Сплей-дерево

Дерево, являющееся сбалансированным "в среднем"

Операция Splay(u): вращениями поднимает вершину u в корень

__Факт:__ время работы Splay(u) есть O(глубина u).

__Лемма:__ существует такая функция потенциала, определённая на бинарных деревьях и принимающая значения из $[0, O(n \log n)]$, что учётная стоимость операции Splay относ-но неё есть $O(\log n)$.

Повторим $m > n$ раз:

- Выберем самую глубокую вершину
- Вызовем Splay для неё

Суммарное время работы:

$$O(m \log n + n \log n) = O(m \log n)$$

Средняя глубина: $\frac{O(m \log n)}{m} = O(\log n)$

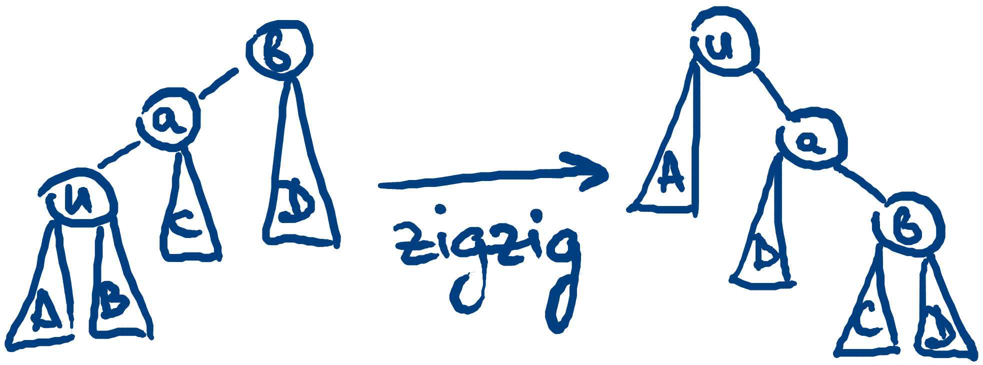
Но сплей-дерево же бывает разбалансированным?..

Детали реализации

Splay(u): вращениями перетащить u в корень.

Пусть u – левый сын своего отца.

Если отец u не корень:



Если отец u – корень:

<u>Search(k)</u>: спускаться по дереву в поиске ключа k; пусть u — последняя вершина (либо в ней ключ k, либо из неё уже некуда идти);

вызвать Splay(u)

<u>Insert(k)</u>: вставить новую вершину, вызвать для неё Splay

Split(k): u - последняя вершина при поиске ключа k; Splay(u)

Merge(v_1, v_2): u - вершина с макс. ключом в v_1; Splay(u); сделаем v_2 правым сыном u

Remove(u): Splay(u);
Merge(u.left, u.right)

Анализ

Потенциал:

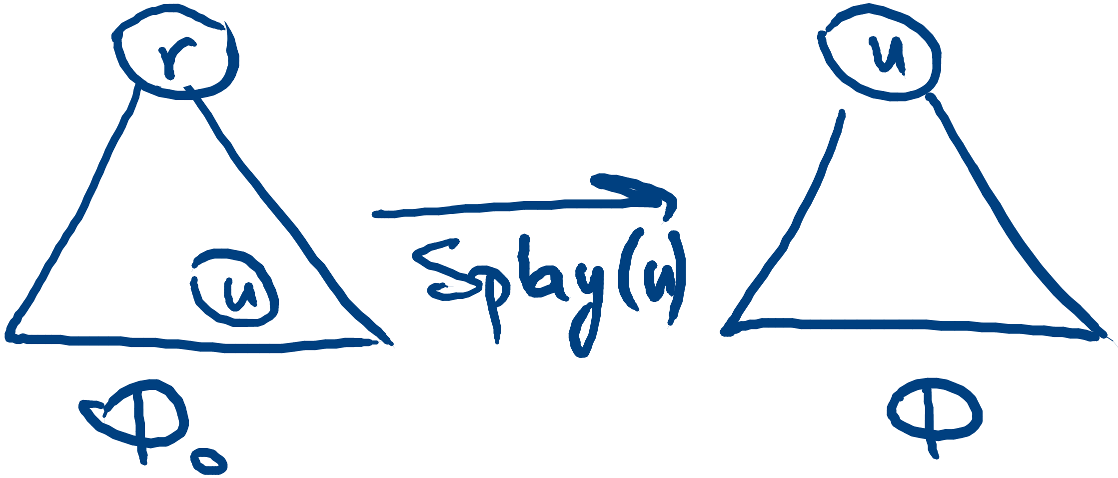
вес вершины: $w(u) = \#$ вершин в поддереве с корнем в u

потенциал вершины: $\Phi(u) = \lfloor \log_2 w(u) \rfloor$

потенциал дерева:

$$\Phi(T) = \sum_{u \in V(T)} \Phi(u)$$

$$0 \le \Phi(T) \le n \log_2 n$$



Покажем, что учётная степень Splay(u) не больше

$$3(\Phi_0(r) - \Phi_0(u)) + 1 \quad (\le O(\log n))$$

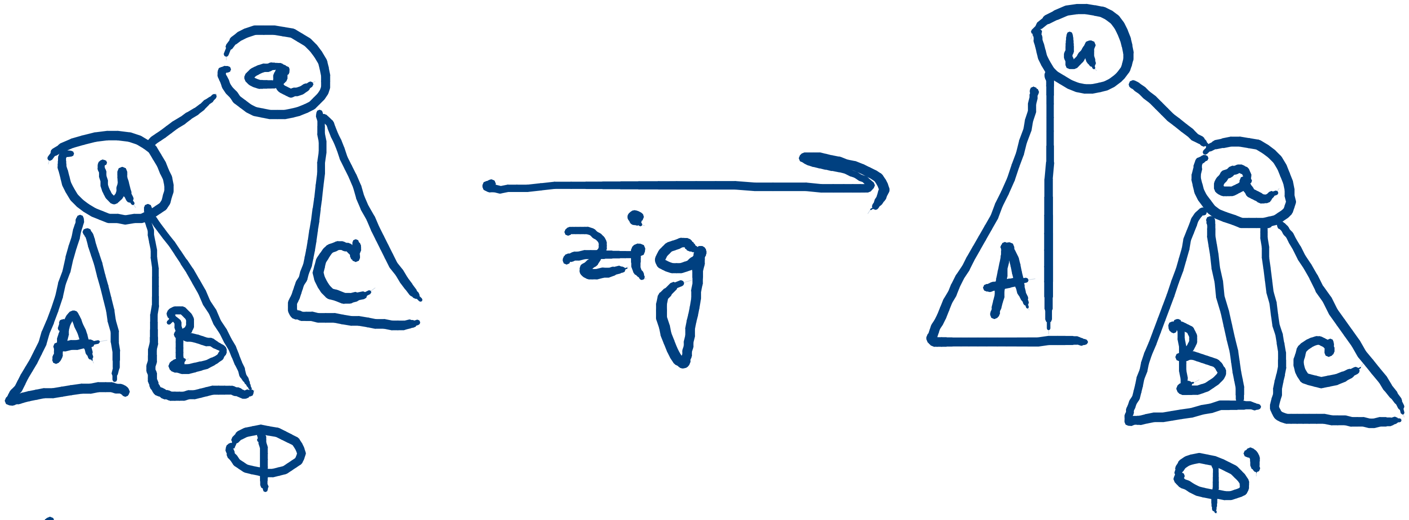
Splay(u):

zigzag, zagzig, ...   , (zig)

Рассмотрим отдельный поворот,
пусть Φ – потенциал до поворота,
Φ' – после.

Покажем, что
1) учётная стоимость zigzig-шага
$$\le 3(\Phi'(u) - \Phi(u))$$
2) учётная стоимость zig-шага
$$\le 3(\Phi'(u) - \Phi(u)) + 1$$

Zig-шаг:



Учётная стоимость:

- □ истинная стоимость = 1
- □ изменение потенциала:

$$\Phi'(u) - \Phi(u) + \Phi'(a) - \Phi(a) = \underline{\Phi'(a) - \Phi(u)} \leq$$

$$\leq \Phi'(u) - \Phi(u) \leq 3(\Phi'(u) - \Phi(u))$$

Zigzig-шаг

Изменение потенциала:

$$\Phi'(u)-\Phi(u)+\Phi'(a)-\Phi(a)+\Phi'(b)-\Phi(b) =$$

$$= \Phi'(a)+\Phi'(b)-\Phi(u)-\Phi(a) \le 2(\Phi'(u)-\Phi(u))$$

Нужно, чтобы $2(\Phi'(u)-\Phi(u))+1 \le 3(\Phi'(u)-\Phi(u))$

Это не так, только если $\Phi'(u)=\Phi(u)$. Тогда в неравенствах сверху было хотя бы одно строгое: т.к. $\Phi'(u)=\Phi(u)$, $\Phi'(a)=\Phi'(b)=\Phi'(u)$, $\Phi(a)=\Phi(u)$, $\Phi(b)=\Phi'(u) \Rightarrow \Phi(a)=\Phi(b)=\Phi(u)=\Phi'(a)=\Phi'(b)=\Phi'(u)$, Итак, лемма доказана, но это даёт нам лишь среднее время работы всех операций Splay!

Изменения потенциала:

<u>Insert</u>: изменяются только потенциалы вершин на пути до вновь вставленной; только для $\log_2 n$ из них целая часть ($\lfloor \log_2 w(\cdot) \rfloor$) может вырасти на 1

<u>Merge(v_1, v_2)</u>: