

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Лабораторная работа №1  
«Устойчивость линейных систем»  
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:  
студенты гр. R3425  
Борисов М. В.  
Симонов П.  
Мацуганов А. И.

Преподаватель:  
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург  
2021 г.

## Задание 1

Дана каноническая модель системы в пространстве состояний.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Перейти к функциональной модели "вход-выход" и построить передаточную функцию системы.

**Дано**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

**Решение**

Передаточная функция системы выражается известным соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}b \quad (1)$$

Подставляя в 1 данные задания получаем

$$W(s) = [0 \quad 0 \quad 1] \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + s^2 + 4s - 6}$$

Из полученного выражения легко получить систему по модели "вход-выход", зная что

$$\begin{aligned} a(s)y &= b(s)u \\ W(s) &= \frac{b(s)}{a(s)} \end{aligned}$$

Получаем

$$\ddot{y} + \dot{y} + 4y - 6y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$$

## Задание 2

Дана функциональная модель системы в пространстве "вход-выход" с нулевыми начальными данными. Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

**Дано**

$$\ddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$$

## Решение

Систему вида

$$\ddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3u$$

легко представить её в виде модели в пространстве состояний составив соответствующие матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Подставляя это в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + x_3 - 2u \\ \dot{x}_3 = 4x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

## Задание 3

Дана система в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

, где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $B$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ .

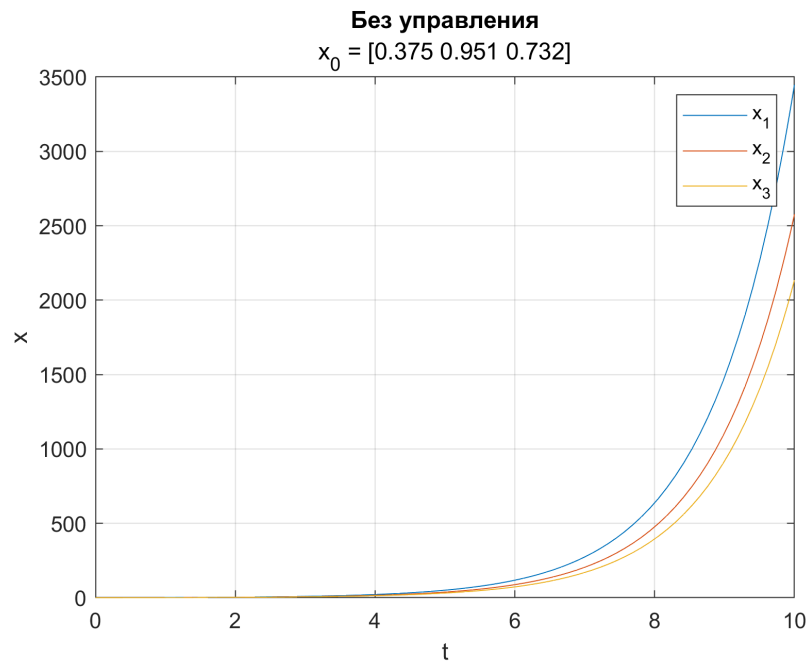
1. Про моделировать данную систему в MATLAB. Вывести графики для каждой переменной от времени.
2. Найти собственные числа матрицы  $A$ , убедиться в неустойчивости системы
3. Найти границу коэффициента усиления  $k^*$  такую, что при любых  $k < k^*$  регулятор вида  $u = kx$  будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы.
4. Найти собственные числа матрицы замкнутой системы, построить графики решения

Дано

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Решение

### Без управления



Собственные числа матрицы  $A$ ,

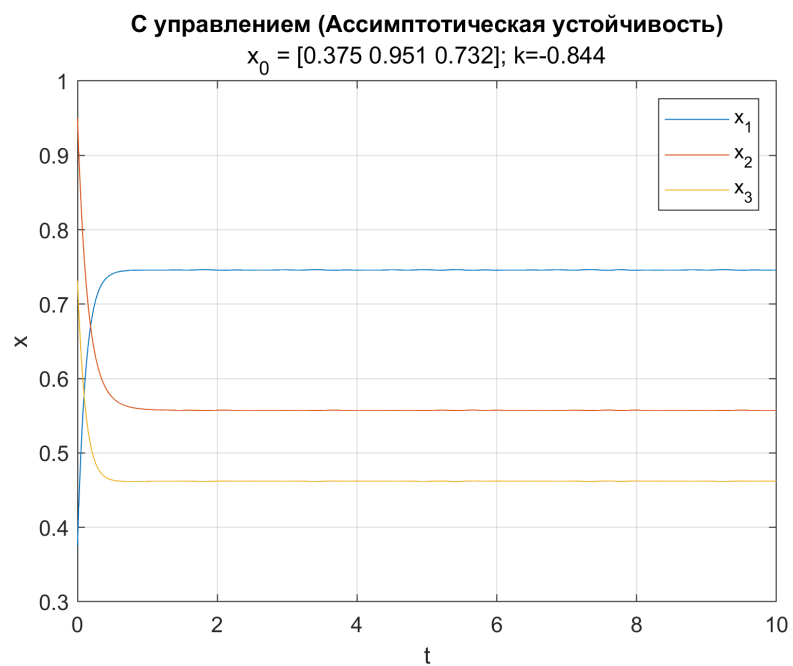
$$\lambda_1 = 0.84$$

$$\lambda_2 = -7.67$$

$$\lambda_3 = -4.17$$

Система очевидно неустойчива.

### С управлением. Асимптотическая устойчивость



Коэффициент усиления  $k^* = -0.844$ ,  
Матрица замкнутой системы

$$A^* = A + Bk^* = \begin{bmatrix} -3.844 & 1 & 5 \\ 3 & -4.844 & 1 \\ 3 & 0 & -4.844 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы  $A^*$ ,

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -8.52$$

$$\lambda_3 = -5.01$$

## Вывод

В работе изучены представления систем - вход-выход и вход-состояние-выход -, методы перехода от одной формы к другой, а также рассмотрена система с пропорциональным регулятором обеспечивающим устойчивость системы.

Ниже приведён код, использованный для выполнения задания.

```
1  rng(42); % репродуцируемые случайные значения
2
3  clear
4  clc
5  close all
6
7  img_path = "..\..\img\";
8
9  if ~exist(img_path, 'dir')
10     mkdir(img_path)
11 end
12
13 %% Дано
14 A = [-3 1 5;...
15      3 -4 1;...
16      3 0 -4];
17 B = eye(3);
18
19 %% Моделирование
20 x0 = rand(3, 1); % ненулевые начальные условия
21 t0 = 0;
22 tf = 10;
23 tspan = [t0 tf]; % время моделирования
24
25 %% С ненулевыми начальными условиями без управления
26 dxdt = @(t, x) A*x; % моделируемая система
27
28 [t, y] = ode45(dxdt, tspan, x0);
29
30 h = figure;
31 plot(t, y);
32 title("Без управления");
```

```

33 subtitle(sprintf('x_0 = [%0.3f %0.3f %0.3f]', x0));
34 xlabel('t');
35 ylabel('x');
36 legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
37 grid on
38
39 print(h, img_path + "no_control", '-dpng', '-r300')
40
41 lambda_open = eig(A);
42
43 %% Те же начальные условия, но с управлением
44 % (асимптотическая устойчивость)
45 k = -max(real(eig(A))); % граничный коэффициент усиления k*
46 u = @(x) k*x; % управление системы
47 dxdt = @(t, x) A*x + B*u(x); % моделируемая система
48
49 [t, y] = ode45(dxdt, tspan, x0);
50
51 h = figure;
52 plot(t, y);
53 title("С управлением (Асимптотическая устойчивость)");
54 subtitle(sprintf('x_0 = [%0.3f %0.3f %0.3f]; k=%0.3f', x0, k));
55 xlabel('t');
56 ylabel('x');
57 legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
58 grid on
59
60 print(h, img_path + "assymp_control", '-dpng', '-r300')
61
62 lambda_closed = eig(A + k*B);

```