

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Лабораторная работа №4  
«Дискретные системы»  
по дисциплине «Моделирование технических систем»

Вариант 3

Выполнили:  
студенты гр. R4133с  
Борисов М. В.  
Симонов П.  
Мацуганов А. И.

Преподаватель:  
Семенов Д. М.

Санкт-Петербург  
2021 г.

## Задание 1

Дана каноническая модель дискретной системы в пространстве состояний.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Начальные данные - нулевые.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1]$$

1. Перейти к функциональной модели "вход-выход"
2. Построить передаточную функцию системы

## Решение

Передаточная функция системы выражается известным соотношением

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}b \quad (1)$$

Подставляя в (??) данные задания получаем

$$W(\lambda) = [0 \ 0 \ 1] \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \frac{0.2\lambda^2 - 0.89\lambda - 0.3}{\lambda^3 - 0.2\lambda^2 - 0.3\lambda - 0.1} \quad (2)$$

Из полученного выражения легко получить систему по модели "вход-выход", зная что

$$\begin{aligned} a(\lambda)\tilde{y} &= b(\lambda)\tilde{u} \\ W(\lambda) &= \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \end{aligned}$$

Получаем

$$y_{k+3} - 0.2y_{k+2} - 0.3y_{k+1} - 0.1y_k = 0.2u_{k+2} - 0.89u_{k+1} - 0.3u_k$$

## Задание 2

Дана функциональная модель дискретной системы в пространстве "вход-выход". Начальные данные - нулевые.

$$y_{k+3} + 0.1y_{k+2} - 0.2y_{k+1} - 0.3y_k = 0.3u_{k+2} + 0.01u_{k+1} + 0.06u_k \quad (3)$$

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

## Решение

Систему вида

$$y_{k+3} + a_1 y_{k+2} + a_2 y_{k+1} + a_3 y_k = b_1 u_{k+2} + b_2 u_{k+1} + b_3 u_k$$

легко представить в виде модели в пространстве состояний составив соответствующие матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  следующим образом:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.01 \\ 0.06 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

## Задание 3

Дана передаточная функция устойчивой непрерывной системы

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5} \quad (4)$$

1. Построить переходную функцию данной системы
2. Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Эйлера.
3. Получить оценку на шаг дискретизации, при котором система будет устойчивой.
4. Построить переходную функцию полученной дискретной системы с разными шагами дискретизации - при котором система устойчива и при котором неустойчива.
5. Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Тастина.
6. Построить переходную функцию полученной системы.

## Решение

### Переходная функция исходной системы

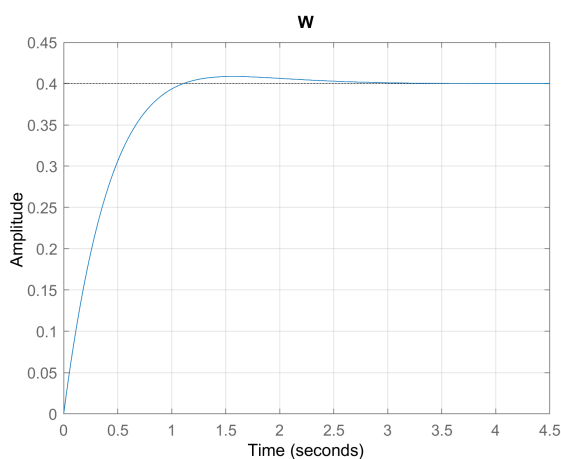


Рис. 1: Переходной процесс исходной системы

## Дискретизация системы

### Оценка дискретизации

$$h < \min \frac{2 |\operatorname{Re} s(A)|}{|s(A)|^2} \quad (5)$$

$$h < 0.8$$

### Дискретизация по Эйлеру

$$W(z) = \frac{hz + 2h^2 - h}{z^2 + (4h - 2)z + 5h^2 - 4h + 1} \quad (6)$$

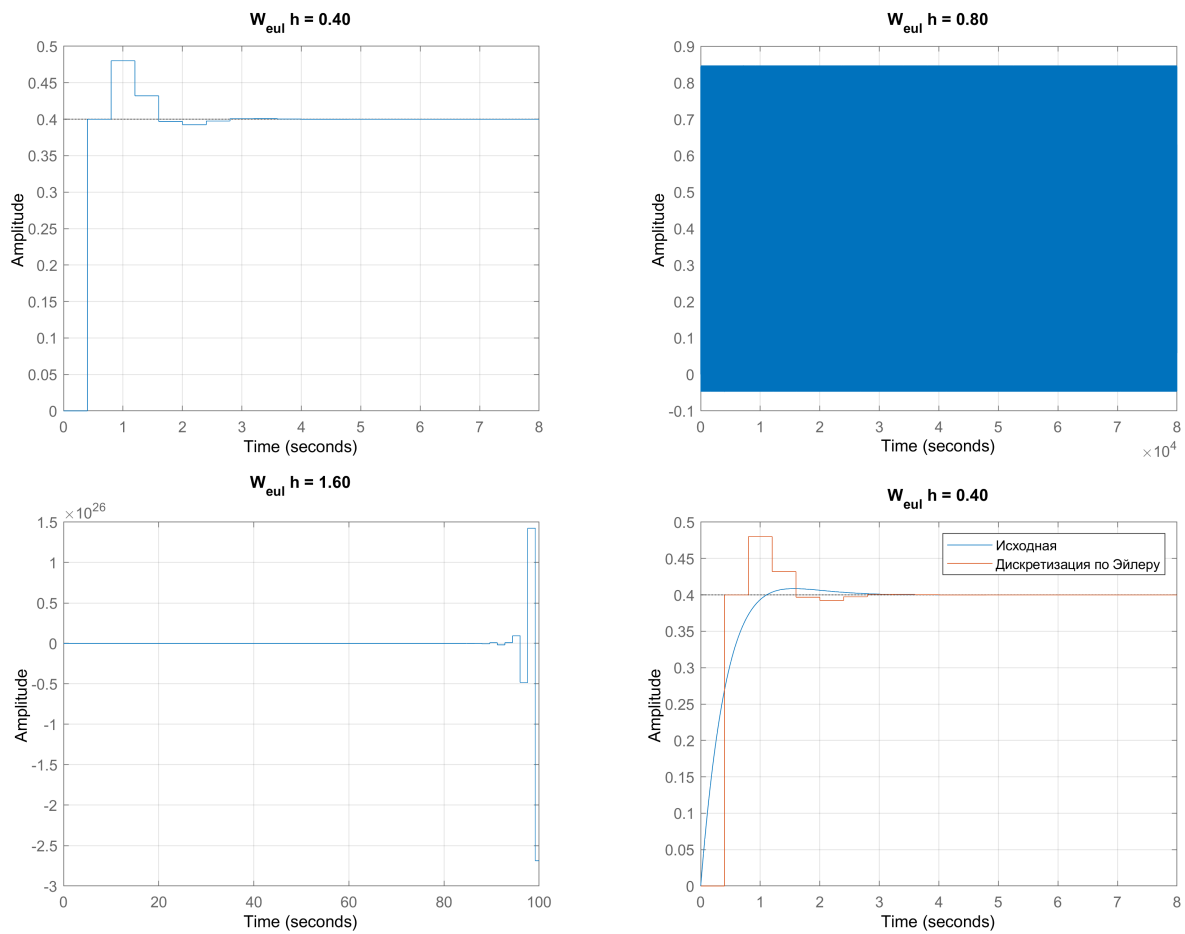


Рис. 2: Переходной процесс системы дискретизированной по Эйлеру

### Дискретизация по Тастину

$$W(z) = \frac{(h + 1)z^2 + 2hz + h - 1}{(5h^2 + 8h + 4)z^2 + (10h^2 - 8)z + 5h^2 - 8h + 4} \quad (7)$$

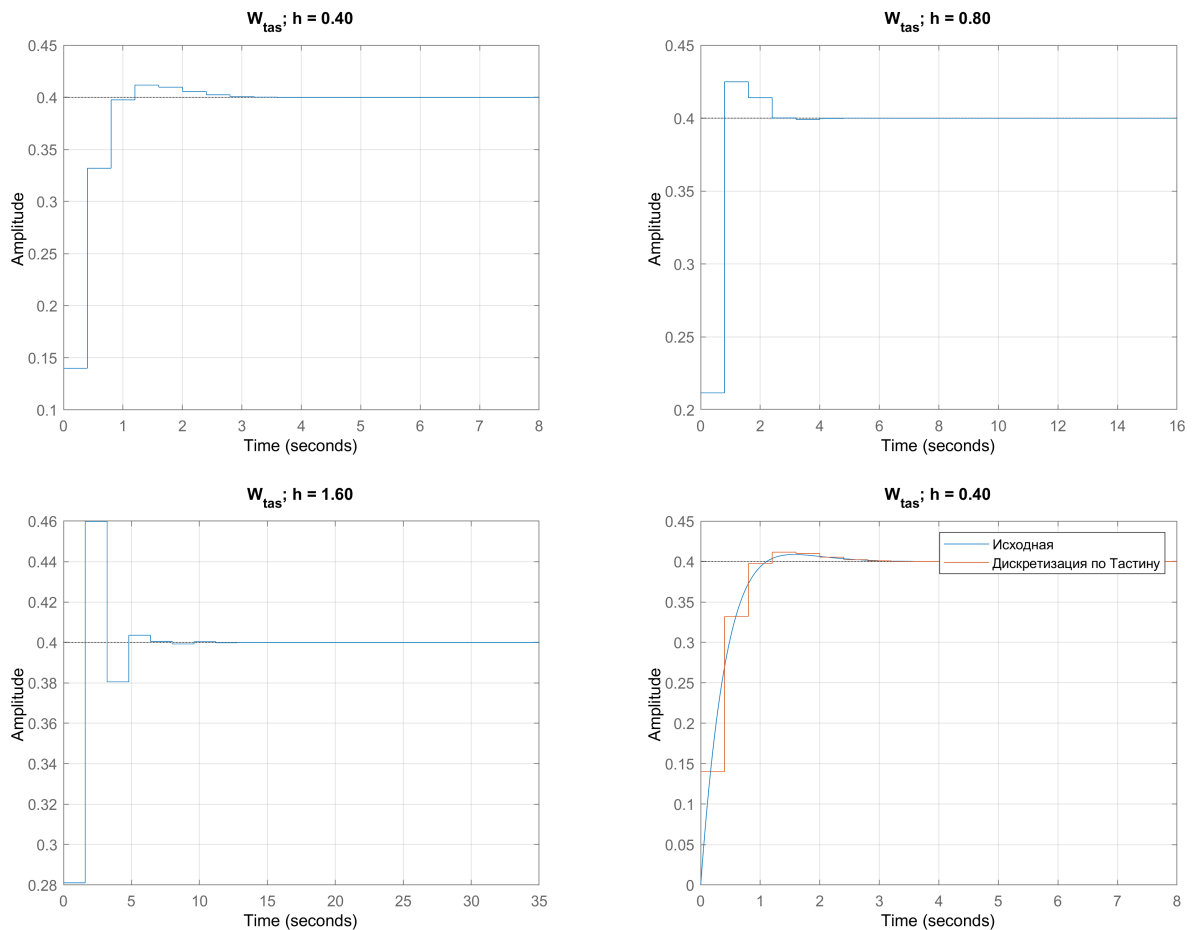


Рис. 3: Переходной процесс системы дискретизированной по Эйлеру

## Вывод

В лабораторной работе изучены и исследованы дискретные системы и их представления. В задании 3 показана эквивалентность непрерывной и дискретной систем при условии верного шага дискретизации.

Рассмотрены методы дискретизации Эйлера и Тастина, наглядно показано влияние шага дискретизации на динамику системы. Также показано, что метод Эйлера при значении дискретизации больше оценочного даёт неустойчивую систему, в то время как метод Тастина всегда даёт устойчивую систему.

Однако для каждой дискретной системы характерны перерегулирование и более длительный переходный процесс, чем для непрерывной и при снижении шага дискретизации данные параметры приближаются к параметрам непрерывной системы.

## Листинг к Заданию 3

```

1 clear
2 clc
3 close all
4
5 img_path = "..\..\img\";
6

```

```

7  if exist(img_path, 'dir')
8      rmdir(img_path, 's');
9  end
10
11  mkdir(img_path);
12
13  %% Дано
14  initial_nom = [1 2];
15  initial_den = [1 4 5];
16
17  syms s h z;
18
19  W = makeW(initial_nom, initial_den);
20  W_eul = subs(W, s, (s-1)/h);
21  W_tas = subs(W, s, 2/h*(s-1)/(s+1));
22
23  prettyLatex(subs(W_eul, s, z), z)
24  prettyLatex(subs(W_tas, s, z), z)
25
26  A = poly2sym(initial_den, s);
27  h_est = eval(min(2*abs(real(solve(A)))./abs(solve(A)).^2));
28
29  p = figure;
30  stepplot(sym2tfs(W));
31  title('W');
32  grid on
33  print(p, img_path + "init.png", '-dpng', '-r300');
34
35  for h_i = [h_est/2, h_est, h_est*2, h_est*100]
36      p = figure;
37      stepplot(sym2tfz(subs(W_eul, h, h_i), h_i));
38      grid on
39      title(sprintf('W_{eul} h = %0.2f', h_i));
40      print(p, img_path + "eul" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
41          '-dpng', '-r300');
42
43      p = figure;
44      stepplot(sym2tfs(W));
45      hold on
46      stepplot(sym2tfz(subs(W_eul, h, h_i), h_i));
47      grid on
48      title(sprintf('W_{eul} h = %0.2f', h_i));
49      legend("Исходная", "Дискретизация по Эйлеру");
50      print(p, img_path + "init-eul" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
51          '-dpng', '-r300');
52
53  end
54
55  for h_i = [h_est/2, h_est, h_est*2, h_est*100]
56      p = figure;

```

```

57     stepplot(sym2tfz(subs(W_tas, h, h_i), h_i));
58     grid on
59     title(sprintf('W_{tas}; h = %0.2f', h_i));
60     print(p, img_path + "tas" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
61         '-dpng', '-r300');
62
63     p = figure;
64     stepplot(sym2tfs(W));
65     hold on
66     stepplot(sym2tfz(subs(W_tas, h, h_i), h_i));
67     grid on
68     title(sprintf('W_{tas}; h = %0.2f', h_i));
69     legend("Исходная", "Дискретизация по Тастину");
70     print(p, img_path + "init-tas" + sprintf('h%g', h_i) + ".png",...
71         '-dpng', '-r300');
72 end
73
74 function W = makeW(nom, den)
75     syms s;
76     W = poly2sym(nom, s)/poly2sym(den, s);
77 end
78
79 function TF = sym2tfs(W)
80     [num, den] = numden(W);
81     tfn = sym2poly(num);
82     tfd = sym2poly(den);
83     TF = tf(tfn, tfd);
84 end
85
86 function TF = sym2tfz(W, delay)
87     [num, den] = numden(W);
88     tfn = sym2poly(num);
89     tfd = sym2poly(den);
90     TF = tf(tfn, tfd, delay);
91 end
92
93 function str = prettyLatex(W, s)
94     [num, den] = numden(W);
95     num = simplify(collect(num, s));
96     den = simplify(collect(den, s));
97     str = latex(num/den);
98 end

```