

## Control 1

### Meteorología Física

8 de mayo de 2022

#### Problema 1

a) Para pasar de un gráfico  $e - T$  a uno  $w_{\text{tot}} - T$  usamos la expresión

$$w = \frac{e \epsilon}{P - e} \simeq \frac{e \epsilon}{P}. \quad (1.1)$$

Con esto ya nos hacemos la idea que en el gráfico  $w_{\text{tot}} - T$ , las curvas  $w_{\text{sat}}$  se verán muy similares a la curva  $e_{\text{sat}}$  en el gráfico  $e - T$ , pero multiplicado por el factor  $\frac{\epsilon}{P}$ .

Las curvas para de  $w_{\text{sat}}$  estarán definidas por

$$w_{\text{sat}} = \frac{\epsilon}{P} e_{\text{sat}}(T), \quad (1.2)$$

donde  $e_{\text{sat}}(T)$  está dado por la ecuación de Clausius-Clapeyron. Luego, estas se verían como en la figura a continuación. En la Figura 1.1, la línea azul corresponde a  $w_{\text{sat}}$  a presión  $P_1$ , mientras que la línea roja

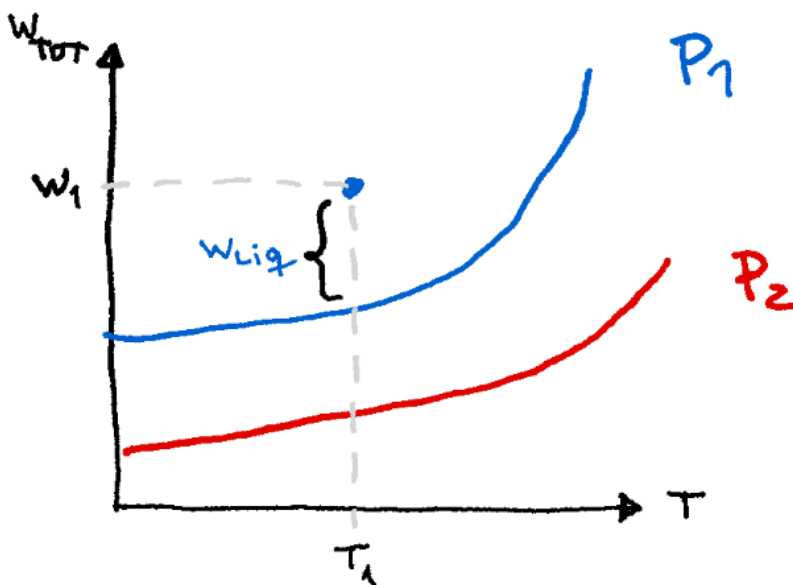


Figura 1.1: Curvas  $w_{\text{sat}}$  para distintas presiones, en función de la temperatura.

corresponde a  $w_{\text{sat}}$  a presión  $P_2$ , todo esto, con  $P_1 < P_2$ . Notemos que como en la Ecuación 1.2 se divide por  $P$ , la curva de  $w_{\text{sat}}$  de  $P_1$  resulta más grande la de  $P_2$ .

A priori, ubicar un punto (una parcela de aire) en el gráfico  $w_{\text{tot}} - T$  no nos proporciona información para identificar su presión, ya que al incorporar el agua líquida no tenemos una ecuación que relacione  $w_{\text{tot}}$  con la presión. Sin embargo, si ya sabemos su presión de un a parcela, podemos obtener la curva  $w_{\text{sat}}$  a esa presión.

Si consideramos un punto por debajo de la curva  $w_{\text{sat}}$  (acorde a la presión de la parcela), usando la Ecuación 1.1 obtendremos que ese punto representa una parcela de aire con una presión de vapor  $e$  subsaturada ( $e < e_{\text{sat}}$ ). A medida que ese punto sube (a  $T$  constante), inferimos que  $e$  se acerca a  $e_{\text{sat}}$ , y que  $e = e_{\text{sat}}$  si  $w_{\text{tot}} = w_{\text{sat}}$ , por la Ecuación 1.2. Ahora, si un punto está por sobre la curva  $w_{\text{sat}}$  la Ecuación 1.1 ya no nos sirve, pues esta nos diría que la parcela presenta una presión de vapor superior a  $e_{\text{sat}}$ , lo cual no es posible. Dado esto, concluimos que si el punto se encuentra sobre la curva  $w_{\text{sat}}$ , la parcela presenta agua líquida. La cantidad de agua líquida corresponderá a la porción de  $w_{\text{tot}}$  que sobresale respecto a la curva.

En la Figura 1.1 indicamos que segmento equivale a  $w_{\text{liq}}$ , considerando que el punto presenta una parcela de aire con presión  $P_1$ . Si la parcela tuviese presión  $P_2$ ,  $w_{\text{liq}}$  sería la distancia vertical entre el punto y la curva roja.

- b) Proceso A: Al calentarse la parcela de aire, aumenta su temperatura. Por simplicidad asumimos que  $w_{\text{tot}}$  se mantiene constante, de modo que solo el agua líquida se transforma en vapor.

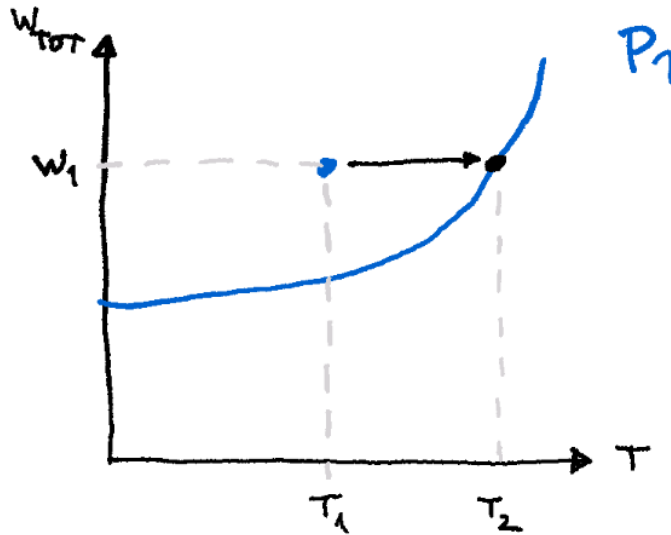


Figura 1.2: Proceso A. La flecha negra representa el proceso.

En la Figura 1.2 podemos ver el proceso A. Como la presión es constante, la curva  $w_{\text{sat}}$  no cambia. Luego, el aumento de temperatura hace que el punto “toque” a la curva  $w_{\text{sat}}$ , siendo este el momento (punto negro) en que pierde toda su agua líquida.

Proceso B: Como el proceso consiste en precipitación, lo que disminuye es  $w_{liq}$ .

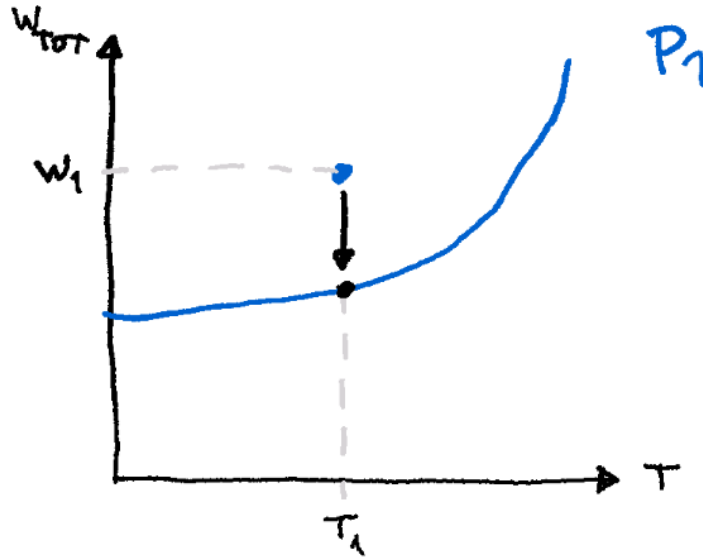


Figura 1.3: Proceso B. La flecha negra representa el proceso.

En la Figura 1.3 vemos el proceso B. Como la presión es constante la curva  $w_{sat}$  no cambia. Como además la temperatura también es constante, no queda otra que  $w_{tot}$  disminuya.

Proceso C: En este proceso, como la parcela desciende, la presión cambia (aumenta), por lo que la curva  $w_{sat}$  varía (baja). Además, como la parcela tiene agua, esta desciende siguiendo un proceso pseudo-adiabático, implicando que a medida que desciende la temperatura aumenta.

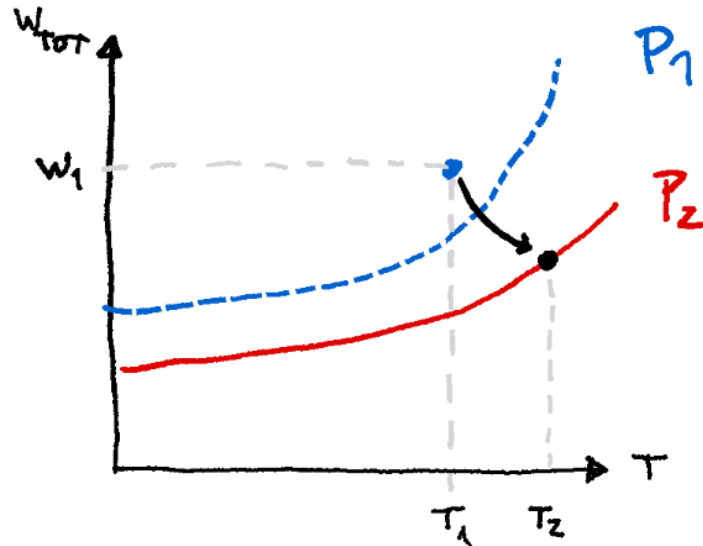


Figura 1.4: Proceso C. La flecha negra representa el proceso. La línea segmentada azul representa la curva  $w_{sat}$  inicial, mientras que la línea roja representa la curva  $w_{sat}$  final.

Considero que acá  $w_{tot}$  disminuye porque según la Ecuación 1.1, si la presión aumenta,  $w_{vap}$  disminuye

Proceso D: Para la mezcla de dos parcelas consideraremos lo siguiente.

Primero, veamos la relación entre la humedad específica

$$q = \frac{m_w}{m_w + m_a}$$

y la razón de mezcla

$$w = \frac{m_w}{m_a}$$

con  $m_a$  la masa de aire en la parcela, y  $m_w$  la masa de agua en la parcela.

Notemos que se cumple

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{w} + 1 \quad (1.3)$$

Ahora, consideraremos que las dos parcelas que se combinan tienen una masa similar o equivalente. Por ejemplo, diremos que la parcela 1 presenta una masa  $m = m_v + m_l + m_a$  (con  $m_v$  la masa del agua en forma de vapor,  $m_l$  la masa de agua en forma líquida, y  $m_a$  la masa del aire), y que la parcela 2, que es solo aire (ya que está completamente seca), también tiene una masa  $m$ .

Con esto ya podemos calcular la humedad específica de la parcela mezclada. Esta parcela debiese tener masa  $2m$  por lo que su humedad específica será

$$q_{\text{mezcla}} = \frac{m_w}{2m} = \frac{m_w}{2(m_w + m_a)} \quad (1.4)$$

con  $m_w = m_l + m_v$ . Luego, usando la Ecuación 1.3, obtenemos que la razón de mezcla de la parcela mezclada es

$$w_{\text{mezcla}} = \left[ 2 \frac{m_w + m_a}{m_w} - 1 \right]^{-1} = \frac{m_w}{m_w + 2m_a} \quad (1.5)$$

Calculemos ahora la razón  $\frac{w}{w_{\text{mezcla}}}$ , para ver en cuanto disminuye la razón de mezcla luego de mezclarse.

$$\frac{w}{w_{\text{mezcla}}} = \frac{\frac{m_w}{m_a}}{\frac{m_w}{m_w + 2m_a}} = \frac{m_w + 2m_a}{m_a} = 2 + \frac{m_w}{m_a} = 2 + w \quad (1.6)$$

Con esto último podemos decir que

$$w_{\text{mezcla}} = \frac{w}{2 + w} \quad (1.7)$$

Es decir, prácticamente la razón de mezcla se reduce a un poco menos de la mitad del valor inicial.

Para que luego de este proceso, la parcela quede sin agua líquida necesitamos que  $w_{\text{mezcla}}$  resulte menor o igual que  $w_{\text{sat}}$ . Desarrollando esta desigualdad obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{w}{w + 2} &\leq w_{\text{sat}} \\ w &\leq w_{\text{sat}}(2 + w) \\ w &\leq 2w_{\text{sat}} + ww_{\text{sat}} \\ w(1 - w_{\text{sat}}) &\leq 2w_{\text{sat}} \\ w &\leq \frac{2}{1 - w_{\text{sat}}} w_{\text{sat}} \\ w_l + w_v &\leq \frac{2}{1 - w_{\text{sat}}} w_{\text{sat}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que  $w_v$  (parte en vapor) si o sí es menor o igual que  $w_{\text{sat}}$  obtenemos

$$w_1 \leq \frac{2}{1 - w_{\text{sat}}} w_{\text{sat}} - w_{\text{sat}}$$

$$w_1 \leq \frac{w_{\text{sat}}}{1 - w_{\text{sat}}} + \frac{w_{\text{sat}}^2}{1 - w_{\text{sat}}}.$$

Entonces, solo si se cumple esta condición en la parcela de aire inicial, la parcela final queda sin agua líquida. Para simplificar la condición anterior podemos despreciar  $w_{\text{sat}}^2$  por ser muy pequeño, y si además consideramos  $w_{\text{sat}} \ll 1$ , nos queda que  $w_1 \leq w_{\text{sat}}$ . Es decir, aproximadamente la porción líquida de la razón de mezcla debe ser menor al valor de  $w_{\text{sat}}$  para la presión y temperatura de la parcela.

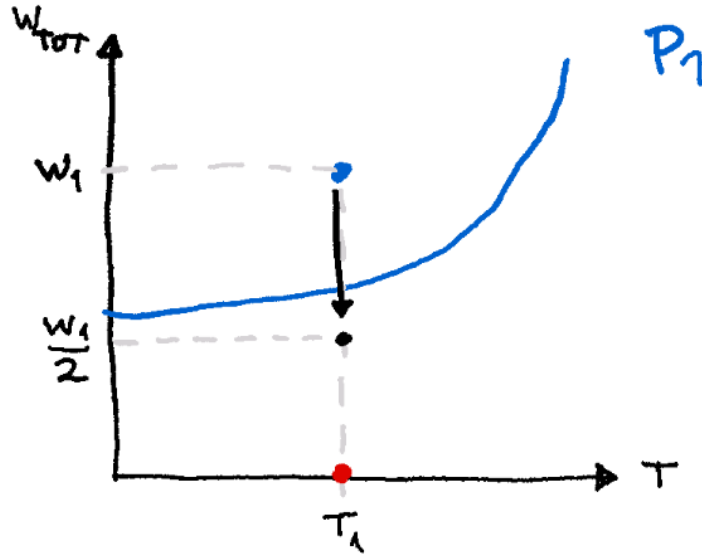


Figura 1.5: Proceso D. La flecha negra representa el proceso. El punto azul corresponde a la parcela con agua mientras que el punto rojo corresponde a la parcela seca. Luego el punto negro corresponde aproximadamente a la mezcla entre las dos parcelas iniciales.

## Problema 2

a) Para calcular la razón de mezcla usamos la humedad relativa y la relación

$$w = \frac{\text{HR}}{100} w_{\text{sat}} \quad (2.1)$$

Sin embargo para poder usar esta expresión necesitamos también  $w_{\text{sat}}$ . Esta cantidad lo obtenemos a partir de

$$w_{\text{sat}} = e_{\text{sat}} \frac{\epsilon}{P - e_{\text{sat}}} \quad (2.2)$$

y por último,  $e_{\text{sat}}$  la obtenemos usando la ecuación de Clasiuss-Clapeyron, en particular la siguiente forma de dicha ecuación:

$$e_{\text{sat}}(T) = 6,11 \cdot \exp \left( 5,42 \cdot 10^3 \left( \frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (2.3)$$

con  $T$  la temperatura en Kelvin, y  $\epsilon = 0,622$ .

A continuación mostramos los valores obtenidos para la razón de mezcla de cada nivel.

Tabla 1: Datos de presión, temperatura, humedad relativa, presión de vapor saturada, razón de mezcla saturada, y razón de mezcla. Todo esto en los 5 niveles mas bajos.

Presión [hPa]	Temperatura [°C]	HR [%]	$e_{\text{sat}}$ [hPa]	$w_{\text{sat}}$	w
953.20	21.65	49.44	26.277184	0.017633	0.008718
940.21	20.60	51.43	24.604175	0.016714	0.008596
927.93	19.51	54.01	22.968543	0.015787	0.008526
867.89	17.23	58.51	19.857118	0.014564	0.008522
800.00	16.96	17.79	19.514801	0.015552	0.002767

Para calcular la cantidad de agua usamos la siguiente expresión

$$LWC = \frac{1}{\rho_l g} \int_{P_1}^{P_2} q(p) dp, \quad (2.4)$$

con  $\rho_l$  la densidad del agua líquida,  $g$  la aceleración de gravedad,  $q$  la humedad específica y  $p$  la presión.

Como en realidad tenemos una cantidad discreta y no podemos integrar, haremos la siguiente suma.

$$LWC = \frac{1}{\rho_l g} \sum \frac{w_n + w_{n+1}}{2} \Delta p_n \quad (2.5)$$

Es decir, entre cada par consecutivo de datos calculamos la razón de mezcla promedio y la multiplicamos por la diferencia de presión  $\Delta p$

Realizando lo anterior entre los primeros 4 niveles (hasta aproximadamente 870 hPa), obtenemos una cantidad de 11.37 milímetros.

b) Para obtener el volumen antes de reventar consideraremos que la ecuación de estado

$$PV = nRT \quad (2.6)$$

se cumple en el momento que fue soltado, y justo antes de reventar. Luego tenemos que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Como queremos el volumen final, despejamos  $V_2$ .

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} \frac{P_1}{P_2} V_1 \quad (2.7)$$

En el enunciado nos dicen que la temperatura dentro del globo siempre es igual que la temperatura del ambiente. Entonces  $T_1$  y  $T_2$  los podemos obtener de los datos.

Por otro lado nos dicen que la presión justo antes de reventar es igual a la exterior. Es decir,  $P_2$  también lo podemos obtener de los datos, en particular será la menor presión registrada (punto de mayor altura).

Ahora, para obtener  $P_1$  utilizaremos la ecuación de estado

$$P_1 = \rho_1 R_{\text{He}} T_1 \quad (2.8)$$

Notemos que usamos la constante de gases específica para el gas al interior del globo, el cual asumiremos que es Helio. Recordemos que la constante  $R_{\text{He}}$  tiene el valor de  $\frac{R}{M_{\text{He}}}$  con  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$  la constante de

gases ideales  $M_{\text{He}} = 4,003 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  la masa molar del Helio.

Remplazando (5.4) en (2.7) llegamos a

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{P_2} (\rho_1 R_{\text{He}} T_1) \\ &= \frac{T_2}{P_2} m_1 R_{\text{He}}. \end{aligned}$$

Remplazando los valores numéricos de  $T_2$  (valor de temperatura cuando en el punto de menor presión; igual a 21.65°C) y  $P_2$  (registro de menor presión; igual a 93.55 hPa) obtenemos que el volumen alcanzado es aproximadamente de unos 26.17 m<sup>3</sup>, alcanzando así un radio de unos 1.84 metros

- c) Consideraremos el primer y último registro que tenemos de la fase final. Estos tienen una presión de 93.55 hPa y 111.35 hPa, respectivamente.

Si consideramos una atmósfera estándar, la altura en función de la presión viene dada por

$$Z = 44307,7 \left( 1 - \left( \frac{P}{1013,25} \right)^{0,190284} \right) \quad (2.9)$$

con  $P$  la presión en hPa.

Evaluamos (2.9) para ambos valores de presión y calculamos la diferencia de altura. Obtenemos un valor de 948.9 metros

### Problema 3

### Problema 4

### Problema 5

Para obtener la altura  $D$ , integraremos la ecuación hidrostática, obteniendo así la siguiente expresión

$$P_2 - P_1 = -\rho g D \quad (5.1)$$

Con  $g = 9,78 \text{m/s}^2$  la aceleración de gravedad, y  $\rho = 997 \text{Kg/m}^3$  la densidad del agua líquida.

Luego, tenemos que

$$D = \frac{e_1 - e_2}{\rho g} \quad (5.2)$$

donde hemos remplazado  $P$  por  $e$ , ya que el gas al interior del pato es solo vapor de agua.

Notemos que estamos considerando  $e_1$  la presión del vapor en la base del pato, y  $e_2$  el vapor en la parte superior del pato.

Como tenemos la temperatura (20 °C) y humedad relativa del ambiente (50 %), podemos obtener la temperatura punto de bulbo húmedo del ambiente, usando el gráfico Skew T (asumiendo una presión de unos 1000 hPa). Luego, como el vapor de está en contacto con agua líquida, sabemos que su presión será igual a la presión de vapor saturada, por lo que usando la ecuación de Clasius-Clapeyron podemos obtener  $e_1$  y  $e_2$ .

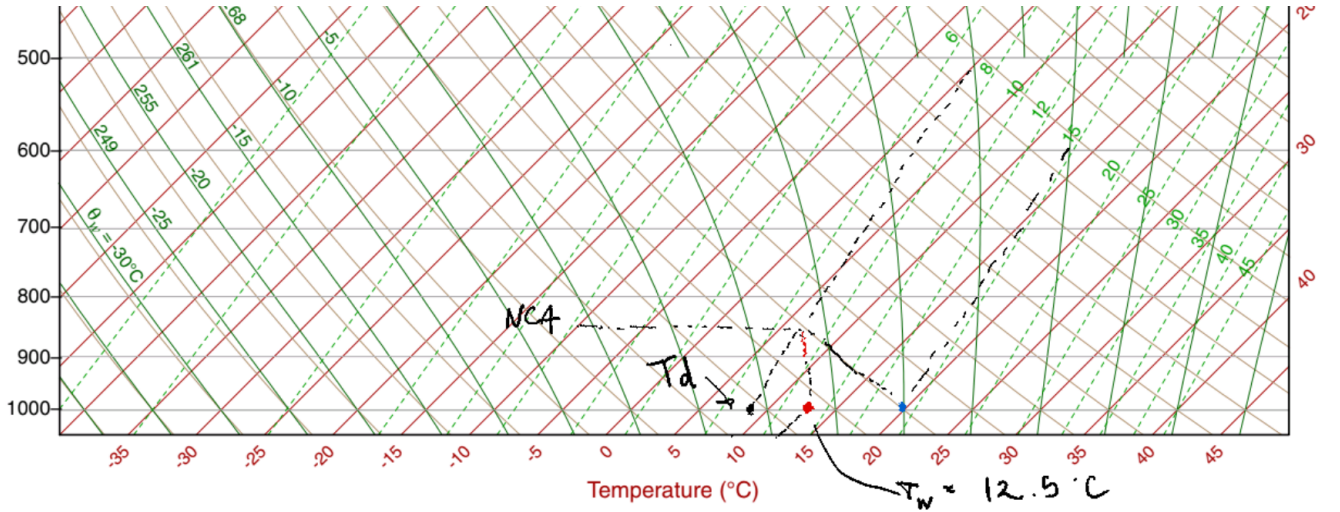


Figura 5.1: Gráfico SkewT - LogP. El punto azul muestra la temperatura medida. El punto negro muestra la temperatura punto de rocío, y finalmente el punto rojo muestra la temperatura de bulbo húmedo.

Como se observa en la Figura 5.1, se reconoce del punto azul una razón de mezcla saturada de  $w_{\text{sat}} \simeq 14$  g/Kg. Luego, como la humedad relativa es del 50 %, la temperatura punto de rocío se encuentra (al mismo nivel de presión) donde la razón de mezcla saturada es de 7 g/Kg.

Consideramos que la parcela del punto azul asciende adiabáticamente y también que una parcela del punto negro asciende a razón de mezcla constante. Identificamos el punto donde ambas trayectorias se intersectan para luego descender por un camino adiabático húmedo hasta alcanzar el nivel de presión inicial. De este modo vemos que la temperatura de bulbo húmedo es  $T_w \simeq 12,5^\circ\text{C}$ .

Ahora usaremos la ecuación de Clasius-Clapeyron

$$e_{\text{sat}}(T) = 6,11 \cdot \exp \left( 5,42 \cdot 10^3 \left( \frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (5.3)$$

con  $T$  la temperatura en Kelvin. De esto obtenemos que

$$e_1 = e_{\text{sat}}(T = 20^\circ\text{C}) \simeq 23,7 \text{ hPa}, \quad (5.4)$$

$$e_2 = e_{\text{sat}}(T = 12,5^\circ\text{C}) \simeq 14,6 \text{ hPa}. \quad (5.5)$$

Finalmente, evaluando (5.4), (5.5), y el resto de los valores numéricos mencionados anteriormente, en la ecuación (5.2), obtenemos que  $D$  es aproximadamente 9.35 centímetros.

Respecto a porque es mejor usar líquidos más volátiles, creo que que es principalmente a que la curva de Clasius-Clapeyron para los vapores de dichos gases queda más “empinada” o está desplazada hacia la izquierda, respecto a la curva para el vapor de agua. Mostramos en la Figura 5.2 por ejemplo, como una curva más empinada/desplazada (curva roja) respecto a una pequeña variación en la temperatura (en el rango de temperatura ambiente), presenta una alta variación en su presión de vapor.



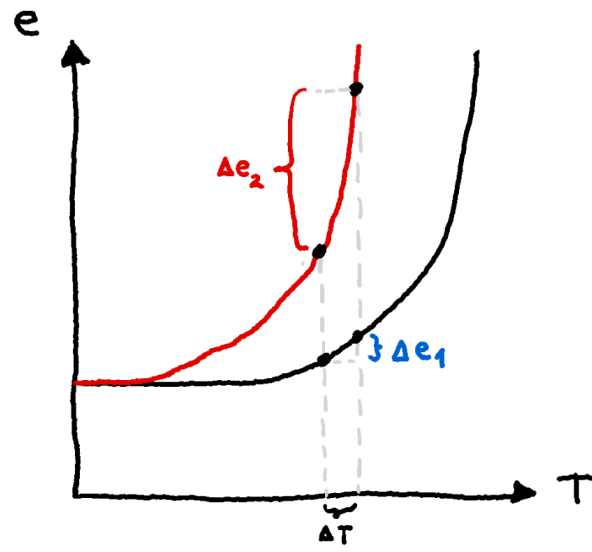


Figura 5.2: La curva satura representa la curva  $e_{\text{sat}}$  para el vapor de agua, mientras que la curva roja, para el vapor de un líquido más volátil. Se aprecia que  $\Delta e_2 > \Delta e_1$ .