МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лабораторная работа №3
«Динамика нелинейных систем»
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:
студенты гр. R3425
Борисов М. В.
Симонов П.
Мацуганов А. И.

Преподаватель:
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург
2021 г.

Задание

Дана нелинейная система.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 \\ \dot{x_2} = rx_2 - x_2^3 + x_2^5 \end{cases}$$

1. Найти возможные бифуркации в системе
2. Определить тип положений равновесия для всех значений бифуркационного параметра r
3. Построить фазовые портреты линеаризованной и исходной линейной систем для каждого типа положения равновесия

Решение

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ rx_2 - x_2^3 + x_2^5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2\left(x_2^4 - x_2^2 + r\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0;\ \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4r}\right)} \end{cases}$$

Таким образом получаем следующие точки равновесия:

$$(0, 0), \tag{1}$$

$$\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4r}\right)}\right), \text{ где } r \in \left[-\infty, \frac{1}{4}\right] \tag{2}$$

$$\left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4r}\right)}\right), \text{ где } r \in \left[-\infty, \frac{1}{4}\right] \tag{3}$$

$$\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4r}\right)}\right), \text{ где } r \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \tag{4}$$

$$\left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4r}\right)}\right), \text{ где } r \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \tag{5}$$

При r вне указанных диапазонов корни получаются комплексными.
Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5x_2^4 - 3x_2^2 + r \end{bmatrix}$$

Собственные значения якобиана очевидны и лежат на диагонали.
Для пар точек равновесия (2), (3) и (4), (5) якобиан будет одинаков в силу чётности степени x_2.
Получаем три различных якобиана:

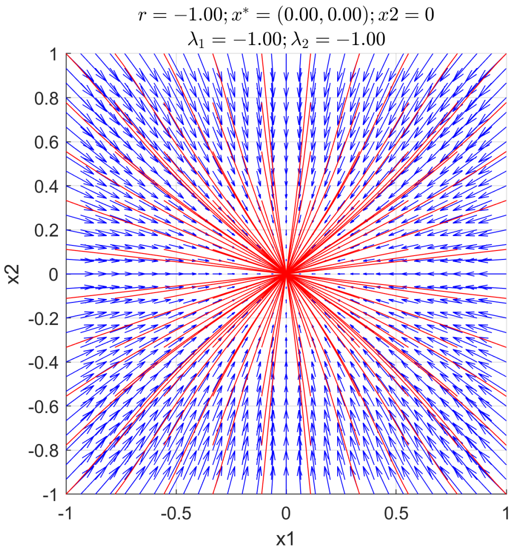
$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$J_{2,3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5\left(\sqrt{1-4r}+1\right)^2}{4} - \dfrac{3\sqrt{1-4r}}{2} + r - \dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

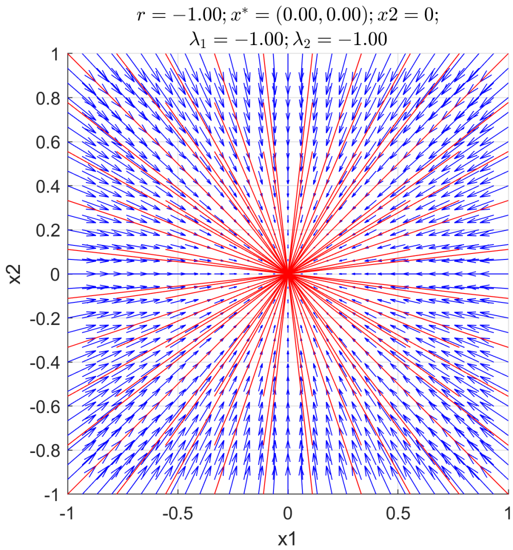
$$J_{4,5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5\left(\sqrt{1-4r}-1\right)^2}{4} + \dfrac{3\sqrt{1-4r}}{2} + r - \dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Для (6) положение равновесия имеет тип

Устойчивый узел $r < 0,\ (\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}; \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0))$



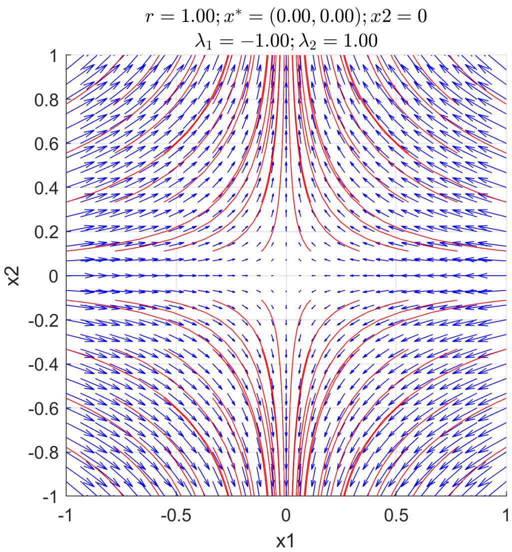
(a) Исходная система



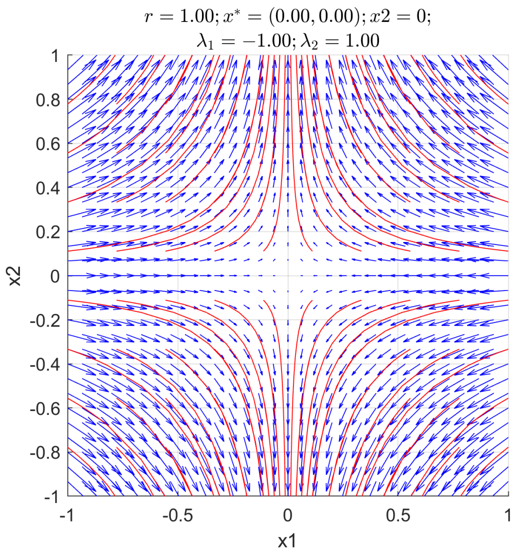
(b) Линеаризованная система

Рис. 1: Фазовые диаграммы

Седло $r > 0,\ (\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}; \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0))$



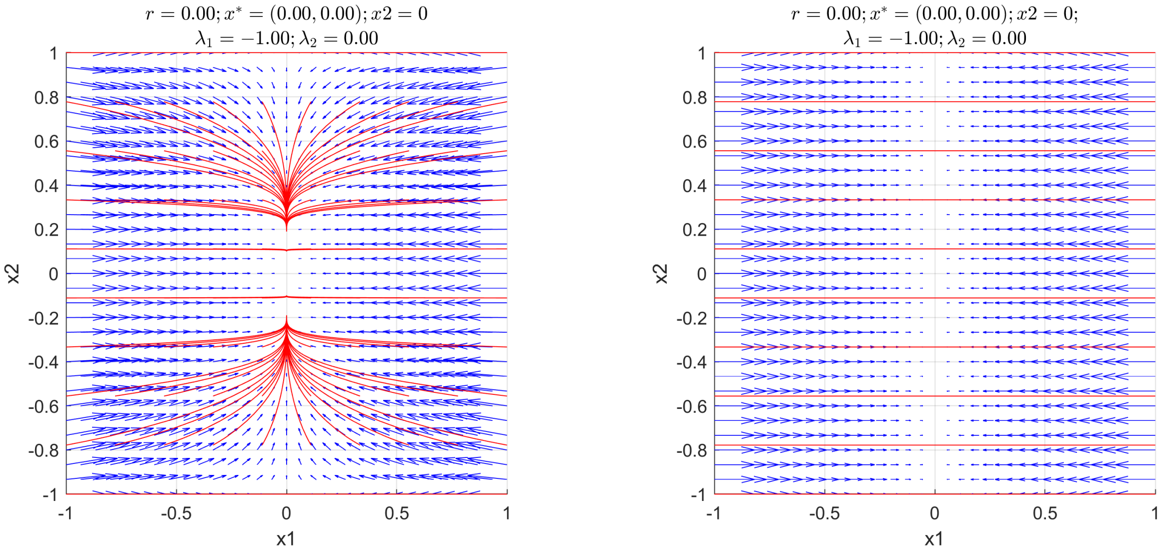
(a) Исходная система



(b) Линеаризованная система

Рис. 2: Фазовые диаграммы

Вырожденный случай $\quad r = 0,\ (\lambda_2 = 0)$

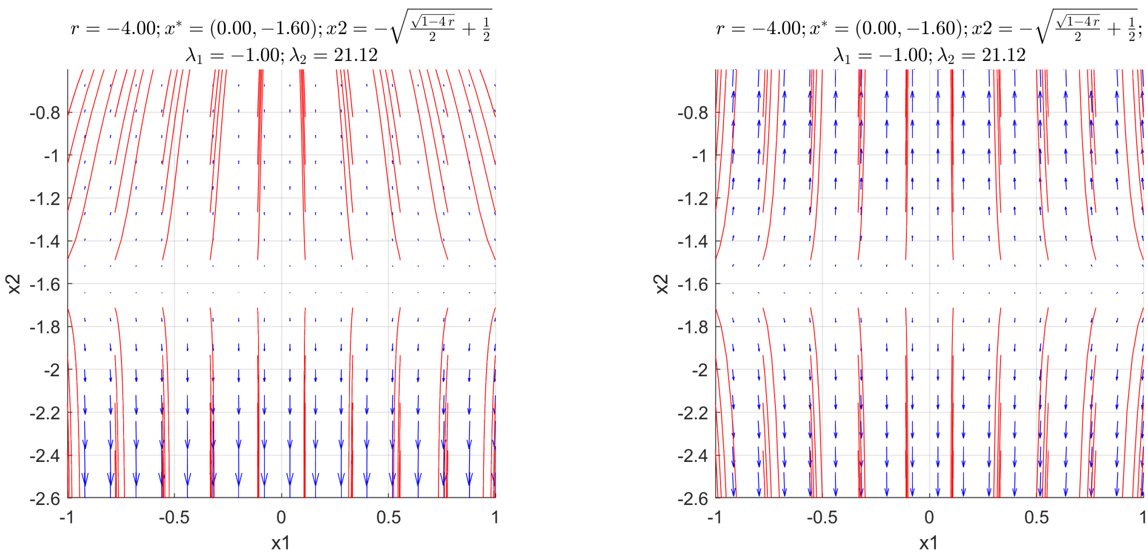


(a) Исходная система $\qquad$ (b) Линеаризованная система

Рис. 3: Фазовые диаграммы

Для (7) положение равновесия имеет тип

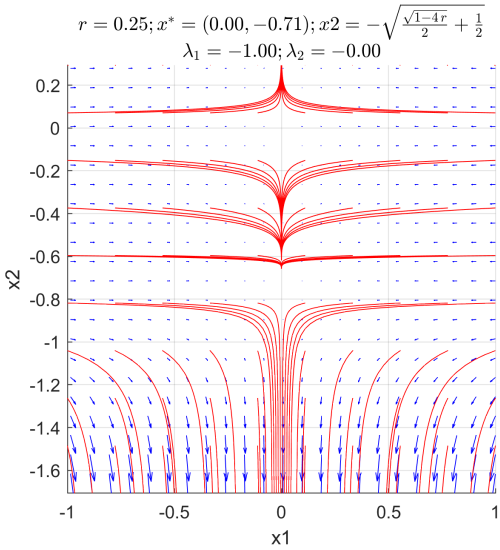
Седло $\quad r < \dfrac{1}{4},\ (\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}; \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$



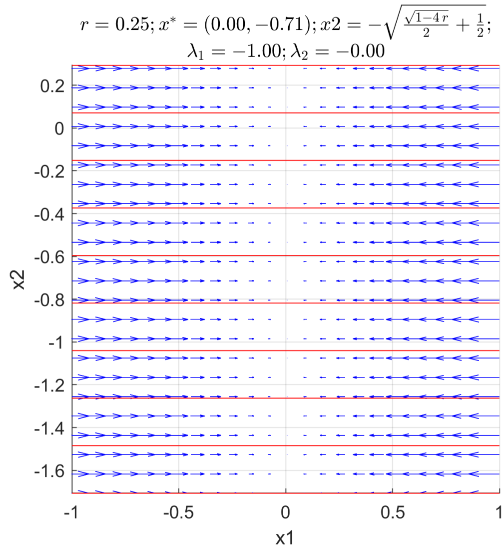
(a) Исходная система $\qquad$ (b) Линеаризованная система

Рис. 4: Фазовые диаграммы

Вырожденный случай $\quad r = \left\{\frac{1}{4}\right\}, \; (\lambda_2 = 0)$



(a) Исходная система

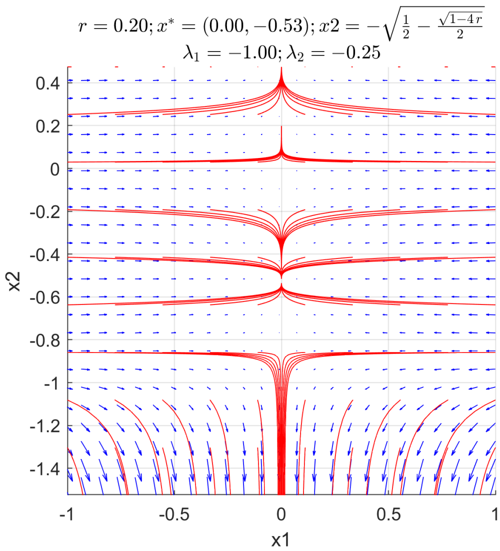


(b) Линеаризованная система

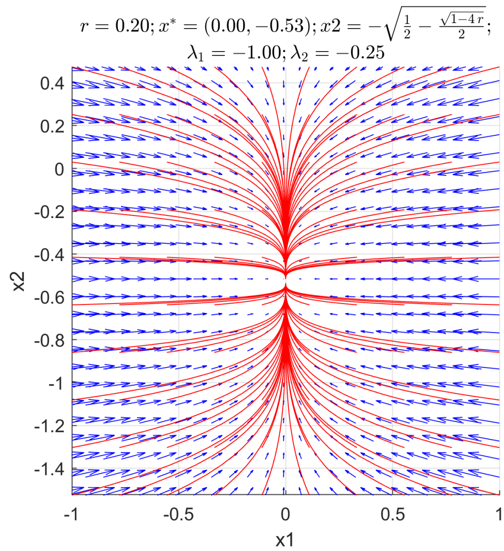
Рис. 5: Фазовые диаграммы

Для (8) положение равновесия имеет тип

Устойчивый узел $\quad 0 < r < \frac{1}{4}, \; (\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}; \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$



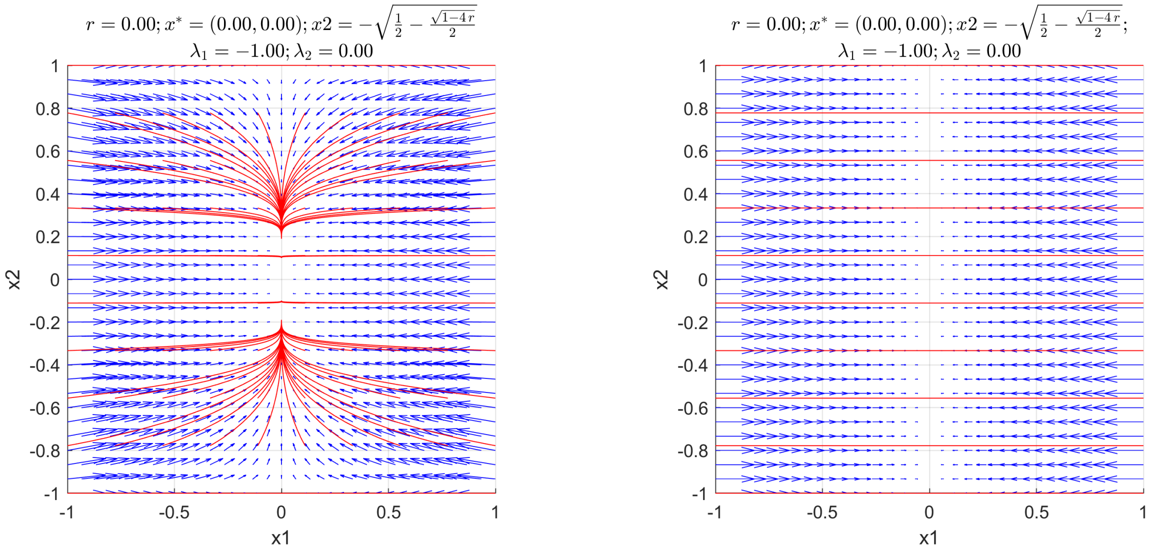
(a) Исходная система



(b) Линеаризованная система

Рис. 6: Фазовые диаграммы

Вырожденный случай $r = \left\{0,\, \frac{1}{4}\right\},\ (\lambda_2 = 0$



(a) Исходная система

(b) Линеаризованная система

Рис. 7: Фазовые диаграммы

Вывод

В работе исследована динамика нелинейной системы и найдены следующие изменения динамики:

- Седлоузловая бифуркация для положения (1) при $r = 0$
- Для положений (2)–(5) за пределами указанного диапазона значений r нет положений равновесия
- На краях диапазона положений (2) - (5) система вырождается