Genel Matematik

1 - Başlangıç Bilgileri

-Bilgilenme Yöntemleri-

Herşey Thales ile Başladı

1.2 - Thales ile Başlayan Bilgilenme Yöntemi

1.2.1 - Filosofi

M.Ö. VII ve VI ‘ıncı yüzyıllarda, Bodrum yakınlarında Miletos kentinde yaşamış olan ve İzmirli Homeros’dan sonraki ilk büyük Helen düşünürü olan Thales, matematiğin bilgi gelişiminin, sistematik kurallarını belirtmiş olan ilk kişidir. Thales, matematik bilgilerinin evrensellik kazanabilmeleri için, mutlaka belirli ve aksi savunulamayacak kadar açık başlangıç bilgilerinden başlanarak, akıl yürütme yolu ile kanıtlanmaları gerektiğini belirtmiş kendisi de, kendi adı ile anılan “Thales Teoremi” ni kanıtlayarak bu aydınlanma yolunu açmıştır.

Thales tarafından ortaya konulan rasyonel (akılcı) düşünme yöntemleri, giderek gelişmiş ve Filosofi olarak adlandırılarak insanlığın tek bilgi edinme yöntemi haline gelmiştir. Filosofi, (Philos = sevgi, yatkınlık) ve sofos (bilgelik) sözcüklerinden türemiştir.

Filosofi, Aksiyoloji, Epistemoloji ve Metafizik (Ontoloji) konuların dan oluşur. Bu konular birbirlerinden kesin çizgilerle ayrılamazlar.

A - Aksiyoloji , *αξιος* (axios = değer) sözcüğünden türer ve bir değeri inceleyen bir düşünce koludur. Aksiyoloji,

- Etik (İnsan davranışının değerleri ile ilgilenir. Özellikle, insanların nasıl davranmaları gerektiğini belirlemeye çalışır. Nasıl davrandıkları ve nasıl davranmaları gerektiğini düşünmeleri ile ilgilenmez).
- Estetik (Sanatsal değerlerin, uyum, düzen ve yöntemleri ile ilgilenir).

alt dallarına ayrılır.

B - Epistomoloji, bilginin oluşması, düzenlenmesi ve sınırları ile ilgilenir. Özellikle, doğanın incelenmesi, insan bilgisinin sınırları, epistemolojinin ilgi alanlarıdır.

Mantık (Lojik) (logos = sözcük, kavram) bilgi edinmede doğru düşüncenin, yanlış düşünceden ayrılmasının yöntemlerinin belirlenmesi ile ilgilenir. Mantık, epistemolojinin bir alt konusu olarak düşünülebilir. Fakat, genel olarak mantık, filosofinin tüm dallarında uygulanır. Bunun nedeni her bilgilenme eyleminde mantığa gereksinme duyulmasıdır.

C - Ontoloji veya Metafizik. Gerçekte neyin gerçek neyin gerçeküstü olduğunun incelenmesidir. Metafizik, doğal düzenin ilk prensiplerini inceler, insan zekasının algılayabildiği en üst genellemeleri belirlemeye çalışır.

1.2.2 - Mantık

“Herşey Thales’in Başlattığı Mantık Çalışmaları ile Başladı...”

Mantık doğru düşünce yöntemlerini belirten, doğru düşünme yöntemi ile doğru olmayan düşünce yöntemini birbirinden ayıran, “Öncül” adı verilen verilerden doğru sonuçların çıkarılması yöntemlerini inceleyen bir filosofi çalışmasıdır. Mantık bilinenlerden bilinmeyenlerin, doğru olarak bulunması için gerekli yöntemleri inceleyen bir bilgilenme (inferans) yöntemidir.

Mantıksal yöntemler, sadece bir savın doğruluğu (iyiliği), veya yanlışlığını (kötülüğünü) açıklamaya çalışır. Bunun için tarihsel olarak geliştirilmiş, sistematik ve normatif bir inceleme sistemini uygular. Mantığın tarihsel süreç içinde gelişimini ve uygulanma yöntemini bu konu içinde açıklamaya çalışacağız.

Mantıksal çalışmalar, insanların beyninde yürütülen düşünce çalışmalarıdır. İnsanlar birbirlerinin düşüncelerini okuyacak telepatik yetilerden (henüz!) yoksun olduklarından, mantık düşüncelerini kullandıkları gündelik dil ile birbirleri ile iletişim kurarak açıklamak zorundadırlar. Yani mantık, düşünsel olarak geliştirilen yöntemlerin sözle açıklamasıdır. Zorluk da burada başlamaktadır. Çünkü mantık, özellikle matematik mantık çok kesinlik gerektiren bir çalışmadır. Oysa gündelik dil, her konuda fazla esnek, çoğu zaman birden fazla anlamı olan sözcükler içermektedir. Bu zorluk, tarih boyunca mantık çalışanlarını zorlamış, fakat günümüze kadar uygulanabilir bir çözüm bulunamamıştır.

Sistematik mantık yöntemlerini ilk tanımlayan ve uygulayan, Anadolulu (Miletuslu) Thales olmuştur. Thales, doğa olaylarının kenine özgü kuralları olduğunu ve doğa olaylarının din kuralları ile açıklanmaması gerektiğini belirten, bu şekilde rasyonel (akılcı) düşüncenin yolunu açan, batı yarımküresinin ilk düşünürüdür. Thales bilgi kazanımı (inferans) için, hem tümelden özele (dedüksiyon), hem de özelden tümele (indüksiyon) yöntemlerini uygulayan ilk düşünürdür.

Mantık, insanların aklında gelişen bir akıl yürütme yöntemidir. Akıl yürütme, insanların kendisine özgü, dışa karşı kapalı olarak yürütülen bir işlev olduğundan başkaları tarafından algılanamaz. İnsanlar, açıklamak istedikleri düşüncelerini gündelik olarak kullandıkları dilleri ile açıklarlar. Bu nedenle, mantık, gündelik dil ile açıklanan bir akıl yürütme yöntemi olarak tanımlanır.

Mantık sadece, öncüllerin doğruluğunun sonucun doğruluğunu sağlayan savlar ile ilgilenir. Tümdengelimsel bir savda, öncüllerin doğru olması, sonucun yüzdeyüz doğru olmasını gerektirir. Tümevarımsal (induktif) bir savda ise, öncüllerin doğruluğu, sonucun doğruluğunu ancak belirli bir yanılgı payı ile destekleyebilir.

Gündelik dil ile açıklanan ve hiçbir formülasyon kısıtlaması ile sınırlandırılmamış olan mantık, en geniş ve en açıklayıcı mantıktır. Bunlara örnek olarak Parmenides, Zeno, Sokrates ve Platonun diyalektik sorgulamaları en belirgin örneklerdir. Formüle dayanmayan (informal) (bu sözcük aynı zamanda resmiyetten uzak olmak anlamında da kullanılır) mantık, en açıklayıcı, fakat en az sistematize olmuş mantıktır. Formal olmayan mantığın kuralları belirgin olmadığından, uygulamaları da belirli kurallara bağlanmamış, özel uygulamalar olmaktan ileri gidemez.

Thales den sonra mantık çalışmaları öncelikle Magna Graecia'da (okunuşu latincede söylendiği gibi "Magna Greçya", Grekçesi "Megali Hellas", yani "Büyük Yunanistan" adı ile anılan, bugünkü İtalya'nın hemen hemen tüm güneyi ve Sicilya adasını kapsayan helenistik yerleşim). Elaides (bugünkü, İtalya'nın güney batısına bakan Tirenyen denizi kenarında, "Velia" kentidir. Şehri Pers istilasından kaçan Foça'lıların Hyele adı ile oluşturduğu bilinmektedir. Şehrin adı daha sonra Ele, en sonunda Elea , Elaides olmuştur) kentinden Parmenides (M.Ö. yaklaşık 515 - 460) , onun öğrencisi yine Elaides'li Zeno (M.Ö. yaklaşık 490 - 430) (Grekçe ve Türkçede Ksenon olarak tanınır) , sonra Atinalı Sokrates (M.Ö. yaklaşık 490 - 430), onun öğrencisi Atinalı Platon (M.Ö. yaklaşık 427 - 347) ve özellikle Platonun öğrencisi (Stagira, Makedonya)'lı (Atinada yerleşik) Aristoteles (M.Ö. 384 - 322) tarafından geliştirilmiştir.

Aristoteles, mantıksal savların içeriğinde değil yapılanmalarına (form) bakılması gerektiğini belirten ilk filosoftur. Aristoteles, önermelere M,N gibi alfabetik harfler konulması ile mantıksal formlar oluşturulabileceğini ve bu şekilde mantıksal savlar üzerinde, gündelik dilin getirdiği belirsizliklerinin etkilerinin azaltılabileceğini belirtmiştir. Yine de, Aristoteles mantığı, informal (formal olmayan) (formüllere dayanmayan) mantık olarak nitelendirilmektedir.

Formal, formüle edilebilen sanal (abstract), sembolik bir formülle belirtilebilen ve bu formül yardımı ile birçok örneği yaratılabilen bir yapılanma demektir. Önermeler, ilerde göreceğimiz gibi terimlerden (term) oluşmaktadır. Terimler, sözle belitilen içeriklerdir. Gündelik dil ile açıklnan sözler ise, mantığın gerektirdiği kesinliğe her zaman erişemez. Gündelik dil ile açıklanan terimler,, gündelik dilin renkli, çok anlamlı olabilen ifadeleri nedeni le değişik anlamlarla yorumlanabilirler. Aristoteles, gündelik dile belirtilme zorunluğu olan savların söylediklerinin, genel bir yapının değişik örnekleri olduğunu ve bir savın geçerliğinin savın söylediklerine değil savın yapısına bağlı olduğunu belirtmiştir. Sav yapıları az sonra göreceğimiz gibi, terimlerin yerine karfler konularak genelleştirilebilir ve bu yöntemle her sav örneğnin örneği olduğu yapı belirlenebilir. Bu yapı geçerli örnekler verebiliyorsa yapının geçerli olduğu belirlenir. geçerli bir yapının her örneği geçerli örnekler vermelidir. Yapının geçerli olması demek, öncüllerin doğruluğunun sonucun doğruluğunu gerektiren örneklerin oluşturulabilmesi demektir. Aristoteles savların yapılarına dikkat çeken ilk düşünürdür. Yine de, bu konuda, normlar, ancak ondokuzuncu ve yirminci yüzyıllarda oluşturulabilmiştir. Sav yapılarını, sav yapılarının örneklerini ve bu örneklerin geçerlilik kriterlerlerini az sonra inceleyeceğiz.

Aristoteles' in formal denemeleri, gününün çok ilerisinde olduğu için, çağında uygulanma olanağı bulamamıştır. Aristoteles sistematik mantığın kurucusu sayılmaktadır ve birçok mantık çalışmaları arasında sillojistik mantık, tümelden özele (dedüksiyon) ve özelden tümele (indüksiyon) sistematiğinin esaslarını belirtmiştir. Aristoteles, dedüktif sillojistik mantık (kıyas) yanında, indüktif bilimlerle de ilgilenmiş ve çalışmalar yapmıştır. Buna rağmen, bu çalışmaları unutulmuş (veya -özellikle ortaçağ katolik hristiyan kateşismi tarafından- unutturulmuş) ve sadece dedüktif sillojistik mantık çalışmaları öne çıkarılmıştır. Çalışmaları, kendisinden sonra "Organon" (belirsizlikten kurtulma, organize olma) adı verilen bir kitapta toplanmış, bu kitap günümüzde bile mantığın anayasası olarak kabul edilmektedir. Günümüzde uygulanan formal mantık, Aristoles' in çabalarının geliştirilmiş halidir.

Aritoteles'ten sonra, M.Ö yaklaşık 278- 206 yıllarında yaşamış olan stoik bir Filozof olan Chrisippus, Aristoteles'in belirtmiş olduğu düzenli mantık kavramlarına, “ve”, “eğer”, “veya” gibi kavramları ekleyerek günümüzdeki önermeler mantığının ilk örneklerini vermiştir. Bu açıdan önermeler mantığının, Aristotles'in sillojistik mantığına göre bir ilerleme olduğu kabul edilmektedir. Önermeler mantığı, matematik kuramların kanıtlanmasında uygulandığı için buna “Sembolik Mantık” veya “Matematik Mantık” adı da verilmiştir. Stoizm, dış dünyanın varlık ve yoksunluklarının düşünce sistemine etkisini azaltmaya çalışan bir düşünce ve yaşam ekolüdür. Thales ile başlayan ve Sokrates ile Platon'da örnekleri görülen bu ekolün mesupları, mantığa önemli katkılar yapmışlar, fakat bu bilgiler zamanla kaybolmuştur.

Aristotelesin tümelden özele (dedüktif) yönteminin yeni bir bilgi üretmediğini ve sadece bilinenleri yeniden düzenlediği zamanla ortaya çıkmıştır. Bu olguyu ilk farkeden ve dile getiren düşünür, M.S. 11 inci yüzyılda yaşamış olan ünlü Türk düşünür ve hekimi İbni-Sina olmuştur. İbni-Sina, 1950 lerde Alfred Tarski tarafından geliştirilmiş “Modal Mantık” yöntemini, “Geçici Zamanlı Modal Mantık” (Temporary Modal Logic) adı altında açıklamıştır. İbni-Sina, Avicenna (okunuşu: Avisenna) olarak tanındığı batı dünyasına aydınlanma yolunun ışığını yakan ilk düşünürdür. Bu ışık, ne yazık ki doğuyu aydınlatamamış, ve doğu Gazali'nin etkisi ile giderek koyulaşan bir karanlığa gömülmüş, bu karanlıktan ancak Türkiye, Büyük Atatürk'ün çabaları ile ve ancak 20 inci yüzyılın başlarında çıkabilmiştir. Atatürk sayesinde Türkiye, rasyonel bir düşünce yapısına kavuşmuş ve bir Avrupa ülkesi haline gelmiştir. Atatürk bizim yolumuzu aydınlatmış olan büyük bir önderdir. Modern Türkiyenin insanları olarak Atatürk'e büyük şükran borçluyuz. Yaktığı ışığın devamlı olması en büyük dileğimizdir.

Mantık, Aristoteles ile birlikte, gelişmiş ve olgunluğa erişmiş bir filosofi bilimi olarak gelişmesini tamamlamış gibidir. Kant, mantık için, "gelişmesini tamamlamış bir bilim dalı" nitelemesini yapmıştır. Yakın çağlarda mantığın gelişimi, matematik mantık yönünde gerçekleşmiş ve dayandığı sağlam mantıksal temeller, matematik mantığın gelişimi için büyük bir avantaj olmuştur.

Önermeler mantığı, mantığın önermeler üzerinden uygulanan bir bir koludur. Önermeler mantığı, matematik kuramların kanıtlanmasında uygulandığı için buna "Sembolik Mantık" veya "Matematik Mantık" adı verilmiştir. Önermeler mantığını ilk formüle eden, Aritoteles'den altmış yıl kadar sonra, M.Ö 270- 206 yıllarında yaşamış olan stoik bir Filozof olan Soli'li Chrisippus olmuştur. Chrisippus, Aristoteles'in belirtmiş olduğu olduğu düzenli mantık kavramlarına, "ve", "eğer", "veya" gibi kavramları ekleyerek günümüzdeki formal önermeler mantığının ilk örneklerini vermiştir. Bu açıdan önermeler mantığının, Aristoteles'in sillojistik mantığına kıyasla bir ilerleme olduğu kabul edilmektedir. Chrisippus'tan sonra da stoik filozoflar önermeler mantığına katkıda bulunmaya devam etmişler, fakat o çağlarda matematik bu düşünceleri özümseyecek kadar gelişmemiş olduğundan, uygulama olanağı bulmayan bu bilgiler, giderek kaybolmuştur.

Aydınlanma çağında, 1200 lü yıllarda, din adamı (Abbé) ve filosof olan Pierre Abélard (Abbé l'Abélard), önermeler mantığını yeniden formüle etmiş ve matematikte uygulanmasına yön vermiştir. (Abbé l'Abélard, Heloïse d'Argenteuil ile destansı bir aşk hikayesi yaşamıştır). Abbé l'Abélard'dan sonra, bu konu yine beş yüzyıl sürecek bir durgunluk devresine girmiştir. Modern matematiğin başlatıcısı sayılan Gottfried (okunuşu: Gotfriyd) (Tanrıyı mutlu eden) Leibniz (1646-1716) bu konu ile ilk ilgilenen kişi olmuştur. Leibniz, matematik gibi kesin bir konuda, belirsiz terimler içeren gündelik dilin kullanılmasındaki sakıncaları görmüş ve salt formüllerden oluşan bir matematik dili oluşturmaya çalışmıştır. Leibniz'in çalışmaları, yine çağının ilerisinde olduğundan ve günündeki matematik henüz bu düşüncelere hazır olmadığından, yaygınlık kazananamamıştır. Leibniz'den sonra, matematik mantık yine iki yüzyıl sürecek bir unutulma sürecine girmiştir.

George Boole (Okunuşu: Buul) 1854 de "An Investigation of the Laws of Thought" (Düşünce Yasaları Üzerine Bir İnceleme) adlı eserini yazmış ve bu tarih, modern çağlarda uygulanan matematik mantığın başlangıcı olarak kabul edilmiştir. Boole'in ortaya koyduğu yöntemler, günümüze kadar güncelliğini korumuş, "Boole Cebiri" adı altında yaygınlaşmış ve günümüzde bilgisayarların yapımında, mantıksal devrelerin tasarımına yön vermiştir. Bu tarihten sonra, matematik mantık çok güncel ve aktif bir çalışma alanı haline gelmiştir. Boole'nin başlattığı çalışmalar daha sonra, Augustus de Morgan (1806 – 1871), Ernst Schröder (1841 – 1902) ve Guiseppe Peano (1858 - 1932) tarafından ilerletilmiştir.

Augustus de Morgan (1806–1871), bu satırların yazarının da doktora sonrası çalışma için bulunmaktan onur duyduğu, University of London, University College ile London Mathematical Society nin kurucusu olan matematik profesörüdür ve önermeler mantığı için temel iki yasa olan De Morgan kurallarını bulmuştur.

Charles Sanders Peirce (okunuşu: Pörs) (1839 - 1914) Büyük bir Amerikalı düşünür ve matematikçidr. Asında bu satırların yazarı gibi bir kimyacıdır. Fakat, filosofiye yatkınlığının olağanüstü olduğu kabul edilmektedir. Birçok çağ açan kavramı, özellikle kümeler kavramını daha önceden görmüş ve belirtmiştir. Büyük vizyonu ne yazık ki yaşamında yeteri kadar anlaşılamamış, fakat belirttiği konular ileride büyük değişimler yaratmışlardır. Büyük değeri daha sonra anlaşılmış ve 1943 de Webster’s Biographical Dictionary Peirce için, “Zamanının en büyük düşünür ve mantıkçısı” ifadesini kullanmıştır. Çağımızın en büyük matematikçilerinden biri olan ve benim de derslerini Internet’ten izleme şansına eriştiğim Keith Devlin, Peirce için, “Gelmiş geçmiş en büyük filosof” değerlendirmesini yapmıştır.

Ernst Schröder (1841 - 1902) Büyük bir Alman filosof ve matematikçidir. Matematik mantık sözcüğünü ilk olarak onun kullandığı söylenir. Formel mantık kavramlarını, George Boole, Augustus de Morgan ve Charles Sanders Peirce tarafından getir-ildiği konumdan daha ileri noktalara taşımıştır. Anıtsal eser-i,”Vorlesungen über die Algebra der Logik” (Mantıksal Cebir üzerine Dersler), üç cilt olarak yazılmış ve günümüzdeki matem-atik mantığın formalizasyonunda en büyük kaynaklardan birini oluşturmuştur.

Guiseppe Peano (1858-1932), matematik mantık konusunda büyük katkılar yapmıştır. Birçok mantıksal sembol, Peano’un yarattığı sembollerdir. Richard Dedekind’in başlattığı, Doğal sayılar aksiyomatizasyonunu Peano daha anlaşılır bir şekilde sistematize etmiş ve Doğal sayılar bugün Dedekind-Peano aksiy-omları ile formalize edilmiş haliyle tanınmaktadırlar. Peano Aksiyometrik Geometriyi “Applicazioni Geometriche del Calcolo

Infinitesimale” (Infinitesimal Hesabın Geometrik Uygulamaları) yazmıştır. Daha başka önemli matematik kitapları da bulunmaktadır. Peano, 1900 yılında Bertrand Russell ile Matematik Kongresinde tanışmış ve ona “Formulario” (Formüller) adını verdiği, kendi oluşturduğu mantık sembollerini içeren bir manuscript vermiştir. Lord Russell bu yazıdan çok etkilenmiş ve kongreyi erken terkedip bu yeni formül sistemini incelemeye gitmiştir. Peano, yüklemler mantığını Frege’den önce bulmuş fakat bunu yaygınlaştırmamıştır. Peano matematiğin gündelik dil yerine daha kesin bir uluslarası dil ile açıklanması için Latincenin basitleştirilmiş halini “Latino Sine Flexione” (Fleksiyonsuz Latince) olarak önermiş ve bu dilin tanıtımına çaba göstermiştir. Yaşamını bir kalp krizi ile kaybettiği 1932 yılında, son gününden bir önceki günde bile Torino Üniversitesinde ders vermeye devam etmiştir.

1874 yılında, Georg Cantor, kümeler kuramını tanıtan bir yayınla kümeler kuramını başlatmıştır..Bu tarihten sonra, kümeler kuramı ve matematik mantık, matematiğin temelleri olarak tarihteki yerlerini almışlardır. Kümeler kuramı kadar, kümeler kuramında bulunan çelişkiler (paradoks) ve bu çelişkileri aşma yöntemleri de matemateğin temellerinin belirlenmesinde etkili olmuştur.

Kümelerin oluşumu üzerine çalırken bizzat Georg Cantor ilk paradoksu saptamış ve yayınlamış,fakat fazla önem vermemiştir. Cantor, bu paradoksu önlemek için sonsuz büyüklükte bir küme oluşumunu önleyecek öneriler geliştirmiştir. Daha sonra Peano’nun asistanı Cesare Burali-Forte, yine sonsuz büyüklükte kümelerin ordinaliteleri üzerine bir Cantor’un bulduğu çelişkiyi bulmuştur. Bu çelişki de önemsiz sayılmıştır. Esas etkisi olan çelişki, 1901 de Bertrand Russell tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra 1905 de Richard, kendi adı ile anılan paradoksu keşfetmişlerdir.

Russell, kendi kendini içermeyen bir kümenin, sonsuz büyüklükteki durumunun çelişki yaratacağını, kendisini içerse yapım koşuluna, içermese kümeler kuramına ters düşeceğini belirtmiştir. (Formülasyonu, Eğer $R=\{x : x \in x\}$ ise demek ki $R \in R$ eğer ve sadece eğer $R \notin R\}$ http://mathworld.wolfram.com/RussellsAntinomy.html). Russell çelişkisi bile, kümelerin matematik mantık ile birlikte, matematiğin temelini oluşturduğu düşüncesini engellememiştir. Bugün bile öyledir. Aksine, genel düşünce bu çelişkilerin önemsiz olduğunu ve uygun bir aksiyomlar sistemi ile çözülebileceği yönünde idi. Oysa, her iki düşünce de ne yazık ki yanlış çıkmıştır.

On dokuzuncu yüzyıl sonunun en ilginç kişiliklerinden biri olan Gottlob (Tanrının Sevdiği) Frege (1848 – 1925), çok önemli bir mantık ve matematik profesörüdür. Analitik Filosofi'nin kurucusu sayılır. Frege'nin "Matematiğin Temelleri" üzerine büyük katkıları olmuştur. 1879 da önermeler mantığını daha da ileriye taşıyarak, bir devrim niteliğinde olan yüklemler mantığını (Predicate Logic) bulmuştur. Yüklemler mantığı (birinci düzey mantık), önermeler mantığını (sıfırıncı düzey mantık) bir adım ileriye taşımıştır. 1879 da yazdığı, "Begriffsschrift, eine der arith metischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens" (Kavram Yazımı, Saf düşüncenin aritmetikçe oluşturulmuş formül dili), mantık tarihinin yeni bir sayfası olarak değerlendirilmiştir. Frege, matematiğin mantık ve kümeler kuramı üzerinde yapılandırılmışlığına inanıyordu. Fakat bu mantık, Aristocu sillojistik mantık ile stoacı önermeler mantığından daha ileri bir mantık olmalıydı. Bu düşünce ile her ikisinden de daha ileri, yüklemler mantığını oluşturmuştur. Frege mantığı, ikinci düzey yüklemler mantığıdır. Yani, iki değerli (0,1) ve iki yüklemi gözönüne alan mantıktır. Frege'nin matematik mantık üzerine görüşleri, Hilbert gibi, birçok önemli matematikçiler tarafından benimsenmiş olan "Lojisizm" (Mantıkçılık) düşünce ekolünü oluşturmuştur.

Frege' nin çok önemli iki ciltlik "Grundgesetze der Arithmetik" (Aritmetiğin Temelleri) kitabı, matematiği Frege'nin düzenlediği ve Cantor ile Burali-Forte'nin belirttiği çelişkilerden kurtulmak için oluşturduğu bir "içerik düzeyi sınıfları" aksiyomu ile sınırlanmış kümeler ile açıklanan mantık sistematiği ile matematiği açıklamaya yönelikti. Bu kitabın ikinci ve son cildi tamamlandığı ve matbaaya verildiği anda, Lord Russell 1901 de kendisine tarihsel bir mektup yazarak, kümeler kuramında bulduğu çelişkiyi iletmiştir. Frege, bu çelişkinin kapsamlı ve yıkıcı etkilerini anında anlamış ve kitabına ek olarak "Yeni bulunan bir antinominin (çelişki, paradoks) bu kitabın dayandığı bazı prensipleri değersiz hale getirdiği, fakat bu durumun yeni aksiyomlar bulunarak düzeltilebileceği" şeklinde bir kapanış yazısı eklemiştir. Bu olay bilim insanlarının, bilimsel verilere ne denli büyük değer verdiklerinin bir örneği olarak tarihe geçmiştir.

Kümeler kuramının matematiğin temellerinden biri olması için, kümelerin her türlü çelişkinin engellenebilecek şekilde oluşturulması gerekmekteydi. Bu konuda ilk olarak Cantor, Nahif yani sezgisel küme kuramının dayandığı, "Sınırsız İçerik" (Unrestricted Comprehension) aksiyomundan vazgeçilerek, "Sınırli İçerik" (Restricted Comprehension) aksiyomuna geçilmesini belirtmiştir. Frege'nin sınıf (class) aksiyomu yetersiz kalmış, Lord Bertrand Russell "Tipler" kuramını geliştirmiştir. Çağında "Ad Hoc" (amaca özel, genelleştirilemez) olarak belirtilen "Tipler" kuramı, prensip olarak bir kümenin ancak aynı tipten kümeleri içerebileceği şeklindedir. Bu kuramın genişletilemez olduğu savı doğru çıkmamamış ve bundan elli yıl kadar sonra, yeni teorilerin kanıtlanmasında kullanılmış, bu da Lord Bertrand Russell'in parlak zekasının bir işareti olarak kabul edilmiştir. Gerçekten Lord Bertrand Russell, yirmini yüzyılın en büyük filosofu (en azından en parlak zekası) olarak kabul edilmektedir.

Kümelerin çelişkilerden arındırılması amacı ile, bundan sonra birçok aksiyomlar ortaya atılmıştır. Bunlar arasında Quine, Bernays, Kurt Gödel ve von Neumann gibi büyük isimler de bulunmaktadır. Bu konuda en anlaşılır ve kalıcı olan Zermelo ve Frenkel'in geliştirdirdikleri (ZF) (Zermelo-Frenkel) ve "Seçim Aksiyomu (Axiom of Choice)'u da içeren şekliyle (ZFC) aksiyomu en kalıcı olanı olmuştur. Zermelo aksiyomlarını, Peirce-Schröder notasyonu ile yayınlamıştır. Yine de, bu aksiyomların Russell çelişkisini ne ölçüde elimine edebildikleri, henüz sonuca varılamamış olan ve devam etmekte olan bir tartışma konusudur.

Yirminci yüzyılın başlarında, Lord Bertrand Russell ve ona yön verenlerden birisi olan değerli filosof Alfred North Whitehill (Her iki ikisi de Cambidge'de profesördü) Frege'nin yapıtlarından esinlerek, tüm matematiği, Russell'in tipler kuramı ile sınırlandırılmış kümeler ve matematik mantığa dayandırarak, mantık formalizasyonu ile açıklamak amacını taşıyan, anıtsal "Principia Mathematica" adında olağaüstü geniş ve olağanüstü iddialı bir konuyu içeren bir kitaplar dizisini yazmaya başlamışlardır. On yılda hazırlanan bu büyük eser, 1910, 1912, ve 1913 de ilk baskısı, 1927 de ikinci baskısı yayınlanmıştır. Principia Mthematica, 1932 de Kurt Gödel tarafından geliştirilen "Eksiklik Kuramı" (Incompleteness Principle) tarafından tartışılır hale getirilmeden, dünyadaki matematiğin temel kitabı olarak kabul edilmiştir. Bugün, Gödel'in eleştirileri gözönüne alındığında bile, matematiği, mantık ve kümeler kuramı üzerinde tanımlayan, bu konuda gelecek kuşaklara yön ve esin veren, kuralları belirleyen bir ana kaynak olarak nitelendirilmekt dir. Lord Bertand Russell 1950 lerde Nobel edebiyat ödülünü kazanmıştır. Alfred North Whitehill Cambridge'deki matematik profesörlüğü görevi tamamlandıktan sonra, altmış dört yaşında Harward'da filosofi profesörü olarak eğitim yaşamına devam etmiştir.

Yakın çağların en büyük matematikçilerinden bir olan David Hilbert, (1862 - 1943) Önce Königsberg sonra Göttingen de matematik profesörüdür. Hilbert, yirminci yüzyılın en etkileyici matematikçisidir. 1900 yılındaki matematik kongresinde, çözülmesi gerekli 23 problemden oluşan bir koleksiyon sunmuş, bunlar arasındaki onuncu probleme bağlı olarak 1928 de Wilhelm Ackermann ile birlikte "Entscheidungsproblem" (Karar Verme Problemi) ni açıklamıştır. 1936 de Alonzo Church ve Alan Turing tarafından birbirlerinden bağımsız olarak, bu problemin çözümsüz (doğruluğuna karar verilemez, belirsiz) olduğu kanıtlanmıştır. Bu problem, bir mantık sisteminde, aksiyomlardan hareketle bir savın doğruluğunu mantıksal yöntemlerle sınayan bir algoritmanın oluşturulabilirliğinin sorgulanmasıdır. Church-Turing tezi, bunun olanaksız olduğunu belirtmektedir ve genel olarak Kurt Gödel'in "Eksiklik" kuramından yararlanmışlardır.

Hilbert, Cantor'un kümeler kuramını her zaman desteklemiştir. Kendisi matematiğin uygun aksiyomlarla desteklenen kümeler kuramı ve mantık çerçevesinde salt formüllerle açıklanabileceğini belirtmiş ve bu yapılanmaya "metamatematik" adını vermiştir (meta Grekçede "ötesi" anlamına gelir). Bu düşünceleri, Hilbert'in "Formalist" ekolünün bir mensubu olduğunu göstermektedir. Hilbert'in Göttingendeki asistanları arasında, Hermann Weyl, Ernst Zermelo, Carl Gustav Hempel, John von Neumann (asıl adı János Lajos, Macar asıllı) gibi parlak isimler bulunmaktaydı. Kurmuş olduğu, matematik enstititüsü, birçok değerli elemanlarının ikinci dünya savaşı öncesinde, sosyo-politik nedenlerle ne yazık ki Almanyayı terketmek zorunda kalmaları nedeni ile önemli ölçüde gücünü kaybetmiştir.

Hilbert, 1890 yılında, formalizmini ilk olarak ortaya koyan, geometriyi aksiyomlar ve mantıksal formüllerle açıklayan, "Grundlagen der Geometrie" (Geometrinin Temelleri) adında bir kitap yazmıştır. Bu kitapta, nesnelerden çok ilişkilere önem verilmiş ve Hilbert, "bu kitaptaki birçok nesneyi, örnek olarak nokta, çizgi ve benzerlerini, çay bardağı, tabak gibi nesnelerle değiştirseniz de ilişkilerin açıklanması değişmez" demiştir.

"Grundlagen der Geometrie" nin başarısı, Hilbert'e güven vermiş ve ünlü "Matematik Programı" (Metamatematik) çalışmasını başlatmıştır. Bu programın amacı, matematiği sağlam ve tam mantıksal temellere dayanmasının sağlanmasıydı. Hilbert, bunun

- Uygun seçilmiş aksiyomlarla tüm matematiğin açıklanabilir olması
- Bu aksiyomların epsilon kalkülüs ile kanıtlanabilirliği olması

koşulu ile olanaklı olacağını savunuyordu. Bu konuda büyük ilerlemeler sağlanmış ve bugün için geçerli büyük ölçüde matem atik formüller geliştirilmişti. Buna rağmen Metamatematik kuramı, tam olarak hiçbir zaman başarıya ulaşmadı, çünkü Kurt Gödel'e göre bu konuda tam başarı olanaksızdır. Yine de, genel kanıya göre, Hilbert'in formalist programı, matematik dilinin ve matematik kanıt sisteminin saf ve sembolik formüllere dayandırılması işlevini başarı ile gerçekleştirmiştir.

Hilbert matematik üzerine görüşlerini, iki ciltlik "Grundlage der Mathematik" (Matematiğin Temelleri) adlı kitabında açıklamıştır.

Hilbert, 1930 da emekli olmuş, ve emekliye ayrılma töreninde, eski ve zamanında hala geçerli olan Latince prensipler “Ignoramus et Ignoranibus”, “Cahiliz ve Cahil Kalacağız” yerine “Bilmeliyiz, Bileceğiz” anlamına gelen “Wir Müssen Wissen, Wir Werden Wissen” prensibini açıklamıştır. Bu sözcükler, Hilbert’in kabir taşına yazılmıştır. Bu değerli sözcükler, Atatürkçülük gereği, bizlerin de bir yaşam prensibimiz olmalıdır.

Kurt Gödel (1906 – 1978) Avusturya asıllı bir Almandır ve yirminci yüzyılın en parak ve etkileyici matematikçilerinden biridir. ilk “Eksiklik” kuramını 1930 yılında açıklamıştır. Bu prensip, yeterince içerikli ve kararlı bir mantıksal sistemde, tüm teoremlerin kanıtlanamayacağını ve bazılarının “karar verilemez” olarak kalacağını belirtmiştir. Bu kuramı, 1931 de (Über formal unentscheidbare Sätze der “Principia Mathematica” und verwandter Systeme) (“Principia Mathematica” ve ilgili sistemlerin karar verilemez savları) yazısında açıklamıştır. Gödele göre,

- Eğer bir sistem kararlı (consistent) ise tamam (komple)(complet) olamaz
- Bir sistemi oluşturan aksiyomların kararlılığı, o sistem içinden kanıtlanamaz.

Bu prensip, Frege , “Principia *Mathematica*”, Hilbert’in formalist programındaki aksiyomatik çabaları boşa çıkarmıştır. Hiçbir formalist program, aksiyomları ne denli düzenli olsa bile, tam olarak başarıya erişemez, geride daima doğruluğuna karar verilemeyecek (unentscheidbar) savlar olacaktır.

Gödelin eksiklik kuramına göre, yeterince içerikli olmayan önermeler mantığı, (sıfırıncı düzey mantık) ve yüklemler mantığı (birinci düzeyden mantık) yeterince içerikli olmadıklarından tam ve kararlı olabilirler, fakat tüm matematiği kapsayacak ve kanıtlayacak kadar yeterli olamazlar. İlginç olan, matematiğin tümüne yakın kısmı bu basit mantık sistemleri ile açıklanabilmektedirler. Bu durumda, Gödel'in eksiklik kuramına takılacak çok az matematik sav bulunabilecektir. Yanı fiziksel dünyaya uygulanacak mantık ve matematik bilgileri çok geniş kapsamda olacaktır. Geriye karar verilemeyecek çok az sayıda matematik kanıt kalmaktadır. Böylece, matematiğin fiziksel dünyaya uygulanması bugün bile tartışma konusu iken, uygulanabilirlik hemen hemen matematiğin tümüne yakın kısmını kapsamaktadır.

Gödel, eksiklik kuramında, bir mantık sisteminde, yaratılmış tüm formüllerin, aynı mantık sisteminin yöntemlerinin uygulanması ile kanıtlanamayacağını, bazı teoremlerin kanıtlarının eksik (karar verilemez) (unentscheidbar) (doğrusu yanlışından ayırdedilemez) kalacağını belirtmiş, fakat neyin kanıtlanıp, neyin kanıtlanamayacağını belirtmemiştir. Doğruluğuna karar verilemez savlar, ancak araştırma sonucu bulunabilecektir.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısından sonra, her konuda olduğu gibi, matematikte de modern çağlar başlamıştır. Matematik mantık, birbiri ile ilgili fakat farklı araştırma alanları ile devam etmektedir. Bu alanlar, model kuramı, kanıt kuramı, hesaplanabilirlik kuramı ve kümeler kuramı alanlarıdır.

John Alan Robinson, (Syracuse Univ.) 1967'de çözülüm teorem ispatlama (Resolution Principle) yöntemini ortaya çıkarmıştır. Bu yöntem 1972'de Alain Colmaurer ve Philippe Roussel tarafından tarafından Prolog adlı mantık programlama dilinin geliştirilmesine esin vermişitr. Prolog, 1980 lerden başlayarak kişisel bilgisayarlarda uygulanır hale getirilmiştir. Bu satırların yazarı, ilk prolog programcılarındandır. Prolog, başka programlama dillerine benzemeyen, rekürsif (kendi kendini çağıran) algoritmalardan yararlanan alışılagelmişin dışında bir programlama dilidir. Mantıksal problemlerin çözümü için vazgeçilmezdir. Buna rağmen, başka program dillerinde çözülebilecek problemler için Prolog kullanımı sağlık verilmez.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881- 1966) Hollandalı (Amsterdam Univ.) David Hilbert' in formalism ekolüne karşı, Intuitionic Logic (Sevgisel Mantık) ekolünü ortaya atmıştır (Flamanca "brouwer" bira yapan demektir, İngilizcesi "brewer" dir). Sezgisel mantık,önceleri formal olmayan (formüllerle açıklanmayan, sözel) bir mantık sistemi olarak oluşmuşsa da, Brouwer'in öğrencileri onu formal hale getirdiler. Brouwer'in sezgisel sistemi, yapılandırıcı (contructive) matematik sistemlerindendir. Mantıkta iki değerliliği (Tertium Non Datur) prensibini kabul etmez. Hilbert, Brouwer'i takdir etmiş, Amsterdam Üniversitesinde matematemati profesörlüğüne atnması için desteklemiş, fakat onunla formalism - intuitionism (formalism-sezgisellik) üzerine çekişmeye girmiştir. Brouwer mistik ve pesimist (kederli, herşeyi kötüye yoran) bir insandı. İlk inanç sitemi, bizdeki hurufi inancına benzer, semiotik (semboller) ile ilgilenen Lady Welby grubunda başlamış ve bu onda derin izler bırakmıştır. Brouwer'in etkilendiği filosoflardan birisi de Arthur Schopenhauerdir. Brouwer, matematiği temelden, sezgisel sisteme göre şekillendirmeye çalışmıştır. Bouwer'in önerdiği sezgisel sistemin çok başarılı olabileceği konusunda geniş bir kabul bulunmaktadır. Buna rağmen, fazla bir uygulama alanı bulamamamıştır. Bir trafik kazasında yaşamını yitirdikten sonra, çalışmalarını öğrencisi olan ünlü Arendt Heyting devam ettirmiştir.

Azerbaycan asıllı Lotfi Aliasker Zadeh (Doğuşu 1920, Baku) (Ali Asgâr, küçük Ali) (Hz. Ali R.A.) (Ali bin Ebu Talib adına verilmiş ad). Tahran Univerisitesinden Elektrik Mühendisi olarak derece ile mezun olmuş, A.B.D. de filosofi eğitimi almış, matematikte kendini yetiştirmiş, Berkeley Üniversitesinde Bilgisayar Bilimleri Profesörü olarak çalışmış sıradışı bir kişiliktir. Türk-İran kültürel birlikteliğinin son üyesi olan Aliasgarzade, Lukaçeviç ve Tarski tarafından başlatılan "Sonsuz Değerli Mantık" çalışmalarından esinlenen, "Fuzzy Logic" (Bulanık Mantık) prensibine dayanan "Fuzzy Set Theory" kuramını 1965 de açıklamıştır. Bulanık mantık sisteminde, doğruluk değerleri 0 ile 1 arasında sonsuz sayıda değer alabilir. Bu konuda çok direniş gösteren Aliasgarzade, "İnatçılık, direnç ve karşıt fikirlerden korkmamak, bir Türk geleneğidir, bu yüzden ben de çok inatçı olabilirim" demiştir.

Yirmibirinci yüzyıla geçildiğinde, matematik mantık üzerine bilimsel çalışmalar bütün hızıyla devam etmekte ve giderek gelişen bilgisayar olanakları bu çalışmalara büyük ölçüde yardımcı olmaktadır.

1.2.3 - Düşüncenin Kuralları

Düşüncenin kuralları, Thales tarafından şekillendirilmeye başlatılmış, Sokrates ve Platon tarafından geliştirilmiş, Aristoteles tarafından son hali verilerek açıklanmıştır. Bu kurallar, akıl yürütme ile elde edilen bilgilenmenin kuralları üzerinedir. Amaçları elde edilen ham bilginin belirli kurallara göre yorumlanarak bilgi haline gelmesidir. Aristoteles tarafından belirtilimiş olan düşünce kuralları bugün için de geçerlidir.

Düşüncenin kuralları, Aristoteles tarafından üç yasa olarak açıklanmıştır. Bunlar,

- 1 - Eşdeğerlik Yasası (Law of Identity)
- 2 - Çelişmezlik Yasası (Law of Non-contradiction)
- 3 - Üçüncü Olasılığın Gözardı Edilmesi (Law of Excluded Middle) (Tertium Non Datur)

yasalarıdır. Bu yasalar, Aristoteles'den sonra geniş ölçüde tartışılmış, yeni yasalar eklenmesi önerilmiş, fakat konulduğu gibi kalmıştır. Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell "Principia Mathematica" da bu yasaları aynen korumuşlardır.

Eşdeğerlik yasası, "Eğer birşey ise, o aynı şeydir" olarak ve A=A olarak açıklanır. Aristoteles Metafizik Kitap IV Kısım 4 de, "Eğer X insan simgesi ise ve eğer A da bir insansa, o zaman A = X olur" demiştir.

Çelişmezlik yasası, "Eğer bir şey ise, o başka şey olamaz" , " İki veya daha fazla çelişen önermeler aynı zamanda ve aynı anlamda, hem doğru hem de yanlış olamaz" ve "A=X önermesi doğru ise, A=değildir X önermesi doğru olamaz" olarak açıklanır. (Aristoteles, Metafizik, Kitap IV Kısım 4).

Üçüncü olasılığın gözardı edilmesi yasası (prensibi olarak da belirtilir), Aristoteles tarafından, "Herşey ya olmak ya da olmamak zorundadır" olarak açıklanır (Aristoteles, Metafizik, Kitap IV Kısım 7). Bunun anlamı "bir önermenin ya doğru ya da yanlış olması gerekir, başka olasılık yoktur" şeklindedir. Shakespeare'in Hamlet'indeki ünlü tiradı "To be or not to be, that is the question" (Olmak veya olmamak, soru budur) bu prensibi anımsatmaktadır.

Bertrand Russell, çelişmezlik yasasının düşünce ile değil, fakat gerçek dünya ile ilgili olduğunu belirtmiştir.

Düşünce yasalarına Leibniz, bir dördüncü kural eklemiştir. Bu kural, “Yeterli Neden” kuralıdır. Bu kurala göre, bir olayın oluşumu için yeterli neden varsa o olay oluşacaktır. Bu kuralı, Hamilton ve Schopenhauer de doğrulamıştır.

Bu son kural ilginç ve düşündürücüdür. Herşeyi şansa bırak-madan düzgün tutmayı öğütler. Ünlü halk deyişi olan Murphy kurallarından birisi “If anything can go wrong it will !” şeklinde açıklanır. Yani, “eğer birşey kötü gidebilirse, kötü gider”, diy-erek iyi gitme olasığını düşünmeyin, işinizi sağlama bağlayın, öğüdünü verir.

1.2.4 - Bilgilenme Yöntemleri

1.2.4.1 - Tümdengelimsel Bilgilenme (Dedüksiyon)

Tümdengelim aksiyomlardan başlanarak, belirli mantık kuralları uygulanarak sonuç çıkarma yöntemidir. Kısaca, “Başlangıçtan Sonuca” olarak açıklanabilecek olan bu yöntem, gerçeklerin usavurma (akıl yürütme) ile bulunmasını öngören bir sanal yön-temdir. Deney ile ilgisi yoktur. Gerçeğin aranması akıl ile seçilmiş bilgilerden başlar, akıl ile oluşturulmuş mantık (lojik) yöntemler kullanılarak, sadece akıl için geçerli sonuçlar çıkarılır. Bu yönteme kısaca “Çıkarım” veya “Çıkarsama” adları da verilir.

Tümden gelimsel bilgi kümesi (kısa bir süre sonra göreceğimiz gibi, bir küme, birbiri ile aynı olmayan ayrık nesnelerilerin toplu-luğudur), biraz sonra açıklayacağımız bir ön vkabul nityeliğinde aksiyomlardam oluşur. ilk bilgi kaynağı olarak, aksiyomlardan başka bir bilgi yoktur. Aksiyomlar da kanıtlanması gerekmeyen ve kanıtlı olarak kabul edilmesi gereken bilgilerdir. Başlangıçta aksiyomlardın verdiği bilgiler kesin kabul edilip “A lar B ise ve C ler de A da ise, C ler de B dir” diye akıl yürütülür. A ve ve B, aksiyomlar tarafında belirtilen ve kabul edilmiş aksiyomlara göre kurulmuş bir evrende, evrensel gerçek olarak kabul edilen bilgiler olduğundan ve bunlardan çıkarılan sonuçlar (C ler de B dir) yine aynı aksiyomlara göre evrensel gerçek olur. Bu yeni evrensel gerçek ile başlangıç bilgileri arasında başka ilşikler bulunarak, yeni sonuçlar oluşturulabilir ve her oluşan yeni sonuç, aynı aksiyom sisteminde, eski kanıtlanmış yüzde yüz doğru bilgilerden (aksiyomlarca ileri sürülen veya aksiyomlarca ileri sürülmüş bilgilerden yararlanılarak kanıtlanmış olan bilgiler) (teorem) çıkarıldığı için, yine aynı aksiyom sistemine göre, yüzde yüz doğru bir bilgi, yani kesinkes bir teorem olur.

Tümdengelim ile elde edilen sonuçlar kesindir. Tümdengelimsel düşünce, subjektiviteden (herkesin kendine göre sonuç çıkarması) arıtılmış sonuçlar sağlar. Yani, aynı başlangıç değerleri (aksiyomlar) kullanıldığında, geçerli mantıksal yöntemler uygulanarak elde edilen sonuçlar, herkes için aynıdır.

Tümdengelim yöntemi ile eski bilgilerden çıkarılan yeni bilgiler, yüzde yüz doğru olurlar. Tümdengelim yöntemi ile oluşturulmuş geçerli savların öncüllerinin doğruluğu, sonucun doğruluğunu kesinlikle sağlar. Fakat, salt tümdengelim ile yeni bilgiler elde edilebilir mi? Bu sorunun yanıtı tartışmalıdır.

Tümdengelimin yeni bir bilgi vermediği, sadece öncüllerdeki bilgileri açığa çıkardığı İbni-Sina’dan başlanarak belirtilmiştir. Bu düşünce doğru olabilir, ama, tümdengelim yöntemi, sonucun doğruluğunu deneye gerek olmadan garanti eden tek yöntemdir. Bu özellği, tümdengelim yönteminin matematik sanılarının kanıtlanmasında vazgeçilemez bir yöntem olmasını sağlamaktadır. Ayrıca, yeni düşünceler, tümdengelimin insanlığın bilgilenme için kullanabileceleri tek yöntem olduğunu, tümevarımın aslında bir tümdengelim eylemi olduğu savını ileri sürmektedirler.

Tümdengelim yönteminin sonuçları sanaldır. Oluşturulan yeni bilgiler, sadece kabul edilmiş olan aksiyomların geçerli olduğu bir sanal ortamda geçerlidir. Elde edilen sonuç sadece doğruluk değeridir ("doğru" veya "yanlış"). Sonuçlar hiçbir deneysel (ampirik) yönteme ve gözlem yapılmasına gerek olmaksızın sadece öncüllerin (biraz sonra savların yapıları, öncülleri ve sonucu üzerinde bilgilenmiş olacağız) doğruluk değerlerinden akıl yürütme (çıkarsama) ile elde edilirler ve sadece akıl için (gerçek dünya için değil) geçerlidir. Bundan dolayı matematik de sanal bir bilgidir ve sadece akıl ile algılanabilir. Buna rağmen, matematik insanlığın en başarılı teknolojik aracıdır. Bunun gerçekleşmesi, doğa bilimlerine matematik yöntemlerin uygulanması ile olmuştur. Bilimsel yöntemi incelerken bunun nasıl gerçekleşebildiğini göreceğiz.

Matematik yöntemler, doğal olaylarının incelenmesinde uygulandıkça, elde edilen sonuçlar kesinlikten uzaklaşır. Çünkü, öncüllerin doğruluğu sadece soyut matematikte yüzde yüz garanti edilebilir. Einstein, " Matematik yasaları, gerçekleri yansıtmaya çalıştıkça, kesinlikten uzaklaşırlar, kesin oldukça, gerçeklerden uzaklaşırlar" demiştir. Tümevarımsal bilgilenmeyi inceledikçe bu düşünceleri daha iyi anlayacağız.

1.2.4.2 - Tümevarımsal Bilgilenme (İndüksiyon)

Tümevarımsal bilgilenme, deneysel değerlerden genel bilgiler oluşturma yöntemidir. Buna özelden genele bilgilenme olarak da bakılabilir.

Tümevarım bir deneysel yöntemdir. Hiçbir usavurma yöntemini içermez. Sadece gözlem yapılmasını ve gözlem sonuçlarının açıklanmasını içerir.

Tümevarımsal bilgilenme, deneysel metodun uygulanma şeklidir. Deneylerden genel prensiplerin çıkarıldığı yöntemdir. Bu metot ile çıkarılan sonuçlar yüzde yüz doğru olamaz. Sonuçların doğruluğu gözlemlerin doğruluğu ile ilgilidir. Çok verilen bir örnek, yapılan geniş çapta gözlemler sonucunda, dünyadaki tüm kuğuların beyaz olduğunun ileri sürülmesidir. Oysa, bu sav yanlıştır. Sadece yapılan gözlemlere göre açıklanmış bir sanıdır. Bu araştırmada incelenmemiş olan, Avustralya'nın zor ulaşılır bir bölgesinde, siyah kuğuların varlığı daha sonra ortaya çıkarılmıştır. Bu durumda, "Dünyadaki tüm kuğular beyazdır." önermesine, tamamen yanlış denilebilir mi? Hayır, bu bir deneysel bilgidir. Deneyesel bilgiler, gözlemin doğruluğu ile ilgilidir. Doğru gözlem yapılmışsa, en az bir gözlem için belirtilen sonuç doğrudur. Önemli olan bu sonucun somut olarak ne kadar yaygın olarak geçerli olduğudur. Bunun anlaşılması için geniş çapta araştırmalar yapılması gerekebilir. Yukardaki kuğu gözlemlerini ele alalım. Dünyanın yüzölçümü bellidir. Araştırmalar yapılır, her araştırma yapılan bölgede hep beyaz kuğu bulunursa ve araştırma bölgesi tüm dünya yüzölçümünü kaplıyorsa, sonuç yine de yüzde yüz değil yüzde yüze yakın olarak açıklanır. Çünkü ne kadar iyi inceleme yapılırsa yapılsın, bölgelerde gözden kaçmış deneklerin bulunma olasığı gözardı edilemez. Bu nedenle deneysel sonuçlar hiçbir zaman yüzde yüz gerçek olamaz, verinin niteliğine bağlı olarak yüzde yüze yakın ve daha uzak bir değer olabilir.

Tümevarım yöntemi ile elde edilen deneysel bilgiler, kesin bilgiler olmaktan uzaktır. Gözlem sonuçları, insana bağlı ve cihaza bağlı hatalar içerirler. Her gözlemcinin aynı değerleri okuması (tekrarlılık) beklenemez. Her cihaz aynı duyarlığa sahip olamaz (duyarlık). Her cihaz aynı kalibrasyona sahip olamaz (kayma) (bias) (gerçekten uzaklaşma), Renk körlüğü olan bir gözlemci, gözlediği kuşların renklerini farklı olarak bildirebilir. Deneysel koşullar, her zaman eşit olarak tekrarlanamaz. Bu nedenlerle, deneyden başlanarak elde edilen bilgiler, üzerlerinde hata payı olan bilgilerdir.

Bu bilgiler, tümevarımsal yöntemin verdiği sonuçların daima belirli bir hata payı içereceğini belirtir. Tümdengelimsel yöntemle, elde edilen sonuçlar, yüzde yüz kesin olurken, tümevarımsal yöntemle alınan sonuçların hiçbir zaman yüzde yüz doğruluğu garanti edilemez. Belirli bir hata payı her zaman kalacaktır.

Tümdengelimsel (dedüktif) yöntem, sanal bir yöntemdir. Bu yöntemle alınan sonuçların dış dünyaya uygunluğu garanti değildir. Oysa, verilerinde kadar hata payı olursa olsun, tümevarımsal (indüktif) yöntem daima dış dünya ile uyumlu sonuçlar sağlar.

Tümdengelimsel yöntemde öncüllerin doğruluğu veya yanlışlığı düşünülürken, tümevarımsal yöntemde, öncüllerin güçlülüğü veya güçsüzlüğü tartışılır. Güçlü (doğruluk olasılığı yüksek) öncüller doğruluk olasılığı yüksek sonuçların oluşmasını sağlar.

Tümevarımsal bilgiler, yüzde yüzden başlanarak gideren azalan gerçek olma olasılığı bilgisi ile birlikte açıklanırlar. Bazen, doğruluk payı daha yüksek olan, yani daha gerçekçi olan bilgiler bulunmadığında, insanların üzerinde yüzde altmışa kadar azalabilen düşük doğruluk payı olan bilgilere dayanarak bile hareket ettikleri görülmüştür.

Tümevarımsal çalışma yöntemini ve tümevarımsal verielerin değerini ilk olarak Thales başlatmıştır. İlk sistematik tümevarımsal çalışmayı Aristoteles, Midilli adasının kıyılarındaki balık türlerini inceleyip yayınlayarak yapmıştır.

Tümevarımsal bilgilenme, deneysel metodu kabul etmeyen klasik tümdengelimsel görüşe karşı, doğal bilimcilerin ileri sürdüğü bilgilenme şeklidir ve karanlık çağlardan aydınlanma dönemine geçişte başlıca dayanak olmuştur. İleri götürülen bir şüphecilik, insanların hiçbir bilgiye ulaşamayacakları sonucuna götürür. Bu konuda en önemli bir örnek olarak Gazalî'nin düşmüş olduğu aşırı şüphecilik açmazı yüzünden gerçek dünyaya kapanması ve aşırı mistisizme düşmüş olması, kendisi ile birlikte islam düşünüşünü de olumsuz olarak etkilemesi gösterilebilir. Oysa, yaşadığımız dünyada gerçek nesnelerin incelenerek, özelliklerinin ve birbirleri ile ilişkilerinin belirlenmesine gereksinim vardır. Hume, sonuçları tam güvenilir olmasa bile, tümevarımsal yönteme güvenmek gereğini belirtmiştir.

Matematiksel Tümevarım (Matematik İndüksiyon), sadece adı tümevarım olan bir tümdengelim yöntemidir. Tümevarımsal (indüktif) yöntemle bir ilgisi yoktur. Bir topluluktaki elemanlardan birinin özelliğinin, tüm topluluk elemanlarına uygulanıp uygulanamayacağının, tümdengelimsel (dedüktif) incelemesidir.

Deneysel sonuçların düzenlenmei ve doğru deneysel bilgilere erişilmesi yöntemlerini inceleyen istatistik yöntemler, tümevarımsal değil, tümdengelimsel matematik yöntemlerdir.

Matematik, yüzde yüz kesin sonuçlar sağladığı için sadece tümdengelimsel yöntemi uygular. Hiçbir şekilde tümevarımsal (deneysel) bilgi kullanılmaz. Bu çalışma çerçevesinde de salt tümdengelimsel yöntemler gözönüne alınmıştır.

1.2.4.3 - Bilimsel Yöntem

Bilgilenme (inferans) temel olarak iki türde olabilir. Birisi başlangıçtan sonuca doğru gelişen tümdengelimsel (dedüktif) yöntem, diğeri de gözlemlerin listelenmesinden ibaret olan, deneyden açıklamaya olarak tanımlanan tümevarımsal (indüktif) yöntemdir.

Doğanın işleyiş koşullarının açığa çıkarılmasında, her iki yöntem de yetersiz kalmaktadır. Dedüktif yöntem, doğa ile ilgelenmemekte, yaptığı çalışma, zihinsel jimnastikten öte bir anlam taşımamaktadır. İndüktif çalışma ise, hiçbir mental aktivite içermemekte ve sonucu olan basit listeleme, son derece karmaşık olaylar olan doğal yaşamın mekanizmalarının açıklanmasında, tam anlamı ile yetersiz kalmaktadır.

Oysa matematiğin işlevlerinden birisi doğanın gizemlerinin açığa çıkarılmasıdır. Bu amaca uygun yöntemler geliştirilmesi gerekmektedir. "Bilimsel Yöntem", bu amacı sağlayabilmek amacı ile geliştirilmiştir.

Doğanın gözlenmesini ilk öneren düşünür, M.Ö VII inci yüzyılda Thales olmuştur. Bunu M.Ö IV üncü yüzyılda Aritoteles izlemiş ve indüktif metodu tanımlayıp ilk uygulayıcılarından birisi olmuştur.

Tümdengelimsel mantığın yeni bir bilgi üretmediği sadece öncüllerdeki bilgileri, yeni bir yorum ile sunduğunu ilk olarak

İbni-Sina belirtmiştir. İbni-Sina yeni bir mantık yorumu (geçici modal mantık) yaparak mantık yolu ile yeni bilgiler elde edilebilme yönteminin (Bilimsel Yöntemin) yolunu açmıştır.

İbni-Sina'nın (Avicenna) düşünceleri, birçok doğulu düşünürü etkilemiş, özellikle Endülüs (Andalusia) lı düşünür İbni-Rüşt tarafından Avrupaya taşınmıştır. Ibni-Rüşt (Averroes), Avrupaya hem İbni-Sina'yı, hem de Avruplara gerçek düşünceleri kilise tarafından unutturulmuş Aristoteles'i yeniden tanıtmıştır. Bu yeni düşüncelerden etkilenen Francis Bacon (1561 - 1626) "Novum Organum" (Yeni Organon) kitabı ile bilimsel yöntemin yolunu açmıştır. Onu, bir diğer ünlü düşünür Hume (1711 - 1776) izlemiştir. Bu gelişmelerle, Immanuel Kant (1724 – 1804) gibi çok sayıda düşünür katkı yapmışlar ve insanlığı aydın lanma yolunda ilerleten eserler vermişlerdir.

Bilimsel metot, tek başına farklı bir yöntem değil, tümevarım ve tümdengelimin birlikte uygulandığı sistematik bir çalışmadır. İlk olarak gözlemler yapılır ve gözlemlerden alınmış olan bilgiler, istatistik yöntemlerden yararlanılarak düzenlenir. Bu düzenli gözlemlerden yararlanılarak, matematik bilgilerin uygulanması ile bir sanı (matematik model) oluşturulur. Bu sanı, kontrollü deneyler yardımı ile denenerek, gerekirse deneysel değerler de katılarak bir deneysel-tümdengelimsel, (ampiriyo-dedüktif) matematik model geliştirilir. Bu şekilde incelenen doğa olayının davranış biçimi belirlenir ve gelecekte çeşitli durumlardaki davranışı üzerinde öngörüler oluşturulur. Bu yöntem, aslında "Uygulamalı Matematik" yöntemidir ve başta astronomi olmak üzere, birçok bilim dalında uygulanması yapılmıştır. Özellikle İbni Haytam (Al-Hazen)'in kontrollü optik deneyleri bu yöntemin ilk uygulamalarından biri olarak bilinmektedir. Yine de bu yöntemin düzenli çalışma şekli, ancak çok sonraları 1887 de Charles Sanders Peirce (okunuşu : Pörs) tarafından sistematik bir hale dönüştürülebilecektir.

1.2.4.4 - Modern Düşünceler

Yirminci yüzyılın filosofu olarak tanımlanmış olan Karl Popper 1930 larda, bilgi edinme yöntemlerinin göründüklerinden daha karmaşık olduklarını, tümevarımın aslında var olmadığını, gerek tümdengelim gerekse tümevarımın aslında aynı akıl yürütme yöntemi olduğunu ileri sürmüştür. Bu görüşe "Eleştirsel Rasyonalizm" adı verilmektedir.

Bir diğer ilginç görüş, Avusturya doğumlu çağdaş düşünür Paul Karl Feyerabend (1924 -1994) tarafından ileri sürülmüştür. Bu görüşe göre bilimsel yöntem için bir kısıtlayıcı akış şemasının ortaya konulması, bilimi sınırlayacaktır. Bu konuda en uygun tutum, "Herşey geçsin" olmalıdır. Feyerabend bu düşüncelerle, "Epistemolojik Anarşist" olarak nitelendirilmiştir.

1.2.5 - Aksiyom

1.2.5.1 - Aksiyomların Tanımı

Aksiyomlar, kanıtlanmaları gerekli olmayan, ön kabul olarak belirtilen başlangıç bilgileridir. Bu bilgilere "Betik", "Hipotez", "Postulatum" adları da verilmektedir. Aksiyom sözcüğü, antik Grekçe, değerli, ağır, uygun anlamına gelen *αξιος* (axios) sözcüğünden türer. Betik sözcüğü, eski Türkçe bilgi, belge sözcüklerine dayanarak oluşturulmuştur.

Aksiyomlar, birbirlerinden bağımsız olmalı, başka aksiyomlar- dan çıkarılmamalıdır. Aksiyomlar başka aksiyomlardan yararlanılarak kanıtlanamamalıdır. Aksiyomların kanıtlanma gereği bulunmamaktadır. Aksiyom olarak ileri sürülen bilgiler, bir çeşit inanç gibi kabul edilmelidir. Günümüzde, aksiyomlar için daha esnek bir tanım kabul edilmiş, belirtilmiş olan her bağımsız ön kabulün aksiyom olarak nitelendirilebilmesine olanak tanınmıştır.

Aksiyomlar, tanımlandıktan sonra, birbirleri ile ilişkilerinden yararlanılarak, çıkarımlar (dedüksiyon) yapılarak daha geniş düşünce sistemleri oluşturulabilir. Bir düşünce sisteminin dayandığı aksiyomlardan birisi yanlışsa, o düşünce sistemi de çökmüş olur.

Aksiyomlar, akıl yürütmenin başlangıç noktalarıdır. Klasik tanımı, öyle açık ve bir başlangıç noktasıdır ki, doğruluğu tartışmasız ve çelişki yaratmadan kabul edilebilir.

Burada önemli olan nokta, klasik düşüncede aksiyomların kanıtlanmalarının gerekli olmamasıdır. Gerçekten aksiyom olarak belirtilecek savların doğrulukları o derece açık olmalıdır ki kanıtlanmalarına gereksinme olmayacaktır.

Modern düşüncede ise, aksiyomlar sadece başlangıç noktalarıdır ve kanıtlanmalarının gereği yoktur. Modern düşüncede aksiyomların doğruluğu aranmaz, aksiyom olarak kabul edildiğinin belirtilmesi yeterlidir.

Modern düşüncede, aksiyomlar, belirli kurallara göre belirlenmiş kabullerdir. Bu kabullerden başlanarak, kuralları belirlenmiş akıl yürütme yöntemleri kullanılarak, yeni kabul edilebilir sonuçlar çıkarılır. Kurallar, formal sistemleri yani özellikleri formüle edilebilir sistemleri tanımlarlar. Yine modern düşünceye göre, aksiyom, hipotez, postulatum arasında fark yoktur.

Aksiyomlar tutarlı (sound) olmalıdır, yani bir aksiyomdan çelişkili bir düşünce (contradiction) oluşmamalıdır. Ayrıca, aksiyomlar birbirinden bağımsız (non-redundant) olmalı, yani bir aksiyomdan akıl yürütme yolu ile oluşturulmuş olan bir sonuç, aksiyom olarak ileri sürülmemelidir.

Formalist programlar, yani belirli aksiyomlar alıp bunlara dayanarak, belirli formüller geliştirilip bir sistem oluşturulması, matematikçilerin çalıştıkları konulardan biridir. Frege, Alfred North Whitehead ve Lord Bertrand Russel en son olarak Hilbert, matematiği belirli aksiyomlara dayanan formüllerle açıklanabilen ve çelişkilerin giderildiği formalist görüş açısını ileri sürmüştür. Bu görüş, Kurt Gödel'in "Eksiklik Kuramı" nedeni ile tam olarak başarıya ulaşamamış, fakat matematiğin belirli mantık kuralları ve formüllerle açıklanmasında büyük ilerleme kaydedilmiştir.

Aksiyomlardan akıl yürütme ile teoremler oluşturulur. Thales'den beri oluşturulan her teoremin, inandırıcı yöntemlerle kanıtlanması gerektiği kabul edilmiştir.

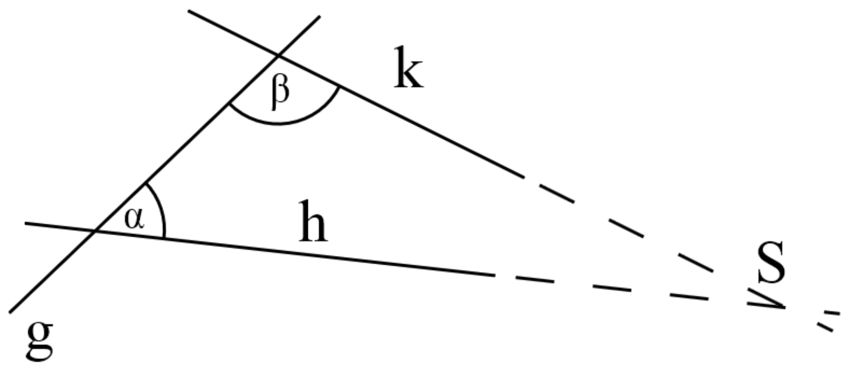
1.2.5.2 - Euclides Postulatumları

Euclides'in "Elementler" olarak tanınmış olan "*Στοιχεια*" (okuşu: Stoikeya) adlı koleksiyonu, yaklaşık olarak M.Ö. 300 yıllarında İskenderiye'de yazılmıştır. Bu koleksiyon, hem geometri, hem de cebir konularının işlendiği 13 kitaptan oluşmaktadır. Bu eserde, Euclides'in kendinden önce bilinen bilgileri de içeren mantıksal yaklaşımı, mantığın matematiğe uygulanması, küçük bir aksiyom kümesinden derin sonuçlar çıkarması, tüm eserinde hissedilen tutarlılık, 2000 yıl süresince bu kitabın ders kitabı olarak okutulmasına ve birçok kişinin etkilenmesine neden olmuştur. Bu kitabın mantıksal aksiyomatik yaklaşımı ve güçlü kanıtlama sistemi, matematiğin köşetaşlarından biri olarak hala geçerli olmasının nedenidir. Günümüzde, Clarke üniversitesinden Prof. David E. Joyce, Internet ortamında bu kitabı yeniden okurlara sunmaktadır.

Euclides'in Elementleri 10 aksiyomdan başlamaktadır. Bunlardan ilk 5 tanesini "Postulatum" geri kalan 5'ine ise, aksiyom adını vermiştir. Postulatum olarak adlandırılan ilk 5 aksiyom aşağıda görülmektedir.

- 1 - Bir noktadan, herhangi başka bir noktaya düz bir çizgi çizilebilir.
- 2 - Bir doğru parçasını, her iki ucundan da istediği kadar genişletilebilir.
- 3 - Herhangibir çap veya yarıçapta bir çember çizilebilir.
- 4 - Her dik açı birbirine eşittir.
- 5 - (Paralel postulatum) Eğer bir doğru, iki tane doğruyu keser ve aynı taraftaki kesme açılarının toplamı, 2 dik açının toplamından az olursa, bu iki doğru, eğer sonsuz uzatılırsa, kesme açılarının toplamının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.

Paralel postulatum olarak da adlandırılan 5 inci postulatum, aşağıdaki şekilde görülebilir. (kaynak: wikipaedia)

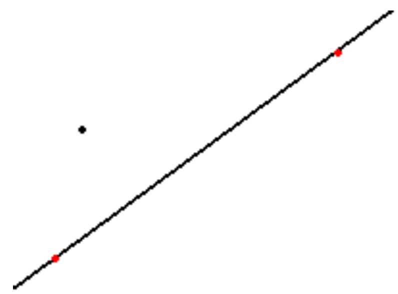


Bu şekilden de görülebildiği gibi, h ve k doğruları, g doğrusu ile α ve β açıları ile kesilmektedir.
Burada, $\alpha = 50^o$, $\beta = 110^o$, $\alpha + \beta = 110 + 50 = 160^o$ dolayısı ile $(\alpha + \beta) < (90 \text{ x } 2 = 180^o)$ dir. Bu durumda, $(\alpha + \beta) < (180^o)$ olduğundan, h ve k eğrileri yeterince uzatıldığında , 5 inci postulatum'a göre, α ve β açılarının bulunduğu tarafta kesişmeleri gerekir. Bunun gerçekleştiği, doğruların S noktasında kesişmesi ile belirlenir.

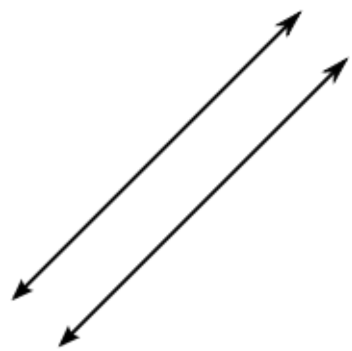
Tarih boyunca, paralel postulatum zor anlaşılır olduğundan eşdeğer ifadeler oluşturulmaya çalışılmıştır. Bunlardan en ünlüsü, 1795 de İskoç matematikçi, John Playfair'in ileri sürdüğü Playfair aksiyomu'dur. Playfair aksiyomu,

Bir düzlemde, bir doğru ve onun üzerinde olmayan bir nokta tanımlanırsa, bu noktadan o doğruya sadece bir tek paralel çizilebilir

olarak ifade edilmiştir. Playfair aksiyomu, aşağıdaki şekilde görüntülenebilir:



Playfair aksiyomunun mantıksal sonucu aşağıdaki gibi görün-tülenebilir:



Şekillerden de görüldüğü gibi bir doğruya belirli ve doğru içinde olmayan bir noktadan sadece bir tek parelel çizilebilmektedir.

Playfair postulatumu Euclides’in paralel postulatı ile aynı söylemi içermez, yine de matematik mantık açısından, eğer paralel olarak kesişmeyen doğrular amaçlanırsa, Euclides’in paralel postulatı ile eşdeğer olarak değerlendirilmiştir. Playfair postulatı, okul çağındaki öğrencilere, anlaşılması zor olan Euclides’in söylemi yanında, daha kolay anlaşılır bir ifade şekli getirmiştir. Bizim lisedede de (GSL) Euclides’in paralel postu-latını doğrudan vermek yerine daha kolay anlaşılabilen Playfair postulatı verilmişti.

Euclides' in paralel postulatının söylemi, daha bir çok şekilde belirtilmiştir. Bunların bilinmesi yararlı olacaktır.

- 1 - Bir doğruya, dış bir noktadan, sadece bir tek paralel çizilebilir. (Playfair Aksiyomu)
- 2 - Her üçgenin iç açılarının toplamı 180^o dir. (üçgen postulatumu)
- 3 - Açılarının toplamı 180^o olan bir üçgen vardır.
- 4 - Her üçgenin açılarının toplamı aynıdır.
- 5 - Bir çift benzer (similar) fakat eşit (congruent) olmayan üçgen vardır.
- 6 - Her üçgen bir çember içine alınabilir.
- 7 - Eğer bir dörgenin üç açısı da dik açı ise, dördüncüsü de dik açıdır.
- 8 - Tüm açıları dik açı olan bir dörtgen vardır.
- 9 - Birbirleri ile sabit aralıkta olan iki doğru vardır.
- 10 - Bir üçüncüsü ile paralel olan iki doğru, birbirleri ile de paraleldir.
- 11 - Bir dik üçgende, hipotenüsün karesi, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir. (Pythagoras teoremi)
- 12 - Bir üçgenin alanının üst sınırı yoktur. (Wallis aksiyomu)
- 13 - Hayyam-Saccheri dörtgeninin tepe açıları 90^o dir.
- 14 - Bir doğru, kendisi ile aynı düzlemde olan birbirine paralel iki doğrudan birini keserse, diğerini de keser. (Procklus aksiyomu) (M.S. 412-485)

Buradaki amacımız, hem aksiyomların örneklerini görmek ve nasıl matematik mantık kuralları içinde bir aksiyomun söyleminin, aynı aksiyomun bir başka söylemi ile eşdeğer olabileceğinin örneklerini incelemektir. Gerçekten, söylemler görünüşte birbirlerinden farklı bile olsalar, yine de eşdeğer olarak aynı olayı belirtmektedirler. Bütün bu eşdeğerliklerin, Euclides geometrisi için geçerli olduğunu da ekleyelim.

Aksiyomların birbirlerinden farklı olmaları gerekir. Euclides'in ilk beş aksiyomu arasındaki 5 inci aksiyom olan paralel postulat'ın, ilk dört postulat'tan çıkarılabileceğini düşünen çok matematikçi çıkmış, hiçbiri de başarılı kanıtlar sunamamışlardır. Bunlar arasında, Proclus, İbn-al-Haytam (Alhazen), Ömer Hayyam, Saccheri, Nasreddin Tusî, oğlu Sadreddin Tusî, Johann Lambert, Lobachevski, Gauss, Bolyai, Riemann, Poincaré de bulunmaktadır. Bu çalışmalar Riemann ile birlikte hipergeometrik sistemlerin oluşturulmalarını sağlayacak, fakat paralel postulatum'un ilk dört postulatum dan başlanarak çıkartılabileceği kanıtını sağlayamayacaktır. Sonuçta, 1868 de Eugenio Beltrami paralel postulatumun ilk dört postulatumlardan bağımsız olduğunu kanıtlamıştır. Schopenhauer, paralel postulatum'un diğerlerinden çıkarılmadığını, algılama ile kendi kendisini doğruladığını belirtmiştir.

1.2.6 - Mantığa Giriş

1.2.6.1 - Terim

Terim bir dilin en küçük anlamlı sözcüğüdür. Örnek olarak "Mavi" bir terimdir, fakat "ile" bir terim değildir, çünkü bir anlamı değil bir bağlacı belirtmektedir. Terimler çok anlamlı olabilirler ve mutlak kesinlik gerektiren matematik mantıkta zorunlu olarak kullanıldıklarından, matematik mantığın en büyük handikaplarından biri olarak kabul edilirler. Örnek olarak yaz terimi, hem yazmak eyleminin emir kipidir, hem de yaz mevsimini belirtir. Bunlardan hangisinin amaçlandığı ancak tümcenin söyleminden anlaşılabilir. Bu tür çok anlamlılık, matematik mantık için kabul edilebilir bir şey değildir, ama matematik için yeni bir dil oluşturulmadıkça gündelik konuşma dilinin bu tür çok anlamlılıklarından kurtulma olasılığı yoktur.

1.2.6.2 - Önerme

Önerme (proposition) bir bildirimdir. Bilgilerin açıklanmasıdır. Sembolik mantıkta her önermenin sonucu ancak ve ancak "Doğru" (True) (T) veya "Yanlış" (False) (F) olabilir. Bazı bilgisayar programlarında, doğru (T) veya (1) , yanlış (F) veya (0) olarak belirtilebilmektedir.

Tek terim ile bir önerme oluşturulamaz. Örnek olarak "mavi" bir terimdir fakat bir önerme değildir çünkü, hiçbirşey belirtmemektedir. Bir önerme ancak iki veya daha çok terimden oluşabilir. Örnek olarak, "Gömleğimin rengi mavidir" tümcesi bir önermedir. Bu önerme, birinin üstünde görülen gömleğin renginin mavi olduğunu belirtmektedir.

Bu önerme "Doğru" veya "Yanlış" olabilir. Buna önermeninin doğruluk değeri denilir. İki değerli mantıkta (matematik mantık da bu sınıfa dahildir), "Üçüncü Olasılığın Gözardı Edilmesi" (Tertium Non Datur) prensibine göre, önermelerin doğruluk değeri ya "Doğru" ya da "Yanlış" olabilir, "Belki" gibi "Olabilir" gibi değerler kabul edilmez.

Bir önermenin doğruluk değerinin saptanması, mantığın işlevlerinden biri değildir. Bir önermenin doğruluk değeri, içeriğinden bağımsız olarak, gözlem, mantıksal irdeleme (bugüne kadar elde dilmiş bilgilerle uyumunun incelenmesi) veya ilgili bilim dalının verilerine göre saptanır.

Bir önermenin doğruluk değeri, önermenin içeriğinden bağımsız olarak, gözlem, mantıksal veya ilgili bilim dalının verilerine göre saptanabilmelidir.

Bir önermenin doğruluk değeri, önermenin içeriğinden bağımsız olarak, gözlem, mantıksal veya ilgili bilim dalının verilerine göre saptanamıyor ve doğruluk değerinin belirlenmesi, sadece önermenin belirttiği ile sınırlı kalıyorsa, bu tip önermelere Nasreddin Tusî'nin değerlendirmesine göre "Kendi Kendini Doğrulayan" (Self-Referential) önermeler denilir. Kendi kendini doğrulamaya çalışan önermeler geçersiz ve yanılgı kaynağıdır. En yaygın kendi kendini doğrulamaya çalışan önerme, "Ben Yalan Söylüyorum" şeklindeki, yalancı paradoksudur.

Önermelerin sadece amaçladıkları bilgiyi açıklıklıkla belirtecek uzunlukta olması gerekir. Önermelerde gereksiz fazlalıklar bulunmamalıdır. 1200 yıllarında yaşamış olan de William of Ockham, "Ockham'ın Usturası" adı verilen bir prensiple bilgilerin fazlalıklardan arındırılarak olabildiğince küçültülmesi gerektiğini belirtmiştir. Einstein bunu "Bilgiler olabildiğince küçültülmeli, daha fazla değil" şeklinde açıklamıştır.

Her tümce bir önerme değildir. Örnek olarak,

- Yağmur yağıyor mu?

Tümcesi bir önerme (bildirim) değildir. Birşey bildirmemekte, sonucu "evet" veya "hayır" olacak bir olayı açıklamamakta, sadece bir soru sormaktadır.

- Bilge Kağan Ölümsüzdür.

Bu bir önerme değildir. Bir slogandır. Yanıtı herkes için farklı olabilir.

- Julius Caesar ölüdür.

Bu kesinlikle bir önermedir. Yanıtı herkes için (Doğru) dur. İnanmayanın Roma'ya kadar gidip Forum meydanını ziyaret etmesi yeterlidir.

- “Ben Buda değilim”

Bu bir bildirimdir. Söyleyen şahıs eğer gerçekten Buda ise, bu önermenin değeri “Yanlış”, değilse “Doğru” dur. Bu tip bildirimler,”yalancının paradoksu” olarak adlandırılan, önermenin doğruluğunun önermeden bağımsız olarak saptanamayacağı bildirimlerdir. Bu gibi önermelerden kaçınmak garekir.

- $2 + 2 = 4$

Bu bir önermedir ve sonucu (Doğru) dur.

- $x + 2 = 4$

Bu bir önerme değildir çünkü, x ‘in değeri belli değildir. Tümcenin doğruluğu kestirilemez.

- $x + 2 = 4$ $(0 \leq x \leq 7)$

Bu bir açık önermedir. Değişken olan x ‘in türü ve tanım aralığı bellidir. Tanım aralığındaki her x değeri için önermenin değeri “Doğru” (T) veya “Yanlış” (F) olacaktır.

Önermelerin ifadesinde karşılaşılan en büyük sorun, önermelerin gündelik dil ile açıklanması, gündelik dilin ise çok renkli, belirsiz anlamlı veya çok anlamlı olabilmesidir. Bu konu, Aristoteles'den beri düşünürleri zorlamış, bu problemin azaltılabilmesi için çeşitli öneriler geliştirilmiş, fakat hiçbiri tutmamıştır. Bunun nedeni, gündelik dilin doğal iletişim aracı olması ve yerine başka bir yöntem konulamamasıdır. Bu konuda en büyük çaba yine kullanıcılara düşmekte ve önermelerde karmaşık, belirsiz, çift anlamlı ifadeler kullanmaktan kendilerini sakınmaları gerekmektedir.

Önermelerde kullanılan dil sade olmalı ve özellikle, önerilecek şey açıkça, hiçbir yanlış anlayışa neden olmayacak şekilde ve ne belirtilmek isteniyorsa, sadece onu belirtecek şekilde düzenlenmelidir.

Birgün İstanbul' da bir araç kaldırımda yürüyen bir şahsa hafifçe çarpar ve şahış hafiçe yaralanır. Çarpan aracın plakası bulunur, fakat kullanan şöförü belirlemek olanağı bulunamaz. Bunun üzerine aracın ait olduğu şirketin sahibi yakalanır ve aracı kullanmaktan suçlanarak mahkemeye çıkarılır. Suçlanan şirket sahibi, mahkemede, aracı kendisinin değil, eski şöfürünün kullandığını belirtir ve kaza günü Niğde'de olduğunu beyan eder. Suçlayan taraf avukatlarının isteği üzerine, sanığa kaza günü Niğde'de havanın yağmurlu olup olmadığı sorulur. Sanık yağmurlu olmadığı şeklinde yanıt verir. Bunun üzerine suçlayan tarafın avukatları, sanığın kaza günü Niğde'de olmadığını, Niğde'de o gün dolu yağıp şehir merkezinde hasara neden olduğunu belirtirler. Savunma avukatları ise, "Sanık havanın yağmurlu olmadığını söylemiştir ve bu söylediği doğrudur. Eğer dolu yağıp yağmadığı sorulsa idi, gerçek ortaya çıkacaktı, sanığın aklanması gerekir" demişlerdir. Sonuçta, mahkeme sanığın suçlu veya suçsuz olduğu üzerinde bir karara varamamış ve araştırmaya devam edilmesi ara kararını vermiştir. Yanıtı amaca uygun olmayacak bir soru sorulduğundan, mahkemenin sağlıklı bir karar verememesine ve bundan dolayı kamuda gereksiz israf ve zaman kaybına neden olunmuştur.

Bu örnek, önermelerde kullanılacak ifadelerin ne denli yalın ve amacına uygun düzenlenmesi gerektiğini gözler önüne serecek niteliktedir. Önermeleri oluştururken "Acaba doğru önerme ifadesi mi kullanıyorum, yoksa kaçışı olan bir ifade kullanıp kendimi zora mı sokuyorum?" düşüncesini daima gözönünde tutmak gerekir.

Önermeler, tek önermeler halinde olabildikleri gibi, "ve", "veya", "eğer ise", "yeterli ve gerekli" gibi, mantıksal bağlaçlarla bağlanmış bileşik önermeler de oluşturulabilir. Tek önermelere, "Basit Önerme" veya "Atomik Önerme" adları da verilir. Ne kadar karmaşık olursa olsun, tüm bileşik önermeler de, aynı basit önermeler gibi, sadece "Doğru veya "Yanlış" şeklinde iki olasıklı doğruluk değeri taşıyabilirler. Bileşik önermelerin doğruluk değerleri, birleşme işlemcilerinin tanımlarından yararlanılarak oluşturulur. Bunu "Önermeler Mantığı" veya "Sembolik Mantık" konusunda inceleyeceğiz.

Önermelerin terslerinin doğruluk değerleri, önermelerin aksidir. Önermelerin terslerini oluşturken çok dikkat edilmeli ve söylenmeyen şeyleri, söylenmiş gibi kabul etmemelidir. Ayrıca, oluşturulan ters önermenin doğruluk değeri daima kontrol edilmeli ne önermenin doğruluk değerinin tersi olduğuna emin olunmalıdır. Örnek olarak, "Gece, karanlıktır" önermesinin tersi, "Gece aydın·lıktır" önermesi değildir. Önermede, sadece gecenin karanlığı belirtilmektedir. "Aydınlık" başka bir terimdir, kimse aydınlıktan söz etmemiştir. Söz konusu olan gecenin karanlık olduğunu belirten ve doğruluk değeri "Doğru" (T) olan önermedir. Bir önermenin tersinde, önerme ile aynı terimlerin kullanılması gerekir. Önermenin doğru olan tersi " Gece karanlık değildir" önermesidir ve doğruluk değeri “Yanlış” (F) olup, önermenin doğruluk değerinin tersidir.

1.2.6.3 - Sav

Birden fazla önerme içeren, önermelerden bazılarının "Öncül", en sonuncusunun "Sonuç" olarak adlandırıldığı ve sonucun doğruluk değerinin, öncüllerin doğruluk değerlerinden "Akıl Yürütme" (Çıkarım), (Dedüksiyon) ile saptanabildiği bir önerme grubuna "Sav" (Argüman) adı verilir. Savların sistematiğini belirten ilk düşünür Aristoteles olmuştur. Aristoteles' in belirlediği yöntemler zaman içinde geliştirilmelerine karşın, bugün için de geçerliklerini korumaktadırlar.

Bir sav, iki öncül ve bir sonuçtan oluşuyorsa, buna Aristoteles tarafından tanımlanmış olan “Sillojism” (Kıyas) (Tasım) adı verilir. İkiden fazla öncül içeren savlara, “Zincirleme Sav” adı verilir. İster zincirleme sav olsun, ister Aristoles Sillojismi olsun her savın sadece bir tek sonucu olur ve geçerli bir savın sonucunun doğruluk değeri öncüllerin doğruluk değerlerinden çıkarılır.

Savlar “Galatasaray Fenerbahçeyi yener!” şeklinde dayanaksız varsayımlar değildir. Dayanaksız varsayımlar, boş ve inandırıcılığı olmayan iddialardır. Savlar ise, öncülleri, dayanakları ve sonucu olan, mantık kurallarına uygun yapılanmalardır. Örnek olarak, çok tanınan bir sillojism,

- Tüm insanlar ölümlüdür.
- Sokrates bir insandır.

\-------------------------

- (demek ki) (dolayısı ile) (bu nedenle) Sokrates ölümlüdür.

Bir savdır, çünkü öncülleri sonucun doğruluğuna dayanak sağlamakta ve olayı belirtmektedir. Sonucun doğruluğu da, öncüllerin doğruluğundan çıkarılmaktadır. Bu sav tümdengelimsel bir çıkarımdır. Öncüller bilinen bilgilerdir. Tek yapılan şey bilinen öncüller arasında yeni bir ilişkinin açığa çıkarılmasıdır. Bir sillojis m'de öncüller doğru oldukça sonucun yanlış olması olanağı yoktur. Tümdengelimsel öncüller, yüzde yüz doğru olduklarından, tümdengelimsel bir savın sonucu da yüzde yüz doğru olur. Matematik bu nedenle salt tümdengelimsel savları kullanır.

Bu savın öncülleri, (Tüm insanlar ölümlüdür) ve (Sokrates bir insandır) önermeleri, sonuç ise (Sokrates ölümlüdür) önermesidir. Öncüller ve sonuç arasında bir çizgi ve (dolayısı ile) (demek ki) (bu nedenle) şeklinde bir açıklama bulunmaktadır. Savların yazımına kolaylık olması için (demek ki, dolayısı ile) (bu nedenle) anlamında, alt alta yazımda ∴ sembolü, yanyana yazımda ⊢ (Turnike) sembolü kullanılır. Bu şekilde, yukarıdaki örnek,

- Tüm insanlar ölümlüdür.
- Sokrates bir insandır.

- /∴ Sokrates ölümlüdür.

şeklinde yazılabilir. Aynı satıra yazıldığında (sıralı yazım),

Tüm insanlar ölümlüdür, Sokrates bir insandır ⊢ Sokrates ölümlüdür.

şeklinde yazılacaktır.

Semboller aklımızı karıştırmasın. Bunlar sadece kullanıcılara yardımcı olmak amacı ile oluşturulmuşlardır. Sembollerin özümsenmesi için, bunlarla bol sayıda alıştıma yapmak ve yüksek sesle anlamlarını okumak gerekir. Yeterince tekrarlandığında, bizim için kullanımları, gündelik yaşamda sık kullanılan araçlar gibi alışılmış olacaktır.

Aristoteles, bir savın geçerliğinin söylemine değil, yapısaına bağlı olduğunu belirtmiştir. Bir savın yapısı, önerme terimlerine büyük harf semboller atanarak yapılır. Yukarıdaki örneğin yapısı,

Tüm insanlar = A , ölümlüdür = B , Sokrates = C simgeleri ile belirtilerek yazılabilir. Bu şekilde, klasik bir sillojism yapısı,

- $A \longrightarrow B$
- $C \longrightarrow A$

- $/\therefore C \longrightarrow B$

olarak belirlenebilir. Bu bir sav yapısıdır, sanal bir yapılanmadır ve hiçbir söylemi yoktur. Bu yapı aynen bir Java sınıf yapısı gibi, örneklerinin yapılarının belirlenmesi için oluşturulmuş bir yapılanma şablonudur
.
Mantıkta, bir sav yıplanmasının geçerli olması için, örneklerinin geçerli olması gerektiği kabul edilir. Geçerli bir yapı örneğinde, öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu gerektirir. Geçerli bir mantıksal yapı örneğinin öncüllerinin doğruluğu, sonucun doğruluğunu kesinkes sağlar. Bir sav yapısının örneklerinden birisinde, öncülleri doğru olamalrına karşın, sonuç yanlış olursa bu bir karşıt örnek (counterexample) olarak kabul edilir ve bu karşıt örneğin yaratıldığı sav yapısı geçersiz kabul edilir.

Sillojistik bir sav yapısını belirledikten sonra bu yapıya uygun sayısız örnekler oluşturulabilir. Her bir örneğin, yapısı aynı, fakat söylemi farklı olacaktır. Örnek olarak,

- Kediler, Kedigiller (Felis Catus) türündendir.
- Yumak bir kedidir.

- /∴ Yumak bir kedigildir.

Bu örneğin, öncüllerinin doğruluğu sonucun doğruluğunu gerektirir. Dolayısı ile örnek geçerlidir. Örnek geçerli olduğundan örneğin yapısı da geçerlidir.

Bir sav yapısının geçerli olup olmadığı, sadece bu sav yapısının örneklerinin geçerli olması ile belirlenir. Bir sav yapısının geçerli olup olmadığının anlaşılması için sadece o yapının örnekleri oluşturulur ve örneklerin geçerli olup olmadığına bakılır. Karşıt örneği bulunamamış olan her sav yapısı geçerli olarak kabul edilir.

Bir sav örneğinde, öncüller yanlış, sonuç da yanlış oluyorsa, o savın yapısı geçerlidir. Çünkü, bu yapının öncüllerinin yanlışlığı, yanlış sonuç oluşturuyorsa, öncülleri doğru olan örnekleri de doğru sonuç oluşturur.

Bazen, yapılanması geçerli bir savda, yanlış öncüllerden doğru bir sonuç alınabilir. Örnek:

- Tüm kediler kuyrukludur. (Doğru)
- Benek bir kedidir. (Yanlış)

- /∴ Benek kuyrukludur. (Doğru)

Benek kuyrukludur ama kocaman bir Dalmaçyalı puanterdir

(Büyük boylu, puantiye ve çok sevecen, iyi huylu bir köpek türü). Görüldüğü gibi, bazen yanlış öncüllerden doğru sonuçlar çıkabilir.

Geçerli bir savda, öncüllerin doğruluğu, sonucun doğruluğunu garanti eder. Yapısı gençerli olan bir sav örneğinde, doğru öncül-lerin yanlış sonuç oluşturması olanaksızdır. Bir savın yapısının geçerli olması, saçma sapan bir sonucu ileri sürmesini engellemez. Böylece, tutarlılık kavramına geliyoruz. Geçerli bir savın öncüllerinin doğru olması, bu savın "Tutarlı" olmasını sağlar. Tutarlı bir sav sonucunun doğruluğunu garanti eder. Tutarlılık, geçerliğinin bir düzey üstündedir. Çünkü, tutarlı savın yapısının geçerli olması yanında, tüm öncüllerinin de doğru olması gereği vardır.

Eğer, bir savın şematik yapılanması geçerli ise,

- Öncüller doğru ise sonuç kesinlikle doğrudur. (Tutarlı sav)
- Öncüllerin tümü yanlış olursa, sonuç da yanlış olur. (Bu yapıya uygun, doğru öncüllerden doğru sonuç çıkar).
- Sonuç yanlış ise, öncüllerden en az birisi yanlıştır.

Bir savda, tüm öncüller doğru, sonuç yanlışsa, o savın yapısı kesinlikle geçersizdir.

Tutarlı savlarda, öncüller daima doğrudur ve doğru öncüllerden yanlış bir sonuç çıkarmak olanaksızdır. Bu nedenle, öncüllerin yüzde yüz doğru olmasını garanti eden tümdengelim yöntemi daima tartışmaya açık olmayan kesin sonuçlar verir. Bu nedenle, matematik kesin sonuç veren tümdengelim yöntemini uygular. Bu çalışmada da sadece tümdengelim yöntemi incelenmiştir.

1.2.6.4 - Safsata

Yapısı uygun olup sonucu gerçeklere uygun olmayan her sav, "safsata" (fallacy), "yanılgı", "mantıksızlık" , "sofizm" olarak adlandırılır. Sofizm olrak adlandırılması, "bilgisever" olarak tanılanabilecek sofizm sözcüğünün, sofistlerin, paraya, lükse, sosyal statü' ye düşükünlükleri yanında, uzun uzun hiçbir yere götürmeyen karşılıklı konuşmaları nedeni ile bilgelikten uzaklaşmaları ve "safsatacı" olarak nitelendirilmeleridir.

Matematik, daima tutarlı (yapılanması doğru, önermeleri doğru, önermelerin doğruluğunun sonucun doğruluğunu sağladığı) savlardan yararlanır. Tutarsız savlar safsatalara neden olur. Buna rağmen, safsatalar üzerinde bilgili olmak, çoğu zaman bizleri yanılgılardan koruyabilir. Mantık filosofları, hataların sonsuz olduğunu ve hataları sınıflandırma olanağı olmadığını ileri sürerler. Yine de, hatalı savların sınıflandırılması yapılmaya çalışılmıştır. Aristoteles otuza yakın safsata türü belirlemiştir.

Hatalı savlar, tamel olarak iki türdür. Bunlar,

- Hatalı sözcüklerin yarattığı yanılsamalar. Yani, ne söylendiğinden kaynaklanan yanılsamalar. Bunların düzenlenmesi tam, fakat önermelerde söylenenler yanlıştır.
- Hatalı düzenlemeden dolayı yaratılan yanılsamalar. Söylenenler geçerli, fakat savın yapısı (düzenlenmesi) geçersizdir.

Aristoteles tarafından belirlenmiş safsata, yanıltma (fallacy, fellony) türlerinden bazıları aşağıda görülmektedir. Bu safsata türlerinin Latince taıtım başlıkları, günümüze ulaşmış mantık yazılarının en son Latince yazılmış olduğundandır, oysa tüm bu bilgilerin aslı Antik Grekçedir.

1.2.6.4.1 - Bilgisizlik (Argumentum Ad Ignorantum)

Bilgisizlikten kaynaklanan, safsatalar, Bunlar çok yanıltıcı sonuçlara neden olabilirler. Örnek olarak, en tanınmış tümevarım (indüksiyon) safsatası

Argumentum ad Ignorantiam, sözcük anlanımda, bilgisizliğe çağrı yapan savlar anlamını taşımaktadır. İleri sürülen savın yanlışlığını, doğru olduğu kanıtlanmamış olduğu için kabul ettirmek istenmesidir.Aynı şekilde, ileri sürülen savın doğruluğunu, yanlış olduğu kanıtlanmamış olmasından dolayı ileri sürülmesidir. Bu safsata, genel olarak çok ikna edici bir söylem eşliğinde ileri sürülür.

Bilgisizliğe çağrının iki temel makanizması vardır. Bunlar,

- p önermesi kanıtlanmamıştır.

- /∴ p önermesinin doğru olmadığı (tersi) doğrudur. (p önermesi yanlıştır).

veya

- p önermesinin yanlışlığı kanıtlanmamıştır.

- /∴ p önermesi doğrudur.

Bilgisizlikten kaynaklanan saçmalığa bir örnek,

- Hiçbir uçağın son on yılda hava savunma sistemimizi deldiği kanıtlanmamıştır.

- /∴ Hava savunma sistemimiz sağlamdır.

Bu sav eski SSCB de söylendiğinde, U-2 uçakları on yıldır ses hızını aşan hızla ve o günkü teknikle algılananamayacak yükseklikte SSCB üzerinde boydan boya geçip gözlem yapmaktaydılar. Yani kanıtlanmamış olmak gerçek olmadığını göstermez.

- Kimse Hezarfen Ahmet Çelebi'nin sürgüne gönderilmesine itiraz etmemiştir.

- /∴ Hezarfen Ahmet Çelebi'nin sürgüne gönderilmesi doğrudur.

Baş kaldıranın başı giderse, kimsede yanlışı söyleme cesareti kalmaz. İtiraz yokluğu, kararın doğru olduğunun göstergesi değildir.

Bazı durumlarlarda, bilerek Ad Ignorantum yöntemine başvurulur. Örnek olarak, "Bir suçlananın suçu kanıtlanamazsa, onun suçlu olduğuna karar verilemez" bu bir hukuk kuralıdır ve pratik bir uygulamadır. Mantıkla ilgisi yoktur. Yani, suçu kanıtlanamamış birisi, gerçek suçlu olabilir.

1.2.6.4.2 - Otorite Kayması (Ad Verecundiam)

Uzmanlık alanından başka konularda sav oluşturmak. Burada ileri sürülen her sav, bir tartışmaya yaratır. Çünkü savı ileri sürenin otoritesi başka alanda olduğundan, uzmanlığı tartışmalıdır. Örnek olarak Paris 7 inci daire Üniversitesinin (Pierre et Marie Curie) çok katlı binasında kat aralarında izolasyon için asbest kullanıldığı çok sonraları belirlenmiştir. Bu işi yaptıranın üniversite içinde, dediğini yaptırabilen, ama inşaat ve sağlık konularından anlamayan bir yetkili olduğundan şüphelenilmektedir. Bu kişinin, olayın vehameti ve onarımın olanaksızlığı ortaya çıkınca kaybolduğu ve izlerini sildiği anlaşılmıştır. (Kabahat samur kürk olmuş, kimse üzerine almamış!).

Ad verecundiam tipi önermelerin öncülleri çoğunlukla deneysel bilgiler, savın türü de tümevarımsaldır (indüktif). Çünkü bir insan, bildiği konu dışında, genellikle ancak gözlemlere dayanan bilgileri ileri sürebilir.

Ad veracundiam, ancak gerçekten bilgisizce savların ileri sürülmesi durumunda geçerli olur. Örnek olarak, büyük bir din adamı, bir yerde su çıkacağını söylerse, otoritesinin dışına çıkmış olur ve önermesi, jeolojiden anlamayan birisinin savı ile aynı değersizliği taşır. Yine de, bazı durumlarda, insanlar, eğitim alanlarının dışında, bilgi kazandıkları konularda da araştırma yapabilirler ve bu konularda savlar ileri sürebilirler. Bu konuda dikkatli olmak ve kimseyi yeterince tanımadan dışlamamak gerekir. Örnek olarak Charles Sanders Peirce, aldığı eğitim olarak bir kimyacı idi, fakat bugün devrinin en büyük filosofu olarak değerlendirilmektedir.

1.2.6.4.3 - Kişiliği Hedef Alma (Ad Hominem)

Bu tür savlar, bir insanın özelliğinden dolayı ileri sürdüğü savların doğruluğunu belirtmeye çalışmaktır. Oysa, ne kadar saygın bile olsa, şahsiyetin, ileri sürülen savların doğruluğunu sağlayamayacağı (veya tam tersi) bilinmektedir. Örnek olarak bir Arapça atasözü (“Tüm kısa boylular fitne, tüm uzun boylular ahmaktır” demektedir. Böyle toptan kötülemelerin gerçekliği yoktur ve söyleyeni küçük düşürür.

1.2.6.4.4 - Çoğunluğa Popülist Çağrı (Ad Populum)

Bir politikacının, topluluğun hislerini ve emellerini okşayan savlar ileri sürerek, kendine politik çıkar sağlamaya çalışmasıdır. Örnek :

- Birçok insan ileri sürdüğüm düşünceleri onaylamaktadır.

- /∴ İleri sürdüğüm düşünceler doğrudur. (Aksini savunmak suçtur).

1.2.6.4.5 - Acındırma Yöntemi (Ad Misericordium)

Bir insanın yoksunluğuna daynarak, ileri sürdüğü savların doğruluğuna inandırmaya çalışmak. Örnek,

- Bu insan çok yoksuldur.

- /∴ İleri sürdüğü düşüncenin doğru olduğunu kabul edip kendisine bir iyilik yapalım.

1.2.6.4.6 - Korkutma Yöntemi (Ad Baculum)

Argumentum ad baculum. Birinsanın korkularından yararlanarak ileri sürülen savı doğru kabul etmesinin sağlanmasıdır.

Örnek,

- Kiliseye riayet etmeyeni öcüler alır.

- /∴ Herkes kiliseye riayet etmelidir.

Bir başka örnek,

- Rasat yapmak, Tanrının işine karışmaktır.
- Tanrı işine karışıldığı şehri cezalandırır.

- /∴ Rasat yapmak şeamet getirir. (Rasathaneyi yıkalım!) (1580 lerde Istanbul Rasathanesinin dramatik yıkılışı).

Bir başka örnek,

- Kim ki okur Farisî, gider dinin yarısı.

- /∴ Kimse Farsça öğrenmesin. (ki biz de cahil kalanlar ile dolacak ülkeyi rahatça yönetelim) (Farsça bilim dili olarak kabul edilirdi, halen de öyledir). Atatürkten, Afganistan'a büyük elçi olarak gidecek olan Hikmet Bayur'a : "Gidiniz ve orada öğreneceğiniz bilimi Türkiye'ye getiriniz.")

1.2.6.4.7 - Ignoratio Elenchi

Bu bir "Non Sequitur" tipi, saçmalıktır. Genellikle non sequitur (okunuşu : non sekitur) (ilgisiz), öncüllerle sonucun ilgisinin olmadığı bir sav için söylenir. "Ignoratio Elenchi daha hafif bir non seqitur olayını belirtir. Tanımsal olarak, İgnoratio Elenchi, "bir şeyin nasıl reddedileceğininin gözardı edilmesi" olarak açıklanır ve ilk olarak Aristoteles tarafından belirtilmiştir. Bu sözcük Antik Grekçe *λεγχος* (elenchos) (elenksos) sözcüğünden türemiş ve Latinceye (elenchus) olarak geçmiştir. Bir savın sonucunun yanlışlığının, gözardı edilmesi, gözönüne alınmaması anlamında kullanılır. Örnek,

- Ben evime iki kat daha ekledim.
- İmar yasası buna izin vermiyor

- /∴ İmar yasası bunu kabul etmeli

Görüldüğü gibi tamamı ile yanlış (yasayı etkileyecek yetkimiz yok!) ve öncüllerin sonucun doğruluk değerini etkileyemediği geçersiz bir sav türü ile karşı karşıyayız.

1.2.6.4.8 - Akıl Karıştırıcı Soru

Akıl karıştırıcı soru, bir sorgulama tekniğidir. Suçlanan kişiye, doğruluk değeri "Yanlış" olan bir önerme ile karışık olarak doğruluk değeri "Doğru" olan bir önerme içeren bir sav sorulur. Suçalanan kişi, gerçekten suçlu ise, kendini temize çıkarmak için basitçe reddedemeyeceği bu sorudan kurtulmak için vereceği yanıtta, kendini ele vereceği düşünülür. Bu tür savın bir başka adı da karmaşık soru (kompleks soru) dur.

1.2.6.4.9 - Yanlış Neden

Öncüllerin, yanlışıkla sonuçlara bağlandığı durum olarak belirtilir. En az üç türü bilinmektedir.

Latincesi “Non Causa pro Causa” olarak belirtilen genel durum, burada, öncüllerin doğruluk değerleri, sonucun doğruluk değerini etkileyemez, yani “Bunun Nedeni, Bu Değildir !” Örnek,

- Bir şehirde kötütük azarsa, Tanrı o şehri yok eder.
- Hiroşima’da kötülük çoktu.

- /∴ Tanrı Hiroşimayı yerle bir etti. (Yok Artık !) (Hem genellemeler doğru değildir, hem de Japonların da dünyanın en ahlaksız insanları olduğunu ileri sürmek insafsızlıktır).

Diğer bir tür, bir olayın, başka bir olayı izlemesi nedeni ile kötülenmesidir. Buna (Post hoc, ergo prompter hoc) yani, (Birşeyden sonra, o şey nedeni ile) saçmalığı (veya yutturma- cası) dır. Örnek,

- Bunun zamanında deprem oldu,

- /∴ Bu adam uğursuzdur.

Ne kadar haksız ve kötüleme amacı ile yapılan bir yutturmaca. Doğa olaylarını insanları kötülemek için kullanmak ahlak yoksun· luğudur. Bir başka örnek,

- Rasathane kuruldu.
- Deprem oldu

- /∴ Rasat yapmak şeamet getirir.

Bunu sözleyen en büyük din yetkilisi olunca, artık söylenecek söz kalmıyor.

Bazı durumlarda, yeterli bilgi olmadığından, bir şeyin nedeni olarak, o şeyle ilgisi olduğu sanılan (ve bazen yeni araştırmalarla sonucunda ilgisi olmadığı saptanan) şeylerin neden gösterildiği olabilir. Bu gibi yanılgılardan sakınmak için, bilim adamlarının yeni bilgiler ortaya çıkarmaları veya filosofların belirli olayları daha yakından incelemeleri, dinleyenlerin de herşeye inanmamaları gerekir. Royal Society nin sloganı, "Nullius in verba" (Sözle söylenene inanmayın) yani, "sadece bilimsel dayanağı olan şeylere inanın" şeklindedir.

1.2.6.4.10 - Petitio Principii

Petitio Principii'nin (okunuşu : petisyo prinsipii) anlamı "Döngü" dür. Döngü, sonucun anlamının öncüllerle aynı olmasıdır. Yani, yeni bir çıkarım oluşturulmaz, fakat, öncüllerin daha değişmiş şekilleri sonuç olarak belirtilir. Genellikle, bu bir saçmalama türü değildir. Örnekler ve sonuç birbirlerinden ayrılmamaz ve söylenen genelde doğrudur, ama bu yanıltıcı da olabilir. Faydasız olması ise, hiç kuşkusuzdur. Dolayısı, ile faydasız şeyden kaçınmak daha iyidir. Örnek,

- İyi Frig Etnologları, Gordiyonu iyi tanır.
- ----
- /∴ Gordiyonu iyi tanıyanlar, iyi Frig etnologlarıdır.   (Belki de iyi tur rehberleridir!)

Görüldüğü gibi öncül ve sonuç arasında bir fark yok, ama sonuç olarak yeni bir şeyin ortaya konulduğu da yok. Yani, yanlış bir şey yok, ama faydalı bir şey de yok. Buna "Kendi Kuyruğunu Kovalamak" veya "Kısır Döngü" adı verildiği de olmaktadır.

1.2.6.4.11 - Uygulama Yanlışlığı

Bu tür saçmalık, özel bir durumda geçerli olan bir önermeyi, geçerli olmadığı durumlarda kullanılması ile oluşur. Çok verilen bir örnek, “On Emir” (Evamiri Aşere) de belirtilen, “Sen Öldürmeyeceksin” emridir. Bu emir geçerli olarak kabul edildiğinde, yurdu korumak için direnmek bile, bu emre karşı gelmek anlamına gelir. Bugün de çözülmemiş olarak kalmış olan bu açmaz, sonuçta, emrin tümüyle gözardı edilmesi ile sonuçlanmıştır. Çok saygıdeğer, barışçı, hümanist ve güçlü inanışları nedeni ile bu emre sıkı sıkıya bağlı olan “Quaker” tarikatı, Pensilvanya’da bir ara iktidara gelmiş, güzel işler yapmış, fakat Kızılderililer’in hücümlarını önleyemedikleri için iktidardan düşmüşlerdir.

Bu konudaki örneklerden birisi, “Aforizm” adı verilen genel sözcüklerdir. Örnek olarak, “İyilik daima iyilik getirir” bir aforizmdir. “Emek olmadan, keyif olmaz”, “Yeni gelen çorbasını içer” gibi sözcükler de, yine bu sınıfa giren “klişe” tipi sözcüklerdir. Bundan başka daha birçok slogan tipi genellemeler de yanlış olarak uygulanan önermeler arasındadır.
Uygulama yanlışlığı üzerine söylenmiş çok tanınmış sözler,

"Kuraldışılıklar, kuralları bozmaz"

“Kuraldışılıklar, kuralları kanıtlar”

sözleridir.

1.2.6.4.12 - Ters Uygulama Yanlışlığı

Bu tip saçmalılar, yeterince doğrulanma olmadan yapılmış genellemelerle görülür. "Uygulama Yanlışlığı", genelde geçerli olan bir önermenşin özele yanlış olarak uygulanması iken, bu yanlışın tersi, yani "Ters Uygulama Yanlışlığı", özelde geçerli olan bir önermenin, yanlış olarak genelleştirilmesidir. Örnek, "Bu köpeğin adamı nasıl kovaladığını gördün mü? Tüm köpekler felakettir" diyerek ağır bir haksızlığın yolu açılmış olur. Buna benzer birçok haksız genelleme örneği verilebilir. Yani, "Toptan Kötüleme" den kaçınmak gerekir.

Aristoteles, otuza yakın saçmalık türü saptamıştır. Burada ancak en çok rastlanan on iki tanesi incelenebilmiştir. Bu konuda araştırma yapmaya devam edilirse, daha başka saçmalama türleri ve daha farklı saçmalık sınıflandırmaları da bulunabilir. Buradaki incelememizin nedeni, sadece matematik savlarını kanıtlamak için uygulanan yöntemlerin doğrularının ve doğru olmayanlarının tanınması amacına yöneliktir.

Savlar üzerinde bilgilerimizin daha açık olması için, burada daha önce hiç başvurulmamış bir inceleme yöntemini uygulayabiliriz. Savları "Sunulan" ve "dinlenen" savlar olarak iki farklı yönden inceleyebiiriz.

Savları sunanlar bazen iyi amaçlı, bazen de kötü amaçlı kişiler olabilir. İyi amaçlı kişiler, matematikçiler gibi, eldeki bilgiyi arttırmak amacı ile sav oluşturan kişilerdir. İyi amaçlı kişiler tutarlı savlar oluştururlar. Bilgilerimizin artmasını sağlarlar. Bunlar iyi kişilerdir.

Savları oluşturanlar, bazen kötü amaçlı olabilirler. İnsanlar sosyal yaşama geçtikten beri kötü amaçlı savlarla karşılaşmışlardır. Kötü amaçlı savları sunanların bunu bir kazanç amacı ile yaptıkları açıktır. Kötü amaçlı savları hazırlayanlar, öncüllerin gerçek anlamlarını saklamak, değiştirmek veya açıkça yalan önermeler uydurarak amaçlarına ulaşmaya çalışırlar.

Çoğu kaynakta, kötü amaçlı savlarla karşılaşanların, öncüllerin doğruluğunu saptama görevleri olmadığı belirtilmektedir. Bu aslında tam olarak doğru değildir. Tam aksine, aldatma amaçlı savlarla karşılaşanların aldanmama görevleri vardır.

Sunulan bazı kötü amaçlı savların öncüllerinin gerçek olup olmadıkları, dinleyenler tarafından kolaylıkla saptamaz. Örnek olarak, bunlar çok gizli devlet sırları olabilirler, kolay erişilemeyecek bilgiler olabilirler, insanların uzmanı olmadıları konuları içeriyor olabilirler. Yine de, bugünün dünyasında bilgi kaynakları çok açık ve erişilebilir durumdadır. Kendilerine kandırıcı savlar sunulan insanlar, ellerinden geleni ve fazlasını yaparak, kendilerine empoze edilen bilgilerin doğruluğunu kontrol etmek ve aldanmamak zorundadırlar.

Bu konuda dikkat edilecek nokta yanılgı ve safsatların hep sosyal bilimler üzerindeki ve deneysel konulardaki savlarda ortaya çıktığıdır. Matematik için safsata savlar sözkonusu değildir. Matematiğin öncülleri doğruluğu kanıtlanmış teoremlerdir. Sonuçların doğruluğu da savların geçerli yapısı gereği daima öncüllerin doğruluğuna bağlı olduğundan yanılgı söz konusu olamaz.

Matematik konusunda sonuçların doğruluğu konusunda değil, sonuçların yeni bir bilgi sağlayıp sağlamadığı konusu tartışılmaktadır. Belirli bir aksiyomatik sistemde, eğer dışarıdan bilgi gelmiyorsa -ki bu deneysel verilerin kabul edllmemesi nedeni iledir- sadece aksiyomların sağladığı bilgilerin, yeni bir görüş açısı ile ilşkilerinin belirlenmesi sonunda bilgi üretilebilir, bu da aksiyomların sağladığı bilgilere bir katkı değil sadece bu bilgilerin yeni bir göüş açısından değerlendirilerek genişletilmesidir. Bu konu filosolarça geniş ölçüde tartışılmış ve halen de tartışılmaya devam edilmektedir. Yine de, yeni bakış açılarının uygulanması ile matematik doğanın daha iyi anlaşılmasına vazgeçilmez bir katkı sağlamaktadır.

1.2.7 - Matematikte Evrensel Gerçek

Matematikte bilgiler, tümdengelim (dedüksiyon) yöntemi ile gelişir. Deneye itibar edilmez. Aksiyomlar, mantıksal yöntemlerle incelenir aralarındaki ilişkiler belirlenir ve bir sav ortaya çıkarılır. Bu sav, kanıtlanmadıkça ileri sürülen bir sanı olarak nitelendirilir.

Kanıtlanamamış sanılar örneklerle denenerek geçerli olup olmadıkları saptanmaya çalışılır. Eğer, ileri sürülen savın bir örnekte verdiği sonuç başarısız olursa buna “Çelişkili Sonuç” adı verilir ve sanının geçerli olmadığı kanısına varılır. Çelişkili sonuç vermeyen, fakat kanıtlanmaları olanağı da bulunamayan sanılar, sürekli denenmeye devam edilerek, çelişkili sonuç verip vermedikleri araştırılır. Bir sanı, hiçbir çelişkili sonuç vermemiş bile olsa, yine de evrensal gerçek olarak nitelendirilemez ve sanı olarak kaldığı belirtilir. Bunun nedeni, matematikte deneye itibar edilmediğindendir. Bir sanı, mantıksal olarak herkesin kabul edebileceği, hiçbir karşı çıkmanın olamayacağı şekilde kanıtlanamazsa, sanı olarak kalır ve hiçbir zaman “evrensel gerçek” niteliği kazanamaz.

“Matematik Evrensel Gerçek” ve “Bilimsel Evrensel Gerçek” arasında fark vardır. Matematik, sadece aksiyomlar ile belirlenmiş bir evrende geçerli olan sanıların akıl yürütme ile kanıtlanmış olanlarına “Teorem” adı vererek evrensel gerçek olarak nitelendirmektedir. Matematiğin evrensel gerçeği, sadece aksiyomlarla tanımlanmış ve sınırları çizilmiş bir sanal evrende geçerli bilgilerdir. Bilimsel evrensel gerçek ise, bilimsel yöntemle geliştirilip, doğaya uygunluğu saptanmış, gerçek dünyada geçerli bilgiler olarak tanımlanmaktadır.

Eğer bir kuram, kanıtlanamıyor fakat bunun tersi de deneysel olarak ortaya çıkarılamıyorsa, bu bir sanı (könjektür) dür. Konjektürler, kanıtlanmayı bekliyen teoremlerdir. Bunlardan en ünlüsü, Fermat konjektürüdür. 1637 de Pierre de Fermat 2 den büyük herhangi a, b, ve c gibi üç pozitif tamsayının $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayamayacağını belirtmiş, kanıtı çok geniş olduğu için yazmış olduğu Diophantus’un “Arithmetika” sının marjına sığmadığını belirtmiştir. Yine de, kanıtın elinde olduğu bugün için çok olası görünmemektedir. Bu konjektür, tam 365 yıl, matematikçileri uğraştırmış, ne kanıtlanabilmiş ne de aksini belirten bir sonuç bulunabilmiştir. Sayısal bilgisayarların pratik olarak kullanıma girdiği 1960 lardan beri, bilgisayarların bu konuda büyük ölçüde kullanılması bile bu konjektürün aksini veren bir sonuç sağlamamıştır. Sonunda, 1994 yılında, İngiliz matematikçisi Andew Wiles , Evariste Galois’nın eliptik eğri gösterimlerini kullanarak bu konjektürü kanıtlamıştır. “Fermat ‘ın son teoremi” olarak da tanınan bu konjektür, bugün Sir unvanı verilen İngiliz matematikçi Andrew Wiles sayesinde, konjektür olmaktan çıkıp, gerçekten Fermat’ın son teoremi haline gelmiştir. Genç yaşında düello’da öldürülen Galois’nın bu çalışmadaki katkısı, kaybının üzüntüsünü yeniden yaşatmıştır.

1742 de Alman matematikçi Christian Goldbach, Leonhardt Euler'e bir mektup göndererek, 2 den büyük her çift tamsayının iki asal sayının toplamı olarak gösterilebileceğini belirtir. Asal sayılar 1 den büyük ve sadece 1 ile kendilerine bölünebilen sayılardır. Euler bunu kanıtlayamamış ve ve bu sanı, "Goldbach Sanısı" olarak adlandırılmış ve sanı olarak kalmıştır. Matematik açısından önemi olmayan, yani başka sanıların kanıtlanması için kullanılmayacak olan, fakat salt kanıtlama güçlüğünden dolayı ilgi çeken bu sanı, büyük ölçüde bilgisayar çalışması yapılmış olmasına karşın, günümüze kadar ne kanıtlanabilmiş ne de aksini belirten bir örnek bulunabilmiştir. "Goldbach Sanısı" halen sanı olarak kalmıştır. Fakat, denenmesi için yoğun bilgisayar çalışmaları devam etmektedir.

Bölüm Notu: Bu kısmda temel bilgileri tanımaya başladık. Başlangıç bilgilerimizi oluşturma çabamıza "Sezgisel Küme Bilgilerine Giriş" konusu ile devam edeceğiz.