25. 9. 25

1 Separace proměnných

Tato metoda se používá pro rovnice tvaru $y' = g(x)h(y)$.

Obecný postup:

1. Najdeme konstantní řešení (kde $h(y) = 0$).
2. Separujeme proměnné: $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$.
3. Integrujeme obě strany: $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx + C$.
4. Pokud je to možné, vyjádříme y explicitně.

1.1 Příklad 1: $y' = x(y-1)$

Zadání: Nalezněte řešení splňující počáteční podmínku $y(-20) = 0$.

1. **Separace:**

$$\frac{dy}{y-1} = xdx$$

(Všimneme si, že $y = 1$ je konstantní řešení, ale to nesplňuje podmínku $y(-20) = 0$).

2. **Integrace:**

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int xdx$$

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

3. **Úprava na explicitní tvar:**

$$|y-1| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Položme $K = \pm e^C$.

$$y - 1 = Ke^{\frac{x^2}{2}} \implies y = 1 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$$

4. **Dosazení počáteční podmínky $y(-20) = 0$:**

$$0 = 1 + Ke^{\frac{(-20)^2}{2}} = 1 + Ke^{200}$$

$$K = -e^{-200}$$

5. **Výsledek:**

$$y(x) = 1 - e^{-200} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 1 - e^{\frac{x^2}{2}-200}$$

1.2 Příklad 2: $y' = xy^3$

Zadání: Nalezněte řešení pro $y(0) = 1$.

1. **Separace:**

$$\frac{dy}{y^3} = xdx \implies y^{-3}dy = xdx$$

2. **Integrace:**

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Vynásobíme -2:

$$\frac{1}{y^2} = -x^2 - 2C \quad (\text{označme } C_2 = -2C)$$

$$y^2 = \frac{1}{C_2 - x^2}$$

3. **Explicitní tvar a podmínka:**

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{C_2 - x^2}}$$

Pro $y(0) = 1$ volíme kladnou větev:

$$1 = \sqrt{\frac{1}{C_2 - 0}} \implies C_2 = 1$$

Výsledek: $y(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$, definováno pro $x \in (-1, 1)$.

2 Bernoulliho rovnice a metoda $y = uv$

Pro rovnice, které nejsou separovatelné, můžeme zkusit substituci $y(x) = u(x)v(x)$.

2.1 Příklad 3: $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$

Jde o lineární rovnici, kterou v poznámkách řešíme metodou součinu funkcí (Bernoulliho metodou).

1. **Dosazení $y = uv$:**

$$y' = u'v + uv'$$
$$(u'v + uv') - \frac{uv}{x} = 2x^3$$
$$u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = 2x^3$$

2. **Nulování závorky (hledáme v):**

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \implies \frac{v'}{v} = \frac{1}{x}$$
$$\ln|v| = \ln|x| \implies v = x$$

3. **Výpočet u (dosadíme $v = x$):**

$$u' \cdot x = 2x^3$$
$$u' = 2x^2$$
$$u = \int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + C$$

4. **Celkové řešení:**

$$y = u \cdot v = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right) x = \frac{2}{3}x^4 + Cx$$

3 Lineární ODR 1. řádu

Tvar: $y' + a(x)y = g(x)$.

3.1 Metoda 1: Variace konstant

Postup: 1. Vyřešíme homogenní rovnici $y' + a(x)y = 0$ (separací). 2. Konstantu C nahradíme funkcí $C(x)$ a dosadíme do původní rovnice.

3.1.1 Příklad 4: $xy' + 3y = x^2$

Upravíme dělením x: $y' + \frac{3}{x}y = x$.

1. **Homogenní řešení:**

$$y' = -\frac{3}{x}y \implies \ln|y| = -3\ln|x| \implies y_h = \frac{C}{x^3}$$

2. **Variace:** Hledáme $y = \frac{C(x)}{x^3}$. Derivace: $y' = C'(x)x^{-3} - 3C(x)x^{-4}$. Dosazení do $xy' + 3y = x^2$:

$$x(C'x^{-3} - 3Cx^{-4}) + 3(Cx^{-3}) = x^2$$
$$C'x^{-2} - 3Cx^{-3} + 3Cx^{-3} = x^2$$
$$C'x^{-2} = x^2 \implies C' = x^4$$
$$C(x) = \frac{x^5}{5} + K$$

3. **Výsledek:**

$$y(x) = \left(\frac{x^5}{5} + K\right)\frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{5} + \frac{K}{x^3}$$

3.2 Metoda 2: Integrační faktor

Celou rovnici vynásobíme faktorem $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$, čímž převedeme levou stranu na derivaci součinu.

3.2.1 Příklad 5: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$

1. **Faktor:** $a(x) = \frac{1}{x} \implies \mu(x) = e^{\ln|x|} = x$. 2. **Násobení:**

$$x \cdot y' + 1 \cdot y = \frac{1}{x}$$
$$(xy)' = \frac{1}{x}$$

3. **Integrace:**

$$xy = \ln|x| + C \implies y = \frac{\ln|x| + C}{x}$$

3.2.2 Příklad 6: Goniometrická rovnice

Zadání: $y' + y\tan x = 2\sin x\cos x$ (s podmínkou $y(0) = ...$).

1. **Faktor:**

$$a(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$$
$$\mu(x) = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$$

2. **Násobení rovnice faktorem $\frac{1}{\cos x}$:**

$$y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}$$

Levá strana je derivace součinu $(y \cdot \frac{1}{\cos x})'$.

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = 2\sin x$$

3. **Integrace:**

$$\frac{y}{\cos x} = \int 2\sin x dx = -2\cos x + C$$
$$y(x) = -2\cos^2 x + C\cos x$$

2. 10. 25

4 Teorie: Existence a Jednoznačnost

4.1 Picard-Lindelöfova věta

Uvažujme počáteční problém:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast obsahující bod (x_0, y_0).

- **Existence:** Pokud je $f(x, y)$ spojitá na G, pak existuje alespoň jedno řešení definované na nějakém intervalu I obsahujícím x_0.
- **Jednoznačnost:** Pokud je navíc parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá na G, pak existuje právě jedno **maximální** řešení.

Poznámka: Maximální řešení je takové, které nelze prodloužit na větší interval.

4.2 Protipříklad (Porušení jednoznačnosti)

$$y' = \sqrt{|y|}$$

- Funkce $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ je spojitá všude.
- Derivace $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\text{sgn}(y)}{2\sqrt{|y|}}$ není definována pro $y = 0$.
- **Důsledek:** Bodem $(x_0, 0)$ může procházet více řešení (např. triviální $y = 0$ a parabolické větve).

5 Metody řešení ODR 1. řádu

5.1 Separace proměnných

Tvar: $y' = g(x)h(y)$. Postup: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$.

5.1.1 Příklad 1: $y' = |y|$

Pro $y > 0$:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \implies \ln|y| = x + C \implies y = Ke^x$$

Pro $y < 0$:

$$\int \frac{dy}{-y} = \int dx \implies -\ln|y| = x + C \implies y = Ke^{-x}$$

5.1.2 Příklad 2: $y' = \sqrt{1 - y^2}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx$$

$$\arcsin y = x + C$$

$$y = \sin(x + C)$$

Podmínka existence: $x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

5.2 Lineární rovnice a metoda $y = uv$

5.2.1 Příklad: $xy' - y = 3x^2, \quad y(0) = 1$

Řešíme pomocí substituce $y = u(x) \cdot v(x)$. Derivace součinu je $y' = u'v + uv'$.

1. **Dosazení do rovnice:**

$$x(u'v + uv') - uv = 3x^2$$

Roznásobíme a vytkneme u ze členů obsahujících v:

$$xu'v + xuv' - uv = 3x^2$$

$$xu'v + u(\underbrace{xv' - v}_{=0}) = 3x^2$$

2. **Výpočet $v(x)$ (řešení závorky):** Položíme závorku rovnu nule:

$$xv' - v = 0 \implies x\frac{dv}{dx} = v$$

Separace proměnných:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \implies \ln|v| = \ln|x| \implies v = x$$

3. **Výpočet $u(x)$ (dosazení v):** Vrátíme se k rovnici $xu'v = 3x^2$ a dosadíme $v = x$:

$$x \cdot u' \cdot x = 3x^2$$

$$x^2u' = 3x^2 \quad \text{(zde se často chybuje v mocninách)}$$

Vydělíme x^2 (pro $x \neq 0$):

$$u' = 3$$

Integrací získáme u:

$$u = \int 3\,dx = 3x + C$$

4. **Obecné řešení ($y = uv$):**

$$y(x) = (3x + C) \cdot x = 3x^2 + Cx$$

5. **Počáteční podmínka $y(0) = 1$:** Dosadíme $x = 0$:

$$y(0) = 3(0)^2 + C(0) = 0$$

To se nerovná zadané hodnotě 1. **Závěr:** Úloha nemá řešení (singulární bod v $x = 0$, integrální křivky procházejí počátkem 0, nikoliv bodem [0,1]).

6 Aplikace ODR (Fyzika a Populace)

6.1 Dynamika (Odpor vzduchu)

Z Newtonova zákona $F = ma$:

1. **Pouze odpor** ($F = -kv$):

$$mv' = -kv \implies v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

2. **Odpor + Gravitace** ($F = -kv - mg$):

$$v' + \frac{k}{m}v = -g$$

   Řešení: $v(t) = -\frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

6.2 Míchací model (Nádrž)

$$V \cdot c' = q_{in}C_{in} - q_{out}c(t)$$

Pokud $q_{in} = q_{out} = q$:

$$c' + \frac{q}{V}c = \frac{q}{V}C_{in}$$

6.3 Malthusův model (Exponenciální růst)

Základní rovnice: Rychlost růstu je úměrná velikosti populace.

$$P'(t) = kP(t)$$

Řešení:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

6.3.1 Konkrétní příklad z poznámek (výpočet k)

Zadání: Populace vzrostla o 10 % za 10 hodin. Jaké je k?

$$P(10) = 1.1P_0$$

$$P_0 e^{k\cdot 10} = 1.1P_0$$

$$e^{10k} = 1.1$$

$$10k = \ln(1.1) \implies k = \frac{\ln(1.1)}{10} \approx 0.009531$$

6.3.2 Aplikace na COVID (data z poznámek)

Poznámky uvádí data z roku 2020:

- 22.8.: 234 případů (P_0)
- Předpoklad: Exponenciální růst s konstantou $k \approx 0.00953$ (nebo podobnou vypočtenou z dat).
- Predikce pro 21.9. (cca 30 dní):

$$P(30) = 234 \cdot e^{0.00953\cdot 30} \approx \ldots$$

(Poznámky obsahují konkrétní numerické výpočty predikcí pro různé dny).

6.4 Logistický model (Omezený růst)

Růst je brzděn kapacitou prostředí ($K = 1$).

$$y' = y(1-y)$$

Řešení: 1. Separace: $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$. 2. Rozklad na parciální zlomky: $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$. 3. Integrace:

$$\ln|y| - \ln|1-y| = x + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C$$

4. Odlogaritmování a úprava:

$$y(x) = \frac{Ke^x}{1+Ke^x}$$

(Grafem je tzv. S-křivka / sigmoida).

7 Kvalitativní teorie - Stabilita

Uvažujme autonomní rovnici $y' = f(y)$. Stacionární body jsou řešení rovnice $f(y) = 0$.

7.1 Určení stability z fázové přímky

Analyzujeme znaménko $f(y)$ v okolí stacionárního bodu c:

1. **Stabilní (II):**
   - Nalevo od c: $f(y) > 0$ (řešení roste k c).
   - Napravo od c: $f(y) < 0$ (řešení klesá k c).
   - Šipky směřují **k bodu**.
2. **Nestabilní (I):**
   - Nalevo od c: $f(y) < 0$ (řešení klesá pryč).
   - Napravo od c: $f(y) > 0$ (řešení roste pryč).
   - Šipky směřují **od bodu**.
3. **Semistabilní:** Znaménko se nemění (např. inflexní bod).

7.2 Analýza logistické rovnice $y' = y(1 - y)$

Funkce $f(y) = y - y^2$ (parabola otočená dolů). Kořeny: $y = 0$ a $y = 1$.

- **Bod 0:** $f(y)$ přechází z mínusu do plusu $\implies$ **Nestabilní**.
- **Bod 1:** $f(y)$ přechází z plusu do mínusu $\implies$ **Stabilní**.

9. 10. 25

8 Úvod do lineárních systémů

Uvažujme systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty:

$$X' = AX$$

kde $X(t)$ je vektor neznámých funkcí a A je čtvercová matice $n \times n$.

Analogie se skalární rovnicí:

- Skalární rovnice: $y' = ay \implies y(t) = Ce^{at}$.
- Systém rovnic: $X' = AX \implies X(t) = e^{tA}C$ (kde e^{tA} je maticová exponenciála).

9 Řešení pomocí vlastních čísel a vektorů

Hledáme řešení ve tvaru $X(t) = e^{\lambda t}v$. Dosazením do $X' = AX$ získáme podmínku:

$$Av = \lambda v$$

To znamená, že λ je vlastní číslo a v je vlastní vektor matice A.

9.1 Příklad 1: Reálná různá vlastní čísla

Zadání:

$$X' = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix} X$$

1. **Charakteristická rovnice:**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 18 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)(-11-\lambda) - (-108) = \lambda^2 + \lambda - 110 + 108 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$.

2. **Vlastní vektory:**

- Pro $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Rovnice $9v_x - 6v_y = 0 \implies 3v_x = 2v_y$. Volíme $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Pro $\lambda_2 = -2$:

$$(A + 2I)v = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 18 & -9 \end{pmatrix} v = 0$$

  Rovnice $2v_x - v_y = 0 \implies v_y = 2v_x$. Volíme $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. **Obecné řešení:**

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poznámka k fundamentálnímu systému: Vektory $X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $X_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislá řešení. Tyto vektory tvoří tzv. **fundamentální systém řešení**. Fundamentální matice $\Phi(t)$ by měla tyto vektory jako své sloupce.

10 Maticová exponenciála e^{tA}

10.1 Definice a vlastnosti

Maticová exponenciála je definována mocninnou řadou (analogicky k e^x):

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots$$

Klíčové vlastnosti:

1. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$
2. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$
3. $e^0 = I$ (jednotková matice)
4. Je vždy invertibilní: $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

10.2 Řešení počáteční úlohy a vztah k vlastním vektorům

Pro systém $X' = AX$ s podmínkou $X(0) = X_0$ je řešení dáno vzorcem:

$$X(t) = e^{tA}X_0$$

Důležitý vztah pro vlastní vektor u_j: Pokud u_j je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_j, pak platí:

$$e^{At}u_j = e^{\lambda_j t}u_j$$

Odvození pomocí řady (z poznámek):

$$e^{At}u_j = e^{\lambda_j t}e^{(A-\lambda_j I)t}u_j = e^{\lambda_j t}\left(I + (A-\lambda_j I)t + \frac{(A-\lambda_j I)^2t^2}{2!} + \dots\right)u_j$$

Protože $(A - \lambda_j I)u_j = 0$ (z definice vlastního vektoru), všechny členy řady kromě prvního vypadnou.

$$= e^{\lambda_j t}(I \cdot u_j + 0 + \dots) = e^{\lambda_j t}u_j$$

11 Výpočet e^{tA}

11.1 Metoda 1: Jordanův tvar (Násobná vlastní čísla)

Pokud má matice násobná vlastní čísla a nelze ji diagonalizovat, použijeme rozklad $e^{tA} = e^{\lambda t}e^{Nt}$.

Příklad 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo $\lambda = 1$ (násobnost 2). Matice $A = I + N$, kde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$e^{tA} = e^{tI}e^{tN} = e^t\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

11.2 Metoda 2: Diagonalizace

Pokud je A diagonalizovatelná, platí $A = W\Lambda W^{-1}$, a tedy:

$$e^{tA} = We^{t\Lambda}W^{-1} = W\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}W^{-1}$$

(V poznámkách značeno také jako $W\Lambda(t)W^{-1}$, kde $\Lambda(t) = \text{diag}(e^{\lambda_i t})$).

Příklad 3 (kompletní výpočet): Systém: $x' = -2x - 3y, \quad y' = 6x + 7y$. Matice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

1. **Vlastní čísla:** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.
2. **Vlastní vektory (tvoří matici W):**
   - Pro $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   - Pro $\lambda_2 = 4$: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. **Sestavení matic:**
$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$
4. **Inverzní matice W^{-1}:**
$$\det(W) = 1(-2) - 1(-1) = -1$$
$$W^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
5. **Výpočet e^{tA}:**
$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{4t} \\ -e^t & -2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{4t} & e^t - e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -e^t + 2e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12 Fundamentální matice $\Phi(t)$

Fundamentální matice $\Phi(t)$ je matice, jejíž sloupce tvoří lineárně nezávislá řešení systému. Obecné řešení lze zapsat jako $X(t) = \Phi(t)K$.

Vztah k maticové exponenciále:
$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Pokud zvolíme počáteční podmínku v $t = 0$ tak, že $\Phi(0) = I$, pak přímo $\Phi(t) = e^{tA}$.

Výpočet konstanty K z počátečních podmínek: Pokud máme zadán počáteční vektor $X(0) = I$ (v poznámkách značeno I nebo L), pak konstantu K určíme vztahem:
$$K = \Phi^{-1}(0) \cdot I$$

13 Cayley-Hamiltonova věta a polynomy

Každá čtvercová matice je kořenem svého charakteristického polynomu $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
$$P(A) = 0$$

Například pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Platí: $A^2 - 2A + I = 0$, tedy $A^2 = 2A - I$. Tato vlastnost umožňuje vyjádřit e^{tA} jako polynom matice A stupně $n - 1$:
$$e^{tA} = b_0(t)I + b_1(t)A$$

16. 10. 25

14 Násobná vlastní čísla (Jordanův tvar)

Pokud má matice A násobné vlastní číslo λ a k němu existuje pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor, musíme pro sestavení fundamentálního systému hledat tzv. **zobecněné vlastní vektory**.

14.1 Postup hledání řešení

Nechť λ je dvojnásobné vlastní číslo.

1. **První řešení:** Najdeme vlastní vektor K řešením rovnice:

$$(A - \lambda I)K = 0$$

   První řešení systému je pak $X_1(t) = Ke^{\lambda t}$.

2. **Druhé řešení:** Hledáme druhé lineárně nezávislé řešení ve tvaru:

$$X_2(t) = (Kt + P)e^{\lambda t}$$

   Dosazením do rovnice $X' = AX$ získáme podmínku pro vektor P (zobecněný vlastní vektor):

$$(A - \lambda I)P = K$$

Obecné řešení je pak lineární kombinací:

$$X(t) = C_1 K e^{\lambda t} + C_2 (Kt + P)e^{\lambda t}$$

14.2 Příklad 1 (z poznámek)

Zadání:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$$

1. **Vlastní čísla:**

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -3$$

2. **Vlastní vektor K:**

$$(A + 3I)K = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2k_1 - 6k_2 = 0 \implies k_1 = 3k_2$. Volíme $k_2 = 1 \implies K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Zobecněný vlastní vektor P:** Hledáme P řešením $(A + 3I)P = K$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2p_1 - 6p_2 = 1$. Volíme $p_2 = 0 \implies p_1 = 1/2$. Tedy $P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. **Výsledek:**

$$X(t) = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

15 Komplexní vlastní čísla

Nechť $\lambda = \alpha + i\beta$ je vlastní číslo a $v = u + iw$ je příslušný vlastní vektor. Reálný fundamentální systém získáme rozkladem komplexního řešení na reálnou a imaginární část.

Obecný tvar řešení:

$$X(t) = C_1 e^{\alpha t}\left(u\cos(\beta t) - w\sin(\beta t)\right) + C_2 e^{\alpha t}\left(u\sin(\beta t) + w\cos(\beta t)\right)$$

15.1 Příklad 2 (z poznámek)

Zadání:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

1. **Vlastní čísla:**

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad (\alpha = 1, \beta = 1)$$

2. **Vlastní vektor pro $\lambda = 1 + i$:**

$$(A - (1+i)I)v = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$-iv_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = iv_1$. Volíme $v_1 = 1$.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy reálná část vektoru $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a imaginární část $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Sestavení obecného řešení:** Dosadíme do obecného vzorce:

$$X(t) = C_1 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t\right] + C_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t\right]$$

Po úpravě vektorů:

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

16 Nehomogenní systémy (Variace konstant)

Uvažujme systém:

$$X' = AX + F(t)$$

Obecné řešení má tvar $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$, kde X_H je řešení homogenního systému a X_P je partikulární řešení.

16.1 Metoda variace konstant

Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice homogenního systému ($X_H = \Phi(t)C$). Hledáme řešení ve tvaru $X_P(t) = \Phi(t)U(t)$, kde $U(t)$ je vektorová funkce.

Dosazením do rovnice získáme vztah pro derivaci $U(t)$:

$$\Phi(t)U'(t) = F(t)$$

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)$$

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

Výsledný vzorec:

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

16.2 Příklad 3 (z poznámek)

Zadání:

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

1. **Homogenní část (Vlastní čísla a vektory):** det $\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 2 = \lambda^2 + 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$.

$$(\lambda+2)(\lambda+5) = 0 \implies \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5$$

Vlastní vektory:

- Pro $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Pro $\lambda_2 = -5$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. **Fundamentální matice $\Phi(t)$:**

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

3. **Inverzní matice $\Phi^{-1}(t)$:** Determinant $W(t) = -2e^{-7t} - e^{-7t} = -3e^{-7t}$.

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{-7t}} \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{pmatrix}$$

4. **Výpočet $U(t)$:**

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t}(3t) + e^{2t}(e^{-t}) \\ e^{5t}(3t) - e^{5t}(e^{-t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$$

(Poznámka: Výpočet integrálů $U(t) = \int U'(t)dt$ se provádí per partes, v poznámkách je naznačen výsledek).

5. **Alternativní zápis soustavy pro variaci:** Místo inverze matice lze řešit soustavu rovnic:

$$e^{-2t}u_1' + e^{-5t}u_2' = 3t$$

$$e^{-2t}u_1' - 2e^{-5t}u_2' = e^{-t}$$

Odečtením rovnic získáme $3e^{-5t}u_2' = 3t - e^{-t}$, odkud vyjádříme u_2' a následně u_1'.

23. 10. 25

17 Lineární transformace a Ekvivalence systémů

Systém $X' = AX$ lze transformovat pomocí $X = TY$ na $Y' = BY$, kde $B = T^{-1}AT$. Matice T je obvykle sestavena z vlastních vektorů matice A.

17.1 Příklad 1: Transformace 3×3 matice

Zadání: Mějme systém $\dot{X} = AX$, kde:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. **Vlastní čísla a vektory:** Z poznámek vyplývají vlastní čísla a příslušné vlastní vektory:

- $\lambda_1 = 3 \implies v_1 = (2, -4, -1)^T$ (pozn: v textu je v_1 s otazníky, rekonstruováno z kontextu).
- $\lambda_2 = -5 \implies v_2 = (4, -1, 1)^T$.
- $\lambda_3 = 6 \implies v_3 = (1, 0, 1)^T$.

2. **Sestavení transformační matice P a matice B:** Matice P (v textu označena jako T nebo P) je tvořena vlastními vektory. Matice B bude diagonální:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. **Řešení transformovaného systému $\dot{Y} = BY$:** Soustava se rozpadne na nezávislé rovnice:

$$\dot{y}_1 = 3y_1 \implies y_1(t) = c_1 e^{3t}$$
$$\dot{y}_2 = -5y_2 \implies y_2(t) = c_2 e^{-5t}$$
$$\dot{y}_3 = 6y_3 \implies y_3(t) = c_3 e^{6t}$$

4. **Zpětná transformace:** Obecné řešení původního systému je $X(t) = PY(t)$.

18 Tok lineárního systému (Flow)

Množina zobrazení $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (parametrizovaná časem t) se nazývá **tokem** lineárního systému. Matematicky je tok dán maticovou exponenciálou:

$$\phi(t, X_0) = e^{At} X_0$$

Vlastnosti toku:

- $\phi_0(x) = x$ (Identita v čase 0).
- $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ (Grupová vlastnost).

18.1 Hyperbolický systém

Lineární systém se nazývá **hyperbolický**, jestliže všechna vlastní čísla matice A mají **nenulovou reálnou část** ($\mathrm{Re}(\lambda_j) \neq 0$). U takových systémů neexistují centrální podprostory, pouze stabilní a nestabilní.

19 Invariantní podprostory

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je **invariantní** vůči toku, jestliže pro každé $x \in M$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $\phi_t(x) \in M$.

Prostor $\mathbb{R}^n$ se rozpadá na součet invariantních podprostorů:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

- **E^s (Stabilní):** Generován vektory pro $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
- **E^u (Nestabilní):** Generován vektory pro $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.
- **E^c (Centrální):** Generován vektory pro $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.

19.1 Příklad 2: Rozklad na podprostory

Mějme matici A v blokovém tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Vlastní čísla:** Charakteristický polynom: $((-2-\lambda)^2 + 1)(1-\lambda) = 0$.

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i, \quad \lambda_3 = 1$$

2. **Podprostory:**

- Vlastní čísla $-2 \pm i$ mají zápornou reálnou část $(-2 < 0)$. Odpovídající vektory generují **stabilní podprostor E^s**. V tomto případě jde o rovinu xy (resp. podprostor generovaný prvními dvěma bázovými vektory). Trajektorie zde spirálovitě konvergují k nule.
- Vlastní číslo 1 má kladnou reálnou část. Odpovídající vektor $v_3 = (0,0,1)^T$ generuje **nestabilní podprostor E^u** (osa z).

20 Nelineární ODR – Speciální případy (Snížení řádu)

U rovnic 2. řádu (nebo vyšších) lze často snížit řád pomocí substituce.

20.1 Typ I: $y'' = f(t, y')$

Rovnice neobsahuje explicitně y. **Substituce:** $z(t) = y'(t) \implies z' = y''$.

Příklad 3: $ty'' + y' = 0$ (Eulerova rovnice typu). 1. Substituce $z = y'$: $tz' + z = 0$. 2. Separace proměnných:

$$t\frac{dz}{dt} = -z \implies \frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}$$

$$\ln|z| = -\ln|t| + C \implies z(t) = \frac{K}{t}$$

3. Návrat k y:

$$y' = \frac{K}{t} \implies y(t) = K \ln|t| + C_2$$

20.2 Typ II: $y'' = f(y, y')$

Rovnice neobsahuje explicitně čas t. **Substituce:** $z(y) = y'$. Derivace složené funkce: $y'' = \frac{d}{dt}z(y(t)) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dy}$.

Příklad 4: $y'' \cdot y = (y')^2$. Zadání v poznámkách vede na separaci. Uvažujme příklad s podmínkou $y(0) = 1/2$: Rovnice po úpravě vede na tvar $\frac{dz}{dy} = y$ (nebo ekvivalentní).

$$z = \frac{1}{2}y^2 + C$$

Protože $z = y'$, řešíme následně $y' = \frac{1}{2}y^2 + C$.

21 Nelineární systémy a Stabilita (Konec dokumentu)

Uvažujme nelineární systém $\dot{x} = f(x)$ s bodem rovnováhy $x_R = 0$ (BR).

21.1 Definice stability

Bod rovnováhy x_R se nazývá:

1. **Stabilní (Ljapunov):** Jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $\|x(0)\| < \delta$, pak $\|x(t)\| < \epsilon$ pro všechna $t \geq 0$. *(Řešení neutíká daleko).*

2. **Atraktor:** Jestliže existuje okolí, ze kterého všechna řešení konvergují k x_R. $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

3. **Asymptoticky stabilní:** Jestliže je stabilní a zároveň atraktor.

4. **Nestabilní:** Pokud není stabilní.

21.2 Oblast atraktivity

Množina všech bodů x_0, pro které řešení $x(t, x_0)$ konverguje k bodu rovnováhy, se nazývá **oblast atraktivity** (nebo pánev atraktivity). Pokud je touto oblastí celý prostor $\mathbb{R}^n$, jde o **globální atraktor**.

21.3 Hurwitzovo kritérium (Poznámka)

Pro analýzu stability (polynomu charakteristické rovnice) lze využít Hurwitzovu matici sestavenou z koeficientů polynomu $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

30. 10. 25

22 Teorie linearizace

Mějme nelineární autonomní systém:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F \in C^1(E)$$

Nechť x_0 je bod rovnováhy (stacionární bod), tedy platí $F(x_0) = 0$.

22.1 Taylorův rozvoj a Jacobiho matice

Chování systému v malém okolí bodu x_0 aproximujeme lineárním systémem $\dot{u} = Au$, kde $u = x - x_0$ a A je **Jacobiho matice**:

$$A = DF(x_0) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0}$$

22.2 Věta o linearizované stabilitě

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A.

- Pokud $\forall i : \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \implies$ bod x_0 je **asymptoticky stabilní**.
- Pokud $\exists i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \implies$ bod x_0 je **nestabilní**.
- Pokud $\forall i : \mathrm{Re}(\lambda_i) \le 0$ a existuje λ s nulovou reálnou částí $\implies$ nelze rozhodnout (kritický případ).

23 Příklad 1: Polynomiální systém v počátku

Zadání:

$$\dot{x} = -x + y + x^2 + 3y^2$$
$$\dot{y} = x - 3y + 2xy$$

Bod rovnováhy: $[0, 0]$.

1. **Jacobiho matice obecně:**

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 2x & 1 + 6y \\ 1 + 2y & -3 + 2x \end{pmatrix}$$

2. **Vyčíslení v bodě $[0, 0]$:**

$$A = J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. **Stabilita:**

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Obě vlastní čísla jsou záporná ($\approx -0.59, -3.41$). **Závěr:** Bod $[0, 0]$ je **stabilní uzel**.

24 Příklad 2: Transcendentní funkce (Goniometrie)

Zadání (rekonstruováno z poznámek):

$$\dot{x} = e^{-x+y} - \cos x$$

$$\dot{y} = -\sin(x - 3y)$$

Bod rovnováhy: $[0, 0]$ (protože $e^0 - 1 = 0$ a $\sin 0 = 0$).

1. **Jacobiho matice obecně:**

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = -e^{-x+y} + \sin x, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = e^{-x+y}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = -\cos(x-3y), \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -\cos(x-3y)\cdot(-3) = 3\cos(x-3y)$$

2. **Vyčíslení v [0, 0]:**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. **Stabilita:**

$$\det(A-\lambda I) = (-1-\lambda)(3-\lambda) - (-1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)(-2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$\lambda_1 = 1+\sqrt{3} > 0$ (kladné), $\lambda_2 = 1-\sqrt{3} < 0$ (záporné). **Závěr:** Bod $[0,0]$ je **sedlo (nestabilní)**.

25 Příklad 3: Systém se 4 body rovnováhy

Zadání (opraveno dle tvé připomínky):

$$\dot{x} = x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = y^2 - 5x + 6$$

1. **Nalezení bodů rovnováhy:** Z první rovnice: $x^2 = y^2 \implies y = \pm x$. Dosazení do druhé rovnice (kde $y^2 = x^2$):

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x-2)(x-3) = 0$$

Tedy $x_1 = 2, x_2 = 3$. Kombinací s $y = \pm x$ získáme 4 body:

$$M_1[2,2], \quad M_2[2,-2], \quad M_3[3,3], \quad M_4[3,-3]$$

2. **Jacobiho matice obecně:**

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -5 & 2y \end{pmatrix}$$

3. **Klasifikace bodů:**

a) Bod $M_1[2,2]$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 16 - 20 = -4$. Determinant je záporný (součin vl. čísel je záporný) $\implies$ jedno kladné, jedno záporné. **Závěr:** **Sedlo (Nestabilní)**.

b) Bod $M_2[2,-2]$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Tr $A = 0, \det A = -16 + 20 = 4$. Char. rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i$. **Závěr:** V lineární aproximaci **střed**. V nelineárním systému nelze rozhodnout (kritický případ, často nestabilní nebo limitní cyklus).

c) Bod $M_3[3,3]$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Tr $A = 12 > 0, \det A = 36 - 30 = 6 > 0$. Diskriminant $D = 12^2 - 4\cdot 6 = 120 > 0$. Obě vlastní čísla jsou reálná a kladná. **Závěr:** **Nestabilní uzel**.

d) Bod $M_4[3,-3]$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det A = -36 + 30 = -6 < 0$. **Závěr:** **Sedlo (Nestabilní)**.

26 Posunutí souřadnic

Pro analýzu bodu $h \neq 0$ zavedeme $u = x - h$. Linearizovaný systém je $\dot{u} = DF(h)u$.

27 Globální vlastnosti řešení (Barrowův vzorec)

Pro jednorozměrnou autonomní rovnici $\dot{x} = F(x)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ můžeme explicitně určit čas, za který se řešení dostane z bodu a do bodu b.

27.1 Barrowův vzorec

Separací proměnných $\frac{dx}{dt} = F(x) \implies \frac{dx}{F(x)} = dt$ a následnou integrací získáme vztah pro časový interval $T = t_1 - t_0$:

$$T = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{F(z)} dz$$

Pokud tento integrál konverguje, řešení dosáhne hodnoty $x(t_1)$ v konečném čase.

27.2 Exploze řešení (Blow-up)

Pokud řešení $x(t)$ roste nade všechny meze ($x(t) \to \infty$) v **konečném čase** T_{max}, říkáme, že řešení exploduje (blow-up). Nastává to tehdy, pokud konverguje integrál:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{F(z)} dz < \infty$$

Příklad (z poznámek): $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0.$

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dz}{z^2} = \left[-\frac{1}{z} \right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

Pro $x(t) \to \infty$ je čas exploze $T_{max} = \frac{1}{x_0}$. Řešení $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$ existuje pouze na intervalu $(-\infty, \frac{1}{x_0})$.

27.3 Existence a jednoznačnost na intervalu

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F \in C^1(E)$. Potom pro každou počáteční podmínku existuje **maximální interval** existence řešení $I = (\alpha, \beta)$. Pokud je interval omezený (např. $\beta < \infty$), řešení musí opustit každou kompaktní podmnožinu E (buď jde do nekonečna, nebo k hranici definicního oboru).

13. 11. 25

28 Příklady ve 2D (Strana 3)

28.1 Příklad 1: Výpočet řešení a variety

Zadání:

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

Bod rovnováhy: $[0, 0]$.

1. **Řešení první rovnice:**

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

2. **Řešení druhé rovnice (dosazení):**

$$\dot{y} - y = x^2 = (x_0 e^{-t})^2 = x_0^2 e^{-2t}$$

Toto je lineární nehomogenní rovnice. Partikulární řešení hledáme ve tvaru Ce^{-2t}. Po dosazení a výpočtu (metoda variace konstant nebo odhad) a aplikaci počáteční podmínky $y(0) = y_0$ dostáváme v poznámkách uvedený tvar:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) e^t - \frac{x_0^2}{3} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3. **Analýza chování (Variety):** * Aby řešení konvergovalo k nule pro $t \to \infty$ (leželo na **stabilní varietě**), musí člen u e^t zmizet:

$$y_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0 \implies y = -\frac{x^2}{3}$$

* Jacobiho matice v $[0, 0]$ je $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, což potvrzuje, že jde o **hyperbolický bod (sedlo)**.

28.2 Příklad 2: Určení bodů rovnováhy a stability

Zadání:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Hledáme body rovnováhy (BR):

$$2y = 0 \implies y = 0$$
$$x^2 - 0 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

Máme dva body rovnováhy: $A = [1, 0]$ a $B = [-1, 0]$.

Jacobiho matice obecně:

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Bod $A = [1, 0]$:**

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda_{1,2} = 2$$

Obě vlastní čísla kladná $\implies$ **Nestabilní uzel (Zdroj)**.

2. **Bod $B = [-1, 0]$:**

$$J_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$$

Vlastní čísla mají různá znaménka $\implies$ **Sedlo**.

29 Příklad ve 3D a Definice variety (Strana 4)

29.1 Příklad 3: Trojrozměrný systém (Detailní rozbor)

Zadání: Uvažujme systém tří diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y + x^2 \\ \dot{z} &= z + x^2\end{aligned}$$

Bod rovnováhy je zjevně v počátku $[0, 0, 0]$. Linearizace (Jacobiho matice) je diagonální matice $\mathrm{diag}(-1, -1, 1)$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ (stabilní směr) a $\lambda_3 = 1$ (nestabilní směr).

1. Řešení první rovnice:

$$\dot{x} = -x \implies x(t) = C_1 e^{-t}$$

(Kde $C_1 = x_0$).

2. Řešení druhé rovnice (pro y): Dosadíme $x(t)$ do rovnice pro y:

$$\dot{y} + y = x^2 = (C_1 e^{-t})^2 = C_1^2 e^{-2t}$$

Toto je lineární rovnice 1. řádu s pravou stranou. - **Homogenní řešení:** $y_h(t) = C_2 e^{-t}$. - **Partikulární řešení:** Hledáme ve tvaru $y_p(t) = Ae^{-2t}$.

$$\dot{y}_p + y_p = -2Ae^{-2t} + Ae^{-2t} = -Ae^{-2t}$$

Porovnáním s pravou stranou $C_1^2 e^{-2t}$ dostáváme:

$$-A = C_1^2 \implies A = -C_1^2$$

- **Obecné řešení pro y:**

$$y(t) = C_2 e^{-t} - C_1^2 e^{-2t}$$

3. Řešení třetí rovnice (pro z): Dosadíme $x(t)$ do rovnice pro z:

$$\dot{z} - z = x^2 = C_1^2 e^{-2t}$$

- **Homogenní řešení:** $z_h(t) = C_3 e^t$ (pozor na znaménko, $\lambda_3 = 1$). - **Partikulární řešení:** Hledáme ve tvaru $z_p(t) = Be^{-2t}$.

$$\dot{z}_p - z_p = -2Be^{-2t} - Be^{-2t} = -3Be^{-2t}$$

Porovnáním s pravou stranou $C_1^2 e^{-2t}$ dostáváme:

$$-3B = C_1^2 \implies B = -\frac{C_1^2}{3}$$

- **Obecné řešení pro z:**

$$z(t) = C_3 e^t - \frac{C_1^2}{3} e^{-2t}$$

4. Analýza stabilní variety (W^s): Hledáme podmínku pro počáteční konstanty (C_1, C_2, C_3), aby řešení konvergovalo k počátku $[0, 0, 0]$ pro $t \to \infty$. - $x(t) \to 0$ vždy (člen e^{-t}). - $y(t) \to 0$ vždy (členy e^{-t}, e^{-2t}). - $z(t)$ obsahuje člen $C_3 e^t$. Tento člen jde do $\pm\infty$, pokud $C_3 \neq 0$. Aby řešení konvergovalo, musí být koeficient u nestabilního členu nulový:

$$C_3 = 0$$

Vyjádřeno pomocí počátečních podmínek v čase $t = 0$:

$$z(0) = C_3 - \frac{C_1^2}{3} \implies C_3 = z_0 + \frac{x_0^2}{3}$$

Podmínka $C_3 = 0$ tedy definuje plochu stabilní variety:

$$z + \frac{x^2}{3} = 0$$

Toto je parabolická plocha v prostoru, po které se trajektorie blíží k počátku.

29.2 Definice variety

n-rozměrná diferencovatelná varieta je souvislý metrický prostor M s otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}$, kde:

- Pro každé α existuje homeomorfismus h_α zobrazující U_α na otevřenou jednotkovou kouli $K \subset \mathbb{R}^n$ ($K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$).
- Přechodová zobrazení jsou diferencovatelná (hladká).

30 Věty o varietách (Strana 5)

30.1 Věta o stabilní varietě

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F \in C^1(E)$ a $F(0) = 0$. Nechť $A = DF(0)$ má k vlastních čísel se zápornou reálnou částí a $n - k$ s kladnou (žádné s nulovou).

Potom existuje k-rozměrná diferencovatelná varieta $W^s(0)$ (stabilní varieta) procházející počátkem, která je v bodě 0 tečná k podprostoru generovanému stabilními vlastními vektory. Trajektorie startující na $W^s(0)$ konvergují k počátku pro $t \to \infty$.

Stejně tak existuje $(n - k)$-rozměrná **nestabilní varieta** $W^u(0)$, tečná k nestabilnímu podprostoru (trajektorie jdou do 0 pro $t \to -\infty$).

Diagram z poznámek: Zobrazuje rozdělení prostoru na W^s (stable), W^u (unstable) a případně W^c (central) podle reálné části vlastních čísel.

31 Další příklady a Centrální varieta (Strana 6)

31.1 Příklad 4

Zadání:

$$\dot{x} = -x - y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

Bod rovnováhy: $[0, 0]$. Také $(-1, -1)$. Jacobiho matice v $[0, 0]$:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Jde o hyperbolický bod (sedlo). Existuje stabilní varieta dimenze 1 a nestabilní varieta dimenze 1.

31.2 Věta o centrální varietě

Pokud má linearizace v bodě rovnováhy vlastní čísla s **nulovou reálnou částí**, existuje **centrální varieta** $W^c(0)$, která je tečná k podprostoru příslušnému těmto vlastním číslům.

31.3 Příklad 5 (Kritický případ)

Zadání:

$$\dot{x} = xy \quad \text{(nebo } x^2 \text{ dle kontextu řešení)}$$
$$\dot{y} = -y$$

Linearizace v $[0, 0]$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 0$ (centrální), $\lambda_2 = -1$ (stabilní).

Řešení: Z rovnice $\dot{y} = -y$ máme $y(t) = c_2 e^{-t}$. Z poznámek pro $x(t)$: Řešení má tvar $x(t) = \frac{-1}{t+c}$. (To odpovídá rovnici $\dot{x} = x^2$). - **Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 0$:** Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (osa x). Odpovídá centrální varietě. - **Vlastní vektor pro $\lambda_2 = -1$:** Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (osa y). Odpovídá stabilní varietě.

32 Hartman-Grobmanova věta (Strana 7)

32.1 Znění věty

Nechť x_0 je hyperbolický bod rovnováhy ($\mathrm{Re}(\lambda_i) \neq 0$) systému $\dot{x} = F(x)$. Pak existuje okolí U bodu x_0 a **homeomorfismus** h, který převádí trajektorie nelineárního systému na trajektorie jeho linearizace:

$$h(\Phi_t(x)) = e^{At} h(x)$$

Tato věta říká, že v okolí hyperbolického bodu je fázový portrét nelineárního systému "kvalitativně stejný"(topologicky ekvivalentní) jako u lineárního systému.

32.2 Příklad 6: Jednorozměrný systém (Detailní rozbor)

Zadání:

$$\dot{x} = x - x^3$$

Hledáme body rovnováhy položením pravé strany rovné nule:

$$x(1 - x^2) = 0 \implies x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

Linearizace a stabilita: Derivace funkce $f(x) = x - x^3$ je $f'(x) = 1 - 3x^2$. Toto číslo hraje roli vlastního čísla λ v 1D.

1. **Bod $x = 0$:**

$$\lambda = f'(0) = 1 - 3(0)^2 = 1$$

Protože $\lambda > 0$, bod 0 je **nestabilní** (zdroj). Trajektorie se od nuly vzdalují.

2. **Bod $x = 1$:**

$$\lambda = f'(1) = 1 - 3(1)^2 = -2$$

Protože $\lambda < 0$, bod 1 je **stabilní** (stoka). Trajektorie v okolí konvergují k 1.

3. **Bod $x = -1$:**

$$\lambda = f'(-1) = 1 - 3(-1)^2 = -2$$

Protože $\lambda < 0$, bod -1 je **stabilní** (stoka).

Globální chování: Systém má dva stabilní stavy (± 1) a jeden nestabilní stav (0) uprostřed. - Pro $x \in (-1, 0)$ je $\dot{x} < 0$, pohyb doleva k -1. - Pro $x \in (0, 1)$ je $\dot{x} > 0$, pohyb doprava k 1. - Pro $|x| > 1$ je $\dot{x}$ opačného znaménka než x, pohyb směrem k počátku (tedy k ± 1).

20. 11. 25

33 Topologie okolí bodu rovnováhy

Zkoumáme chování trajektorií $\Gamma(t)$ v okolí bodu rovnováhy x_0, kde $F(x_0) = 0$. Zatímco u hyperbolických bodů (sedlo, uzel, ohnisko) je situace jasná z linearizace, u nehyperbolických bodů (např. vlastní čísla s nulovou reálnou částí) je struktura složitější.

33.1 Sektory a Separatrixy

Okolí bodu rovnováhy může být rozděleno tzv. **separatrixami** (speciální trajektorie Γ, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují přímo k bodu rovnováhy) na sektory s odlišným chováním.

Rozlišujeme tři základní typy sektorů:

1. **Hyperbolický sektor:** Trajektorie Γ v tomto sektoru se k bodu rovnováhy přiblíží, "minou ho" a opět se vzdálí. (Typické pro okolí sedla).
2. **Parabolický sektor:** Všechny trajektorie Γ v tomto sektoru konvergují k bodu rovnováhy (pro $t \to \infty$) nebo z něj všechny divergují (pro $t \to -\infty$). Chová se to jako výseč uzlu.
3. **Eliptický sektor:** Trajektorie Γ vycházejí z bodu rovnováhy, opíší smyčku a vracejí se zpět do bodu rovnováhy (homoklinické orbity). Celý sektor je vyplněn uzavřenými smyčkami.

33.2 Složené body rovnováhy

Složený bod rovnováhy vzniká splynutím více jednoduchých bodů rovnováhy (např. při změně parametru). Jeho index (topologická charakteristika) je roven součtu indexů bodů, které splynuly. Například splynutím sedla (index -1) a uzlu (index +1) vznikne bod s indexem 0 (např. sedlo-uzel). Okolí takového bodu se skládá z kombinace hyperbolických, parabolických a eliptických sektorů. Vztah pro počet sektorů:

$$2 + E - H = 2I$$

kde E je počet eliptických sektorů, H počet hyperbolických sektorů a I je index bodu.

34 Analýza v polárních souřadnicích (Blow-up metoda)

Pokud linearizace selhává (např. Jacobiho matice je nulová), je nutné zkoumat nelineární členy. Často pomůže transformace do polárních souřadnic, která "nafoukne" bod rovnováhy na kružnici.

34.1 Odvození transformačních vztahů

Mějme systém $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$. Zavedeme substituci:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Z toho plyne $r^2 = x^2 + y^2$ a $\tan\varphi = \frac{y}{x}$.

1. Rovnice pro r: Derivujeme r^2:

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \implies \dot{r} = \frac{x}{r}\dot{x} + \frac{y}{r}\dot{y}$$

Dosadíme za x, y:

$$\dot{r} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi$$

2. Rovnice pro φ: Derivujeme $\tan\varphi = y/x$:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}$$

Vynásobíme $\cos^2\varphi = (x/r)^2$:

$$\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{1}{r}(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi)$$

34.2 Příklad z tabule

Uvažujme systém, který po převodu dává rovnice typu:

$$\dot{r} = r^k f(\varphi)$$
$$\dot{\varphi} = r^{k-1} g(\varphi)$$

Konkrétní analýza na tabuli (zřejmě pro určitý systém) ukazuje hledání směrů, kde $\dot{\varphi} = 0$ (invariantní paprsky). * Pokud pro nějaké φ_0 platí $\dot{\varphi} = 0$, pak polopřímka s úhlem φ_0 je invariantní (trajektorie Γ se pohybuje po přímce). * Na této přímce rozhoduje znaménko $\dot{r}$: * $\dot{r} < 0$: Trajektorie Γ jde do počátku (stabilní směr). * $\dot{r} > 0$: Trajektorie Γ jde od počátku (nestabilní směr). * Tímto způsobem určíme, zda se v daném sektoru mezi paprsky trajektorie chovají jako u sedla, uzlu atd.

35 Hamiltonovské systémy

Konzervativní systémy, kde nedochází ke ztrátě energie (neexistuje tření).

35.1 Definice a Hamiltonián

Systém je Hamiltonovský, pokud existuje funkce $H(x, y)$ taková, že:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Důsledek:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0$$

Hamiltonián $H(x, y)$ je **prvním integrálem** systému. Trajektorie Γ leží na hladinách konstantní energie $H(x, y) = C$.

35.2 Příklad z poznámek (dokončení)

Systém:

$$\dot{x} = y + x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = -x - 2xy$$

1. Nalezení Hamiltoniánu: Integrujeme $\dot{x}$ podle y:

$$H = \int (y + x^2 - y^2)dy = \frac{y^2}{2} + x^2 y - \frac{y^3}{3} + C(x)$$

Derivujeme podle x a porovnáme s $-\dot{y}$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy + C'(x) \quad \text{musí se rovnat} \quad -(-x - 2xy) = x + 2xy$$

$$C'(x) = x \implies C(x) = \frac{x^2}{2}$$

Výsledný Hamiltonián:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

2. Analýza bodů rovnováhy: Body rovnováhy systému odpovídají stacionárním bodům funkce $H(x, y)$ (kde $\nabla H = 0$). Zde BR $[0, 0]$. Hessián funkce H v $[0, 0]$:

$$\text{Hess } H = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant > 0, stopa > 0 (nebo vlastní čísla $1, 1 > 0$). Bod $[0, 0]$ je **lokální minimum** funkce H. **Závěr:** Protože H má v počátku ostré lokální minimum, jsou trajektorie Γ v okolí uzavřené křivky obíhající počátek. Bod $[0, 0]$ je **střed** (Center).

36 Newtonovské systémy

Fyzikální systémy popisující pohyb částice v potenciálovém poli $V(x)$. Rovnice: $m\ddot{x} = F(x) = -V'(x)$. Převedeno na systém 1. řádu (pro $m = 1$):

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -V'(x)$$

36.1 Hamiltonián (Celková energie)

$$H(x, y) = \mathrm{E}_{kin} + \mathrm{E}_{pot} = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

Trajektorie Γ jsou dány rovnicí $\frac{1}{2}y^2+V(x) = E$ (konstanta). Odtud lze vyjádřit rychlost $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Pohyb je možný jen tam, kde $E \geq V(x)$.

36.2 Vztah potenciálu $V(x)$ a fázového portrétu

Z tvaru funkce $V(x)$ můžeme přímo nakreslit fázový portrét:

- **Lokální minimum $V(x)$:** Odpovídá bodu rovnováhy typu **STŘED**. Částice kmitá v "dolíku" potenciálu. Fázové trajektorie Γ jsou uzavřené smyčky kolem tohoto bodu.
- **Lokální maximum $V(x)$:** Odpovídá bodu rovnováhy typu **SEDLO**. Částice je na vrcholu kopce, což je nestabilní poloha. Separatrixy oddělují pohyb na jednu a druhou stranu kopce.

37 Gradientní systémy

Systémy, kde pohyb sleduje největší spád potenciálu (opak konzervativních systémů - zde se energie maximálně "ztrácí").

$$\dot{x} = -\nabla V(x)$$

Vlastnosti:

- Trajektorie Γ jsou kolmé na vrstevnice $V(x)$.
- Funkce $V(x)$ podél řešení klesá: $\frac{dV}{dt} \leq 0$.
- Neexistují žádné uzavřené cykly (limitní cykly).
- Všechna řešení konvergují k bodům rovnováhy (lokálním extrémům V).
- **Lokální minima V** jsou **asymptoticky stabilní** uzly.
- **Lokální maxima V** jsou **nestabilní** uzly (zdroje).
- **Sedlové body V** jsou **sedla** ve fázovém portrétu.

27. 11. 25

38 Dynamický systém a Tok

38.1 Definice toku

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení $\phi : \mathbb{R} \times E \to E$ se nazývá **dynamický systém** (nebo tok), pokud $\phi \in C^1$ a splňuje vlastnosti grupy:

1. **Identita:** $\phi(0, x) = x$ pro všechna $x \in E$.
2. **Grupová vlastnost:** $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$.

Zobrazení $\phi(\cdot, x_0) : I \to E$ popisuje trajektorii systému procházející bodem x_0.

39 Globální existence a Blow-up (Výbuch)

U lineárních systémů existuje řešení pro všechna $t \in \mathbb{R}$. U nelineárních systémů to neplatí – řešení může v konečném čase utéct do nekonečna. Tomuto jevu se říká **blow-up**.

39.1 Příklad: Konečný čas zániku

Rovnice:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

Řešení separací proměnných:

$$\int x^{-2} dx = \int dt \implies -\frac{1}{x} = t + C$$

$$x(t) = -\frac{1}{t + C}$$

Z počáteční podmínky $x(0) = x_0$ plyne $C = -\frac{1}{x_0}$.

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

Analýza intervalu existence:

- Pokud $x_0 > 0$: Jmenovatel se blíží nule pro $t \to \frac{1}{x_0}$. Řešení existuje pouze na intervalu $(-\infty, \frac{1}{x_0})$. V čase $T = 1/x_0$ dochází k "výbuchu"$(x \to \infty)$.
- Pokud $x_0 < 0$: Řešení existuje na $(\frac{1}{x_0}, \infty)$. Pro $t \to \infty$ jde $x \to 0$.
- Pokud $x_0 = 0$: $x(t) \equiv 0$ (globální řešení).

39.2 Barrowův vzorec (Čas zániku)

Pokud řešení opustí každý kompakt v konečném čase T (jde do nekonečna), lze tento čas vyjádřit:

$$T = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{F(z)} dz$$

(V našem příkladu $\int_{x_0}^{\infty} z^{-2} dz = [-z^{-1}]_{x_0}^{\infty} = \frac{1}{x_0}$, což odpovídá).

39.3 Normalizace vektorového pole

Každý systém $\dot{x} = F(x)$ lze "zbrzdit", aby měl globální řešení, aniž by se změnily trajektorie (změní se jen rychlost pohybu po nich). Nový systém:

$$\dot{x} = \frac{F(x)}{1 + |F(x)|}$$

Tento systém je topologicky ekvivalentní původnímu, ale řešení existují pro všechna t.

40 Limitní množiny

Definujeme, kam trajektorie směřuje v nekonečnu. Označme Γ_{x_0} jako trajektorii procházející bodem x_0.

40.1 Definice limitních bodů

- **ω-limitní bod (p):** Bod p je ω-limitním bodem trajektorie $\phi(t, x)$, pokud existuje posloupnost $t_n \to \infty$ taková, že $\phi(t_n, x) \to p$.
- **α-limitní bod (q):** Analogicky pro posloupnost $t_n \to -\infty$.

40.2 Vlastnosti ω-limitní množiny $\omega(\Gamma)$

- Je to uzavřená podmnožina E.
- Je invariantní (skládá se z celých trajektorií).
- Pokud je trajektorie omezená (leží v kompaktu), pak je $\omega(\Gamma)$ neprázdná, kompaktní a souvislá.

41 Příklad: Limitní cyklus

Zkoumáme nelineární systém v rovině:

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$\dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

41.1 Převod do polárních souřadnic

Transformace: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Platí $r^2 = x^2 + y^2$, derivací získáme $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$.

Dosazení:

$$r\dot{r} = x[-y + x(1 - r^2)] + y[x + y(1 - r^2)]$$
$$r\dot{r} = -xy + x^2(1 - r^2) + yx + y^2(1 - r^2)$$
$$r\dot{r} = (x^2 + y^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Vydělením r (pro $r \neq 0$):

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

Pro úhel (z poznámek):

$$\dot{\varphi} = 1$$

41.2 Analýza fázového portrétu

1. **Bod rovnováhy $r = 0$ (Počátek):** Linearizace $\dot{r} \approx r$ (pro malé r). Poloměr exponenciálně roste. Bod $[0, 0]$ je **nestabilní ohnisko** (zdroj). Je to α-limitní množina pro vnitřek cyklu.
2. **Kružnice $r = 1$ (Limitní cyklus):** Rovnice $\dot{r} = r(1 - r^2)$ má stacionární bod $r = 1$.
   - Pro $r < 1$ je $\dot{r} > 0$ (poloměr roste k 1).
   - Pro $r > 1$ je $\dot{r} < 0$ (poloměr klesá k 1).

   Tato kružnice je **stabilní limitní cyklus**. Je to ω-limitní množina pro všechny trajektorie $x_0 \neq 0$.

42 Poincarého zobrazení

Poincarého zobrazení (nebo také mapa prvního návratu) je nástroj pro studium stability periodických orbit. Uvažujme periodickou orbitu Γ v $\mathbb{R}^n$. Zvolíme nadrovinu Σ (tzv. transverzální řez), která protíná Γ v bodě p a není tečná k trajektoriím. Pro bod $x \in \Sigma$ v blízkosti p definujeme $P(x)$ jako první bod, ve kterém trajektorie vycházející z x znovu protne Σ.

$$P : \Sigma \to \Sigma$$

Bod p je pevným bodem zobrazení P, tj. $P(p) = p$. Stabilita pevného bodu p pro diskrétní systém $x_{k+1} = P(x_k)$ odpovídá stabilitě periodické orbity Γ pro spojitý systém. Pokud vlastní čísla linearizace $DP(p)$ leží uvnitř jednotkového kruhu, je orbita asymptoticky stabilní.

43 Stabilní varieta periodických orbit

Podobně jako u bodů rovnováhy, i k periodické orbitě Γ může existovat stabilní varieta $W^s(\Gamma)$. Je to množina všech bodů x_0, jejichž trajektorie se pro $t \to \infty$ blíží k orbitě Γ.

$$W^s(\Gamma) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\phi(t, x_0), \Gamma) \to 0 \text{ pro } t \to \infty\}$$

Pokud je orbita stabilním limitním cyklem, je její stabilní varietou typicky nějaké její okolí (nebo celý prostor kromě bodu rovnováhy uvnitř).