (4,\, 5.5]$

$$x(t) = t + C = |C = x(4) - 4 = -3.5| = t - 3.5 \tag{8}$$

$t \in (5.5,\, 6]$

$$x(t) = -t + C = |C = x(5.5) + 5.5 = 7.5| = -t + 7.5 \tag{9}$$

Задание 2

Дана система с некоторой произвольной задержкой $\tau(t)$:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - 0.1x(t - \tau(t)) \tag{10}$$

1. Построить функцию Ляпунова
2. Методом Разумихина доказать устойчивость системы

Решение

Согласно методу Разумихина, система (10) является асимптотически устойчивой, когда разрешимо линейное матричное неравенство:

$$\psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + q\,(\varepsilon + 1)\,P & PA_1 \\ A_1^T P & -qP \end{bmatrix} < 0,\, q > 0,\, P > 0 \tag{11}$$

Пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, из (10) следует, что $A = -2,\, A_1 = -0.1$. Тогда имеем:

$$\psi = \begin{bmatrix} \dfrac{3Pq}{2} - 4P & -\dfrac{P}{10} \\ -\dfrac{P}{10} & -P\,q \end{bmatrix} < 0,\, q > 0,\, P > 0 \tag{12}$$

По критерию Сильвестра получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{3\,P\,q}{2} - 4\,P < 0 \\ -\dfrac{3\,P^2\,q^2}{2} + 4\,P^2\,q - \dfrac{P^2}{100} > 0 \\ q > 0,\, P > 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} 0 < q < 2.67 \\ 0.0025 < q < 2.66 \\ q > 0,\, P > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом неравенство разрешимо и $\forall q \in (0.0025,\, 2.66) \therefore$ система асимптотически устойчива.

Задание 3

Дана система с постоянной задержкой h

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h), \text{ где } x \in \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; h = 3$$

1. Промоделировать данную систему
2. Доказать устойчивость системы с помощью функционала Ляпунова-Красовского

Решение

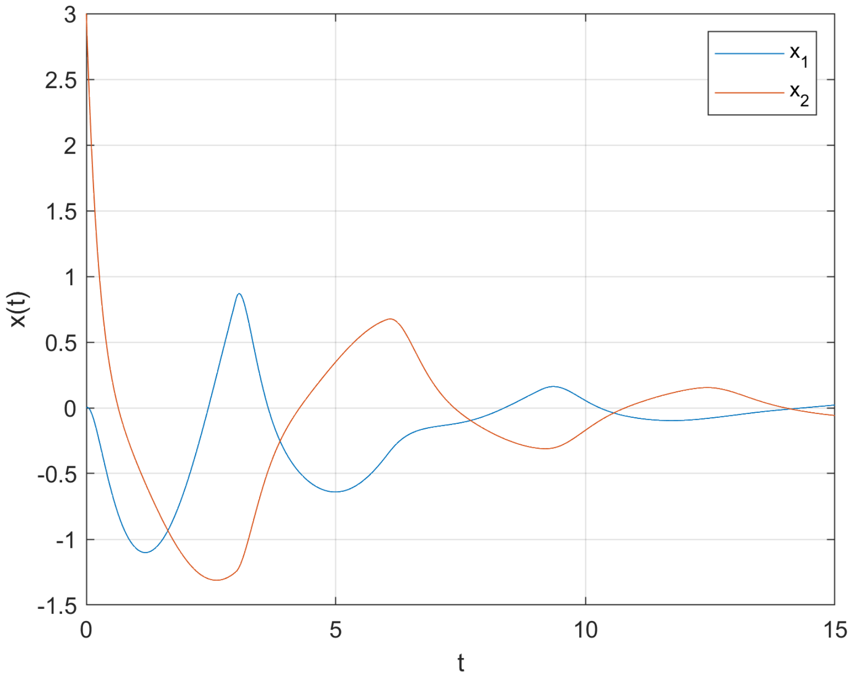

Рис. 2: Моделирование системы (15) с задержкой $h = 3$

Решая с помощью MATLAB матричное неравенство вида

$$\psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & A_1^T P \\ A_1^T P & -(1-\dot{\tau})\, Q \end{bmatrix} < 0, \; q > 0, \; P > 0 \tag{16}$$

получаем следующие значения:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3189 & -0.0205 \\ -0.0205 & 0.3154 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1.0550 & 0.1088 \\ 0.1088 & 1.2869 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Решение найдено, значит система устойчива.

Вывод

В данной работе были рассмотрены системы с запаздыванием и методы их исследования:

- Метод шагов для нахождения решения систем с запаздыванием
- Методы Разумихина и Ляпунова-Красовского для доказательства устойчивости систем с произвольной и постоянной задержкой соответственно