Genel Matematik

1 - Başlangıç Bilgileri

Herşey Cantor ile Başladı

1.3 - Cantor ile Başlayan Küme Kavramı

1.3.1 - Georg Cantor Üzerine

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor St. Petersburg (okunuşu: Zankt Peetersburg, Sovyetler döneminde adı Leningrad olarak değiştirilmiş, bugün eski adı ile tanınıyor) şehrinde 1845 yılında doğmuş. Ailesi Almanya'ya taşınımış Berlin Üniversitesinde tezini tamamlamış, Halle Üniveritesinde Matematik Profesörü olarak çalışmış, tüm kariyerini Halle'de (kendisi istememesine karşın) tamamlamak zorunda kalmıştır. Yaşamını 1918 de kaybetmiştir.

Cantor (okunuşu: Kantor, anlamı: şarkıcı -Latince-) (Cantor, müzisyen bir aileden gelmiştir. Atalarının sinagogda ilahi söyleyenlerden olduğu için, şarkı söylen anlamında Cantor soy-

adını almış oldukları düşünülmektedir) "Kümeler Kuramı" üzer-
ine ilk yazısını 1874 de Crelle Journal de zorlukla yayınlata-
bildiği, "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen alge-
braischen Zahlen" "Gerçel Cebirsel Sayıların Tümüne İlişkin bir
Özellik Üzerine" olarak yayınlamış, bu yazısında kümeler
kuramını tanıtmıştır.

Kümeler kuramı, kısa süre içinde büyük kabul görmüş, matem-
atiğin temeli olarak nitelendirilmiş fakat, bir o kadar da eleştiri
ile karşılaşmıştır. Kümeler kuramı bugün için büyük bir buluş
olarak kabul edilerek "Modern Matematik" adı ile tüm dünyada
yaygın olarak öğretilmekte ve "Matematik Mantık" ile birlikte
matematiğin temeli olarak kabul edilmektedir. Kümeleri
destekleyen, formalist görüşe sahip olan büyük matematikçi
David Hilbert "Cantor'un bizim için kurduğu cennetten bizi
kimse kovamaz" demiştir.

Kümeler kuramına en çok karşı çıkan ve Cantor'un Berlin Üniver-
sitesine atanmasını engelleyen Leopold Kronecker olmuştur.
Ayrıca, Henri Poincaré, Hermann Weyl, Ludwig Wittgenstein
daha sonra da Luitzen Egbertus Jan Brouwer de eleştirenler
arasındadır. Ayrıca, Cantor'un belirttiği "Transfinit Sayılar" bazı
dinsel kaynaklarca, Tanrının birliğine karşı çıkar gibi nite-
lendirilmiş ve böyle bir amacı olmayan (Atalarının Musevî asıllı
olduğu düşünülmesine karşın) inanmış bir Lüteryen olan Can-
tor, bu yoruma çok üzülmüştür.

Yaşamında, kümeler kuramının büyük kabul görmesi yanında,
haksız ve ağır eleştiriler alması, hassas ve etkilenen bir psikolo-
jisi olan Cantor'un birkaç kez depresyon geçirmesine ve
yaşamını erken yitirmesine neden olmuştur.

1.3.2 - Küme Kavramı

Kümeler, prensipte, belirgin tanımı olan, belirli bir sıralanma şekli olmayan, birbirlerinden farklı nesnelerin topluluğu olarak tanımlanırlar.

Kümeleri oluşturan nesnelere kümelerin elemanları adı verilir. Kümelerdeki elemanlanların belirli bir sıralanması yoktur. Kümeler, aynı nesneden sadece tek bir eleman içerebilirler.

Belirgin tanımı olan nesneler, herkes tarafından nesnelliği tartışmasız olarak kabul edilebilecek nesnelerdir. Örnek olarak tamsayılar bir küme oluşturabilrler, çünkü her tamsayının niteliği bellidir, şahıslara göre değişmez. Aynı şekilde Ali Nesin'e göre, "Doğmamış Eşekler" de bir küme oluşturabilirler. Bu eşekler bugün yaşar olmasalar da, eninde sonunda doğacaklar ve küme oluşturabileceklerdir.

Kümelerin oluşturulması için, hiçbir sınırlama yapılmayan sisteme, "Sınırsırsız İçerik Kuramı" (Unrestricted Comprehension) adı verilir. Sınırsız içerik kuramına göre oluşturulmuş kümelere, "Sezgisel Kümeler Kuramı" adı verilir. Sezgisel kümeler kuramı aynı zamanda, "Nahif Kümeler Kuramı" (Naïve Set Theory) olarak adlandırılır. Nahif, yani kırılgan bir sahıs, hiçbir kuralı benimsememiş kimse olarak nitelendirilir. Küme oluşumunu daha belirgin kurallara bağlayan sistemlere, "Aksiyometrik Kümeler Kuramı" adı verilir.

Kümelerin, kuralsız olarak oluşturulması, 1885 de Cantor, 1897 de Burali_Forte, 1901 de Russell ve 1905 de Richard tarafından belirtilmiş olan çelişki (paradoks) lardır. Bunlardan en yıkıcı olanı Russell paradoksu olmuştur.

Matematik, kümeler kuramı ve matemetik mantık çerçevesinde açıklandığından, kümeler kuramınında çelişki kabul edilemez. Bu yüzden, kümeler kuramında çelişkileri önlemek amacı ile, kümelerin oluşumuna bazı sınırlamalar getiren aksiyomlara dayanan küme kuramları geliştirilmiş ve bu sistemlere "Aksiyometrik Kümeler Kuramı" adı verilmiştir. Belirli bir aksiyom sisteminin kuralları gözetilerek oluşturulmuş küme içeriklerine, "Sınırlanmış İçerik" (Restricted Comprehension) adı verilir.

Küme aksiyomları, birkaç tanedir, fakat içlerinde en tanınmış olanı (Zermelo-Frenkel) (ZF) ve ek olarak, "Seçim Aksiyomu" (Axiom of Choice) un da uygulandığı, (ZFC) aksiyom sistemidir.

Hilbert, uygun aksiyomların uygulaması ile çelişkilerinden arındırılmış bir kümeler kuramı ve matematik mantık kurallarına göre oluşturulmuş formüller yardımı ile tüm matematiğin açıklanabileceğini düşünerek formalist bir program üzerine çalışmıştır. Bu çalışma, Gödel'in "Eksiklik Kuramı" nedeni ile tam olarak başarıya ulaşamamış, fakat matematiğin formülasyonunda önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Bugün hem bu program, hem de kümeler kuramı son derece yararlı ve başarılı bulunmaktadır.

Bu çalışmamızda, "Sezgisel Kümeler" yöntemini inceleyeceğiz. Bunun nedeni, sezgisel kümeler yönteminin küme ilikilerinin incelenmesi için en koay anlaşılır ve kişileri sınırlandırmayan özgür bir yöntem olmasıdır. Gerçek yaşamda sezgisel küme yöntemi uygulanmaz, küme oluşumlarını sınırlayan "Aksiyometrik Kümeler" kuramı uygulanır. Bunun nedeni, en önemlisi 1902 de Lord Bertrand Russell tarafından bulunmuş olan (üç yıl önce, Göttingen Üniversitesinde Hilbert'in ekibinden Ernst Zermelo tarafından da farkedilmiş fakat yayınlanmamıştır) Russell Çelişkisidir. Bu aksiyomların en kabul görmüş olanı ZFC (Zermelo-Frenkel) aksiyom sistemidir. Bu sistem sadece küme oluşumlarını ve sonsuz sayıda eleman içermelerini sınırlamakta, fakat küme ilişkileri aynı sezgisel küme yönteminde olduğu gibi geçerli kalmaktadır. Sezgisel kümeler sisteminde incelenmiş olan yöntemler, aynen ZFC aksiyometrik kümeler kuramında da belirli aksiyomların küme içeriklerini ve kümelerin eleman sayısını sınırlaması dışında geçerli olacaktır. Bu nedenle, bu çalışmada ilk aşamada öğrenilmesi sezgisel kümeler yöntemi incelenmiştir.

1.3.3 - Küme Tanıtımı

Kümeler iki türlü tanıtılablir. Birincisi eklentisel (extensional) tanıtımdır. Bu tanım aynen Python programlama dilinde uygulandığı gibi, küme elemanlarının büyük süslü parantezler arasında listelenmesidir.

Küme adları büyük harflerle belirtilir. Kümelerin içerdiği nesnelere “Küme Elemanları” adı verilir. Küme elemanları küçük harflerle belirtilir.

Küme kavramı kurallarına göre,

- Bir kümede birbirinin aynı iki eleman olamaz.
- Kümeler, küme elemanı olabilirler.
- Küme elemanlarının belirli bir düzene uyma zorunluğu yoktur.

Sezgisel küme kavramına göre,

- Her türlü nesneden küme oluşturulabilir. (“Sınırsız İçerik” , “Unrestricted Comprehension” kuralı).
- Küme elamanları sonsuz sayıda olabilirler.

Örnek olarak,
A = {"Ahmet Uzun", "Veli Dağ" , 12 , 5}

tanımı verilebilir. Bu tanımla, A kümesinde hem sayısal hem de sözel elemanların bulunduğu görülmektedir. Liste yöntemi ile küme tanımı, az sayıda ve farklı türde elemanlar içeren kümeler için uygundur.

Bir kümede, küme elemanları da küme olabilirler. Örnek,

A = {17 , {25 ,28} , 45}

Eğer iki küme, aynı elemanları içeriyorlarsa, bu iki küme, "Eşit Kümeler" olarak tanımlanır. Örnek,

A = {25 , 8} = {8 , 25} = {8 , 8 , 8 , 25 , 25}

Buradan görüldüğü gibi, iki kümede eleman sırasının farklılığı kümelerin eşit olmasını engellemez. Ayrıca, yine aynı tanımdan, aynı elemanı birden fazla içermesi istenen kümelerde, fazladan aynı elemanlar yok sayılır ve küme yapısını etkilemez ("Genişleme Aksiyomu") (Axiom of Extensibility).

Bir A kümesinin elemanları, bir B kümesi ile aynı değilse, bu iki küme birbirlerine eşit değillerdir. Farklı kümeler, $A \neq B$ olarak gösterilir.

Bir kümenin elemanı olmak,

$x \in A$ olarak belirtilir. Bu tanım, "x, A kümesinin bir elemanıdır" şekilnde okunur. Eğer,

$x \notin A$

olarak belirtilmişse, bu “x A kümesinin bir elemanı değildir” anlamına gelir.

Yukarıdaki kümede,

$8 \in A$, $25 \in A$, $12 \notin A$, $32 \notin A$

olarak belirtilebilir.

Bir kümenin eleman sayısı, o kümenin kardinalliği olrak nitelendirilir ve |A| olarak belirtilir. Yukarıdaki kümenin kardinalliği 2 dir. Bu |A| = 2 olarak gösterilir.

Kümelerin eklentisel (listeleme) yöntemi ile tanıtılmaları sadece az sayıda ve değişik tipte elemanlar içeren kümeler için uygundur. Kümelerin türdeş elemanlar içerenleri, daha işlevsel ve matematik için daha kullanışlıdır. Türdeş elemanlar içeren kümelerin eleman sayıları olağanüstü yüksek olabilir. Bu durumda, listeme yöntemi yeterli olmaz, amaca yönelik (intensional) küme tanımından yararlanmak gerekli olur.

Küme yapıcı ifadenin genel açıklaması,

$\{x \mid \Phi(x)\}$

şeklindedir. Burada x, küme elemanları, Φ(x) , x elemanlarının bir özelliği (yüklem) (predikat) dır. Örnek olarak,

$A = \{x \mid x \in \text{Fenerbahçeliler}\}$

Bunun anlamı, A kümesinin elemanlarının, daha önceden tanımlanmış olan Fenerbahçeliler kümesinin elemanları arasından şeçileceğidir.

Küme yapıcı ifade ile, birbirleri ile aynı özellikleri paylaşan elemanlardan oluşan istendiği kadar eleman içeren kümeler oluşturulabilir. Örnek olarak, eğer x belirli bir özellik (yüklem) (predikat) (predicate) ise, bu özelliği sağlayan elemanlardan oluşan küme,

$A = \{x| P(x)\}$ veya $A = \{x: P(x)\}$

olarak belirtilir. Burada, P öyle bir yüklemdir ki, her x elemanı bunu karşılamaktadır. Gerektiğinde bu tanım, x değişkeninin başka bir tanımlı kümenin elemanı olduğunu ve aynı zamanda da bu yüklemi sağladığını belirtecek şekilde genişletilebilir. Örnek olarak çift pozitif sayılardan oluşan bir küme,

$A = \{x = \text{bir çift sayı} \mid A(x)\}$

olarak belirtilebilir. Doğal olarak bu tanımın biraz sonra göreceğimiz gibi, matematiksel bir notasyonla açıklanma yöntemi bulunmaktadır.

Bir başka küme tanımı,

$A = \{x \text{ (x bir tamsayıdır)} \mid (0 \leqslant x \leqslant 20)\}$

Tamsayılar 0 dahil pozitif ve negatif tamsayılardan oluştuğuna göre (Bk. biraz aşağıdaki tamsayılar kümesi tanımı), bu tanım, A kümesinde, 0 (dahil) , 20 (dahil) aralığında 21 tane tamsayı elemanı içerebileceğini belirtir. Bu tanımla, A kümesi,

A = {0 , 1 , 2, ..., 20}

şeklinde belirtilebilir. Birbirbirini izleyen üç nokta "Elipsis Noktaları" olarak adlandılır ve aradaki değerlerin belirtilmesinde kullanılır. Elipsis noktaları bir sekans (birbirini izleyen işlemler) tanımıdır. Elipsis noktasının değerlendirilmesinde,

- İlk olarak, birbirini izleyen elemanlar arasındaki fark Δ (delta) belirlenir. Burada Δ = 2 -1 = 1 dir.
- Elipsis noktasından önce belirtilen değerden bir sonraki değer, bir önceki değere Δ eklenerek bulunur. Burada 2 den sonraki eleman 2 +1 = 3 dür. 3 den sonra gelecek eleman 3 + Δ = 3 +1 = 4 olacaktır. Sekans bu şekilde devam eder.
- Sekans, son değer olarak belirtilmiş 20 ye ulaşılınca sona erdirilir.

Buradan, bir elipsis sekansı belirtildiğinde, bu sekansın ardışık (birbirini izleyen) değerlerinin hesaplanabilmesi için, en az iki ardışık değerin verilmesi gerektiği ortaya çıkar.

İki tane sayı belirten notasyon,

∀ = Tümü

∃ = Bazıları (En az bir tane)

olarak belirtilir. Örnek olarak, ∀x (x <5) , "Tüm x ler 5 den büyüktür" anlamına gelmektedir. ∃x (x = 8) "Bazı x ler, 8'e eşittir" veya "En az bir tane x, 8'e eşittir", şeklinde değerlendirilir.

Bazı temel kümeler, öntanımlıdır. Bunlar,

ℕ = {1, 2, 3, 4, 5,...} Doğal Sayılar Kümesi (Lat. Naturalis = Doğal).

Doğal sayılar kümesi üzerinde ne yazık ki bir fikir birliği sağlanamamıştır. Modern düşünce, daha çok sıfır sayısını doğal sayılar kümesinin elemanı olarak kabul etmezken, eski düşünce, sıfır sayısını doğal sayılar kümesinin bir elemanı olarak kabul etmektedir. Bu çalışmada doğal sayılar kümesi, yukarıda tanımlandığı gibi 1 den başlayan ve üst sınırı olmayan sayılar olarak kabul edilmiştir.

ℤ = {...,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...} Tamsayılar kümesi (Alm. Zahlen = Sayılar)

ℚ = Rasyonel sayılar (Orantılar) (Alm. Quotient = Kesir)

ℝ = Gerçel sayılar (ondalıklı sayılar) (Alm. Real = Gerçel)

Burada, ilk olarak tamsayılar (Zahlen) kümesinden başlayacağız. Kronecker, ”Tanrı tamsayıları yarattı, gerisi sadece insan yapısıdır!” demiştir. Gerçekten tamsayılar tüm sayıların yapıtaşlarıdır.

Tamsayılar kümesinin elemanlarının belirli bir büyüklükten büyük, sıfır ve belirli bir büyüklükten küçük tamsayılardan oluştuğu görülüyor. Ne en küçük, ne de en büyük sayı erişilebilir değildir. Bu sayılar düşünebildiğimiz en küçük sayıdan daha küçük, düşünebildiğimiz en büyük sayıdan daha büyük olan sayılardır. Eskiden eksi sonsuz, artı sonsuz olarak tanımlanan bu kavramlar, bugün için bilinemez olarak kabul edilmektedir. Sonsuz simgesi kullanılmadığında, Tamsayılar kümesi,

$\mathbb{Z} = \{x \mid -x \leqslant 0 \leqslant x\}$

olarak tanımlanabilir. Diğer bir tanım da, tamsayılar kümesini,

$\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

negatif tamsayılar, sıfır kümesi (boş küme) ve pozitif tamsayılar kümelerinin birleşim kümesi olarak açıklanmasıdır.

Sonsuzluğun ilk filosofik tanımı, hemşehrimiz Miletuslu bir Sokrat öncesi filosof olan Anaksimander tarafından, "Apeiron" (sınırsız) tanımlaması ile yapılmıştır. Hemen onu izleyen matematik tanım, Parmenides'in öğrencisi, Elea'lı Ksenon (Zeno) tarafından "Çok anlaşılmaz ve derin" olarak tanımlanmıştır. Euclides, bugünkü tanım gibi, "en büyük olarak tanımladığımızdan daha büyük" olarak tanımlamıştır. Lemniskat olarak da adlandırılan ∞ sembolü, ilk olarak 1655 de John Wallis tarafından kullanılmıştır. Euler bu sembolü kullanmış ve ondan sonra sonsuzluk tanımı için Lemniskat sembolünün kullanımı yaygınlaşmıştır. Sonsuzluğun tanımı gözönünde tutuldukça, Lemniskat sembolünün kullanımında hiçbir sakınca yoktur. Tam aksine bu sembol, matematik notasyon için vazgeçilmez bir konumdadır.

Sonsuzluk için Lemniskat sembolü kullanıldığında, tamsayılar kümesi,

$\mathbb{Z} = \{x \mid -\infty < -x \leqslant 0 \leqslant x < \infty\}$

olarak tanımlanabilir.

Negatif tamsayılar, $\mathbb{Z}^-$ olarak da gösterilirler. Tanımları,

$$\mathbb{Z}^- = \{x \mid x < 0\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{...,-2, -1\}$$

şeklindedir. Negatif tamsayılar kümesinde en küçük eleman -1 dir. Sıfır, negatif tamsayılar kümesinin bir elemanı değildir.

Pozitif tamsayılar, $\mathbb{Z}^+$ olarak da gösterilirler. Tanımları,

$$\mathbb{Z}^+ = \{x \mid 0>x\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

şeklindedir. Pozitif tamsayılar kümesinde en küçük eleman 1 dir. Sıfır, pozitif tamsayılar kümesinin bir elemanı değildir. Pozitif tamsayılar kümesi, sıfırın dışarıda tuttulduğu doğal sayılar kümesi ile eşit kümedir.

Rasyonel sayılar (orantılar) (Quotients) kümesi,

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists\ m,n \in \mathbb{Z}\ ) [(m > 0\ , mx = n]\}$$

olarak tanımlanır. Bu notasyon açık değildir. Açıklanmak istenen, oranlı (rasyonel) sayılar kümesinin elemanlarının, tamsayılar kümesi elemanlarından istenildiği gibi seçilecek m ve n elemanlarından oluşacağı, m sayısının sıfırdan büyük tamsayılar arasından seçileceği ve x bir gerçel sayılar kümesi elemanı olarak, oranlı sayılar kümesinin elemanlarının, mx = n eşitliğinin sağlanacağı, $\frac{n}{m}$ oranlarından oluşacağı belirtilmektedir.

Açık olmamasına karşın bu tanımın verdiği en önemli bilgi, elemanların $\frac{n}{m}$ oranlarından oluşacağı, fakat bu oranlarının sonucunun, rasyonel sayılar kümesinin değil, gerçel sayılar kümesinin elemanlarından birisi olacağıdır. Bu çok önemli bir bilgidir. Tamsayılar kümesi elemanları 2, 3 gibi tam değerlerden oluşmaktadır. Bu değerler yaklaşık değerler değillerdir. Bu sayılar iki çadanlık, üç kaşık gibi, parçalanamaz değerleri belirtmektedir. Bu değerlerin ondalık kısımları yoktur. İki buçuk çaydanlık ancak üç tane çaydanlığın birisi kırıldığında ortaya çıkar. O zaman da bu bir yaklaşık değer olur, çünkü çaydanlığın tam yarısından kırıldığı kesin değildir. Oysa üç çaydanlık kesin bir sayıdır. Bilgisayar 3 sayısını tam 3 olarak belleğinde tutar. Bu yüzden von Neumann bilgisayarların inşasında, sadece tamsayıların kullanılmasını istemiştir. Bu doğaldır, matematik kesin olan tamsayılar ile çalışır. Oysa yaşam gerçel sayılar üzerinden düzenlenmiştir. Bu yüzden, bilgisayarların yapımında, matematikçilerin değil, mühendislerin istedikleri olmuştur. Yine de kesin değerlerin önemi büyüktür ve rasyonel sayılar kümesinin elemanları olan oran (ratio) lar kesin değerlerdir. Bu değerler $\frac{3}{5}$ gibi $\frac{7}{3}$ gibi, kendileri de oranları da (sonucunun hesaplanmaması kaydı ile) kesin olan değerlerdir.

Rasyonel sayılar kümesi elemanları, küme tanımı gereğince, aynı elemandan sadece bir tane örnek içerebileceğinden, elemanlarının me ve n arasında ortak bölen olmayan $\frac{n}{m}$ oranlarından oluşması gerekmektedir. Örnek olarak, $\frac{10}{2}$ bir rasyonel sayılar kümesi elemanı değildir. Çünkü, $\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$ dir ve rasyonel sayılar kümesinin elemanı, $\frac{5}{1}$ oranıdır. Diğeri onun birebir kopyası (duplikatı) dır ve rasyonel sayılar kümesinin elemanı değildir.

Paydası sıfır olan oranlar, $\frac{6}{0}$ gibi belirsiz değerlerdir ve rasyonel sayılar kümesinin elemanları değildir. Hiçbir uygulamada, bir değer sıfıra bölünmemelidir.

Rasyonel sayılar kümesinin elemanları olan $\frac{3}{1}$, $\frac{34}{1}$ gibi değerler aynı zamanda 3, 34 gibi değerler olduklarından, bazı rasyonel sayılar kümesi elemanları, aynı zamanda doğal sayılar kümesinin de elemanlarıdır. Tüm doğal sayılar kümesi elemanları, aynı zamanda rasyonel sayılar kümesinin de elemanlarıdır, fakat tersi doğru değildir.

Belirtilmeleri $1\ \frac{2}{3}$ (bir tam iki bölü üç) şeklinde olan oranlar, rasyonel sayılar kümesi elemanlarıdır. Bu oranların açılımı $1\ \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (pay + payda) /payda şeklindedir.

Rasyonel sayılar kümesi elemanlarının daha kısa ve daha anlaşılır bir açıklaması,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z} \ , n \neq 0\}$$

şeklindedir. Buradan rasyonel sayılar kümesi elemanlarının birer tamsayı oranı olduklarını ve bundan dolayı yaklaşık bir sayı olmadıklarını belirtir. Bu tanımda belirtilemeyen nokta ise, rasyonel sayılar kümesi elemanlarının değerlerinin gerçel sayılar kümesinin elemanları olduğu ve bu yüzden, birer yaklaşık sayı olduklarıdır. Yani, rasyonel sayılar kümesi elemanları, bir tamsayılar orandır, dolayısı ile kesin bir değerdir. Bazı oranlar tamsayı sonucunu verirler ve kesin değerlerdir. Bazı oranlar ise, ondalıklı değerler verirler. Ondalık değerler veren oranlar kesin değerlerdir ve rasyonel sayılar kümesinin elemanlarıdırlar. Bu oranların değerleri ise yaklaşık ondalıklı değerdir ve sadece gerçel (reel) sayılar kümesi elemanlarıdır.

İrrasyonel sayılar kümesi elemanları, rasyonel bir sayı olarak gösterilemezler. İrrasyonel sayıların ondalık değerleri belirli bir sekans ile tekrarlanmazlar ve sonsuza kadar arttırılabilirler. Örnek olarak, $\sqrt{2}$, π, e (Euler sayısı) irrasyonel sayılardır.

$e = 2.71828182845904523536028747135...$

$\pi = 3.14159265358979323846264338328...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872421...$

Gerçel (Reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$, tüm sayı tiplerini içerir. Doğal, rasyonel, irrasyonel, kompleks, sayılar kümelerinin elemanları, rasyonel sayılar kümesi elemanlarını oluşturular. Bu nedenle rasyonel sayılar kümesi eleman sayısı en çok (kardinalitesi en yüksek) sayılar kümesidir.

Gerçel sayılar kümesinin elemanlarının, üçlü kesişim (trikotomi) özelliği vardır. Bir gerçel sayı ya pozitif ya negatif ya da sıfır olabilir. Daha genel olarak, x ve y gibi sayılarda, ya $x > y$, ya $x < y$ veya $x = y$ olabilir.

Özel bir küme olan asal sayılar kümesi, 1 den büyük ve sadece 1 ile kendine bölünebilen sayılardır.

asal sayılar = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ...}

2 dışındaki asal sayılar tek sayılardır. Asal olmayan her sayı, asal sayı çarpanları olarak belirtilebilir. Örnek olarak,

$$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

olarak belirtilebilir.

Öntanımlı kümeler çok önemlidir ve büyük kolaylık sağlarlar. Yararlı oldukları durumlardan biri de daha özlü (kompakt) küme tanımlarına olanak sağlamalarıdır. Örnek olarak,

Doğal sayılar kümesi,

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$$

olarak tanımlanır.

Burada, doğal sayılar kümesinin elemanlarının sıfırdan büyük olan tamsayılar kümesi elemanlarından oluşacağı belirtilmektedir.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 8\}$$

şeklinde bir tanım, bir A kümesinin elemanlarının doğal sayılar kümesinin elemanları olacağını, değerlerinin 8 e eşit veya daha küçük olacaklarını belirtir. Bu durumda, doğal sayılar kümesinin tanımından, A kümesinin ilk elemanının 1 olacağı ve A kümesinin, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

olarak tanımlanacağı anlaşılır. Bu küme kısa olarak,

A = {1, 2,..., 8}

şeklinde yazılabilir. Eğer, küme elemanlarının özelliği olan x, belirli bir küme elemanı olmakla tanımlanabilenen bir özellik ise, küme elemanlarının bu küme elemanları arasından olacağı belirtilir. Örnek olarak, çift pozitif sayılardan oluşan bir küme, çift pozitif sayılar kümesi 2ℕ olarak belirtildiğinden (doğal sayılar, pozitif tamsayılardır),

$A = \{x \in 2\mathbb{N} \mid x \leqslant 20 \}$

olarak tanımlanabilir. Bu küme,

A = {2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16, 20}

elemanlarını içerir ve kısa olarak,

A = {2, 4 , 6 , ... , 20}

şeklinde belirtilebilir.

İlginç bir küme,

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$

şeklinde tanımlanan, $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ kümesidir.$\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

olarak belirtilebilir.

Kümeler, matematik mantıkla, matematik mantık da kümeler ile ilşkili olarak açıklandıkları için, kümelerin öğrenimi için, matematik mantık, matematik mantık öğrenimi için küme bilgisine gerek duyulur. Bu noktada bazı matematik mantık kurallarını açıklamak gerekli olacaktır. İlk olarak "ve" bağlacını tanıtalım.

Matematematik mantıkta, "ve" notasyonu "$\wedge$" simgesi ile belirtilir. Bu iki işlenenli (diyadik) bir ilşemcidir ve $\wedge$ bağlacı ile bağlı iki basit önermenden oluşan bir bileşik önermenin doğruluk değeri ancak ve ancak her iki önermenin doğruluk değerleri "Doğru" (T) ise , "Doğru" (T) olabilir. Örnek,

$A = \{x \mid x \geq -3 \wedge x \leqslant 3\}$

şeklinde bir ifadenin doğru olması için, x değerlerinin - den büyük veya eşit ve 3 den küçük veya eşit olması gerekir. Matematik olarak bu ifade,

$A = \{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3 \}$

şeklinde yazılır.

Bir başka mantıksal bağlaç, yine iki işlenenli (diyadik) bir işlemci (bağlaç) olan "$\vee$" (veya) bağlacıdır. Matematikte kullanılan "veya" bağlacı, "Ahmet olursa Mehmet olmaz" şeklindeki “dışlayıcı veya” değil, “ Kırmızı da olabilir” veya “siyah da olabilir” veya “hem kırmızı hem de siyah olabilir” şeklinde “dişlamayan veya” (inclusive or) işlemcisidir. Matematikte kullanılan veya işlemcisi ile bağlanmış olan iki basit önermeden oluşan bileşik önermeninin doğruluk değeri, sadece her iki bileşinin de doğruluk değeri birlikte “Yanlış” (F) olması halinde, “Yanlış” (F) diğer tüm durumlarda “Doğru” (T) dir.

Matematik mantıkta uygulanan bir başka işlemci, $\longrightarrow$ ile gösterilen, tek yönlü koşullu işlemcidir.

Tek yönlü koşullu işlemci $\longrightarrow$ diyadik bir işlemcidir. Bir $\longrightarrow$ bağlacı ile bağlı iki basit önermeden oluşan bir bileşik önermenin doğruluk değeri ancak ve ancak ardılın doğruluk değeri “Yanlış” (F) olursa, “Yanlış” (F) olur diğer tüm durumlarda “Doğru” (T) olur. Bu işlemci, geniş olarak “Matematik Mantık” konusunda incelenecektir.

Son olarak, diyadik bir işlemci olan $\longleftrightarrow$ (Eşdeğerlik İşlemcisi) (Eşdeğerlik Bağlacı), tanıtılacaktır. Bir $\longleftrightarrow$ bağlacı ile bağlanmış iki basit önermeden oluşan bir bileşik önermenin doğruluk değeri, ancak ve ancak her iki önermenin de birden, doğruluk değerlerinin “Doğru” (T) veya “Yanlış” (F) olması halinde “Doğru” (T) olur. Diğer tüm durumlarda “Yanlış” (F) olur. bu işlemci üzerine de ayrıntılı bilgi, “Matematik Mantık” konusunda verilecektir.

Matematik notasyonuna alıştıkça, bu notasyonlarla belirtilen ifadeler, günlük yazım yöntemimiz gibi benimsenmiş olacaktır.

Şİmdi bu bilgilerin kulanılması ile yapılabilecek, küme yapıcı notasyon (set builder notation) ile oluşturulacak küme tanımı örneklerini inceleyelim.

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x = x^2\}$

Bu tanım, A kümesinin elemanlarının, gerçel sayılar kümesi elemanları arasından seçileceğini ve her elemanın karesinin kendisine eşit olacağını belirtir. Burada, $x \in \mathbb{R} \wedge x = x^2$, bileşik bir önermedir. Bu bileşik önerme, $x \in \mathbb{R}$ önermesi ile $x = x^2$ önermesinin $\wedge$ bağlacı ile bağlanması ile oluşmuştur. Bu bileşik önermenin doğruluk değeri, $\wedge$ bağlacı ile bağlanmış bileşik önermelerin doğruluk değerleri tanımına göre ancak ve ancak her iki basit önermenin doğruluk değerlerin de "Doğru" (T) olması durumunda "Doğru" (T) olacaktır.

Bu tanıma göre, A kümesinin elemanlarının gerçel sayılar olmaları ve karelerinin kendilerine eşit olmaları gerekecektir. Bu kısıtı sağlayabilecek olan sadece iki tane gerçel sayı vardır ve bu sayılar 0 ve 1 sayılarıdır (gerçel sayılar kümesinin elemanları arasında tamsayılar da bulumaktadır). Böylece, bu tanıma göre,

$A = \{0 , 1\}$

olacaktır.

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$

Yukarıdaki açıklama gözönüne alınarak, A kümesinin tüm pozitif gerçel sayıları içereceği belirlenir.

$A = \{k \mid \exists n : (n \in \mathbb{N} \wedge k = 2\,n)\}$

Bu tanımı okuyarak anlamını bulmaya çalışalım. İlk olarak küme elemanlarının hangi sembol ile belirtildiğini bulalım.

$A = \{k \mid \}$

Elemanları k olan bir A kümesi vardır. Öyle ki ... (Bundan sonra A kümesinin k elemanın tanımı gelmelidir).

$\exists n :$

Bazı n sayıları vardır. Öyle ki ...(Bundan sonra n sayılarının tanımı gelmelidir).

$(n \in \mathbb{N} \wedge k = 2\,n)$ Bu $\wedge$ (ve) bağlacı ile bağlanmış, $n \in \mathbb{N}$ ve $k = 2\,n$ basit önermeleridir. Bilindiği gibi, $\wedge$ (ve) bağlacı ile bağlanmış basit önermelerden oluşan bir bileşik önermenin, doğruluk değerinin "Doğru" (T) olması için, tüm bileşen (conjunct) ların doğruluk değerlerinin "Doğru" (T) olması gerekmektedir. Bu durumda burada $n \in \mathbb{N} \wedge k = 2\,n$ bileşik önermesinin gerçekleşmesi yani doğruluk değerinin "Doğru" (T) olması için, hem $n \in \mathbb{N}$ "Doğru" (T) olmalı yani n sayısı doğal sayılar kümesinin bir elemanı olmalı, hem de $k = 2\,n$ önermesi gerçekleşmeli yani küme elemanı k verilen n değerinin iki katı olmalıdır.

Gündelik yaşam diline dönersek, $A = \{k \mid \exists n : (n \in \mathbb{N} \wedge k = 2\,n)\}$ kümesinin elemanları, çift doğal sayılardır. ve A kümesi,

$A = \{2, 4 , 6 , ... \}$

olarak belirtilir. (Sıfır sayısının doğal sayılar kümesinin bir elemanı olmadığı varsayılarak).

$A = \{a \mid \exists\, p , q : (p , q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge a\, q = p)\}$

Yukarıdaki önerme için uygulanan bilgiler gözönüne alınırsa, A kümesinin elemanlar olan a nesneleri, Öyle p ve q değerleri arasından seçilmelidir ki, p ve q Tamsaılar kümesinin birer elemanı olsunlar, p sıfırdan farklı olsun ve a q = p olsun. Bu tanım aradığımız, raysonal sayılar kümesi elemanlarının tanımıdır. Bu şekilde,

$$A = \left\{ \frac{p_1}{q_1} , \frac{p_2}{q_2} , \ldots \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} , \frac{p_n}{q_n} \right\}$$

olacaktır. Bu da rasyonel sayılar kümesidir.

$A_m = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq m\}$

Bu kümenin elemanları olan x değerleri, tamsayılar kümesinin bir elemanı olacak ve m indis değerine eşit veya ondan daha büyük olacaklardır. Örnek olarak,

$A_5 = \{ 12, 6, 8\}$

olabilir. Daha başka birçok geçerli örnek de oluşturulabilir.

Küme yapıcı yöntemin bir başka şekilde belirtilmesi,

{T : Φ(x1 ... xn)}

şeklindedir. Burada T bir ifadedir. Bu ifade, küme elemanlarının oluşturulması için gerekli değişkenleri ve bu değişkenlerin ilişkilerini içerir. Φ(x1 ... xn) ise yine bir yüklem belirticisidir. T ifadesinde kaç tane değişken belirtilmişse, bu değişkenlerin sağlamaları gereken özellikler burada belirtilir. Örnek,

$A = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Bu tanım, rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını belirtir. Bu tanımın yukarıdaki ilk tanıma göre çok daha kompakt olduğu açıkça görülmektedir.

$A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$n = -1$, $2n + 1 = -2 + 1 = -1$

$n = 0$, $0 + 1 = 1$

Burada n sayısına değer verilmeye devam edildikçe, A kümesinin elemanlarının, tamsayılar kümesinin tek sayılı elemanları olarak oluşacakları ortaya çıkar.

$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$n = -3$, $2n = -6$; $n = 5$, $2n = 10$

A kümesinin elemanları , tamsayılar kümesinin çift sayı elemanlarıdır.

İlginç bir küme oluşturma yöntemi olan aşağıdaki örnek, iki elemanlı bir küme oluşturur.

$A = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$x = 5$, $A = \{5 , 11\}$

Bu tanımda, x sayısına tamsayı değerleri verildikçe, değişik iki elemanlı kümeler oluşur.

Bir başka ilginç tanım, aşağıda görülmektedir.

$A = \{2x + 1 = 5, x \in \mathbb{N}\}$

$x = 1$, $2 (1) + 1 = 3$, $3 = 5$ (yanlış)

$x = 2$, $2 (2) + 1 = 5$, $5 = 5$ (doğru)

Bu şekilde, A kümesinin elemanları, x değerine göre {yanlış , doğru} olarak sadece iki tane olmaktadır.

Sonlu kümelerde, başlangıç ve bitiş elemanlarının belirtilmesi için gerekli olan ön tanımlı konvansiyonları aşağıda birlikte inceleyelim:

Açık Aralık (a , b)

Bir Q kümesinin eleman değerleri (a , b) olarak tanımlanmış bir açık aralıkla sınırlanmışlarsa, Q kümesinin elemanları a dan büyük ve b den küçük değerlerdir. Açık aralıkta sınır değerler a ve b küme elemanı değillerdir. Elemanları gerçel sayılar kümesinin de elemanları olan bir Q kümesinin yapımı,

$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

şeklindedir. Örnek olarak, elemanlarının büyüklüğü, (4 , 8) aralığında olan tamsayılardan oluşan bir Q kümesinin oluşumu,

$$Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x < b\}$$

şeklindedir. Q kümesi,

$$Q = \{5 , 6, 7\} = \{7 , 5 , 6\} = \{7 , 6 , 5\}$$

olarak belirlenir.

Kapalı Aralık [a , b]

Bir Q kümesinin eleman değerleri [a , b]) olarak tanımlanmış bir kapalı aralıkla sınırlanmışlarsa, Q kümesinin elemanları a ile a dan büyük ve b ile b den küçük değerlerdir. Kapalı aralıkta sınır değerler olan a ve b küme elemanıdırlar. Elemanları gerçel sayılar kümesinin de elemanları olan ve değerleri [a , b] kapalı aralığı ile sınırlanmış olan bir Q kümesinin yapımı,

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leq b\}$$

şeklindedir. Örnek olarak, elemanları doğal sayılar kümesinin de elemanları olan ve değerleri [2 , 7] kapalı aralığı ile sınırlanmış olan bir Q kümesinin oluşumu,

$$Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leq b\}$$

şeklindedir. Q kümesi,

$Q = \{2 , 3, 4 , 5 , 6 , 7\}$ (veya aynı elemanların herhangibir başka bir sıra ile veya gelişigüzel dağılmış olan başka bir şekli).

Yarı Açık Aralıklar:

Yarı açık aralıklar, [a , b) (sağdan açık), (a , b] (soldan açık) olarak tanımlanır. Kapalı taraftaki değer, elemanlara dahil, açık olan taraftaki dahil değildir. Örnek olarak, tamsayılar kümesinin, [3 , 7) yarı açık aralığı le tanımlanan elemanlarından oluşan bir Q kümesi,

Q = {3 , 4 , 5 , 6} (veya aynı elemanların herhangibir başka bir sıra ile veya gelişigüzel dağılmış olan başka bir şekli).

Bir başka örnek olarak, tamsayılar kümesinin, (8 , 15] yarı açık aralığı le tanımlanan elemanlarından oluşan bir Q kümesi,

Q = {9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14, 15} (veya aynı elemanların herhangibir başka bir sıra ile veya gelişigüzel dağılmış olan başka bir şekli).

(a , b) ve $b < a$ olduğu durumda yaratılabilecek küme, sadece birazdan tanımlayacağımız boş küme $\varnothing$ dir.

Sonsuzluk içermeyen tanımlara, "Sınırlı Aralık", sonsuzluk içeren tanımlara, "Sınırsız Aralık" adı verilir. Örnek olarak,

Bir $\mathbb{Z}$ kümesi elemanlarının $(-\infty,\infty)$ arasındaki sınırsız aralığında oluşturulacak küme Q,

$$Q = \mathbb{Z}$$

olarak belirtilir. Aynı şekilde, gerçel sayılardan oluşacak bir Q kümesinin elemanları, $(-\infty , b)$ aralığında iseler, Q kümesi,

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

olarak belirtilir. Aynı küme, $(-\infty , b]$ aralığında ise,

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

olarak belirtilir.

$[a , \infty)$ Yarı açık sınırsız aralığında bulunacak, tamsayı elemanlarının kümesi,

$$Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$$

olarak belirtilir. Eğer açık sınırsız bir aralık olan (a , ∞) ile sınırlı tamsayılardan oluşacak bir küme ise,

$$Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x\}$$

olarak belirtilir.

Tamsayılardan oluşan değerleri 0 dan buyük olacak bir küme, $\mathbb{Z}^{>0}$olarak, $(0 , \infty)$ aralığında gerçel sayılardan oluşacak bir küme elemanları $\mathbb{R}^{>0}$ olarak gösterilebilir.

Küme tanım yöntemlerinin en çok kullananılanları incelemiş ve açıklamış olduğumuzden küme tanıtımlarını burada tamamlıyoruz. Gerek küme tanımları, gerekse, biraz sonra göreceğimiz Russell paradoksu için başlıca kaynaklar, https : // en.wikipedia.org / wiki / Set – builder_notation

Ali Nesin, “Sezgisel Kümeler Kuramı”

ve Internet'de yayınlanmakta olan çok sayıda ilgili sitelerdir.

1.3.4 - Eşit, Alt ve Öz Alt Kümeler

Birbirleri ile aynı elemanları içeren kümeler “Eşit Kümeler” olarak tanımlanır. Eşit kümeler, amaca yönelik küme tanım yönteminde aynı yüklemi sağlayan ve aynı sayıda eleman içeren kümelerdir. Aynı sayıda ve aynı elemanlara sahip iki küme, eleman sıraları farklı bile olsa, eşit kümelerdir.

Aynı yüklemi sağlayan ve eleman sayıları aynı olan iki küme eşit kümelerdir.

$\{x \mid \Phi(x)\}$; $\Phi(x) = A(x) = B(x)$

ise, A ve B kümelerinin elemanları aynı yüklemi paylaşırlar. Bu kümelerin kardinaliteleri aynı ise bunlar eşit küme olurlar.

İki kümenin eşit olması için mutlaka benzer yüklemi paylaşmaları gerekmez. Bunlar, eklentisel küme oluşturma yöntemi ile oluşturulmuş, farklı türde olabilen, fakat aynı elemanları içeren kümeler olabilir. Örnek

A = {Hasan, 45 , 16}

B = {16 , Hasan , 45}

kümeleri eşit kümelerdir ve A = B şeklinde tanımlanırlar. B kümesinde elemanların sırasının, A kümesinden farklı olduğu görülüyor. Küme eşitliği için önemli olan her iki kümede de aynı elemanların bulunmasıdır. Aynı elemanları içeren iki küme, eleman sıraları farklı bile olsa, eşit küme olarak nitelendirilir.

Elemanları farklı olan A ve B kümeleri farklı kümelerdir. Farklı kümeler A ≠ B olarak belirtilir. Burada görülen ≠ simgesi, "farklıdır" anlamına gelmektedir. Örnek:

A = {25 , 89 , 56} ; B = {Claire , Arlène , Moïse}

kümeleri farklı kümelerdir ve A ≠ B veya B ≠ A olarak belirtilebilirler.

Bir A kümesinin tüm elemanları, aynı zamanda bir B kümesinin de elamanları iseler A kümesi B kümesinin bir alt kümesi olarak nitelendirilir ve A ⊆ B olarak gösterilir. Burada, ⊆ simgesi, "Alt KÜme veya Eşit Küme" anlamındadır ve ⩽ "Küçük veya Eşit" simgesi ile benzerdir. A ⊆ B gösterimi, "A kümesi B kümesinden küçüktür veya eşittir" anlamına gelmektedir. Kapalı uç küçük olan kümeye, açık uç büyük olan kümeye işaret eder. Örnek olarak,

A = {Armut , Ayva}   B = {Armut , Ayva , Nar}

Olarak tanımlanmış iki kümeden, A kümesi, B kümesinin alt kümesidir ve A ⊆ B olarak gösterilir. Bu örnekte A kümesi B kümesinin alt kümesi, B kümesi de A kümesinin bir üst kümesidir.

Boş küme, her kümenin bir elemanı olduğundan, her kümenin de bir alt kümesidir.

Eğer A bir kümesinin tüm elemanları, B kümesinin de elemanları değil ise, A kümesi B kümesinin bir alt kümesi değildir ve A $\not\subset$ B olarak gösterilir.

Bir kümenin eleman sayısı, alt kümesi olduğu kümenin eleman sayısından ya düşüktür ya da her iki kümenin eleman sayıları aynıdır. Yani eşit kümelerdir.

Eşit kümeler birbirlerinin alt kümeler olduklarından, her küme daima kendi kendisinin alt kümesi olacaktır. Örnek,

$A = \{1 , 2 , 3\}$; $B = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

kümelerinde, A kümesi B kümesinin alt kümesidir ve $A \subseteq B$ olarak belirtilir.

$A = \{1 , 2 , 3\}$; $B = \{1 , 2 , 3\}$

kümeleri bir birlerine eşit kümelerdir ve A = B dir. Bu durumda hem A kümesi B kümesinin alt kümesi olarak nitelendirilebilir ve $A \subseteq B$ olarak gösterilebilir, hem de, B kümesi A kümesinin alt kümesi olarak nitelendirilebilir ve $B \subseteq A$ olarak belirtilebilir.

Eğer bir B kümesinin tüm elemanları, A kümesinin bazı elemanlarına eşit ise, yani A kümesi B kümesine eşit değilse ($B \neq A$), B kümesi, A kümesinin bir öz alt kümesi olarak tanımlanır ve $B \subset A$ olarak belirtilir. Örnek olarak,

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2\}$

olarak tanımlanmış iki kümeden B kümesi, A kümesinin bir öz alt kümesidir ve $B \subset A$ olarak belirtilir. Formülde A'nın küçük, B'nin ise büyük olduğu belirtilmektedir.

Eğer A ve B kümeleri, $A \subseteq B$ olarak belirtilmişlerse, iki olasılık vardır. Bunlar,

- A kümesi B kümesine eşittir. Bunun anlamı, $A = B$ aynı zamanda $A = A$ dır. Yani her küme kendisinin bir alt kümesidir.
- B kümesi A kümesinden büyüktür. Bu durumda $|B| > |A|$ (B nin eleman sayısı A dan büyük), eş anlamlı olarak $|A| < |B|$ olur. A kümesi B kümesinin bir öz alt kümesidir.

Eğer A ve B kümeleri farklı kümeler iseler, yani $A \neq B$ ise, Bunlar $A \subset B$ veya $B \subset A$ şeklinde birbirlerinin öz alt kümeleri olabilirler.

Sayı kümeleri arasında,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

ilişkisi belirgindir. Yani, her doğal sayı, bir tamsayı (tamsayılar kümesinin bir elemanı), her tamsayı bir rasyonel sayı, her rasyonel sayı bir gerçel sayıdır. Bu olgu gerçek olmasına karşın, bu kümeler birbirleri ile eşit kümeler olmadıklarından, yani $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ olduğundan,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

şeklinde bir belirtme, olayın niteliği açısından, daha açıklayıcıdır.

Eğer bir M kümesi, bir N kümesinin öz alt kümesi değil ise, $M \not\subset N$ olarak belirtilir.

Burada dikkat edilecek nokta, B kümesinin A kümesinin bir öz alt kümesi olmasına karşın, A kümesinin bir elemanı olmadığıdır. Aynı şekilde C = {1} şeklinde tanımlanan bir küme de, A kümesinin bir öz alt kümesidir, fakat bir elemanı değildir. Eğer A kümesi,

$A = \{1 , 2 , 3 , \{1 , 2\} , \{1\}\}$

olarak tanımlanmış olsaydı, B ve C kümeleri, A kümesinin hem öz alt kümeleri, hem de elemanları olurlardı.

Bu konuda, kendiniz de değişik örnekler oluşturarak, alt küme, öz alt küme ve eleman kavramlarını iyice özümseyiniz.

Eğer bir küme, bir başka kümesinin alt kümesi fakat özalt kümesi değil ise, her iki küme birbirlerine eşit kümelerdir.

Tanım olarak incelersek, bir küme, bir başka kümenin alt kümesi ise, kendisinin bütün elemanları, üst kümede aynen bulunmakta demektir. Buna ek olarak kendisi, üst kümenin bir öz alt kümesi değilse, üst küme ile farklı eleman sayıları yoktur ve bu iki küme birbirlerine eşittir. Matematik olarak belirtilmek istenirse,

$(B \not\subset A) \wedge (B \subseteq A) \longrightarrow (B = A)$

Bu ifade, “Eğer, bir küme, bir başka kümenin alt kümesi ise fakat öz alt kümesi değilse bu iki küme birbirleri ile eşit kümelerdir.

Bu ifade, tek yönlü koşul bağlacı (⟶) ile bağlı iki önermeyi (p ve q önermelerini) içerir. Tek yönlü koşul ifadesi,

$p \longrightarrow q$

şeklindedir ve “p, q için yeterlidir” olarak belirtilir. B önerme, sadece ardıl (q) nün “Yanlış” (F) olduğu durumda yanlıştır. Matematik daima başlatıcı (koşul belirleyici) nin “Doğru” (T), ardılın da “Doğru” (T) olduğu durumlarla ilgilenir.

Burada q , A=B şeklinde tek (atomik) bir önermedir. Başlatıcı p önermesi ise, ve (∧) bağlacı ile bağlanmış iki basit önermeden oluşan bileşik bir önermedir. Bu önerme,

$(B \not\subset A) \land (B \subseteq A)$

şeklindedir ve (∧) işlemcisinin tanımı gereği, sadece her iki basit önerme “Doğru” (T) ise doğrudur. Böylece p önermesinin “Doğru” (T) olması için, hem A kümesinin B kümesinin bir alt kümesi olduğu “Doğru” (T) olmalı, hem de A kümesinin B kümesinin bir öz alt kümesi olmadığı “Doğru” (T) olmalıdır.

Bu ifadede de, eğer p ⟶ q önermesi “Doğru” (T) ise ve p de “Doğru” (T) ise, “Modus Ponens” (Doğruluğu belirten yöntem) olarak adlandırılan (p ⟶ q önermesi “Doğru” (T) ise, p de “Doğru” (T) ise, dolayısı ile q de “Doğru” (T) dir) şeklinde bilgilenme ile, q nün doğruluğu belirlenir. Bu bir çıkarımdır ve sav olarak ileri sürülmüştür. Dikey açıklama ile,

- $p \longrightarrow q$

■ p

∴ ------

q

olarak, Yatay açıklama ile,

$(B \not\subset A) , (B \subseteq A) \vdash (B = A)$

olarak belirtilir. Modus ponens bilgilenme yöntemini (inference) daha ayrıntılı olarak "Matematik Mantık" konusunda, inceleyeceğiz.

Soldan sağa doğru tek yönde koşullu olan bu ifade aynı zamanda sağdan sola doğru ters yönde de koşulu sağlamaktadır. Yani,

$(B = A) \longrightarrow (B \not\subset A) \wedge (B \subseteq A)$

$q \longrightarrow p$

olarak belirtilebilir. Bu yeni tek yönlü koşullu ifade, "q , p için yeterlidir" şeklinde açıklanır. Oysa daha önce,

$p \longrightarrow q$

önermesinin geçerli olduğu belirtilmişti. Bu tek yönlü koşullu önerme, "p, q için yeterlidir ve q, p için gereklidir" olarak açıklanır.
Hem sağdan sola, hem de sağdan sola doğru iki koşullu birden ifade geçerli ise,

$p \longleftrightarrow q$

iki yönlü koşullu ifade, yani "Eşdeğerlik İfadesi" geçerli olur. Bu ifade, her iki yöndeki kollu ifadelerin söylemleri birleştirilerek, "p , q için yeterli ve gerekli koşuldur" olarak belirtilebilir. Böylece,

$$(B \not\subset A) \land (B \subseteq A) \longleftrightarrow (B = A)$$

olarak yazılabilir ve buradan, $(B \not\subset A) \land (B \subseteq A)$, $(B = A)$ için yeterli ve gereklidir ifadesi ve buradan da ancak ve sadece ancak $(B \not\subset A) \land (B \subseteq A)$ olduğunda, $(B = A)$ olur ifadesi elde edilir. Bu bir kısıtlama (tekilleştirme) ifadesidir ve $B \not\subset A) \land (B \subseteq A)$ oldukça mutlaka $A= B$ olacaktır. Bu ifade sözel olarak, "Bir B kümesi, A kümesinin alt kümesi olup, öz alt kümesi değilse, A kümesine eşittir" şeklinde açıklanır. Aynı şekilde, "Bir B kümesi, bir A kümesine eşitse, onun alt kümesidir, fakat öz alt kümesi değildir" şeklinde de belirtilebilir.

Tamsayılar kümesinin bir alt kümesi olan, bir I (Iota) alt kümesinin (x , y) aralığında elemanları olan bir Q kümesinin aralık kümesi olması için,

$$\exists_t \forall_{x,y} \; (x,y \in \mathbb{Z} \land (x< t< y \longrightarrow t \in I \;)$$

olması gerekli ve yeterlidir.

Alt kümelerin özelliklerinin incelenmesi için "İlişki" (Relation) kavramının tanıtılmış olması yararlı olacaktır. Bir ilişki ~ simgesi ile belirtilir ve herhangibir ilişki olabilir.

İlişki en iyi bir şekilde bir ilişki kümesi R olarak belirtilebilir. Eğer belirli bir nesne bu ilişkiyi sağlayabliyorsa R kümesinin bir elemanı olarak kabul edilir. R kümesinin elemanı olmayan bir nesne, R kümesinin oluşum kiteri olarak belirtilen ilişkiyi sağlayamamış demektir.

Örnek olarak, bir fonksiyon iki küme arasında bir ilişki sağlaya-bilir. Her “Kalkış Kümesi” (tanım kümesi) (domain), bir fonksiyon aracılığı bir “Varış Kümesi” (değer kümesi) (codomain) (range) oluşturabilir. Bu bir ikili ilişkidir. Kalkış kümesi ile varış kümesinin aynı sıradaki elemanları bir ikili toplu·luk(tuple) (x , y) oluştururlar. Topluluğun ilk elemanı, kalkış kümesinde biriciktir. Eğer fonksiyon tek değerli bir fonksiyon ise, varış kümesinde de bir tek elemana karşı gelir. İki kümenin grafiği, her iki kümede aynı sırada olan elemanların oluşturduğu toplulukların eleman sayısının (n-tuple)(yani n elemanlı bir topluluk, başlangıçta anlaşılması için, 2-tuple veya bir çift <x,y> veya (x,y) çifti olarak belirtilir), n boyutlu uzayda koordinatları olarak kabul edilir.

İki kümenin kartezyen çarpımı, A × B , elemanları A ve B kümelerinin sıralı elemanlarının ikili topluluklarından, (2-boyutlu topluluk) oluşan bir kümedir. Bu kümenin 2 boyutlu uzayda x ve y koordinatlarını oluşturması, bu noktalarının 2 boyutlu uzayda grafiğinin çizilebilmesini sağlar. Bu olayı René Descartes (Renatus Cartegianus) bulmuş ve onun anısına iki boyutlu uzaya “Kartezyen Uzay” adı verilmiştir.

$$A \times B = \{(a , b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

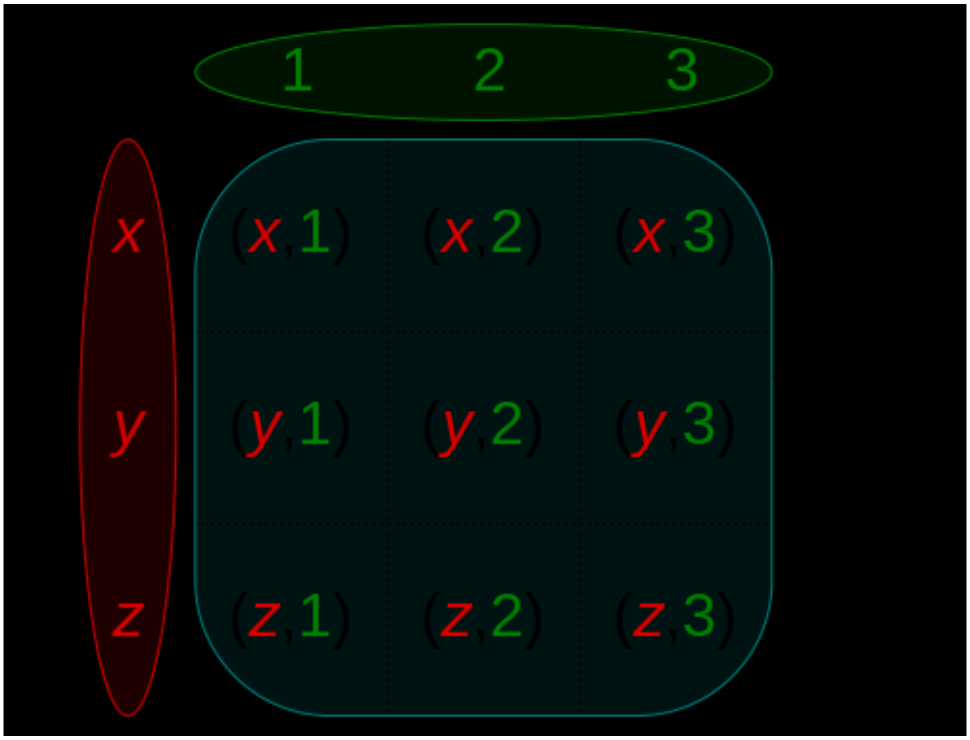
Örnek olarak, kalkış kümesi D = {2 , 4, 6} , ilişki f(x) = 2 x +3 olsun. Varış kümesinin elemanları, y = f(x) ilişkisinden hareke-tle, R = {f(2) , f(4) , f(6)} olarak hesaplanır ve R = {2 × 2 +3 , 2 × 4 +3 , 2 × 6 +3} = {7 , 11 , 15} olarak bulunur. D ve R kümelerinin sıralı elemanları birer ikili topluluk (çift) oluştururlar. Grafik olarak 2 boyutlu uzayda (düzlemde) çizilen noktalar bu iki kümenin (kalkış ve varış) (tanım ve değer) (domain ve codomain) aynı sıralardaki elemanlarıdır.

İnsan görüşü en çok 3 boyutlu bir uzayı algılayabilir. Burada 3 küme elemanı için, 3 çift (3-tuple) oluşturulabilir. Bunlar (2 , 7, 16) , (4 , 11 , 12) ve (6 , 15 , 25) gibi üçlülerdir. Her üçlünün ilk elemanı yatay, ikinci elemanı dikey eksen koordinatı olarak düşünülürse, kalkış ve varış (domain ve range) (domain ve codomain) kümelerinin grafiği kartezyen uzayda çizilebilir.

Bir başka örnek de A = {x , y ,z} ve B = {1 , 2, 3} elemanları olan iki kümenin kartezyen çarpımıdır. Kartezyen çarpım,

$A \times B = \{\{x , 1\}, \{y , 1\} , \{z , 1\} , \{x , 2\}, \{y , 2\} , \{z , 2\} , \{x , 3\}, \{y , 3\} , \{z , 3\}\}$

olarak belirlenir. Olayın yürüyüşü, aşağıda şematik olarak belirtilmiştir.



Şekil 1.3.4 - 1 : {1 , 2 , 3 } ve {x , y , z} Kümelerinin Kartezyen Çarpımı (Kaynak : Wikipedia)

Bir fonksiyonun kalkış kümesi ile varış kümesi bu fonksiyonun grafik kümesi ile belirlenir. Grafik kümesi G, kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesidir.

Bir (x , y) ∊ G ifadesi, "x , y 'ye R ilişkilidir" şeklinde okunur ve xRy veya R(x , y) olarak belirtilir. Bu son şekil, X × Y nin bir alt kümesi olan G nin "Karakteristik Fonksiyonu" olarak belirtilir. Eğer R(x , y) = 1 ise (x , y) ∊ G dir, yoksa R(x , y) = 0 (yanlış) dır. Diğer bir söyleyiş şekli ile, (x , y) çifti, R ilişki kümesinin bir elemanı değildir.

Bir fonksiyonun kalkış kümesi (domain) en az bir y için xRy olduğu tüm x lerin elemanı oldukları kümedir. Bir fonksiyonun varış kümesi (range) ise, en az bir x için xRy olduğu tüm y lerin elemanı oldukları kümedir.

Bir foksiyonun alanı (field) ise, kalkış ve varış kümelerinin birleşimi (union)'u dur. Kümelerin Birleşimini birazdan inceleyeceğiz.

Bir kümenin kendi elemanları arasında, belirli bir ilişki olabilir. Örnek olrak, bu kümenin elemanları belirli bir mahallenin aileleri olabilir. Bu tür kümeler, bilgisayar sistemlerinde çok uygulama alanı olan, ilşkisel veri temelerini oluştururlar.

Bazı durumlarda, bir kümenin elemenları başka bir kümenin elemanları arasında bir ilişki olabilir. Bu ilişkiler, küme elemanlarının, sıralı bir kümenin elemanları ile karşılaştırılıp sıralanması gibi uygulamalar için yararlı olmaktadır.

Kümelerin alt kümelerle bir başka ilişkisi, yansıma (refleksiyon) ilişkisidir. Yansıma "eşittir" gibi, "büyüktür" gibi, "herhangibir ilişki üzerine olabilir. Yanısıma, bir öznenin kendisi üzerinden geri dönmesidir. Önek olarak, "Arıtma" bir öznenin dışarıya doğru yaptığı bir eylem, "Arınma" bir öznenin kendi kendini psikolojik olarak kötü düşüncelerden kurtarma çabasıdır. Yani, yansıma, dışa karşı yapılmış bir hamlenin vardığı yerde, aynı etkinin kendine yönlenmesidir. Yansıma olayı için en tanınmış örnek, "Bumerang Etkisi" olabilir.

Eğer bir A kümesindeki elemanlar birbirleri ile ikili ilişki içinde iseler, tüm A elemanları için, R(a,a) doğru ise, yani her değer kendisi ile ilişki içinde ise, bu kümede yansıma özelliği vardır. Diğer bir söylem şekli ile, A kümesindeki elemanların ilişki kümesi R, eğer ve sadece eğer (a ,a) çifti R kümesinin elemanı iseler Yansımalı bir ilşikidir. Matematik olarak, eğer ve sadece eğer $(a , a) \in R$ olduğunda, A kümesi üzerindeki ilişki kümesi R yansımalı bir ilişkiyi belirtir.

Bir kümenin eleman çiftleri, (1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) olarak düzenlenir. 1 ile 1 arasında = , ≤ , ⩾ ilişkileri geçerlidir. Bu durumda, tüm sayısal kümeler için, elemanlar arasında = , ≤ , ⩾ ilişkileri sağlanabildiğinden bu kümeler yansımalıdır. Buna rağmen < ve > ilişkileri yansıma sağlamazlar çünkü ne 1 > 1 ne de 1 < 1 ilişkileri geçerli değildir.

Bir {1 , 2} kümesini gözönüne alalım. Bu kümenin tüm alt kümeleri, {Ø} , {1}, {2} , {1 , 2} kümeleridir. Bu kümelerin çiftleri, ({Ø} , {Ø}) , ({Ø} , {1}) ,({Ø} , {2}) , ({Ø} , {1 , 2}) , ({1} , {1}) , ({1} , {1 , 2}) , ({2} , {2}) , ({2} , {1 , 2}) , ({1 , 2} , {1 , 2}) olaarak düzenlenir. Bu çiftlerin tümü, {1 , 2} kümesinin alt kümesi olmak özelliğini sağlarlar. Bu durumda, herhangibir kümenin tüm alt küme çiftleri o kümenin alt kümeleri olmak özelliğini yansıtırlar. Bir kümenin tüm alt kümelerinin yansıma özelliği, basitçe, A ⊆ A ise, A kümesinin tüm alt küme çiftlerinin yansıma özelliği vardır olarak açıklanır.

Kümelerin birbirleri ile etkileştikleri bir başka ilişki de simetri özelliğidir. Simetri özelliği, bir grubun bir başka grupla aynı özellikleri paylaşmasıdır. Eğer A mutfağında bir çorba yapılıp B mutfağına servis ediliyorsa, B mutfağında da aynı çorba yapılıp A mutfağına servis ediliyorsa, A ve B mutfakları simetrik mutfaklar olarak nitelendirilir.

Kümelerde simetri, Eğer bir A kümesi B kümesinin Bir alt kümesi ise, B kümesi de A kümesinin bir alt kümesidir şeklinde açıklanır. Bunu bir şekil olarak düşünelim. Yanyana iki bahçe düşünelim, bu bahçedeki ağaçların aynıları diğer bahçede bulunsun, bu iki bahçe simetrik bahçelerdir.

Kümelerde simetri olayı, “eğer bir küme bir başka kümenin alt kümesi ise, o küme de ilk kümenin bir alt kümesi ise, iki küme simetriktir” şeklinde açıklanır. Formül olarak açıklandığında, iki kümenin simetri özelliği,

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

olarak belirtilir ve iki simetrik küme,

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \longrightarrow (A = B)$

gereğince, zorunlu olarak eşit kümelerdir. Örnek,

$A = \{7 , 8\}$; $N = \{8 , 7\}$

$(A \subseteq N)$; $(N \subseteq A)$; $A = N$; $N = A$

Bir başka küme - alt küme özelliği de geçişlik (transivity) özelliğidir.

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \longrightarrow (A \subseteq C)$

olarak açıklanır.

İlişkiler, ileride bir konu halinde, ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.3.5 - Boş Küme

Bir boş küme, hiçbir eleman içermeyen bir küme olarak tanımlanır ve aşağıda görüldüğü gibi, Ø (İskandinav Ö karakteri) ile veya {} olarak belirtilir.

Ø = {}

Boş küme, tüm kümelerin bir elemanı olarak kabul edilir. Bunun nedeni,

- Eğer boş küme Ø, Bir A kümesinin elemanı değil ise, A kümesinin elemanlarından farklı bir eleman içermesi gerekecektir.
- Oysa bu mümkün değildir, çünkü boş küme Ø hiçbir eleman içermez
- Alfred North Whitehill'e göre, bir nesne, ya belirli bir kümenin elemanıdır veya değildir.
- Bu durumda, boş küme Ø nin, herhangibir A kümesinin elemanı olmadığı yanlışsa, herhangibir A kümesinin elemanı olduğu doğrudur.

Bir A kümesi,

A = {1 , 2 , 3}

olarak tanımlanmışsa, gerçekte boş küme de bu A kümesinin bir elemanı olduğuna göre,

A = {1 , 2 , 3 , Ø}

olarak yazılması gerekir. Boş kümenin, tüm kümelerin bir elemanı olduğu bilinmekle birlikte, genel olarak küme tanımlarını kısa tutmak için yazımda gözardı edilir.

Boş küme tanım olarak hiçbir eleman içermez. Bundan dolayı, kümelere boş küme eklenmesi, kümelere yeni bir eleman eklemez ve dolayısı ile boş küme eklenmiş bir kümenin kardinalitesi (eleman sayısı) değişmez.

Boş küme, tüm kümelerin bir elemanı, dolayısı ile alt kümesi sayılır, fakat, hiçbir eleman içermediğinden kendisinin bir elemanı ve dolayısı ile alt kümesi değildir.

Boş küme çok önemli bir kümedir. Boş kümeden başka hiçbir küme, kendisi dışında, tüm kümelerin bir elemanı ve dolayısı ile alt kümesi değildir.

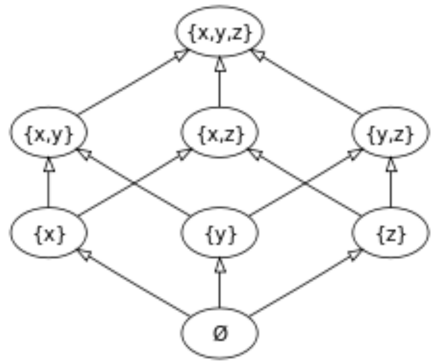
1.3.6 - Kuvvet Kümesi

Bir kümenin "Kuvvet Kümesi" (Power Set) bu kümenin oluşturulabilir tüm alt kümelerini eleman olarak içeren bir kümedir. Bir x kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}_{(x)}$ 'in eleman sayısı,

$$| \mathcal{P}_{(x)}| = 2^{|x|}$$

olarak belirtilir. Burada x kümesi eleman sayısına, boş küme Ø ve x kümesinin kendisi de dahildir. Eğer eleman bir küme ise, tek bir eleman sayılır. Örnek olarak, bir θ (teta) kümesi $\theta = \{x , y , z\}$ olarak tanımlanmışsa, $| \mathcal{P}_{(\theta)}| = 2^{|\theta|} = 2^3 = 8$ yani, θ kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}_{(\theta)}$ nın eleman sayısı, 8 olacaktır. $\mathcal{P}_{(\theta)}$ kümesi aşağıda görülmektedir.

$\mathcal{P}_{(\theta)} = \{\{Ø\} , \{x\} , \{y\} , \{z\} , \{x , y\} , \{x , z\} , \{y , z\} , \{x , y , z\}\}$



Şekil 1.3.6 - 1 : θ = {x , y ,z} Kümesinin Kuvvet Kümesi $\mathcal{P}_{(\theta)}$ nın Elemanları (Kaynak : Wikipedia)

Yukarıdaki şekil, kuvet kümelerini anımsamak için iyi bir yöntem olabilir. Üç elemanlı bir kümenin, kuvvet kümesinin eleman sayısı, bir kübün köşegönlerini dolduracak kadardır (8 küme).

1.3.7 - Russell Çelişkisi

Russell çelişkisi, wikipedia'da çok iyi açıklanmıştır. Burada bu açıklamayı izleyeceğiz.

Bir düzlemde, tüm kareler bir kümede toplansın. Bu küme bir kare olmadığından kendi kendini içermez ve "Normal" bir küme olarak nitelendirilir. Bir de bu kümenin tümleyicisini düşünelim, bu küme aynı düzlemde, tüm kare olamayan cisimleri içerecektir. Kendisi de bir kare olmadığından, kendi kendini de içerecektir. Bu kümeye de "Anormal" bir küme nitelendirilmesini yapalım.

Bu tanıma göre normal bir küme,

$R = \{x \mid x \in x\}$

Bu tanıma göre anormal bir küme,

$R = \{x \mid x \notin x\}$

Şimdi R kümesinin tüm kümeleri içinde alan evrensel küme olduğunu düşünelim:

Anormal kümelerin evrensel kümesi R in tüm elemanları, x anormal kümeleridir.

Bu x kümelerinin kendi kendilerini eleman olarak içermeyen anormal kümeler olacakları, anormal kümelerin tanımı gereğidir.

R tüm anormal kümelerin evrensel kümesidir. Bu durumda, tüm anormal kümeleri eleman olarak içermesi gerekmektedir.

R de bir anormal kümedir ve evrensel küme olarak kendi kendisini de içermelidir.

R kümesi kendi kendini içerirse, normal bir küme olacaktır.

Oysa R anormal bir küme olarak tanımlanmıştır ve normal küme olması bir çelişkidir.

Buna Russell çelişkisi (Russell Paradoksu) (Russell (Antinomisi) adı verilir. Russell çelişkisi aşağıdaki gibi formüle edilmektedir.

$R = \{x \mid x \notin x\}$ ise $R \notin R \longleftrightarrow R \in R$

Bu sonuç, sınırsız içerik kavramına olanak sağlayan sezgisel küme sisteminin kararsız olduğunu ve geçersiz sayılması gerektiğini belirtir. Oysa, Frege gibi formalist akımı savunanlar, kümeler kuramına ve matematik mantığa dayanan belirli fomüllerin matematiği eksiksiz açıklayabileceği düşüncesine dayanmaktaydılar. Sezgisal küme sisteminin bu olanağı sağlamadığı anlaşılınca bu formalist düşüncenin de ortadan kalkması gerekirdi. Oysa, formülasyon, matematiğin temel işlevidir ve bundan yoksun olunduğunda, insanların içinde yaşamakta oldukları doğanın ilişkilerini açıklamakta araçsız kalacakları kuşkusuzdur. Yani, kümeler kuramı, kolayca gözden çıkarılabilecek bir sistem değildir ve geçerli kalabilmesi için tüm olanaklar kullanılmalıdır. Bu durumda, çelişki incelenmiş ve sadece evrensel büyüklükteki kendi kendini içermeyen kümelerde sorun çıkardığı anlaşılmıştır. Bu sorun, sezgisel küme sisteminden vazgeçilmesi ve küme yapımı ile eleman sayısını kısıtlayıcı aksiyomlar ile çalışılması yöntemi ile aşılmaya çalışılmıştır.

Yani, kendi kendini içermeyen kümelerin evrensel kümesi belki de yoktur. Zaten çelişki yarattığı için aksiyomatik tüm küme sistemleri, eleman sayıları sonsuz olan kümelerin oluşumunu yasaklamaktadırlar.

Belki de “Sonsuz Küme” olarak adlandırılan kavram gerçekten yoktur.

Russell çelişkisi, bir berber analojisi şeklinde de açıklnmaktadır. Bir şehide bir erkek berber varmış (Sevil şehrindeki Figaro da olabilir). Bu berber sadece kendini traş edemeyenleri traş edermiş. Acaba berberi kim traş edecek? Bu sorunun yanıtı, “böyle bir berber olamaz!” şeklinde verilmektedir.

Bu sorunu aşmak için bizzat Russell “Tipler Kuramı” adı verilen bir aksiyom sistemi önermiştir. Tipler kuramı karmaşık ve küme sistematiğini değiştirdiğinden fazla kabul görmemiştir.

Bunun yerine, Zermelo, Frenkel ve Skolem tarafından geliştirilmiş ve “Seçim Aksiyomu” nu da içeren ZFC aksiyom sistemi kabul görmüştür. ZFC başlangıç aksiyomları dışında, küme formülasyonu etkilememektedir. Sadece sonsuz kümlerin oluşumları engellenmektedir. ZFC bu yüzden tercih edilmiş ve bugün ZFC aksiyom sistemi (kanonik) (kanunî) (yasal) küme sistematiği olarak nitelendirilmektedir.

ZFC aksiyom sistemi ile kümeler kuramı, matematik mantık ile yeniden matematiğin temeli haline gelmiş buna rağmen formalist çalışmalar, çok yararlı olduklarına karşın, Gödel’in “EksiklikKuramı” nedeni ile hiçbir zaman yüzde yüz başarıya ulaşamamışlar, fakat matematiğin doğanın açıklanmasındaki anahtar rolü hiçbir zaman kaybolmamıştır.

ZFC sadece kümelerin oluşumunda kısıtlamalar getirmiş, fakat küme ilişkileri sezgisel küme sistematiği ile aynı kalmıştır. Bu nedenle, normalde kümelerle çalışılırken ZFC kısıtlamaları gözardı edilmeye çalışılmadıkça, sezgisel veya aksiyomatik küme kuramları arasında bir fark olmamakta, hangi yöntemle çalışıldığı- dikkatli olmak koşulu ile- fark etmemektedir. Biz de çalışmalarımızda kümeler yöntemini uygulayacak, fakat ZFC kısıtlamalarını aşmamamaya özen göstereceğiz.

ZFC Wikipedia’da çok iyi açıklanmıştır. Bu çalışmada kümeler kuramı üzerinde değil kümeler kuramının uygulanması ile ilgileneceğimizden, ZFC sistematiğinin ve benzer aksiyomatik sitemlerinin incelenmesini ileriye bırakıyoruz. Yine de bu sayfa kurallar kitabı olarak elimizin altında olacaktır.

1.3.8 - Kümelerin Kesişimi

Bir C kümesinin elemanları, hem bir A kümesinde, hem de bir B kümesinde de bulunuyorsa, C kümesine, A ve B kümelerinin kesişmesi (conjunction), A ile B kümelerine kesişen (conjunct) kümeler denilir ve

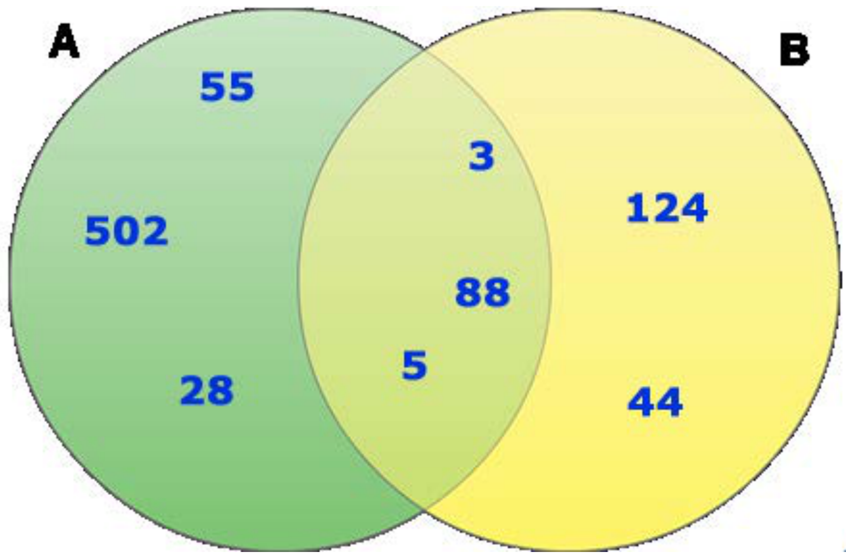
$C = A \cap B$

olarak gösterilir. Formal tanım,

$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)$

olarak belirtilir. Okunuşu: "A ve B kümelerinin kesişim kümesinin elemanları, hem A hem de B kümelerinin elemanıdır"şeklindedir. Yani, iki kümenin kesişim kümesinin elemanları A kümesinin ve B kümesinin ortak elemanları olacaktır.

Örnek olarak, A = {55 , 502 , 28 , 3 , 5 , 88} kümesi ile B = {3 , 44 , 124, 88 , 5} kümelerinin kesişim kümesi, $A \cap B$ = {3 , 5 , 88} kümesidir. Küme işlemleri şematik olarak Venn diagramları ile gösterilebilir. Venn diagramları, kümeleri geometrik şekiller ile gösterip, kümelerin kesişimi gibi olayları görsel olarak açıklama amacı ile oluşturulmuşlardır. Bu diyagramlar ilk olarak, bu yüzyılın başlarında, Oxford Üniversitesinde matematik profesörü olan John Venn tarafından kullanılmışlardır. Aşağıda, bu örneğin Venn diagramı görülmektedir



Şekil 1.3.8 - 1 : İki Kümenin Kesişiminin Venn Diagramı

Eğer A ve B kümelerinin hiç ortak elemanları yoksa, bunlar "Ayrık Kümeler" (disjonct) olarak nitelendirilir. Aslında hiç ayrık küme yoktur. Çünkü, her kümenin tanım olarak bir elemanı boş küme, Ø = {} dir. İki kümenin başka hiçbir elemanı ortak olmasa da tanım olarak birer boş küme Ø içerdiklerinden, her ikisinin de ortak elemanı Ø olur. Böylelikle, hiçbir ortak elemanı olmayan ayrık kümelerinin kesişim kümesi, tek ve zorunlu ortak elemanları olan, boş kümedir. Bu durumda, her ayrık kümenin kesişimi,

$\emptyset = A \cap B$

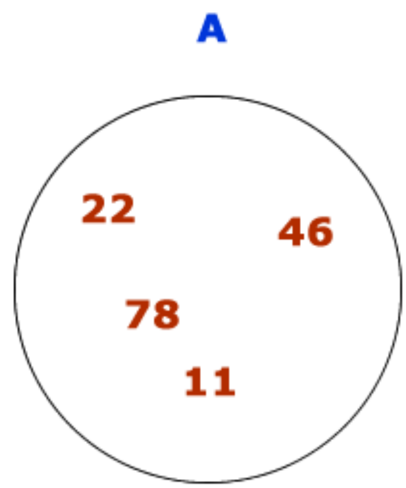
olarak yazılır. Ayrık Kümelerin kesişimi, aşağıda Venn diagramı ile belirtilmiştir.

Şekil 1.3.8 - 2 : İki Ayrık Kümenin Kesişiminin Venn Diagramı

Bir kümenin, boş küme Ø ile kesişimi, boş bir kümedir. Bunun nedeni, her kümenin tanım olarak, boş kümeyi eleman olarak içermesidir. Bu durum şekil 1.3.6 - 2 deki B kümesinin boş küme olarak düşünülmesi ile görsel olarak ortaya çıkar.

Örnek olarak A = {406, 25 , 18} olarak tanımlanan küme, gerçekte, A = {23, 55 , {} , 17} kümesidir ve B = Ø kümesi ile ortak olan elemanı {} olduğundan kesişimi, boş küme Ø olacaktır.

Bir kümenin kendisi ile kesişimi ise yine kendisine eşittir. Çünkü, bir kümenin, öz alt kümesi olmayan tek alt kümesi kendisidir. Kesişim kümesi ortak elemanları içermelidir. Böylece, her kümenin aynı elemanları içerdiği tek ve benzersiz küme kendisi olacak ve kendisi ile kesişmesi halinde, kesişim kümesi aynı ortak elemanları içermesi gerekeceğinden, kesişim kümesi yine kendisi olacaktır. Örnek olarak, A = {22 ,11 , 46, 78} kümesinin kendisi ile kesişimi olan kesişim kümesi A ∩ A = {22 ,11 , 46, 78} = A olacaktır. Aşağıdaki Venn diagramında bu olgu açıkça görülmektedir.



Şekil 1.3.8 - 3 : Bir Kümenin Kendisi ile Kesişiminin Venn Diagramı

Kümelerin kesişimi, önemli özellikler sergiler. Bunlar,

- Değişme Özelliği (Komütatif Özellik)

Değişme özelliği, A ∩ B = B ∩ A olarak belirtilir. Kesişme olayı, arakesit olarak yorumlanırsa, iki kümenin arakesiti tektir. Bu arakesite hangi taraftan bakıldığı farketmez.

- Birleşme Özelliği (Asosiyatif Özellik)

Birleşme özelliği, A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C olarak belirtilir. Doğal olarak, A ∩ B ∩ C kümelerinin arakesiti tektir. Önce hangi çiftin arakesiti ile başlandığı farketmez.

■ Tekgüçlü İşlem (İdempotans)

Tekgüçlü işlem İdempotans) (İdem latince aynı demektir) A ∩ A olarak tanımlanır. Doğal olarak A ∩ A = A olur.

■ Etkisiz Eleman

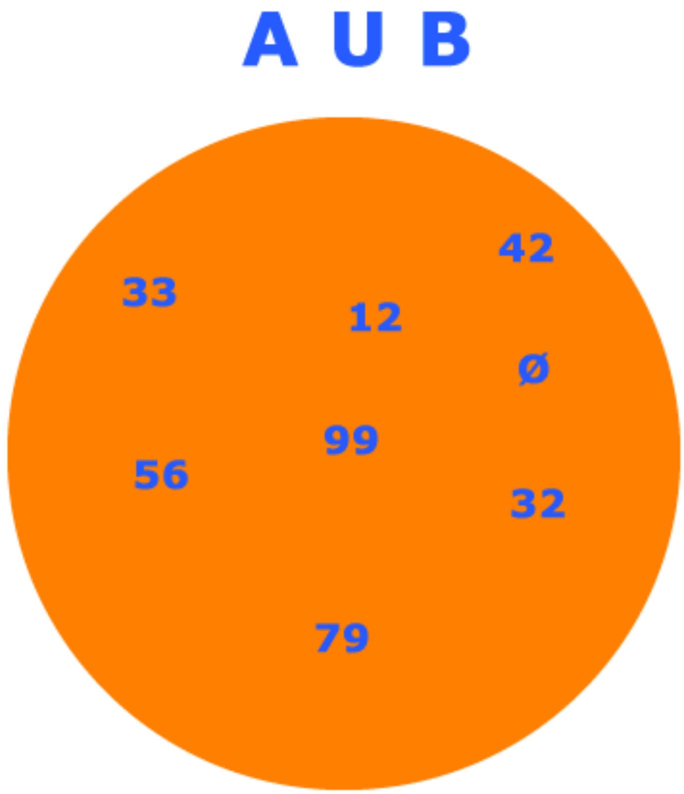
Boş küme hiç eleman içermediği için, herhangibir kümenin boş küme ile kesişimi boş kümeye eşittir. Yani, boş kümenin kesişimde bir etkisi yoktur. A ∩ Ø = Ø

1.3.9 - Kümelerin Birleşimi

Bir kümenin bir başka küme ile birleşimi, elemanları her iki kümenin tüm elemanları olan bir birleşim (union) kümesini oluşturur. A = {33,79,56,Ø,42} ve B = {Ø,42,12,32,99} kümelerinin birleşimi, A U B = {33,79,56,Ø,42,12,32,99} olarak belirtilir.

Birleşimin tanımı,

A U B = {(x | x ∊ A) V (x ∊ B)} olarak belirlenir. Okunuşu, "Birleşim kümesinin elemanları, A veya B kümesinin elemanları olacaktır şeklindedir. Matematikte kullanılan V (veya) sembolü, "dışlamayan veya" sembolüdür. Dolayısı ile, hem A hem de B kümesinin elemanlarının kullanımına olanak sağlar. Bu sembolü matematik mantık konusunda daha yakından inceleyeceğiz.



Şekil 1.3.8 - 1 : İki Kümenin Birleşimin Venn Diagramı

Küme birleşimlerinin önemli özellikleri aşağıda görülmektedir.

- Değişme Özelliği (Komütatif Özellik)

Küme birleşimlerinin değişme özelliği, A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C olarak belirtilir. Birleşme kümesi tek ve benzersiz (unik) olduğundan, bu kümenin oluşumu için, bileşenlerden hangisi ile başlandığı farketmez.

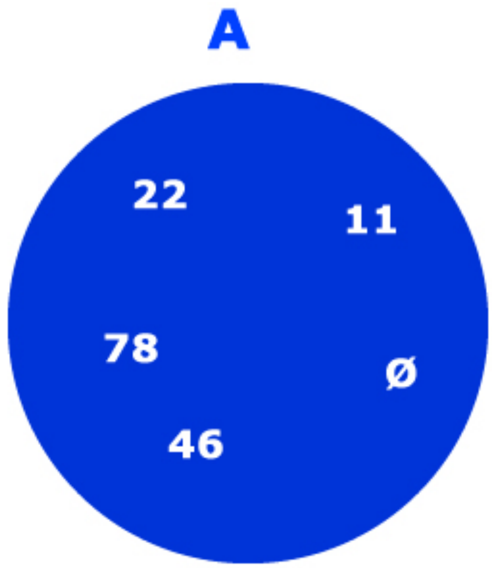
- Birleşme Özelliği (Asosiyatif Özellik)

Küme birleşimlerinin birleşme özelliği, A ∪ B = B ∪ A olarak belirtilir. Birleşme kümesi tek ve benzersiz (unik) olduğundan, bu kümenin oluşumu için, bileşenlerden hangisi ile başlandığı farketmez.

■ Etkisiz Eleman

Bir kümenin, boş küme ile birleşim kümesi, kümenin kendisine eşittir. Bunun nedeni, her kümede tanım olarak, bir boş küme elemanının olması ve kümenin bir boş küme ile birleşimi sonunda, birleşim kümesinin eleman adayları olarak, hem kendi elemanı olan boş küme, hem de birleştiği kümedeki boş küme elemanı yarışacaklardır. Birleşim kümesinde aynı elemanlardan sadece bir tanesi yer bulabileceğinden, bir taneden fazla boş küme elemanına yer yoktur. Yani, bir kümenin boş bir küme ile birleşmesinde, kümesin yapısı değişmeyecektir. Bu durumda, her kümenin, boş küme ile birleşim kümesi yine kendisi olacaktır.

A = {22 , 78 , 11 , 46 , {}} kümesi ile {} kümesinin birleşim kümesi, A kümesinin yine kendisidir.



Şekil 1.3.8 - 2 : Bir kümenin, boş küme ile birleşimi yine kendisidir.

Genel olarak, A U {} = A olarak belirtilir.

- Tekgüçlü İşlem (İdempotans)

A ∪ A = A olarak tanımlanır.

1.3.10 - Kümelerin Farkı

Bir küme ile başka bir kümenin farkı iki kümenin birbirlerine eşit olmayan elemanlarının oluşturduğu bir kümedir. Buna "Fark Kümesi" adı verilir ve A\B olarak gösterilir. Örnek olarak,

A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5}

B = {4 , 5 , 6 , 7}

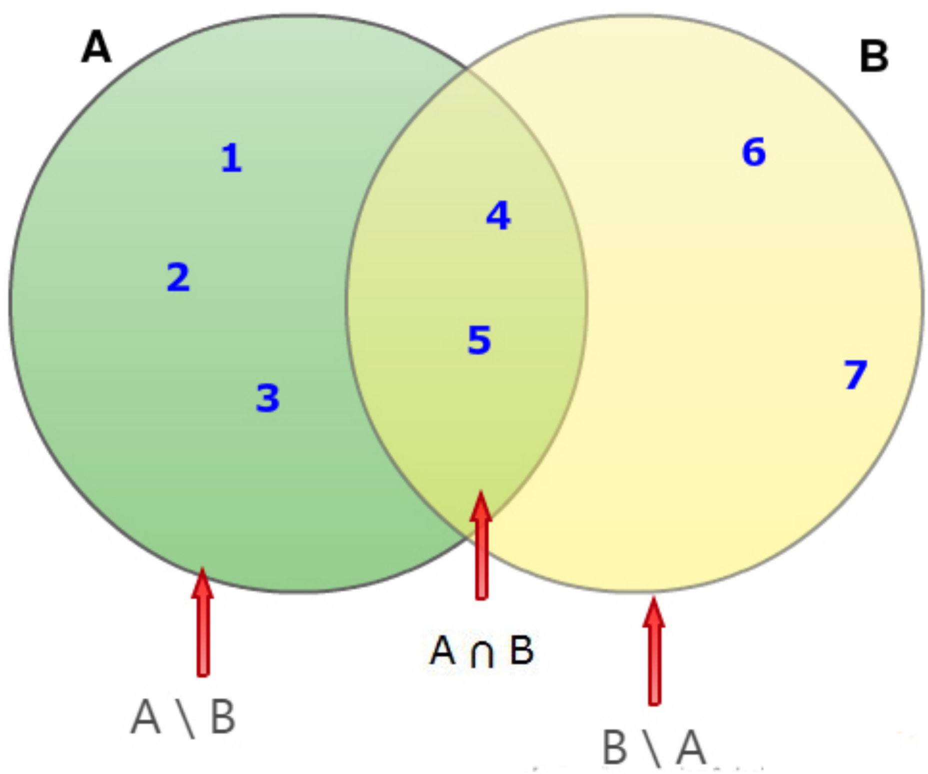
kümeleri verilmiş olsun.

A \ B = {1 , 2 , 3} (Fark A, B) (A nın B den farkı)

B \ A = {6 , 7} (Fark B, A) (B nin A den farkı)

Fark işleminde, A \ B ile B \ A farklarının (A kümesinin B kümesinden farkı) ile (B kümesinin A kümesinden farkı) kümelerinin birbirlerinden farklı kümeler olduklarına dikkat edilmelidir.

Bu örnekte uygulanan fark işlemleri aşağıdaki Venn diagramınde görülmektedir.



Şekil 1.3.10 - 1 : İki küme arasındaki fark işlemleri.

İki kümenin simetrik farkı, Δ sembolü ile gösterilir ve her iki kümenin kesişim kümesinin dışındaki öz alt kümelerinin birleşiminden oluşur. Tanımı,

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

şeklindedir . Bu tanımın okunuşu,"A ve B olarak tanımlanmış iki kümenin simetrik farkı, A \ B ve B \ A kümelerinin birleşim kümesidir" şeklindedir. Yukarıdaki örnekte tanımlanmış olan A ve B kümelerinin simetrik farkı,

$A \Delta B = \{1 , 2 , 3 , 6 , 7\}$

kümesidir. Bu küme, Şekil 1.2.10 - 4 de sarı ve yeşil ile gösterilen alanların tümünü, yani şekilde açık yeşil ile renklendirilmiş olarak görülen kesişim kümesi dışında kalan tüm alanları kapsar.

1.3.11 - Bir Kümenin Tümleyeni

Bir sonlu evrensel (Universal) küme belirli bir tanım ile belirtilir. Örnek olarak,

$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 6\}$

şeklinde tanımlanmış bir küme, $U = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ olarak açıklanır. Eğer bir A kümesi,

$A = \{1, 2, 3\}$ olarak tanımlanmışsa, bir A′ kümesi, A kümesinin, tanımlı evrensel küme yapısına erişimi için eksik kalan elemanları içerir. Burada,

$A' = \{4, 5\}$

kümesi olarak belirtilir. A′ kümesine, A kümesinin (evrensel kümeye) "Tümleyeni" (komplemanı) adı verilir. Bir kümenin belirli bir evrensel (Universal) kümeye tümleyeni (komplemanı) formal olarak,

$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

olarak tanımlanır. Okunması, "A′ kümesinin elemanları, U (Universal) kümenin elemanları arasından seçilir ve A kümesinde olmayan elemanlardan oluşur" şeklindedir.

Bir A kümesinin evrensel küme U ya tümleyeni basitçe,

$A' = U \setminus A$

olarak tanımlanır ve A kümesinin, evrensel küme U dan farkıdır.

1.3.12 - Küme Birleşiminin Kesişme Etrafında Dağılma (Distribüsyon) Özelliği

Kümelerin birleşiminin kesişme etrafında dağılması aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bu konuda, sayısal örnekler, uygulamalarda verilmiştir.

1.3.13 - Küme Kesişmesinin Birleşme Etrafında Dağılma (Distribüsyon) Özelliği

Aşağıda, üç kümenin birleşimin, kesişme etrafında dağılma (distribüsyon) yöntemi belirtilmiştir.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Bu konuda, sayısal örnekler, uygulamalarda verilmiştir.

1.3.14 - Küme Tümleyenlerinin De Morgan Yasaları

Küme tümleyenlerinin De Morgan yasaları aşağıda görülmektedir:

Bir evrensel kümenin alt kümeleri olarak tanımlanmış A ve B kümeleri için De Morgan yasaları

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

olarak belirtilmiştir. Bu konuda, sayısal örnekler, uygulamalarda verilmiştir.

Bölüm Notu: Matematik mantık çalışmaları için, başlangıç temel bilgilerimizi oluşturmuş sayılırız. Çalışmalarımıza "Matematik Mantığa Giriş" konusu ile devam edeceğiz.

Web sayfasına dönüş.