

Control 1

Meteorología Física

9 de mayo de 2022

Problema 1

- a) Para pasar de un gráfico $e - T$ a uno $w_{\text{tot}} - T$ usamos la expresión

$$w = \frac{e \epsilon}{P - e} \simeq \frac{e \epsilon}{P}. \quad (1.1)$$

Con esto ya nos hacemos la idea que en el gráfico $w_{\text{tot}} - T$, las curvas w_{sat} se verán muy similares a la curva e_{sat} en el gráfico $e - T$, pero multiplicado por el factor $\frac{\epsilon}{P}$.

Las curvas para de w_{sat} estarán definidas por

$$w_{\text{sat}} = \frac{\epsilon}{P} e_{\text{sat}}(T), \quad (1.2)$$

donde $e_{\text{sat}}(T)$ está dado por la ecuación de Clausius-Clapeyron. Luego, estas se verían como en la figura a continuación. En la Figura 1.1, la línea azul corresponde a w_{sat} a presión P_1 , mientras que la línea roja corresponde a w_{sat} a presión

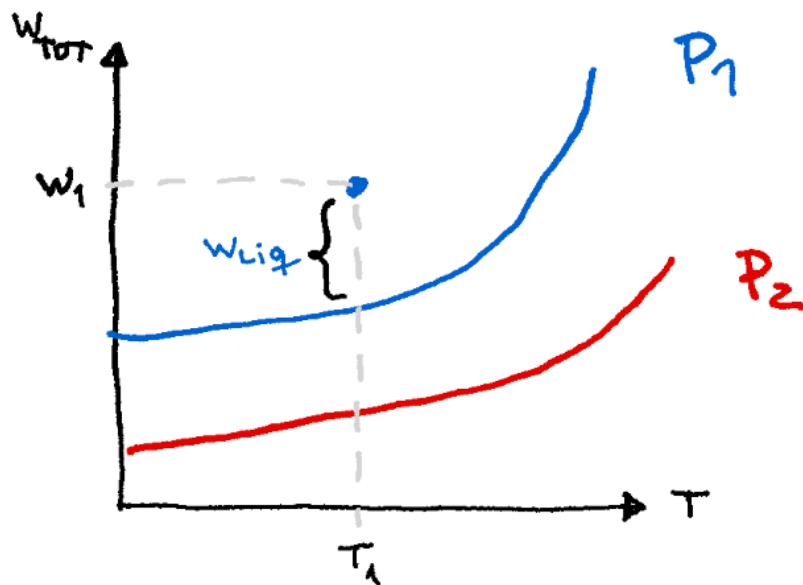


Figura 1.1: Curvas w_{sat} para distintas presiones, en función de la temperatura.

P_2 , todo esto, con $P_1 < P_2$. Notemos que como en la Ecuación 1.2 se divide por P , la curva de w_{sat} de P_1 resulta más grande la de P_2 .

A priori, ubicar un punto (una parcela de aire) en el gráfico $w_{\text{tot}} - T$ no nos proporciona información para identificar su presión, ya que al incorporar el agua líquida no tenemos una ecuación que relacione w_{tot} con la presión. Sin embargo, si ya sabemos su presión de un a parcela, podemos obtener la curva w_{sat} a esa presión.

Si consideramos un punto por debajo de la curva w_{sat} (acorde a la presión de la parcela), usando la Ecuación 1.1 obtendremos que ese punto representa una parcela de aire con una presión de vapor e subsaturada ($e < e_{\text{sat}}$). A medida que ese punto sube (a T constante), inferimos que e se acerca a e_{sat} , y que $e = e_{\text{sat}}$ si $w_{\text{tot}} = w_{\text{sat}}$, por la Ecuación 1.2. Ahora, si un punto está por sobre la curva w_{sat} la Ecuación 1.1 ya no nos sirve, pues esta nos diría que la parcela presenta una presión de vapor superior a e_{sat} , lo cual no es posible. Dado esto, concluimos que si el punto se encuentra

sobre la curva w_{sat} , la parcela presenta agua líquida. La cantidad de agua líquida corresponderá a la porción de w_{tot} que sobresale respecto a la curva.

En la Figura 1.1 indicamos que segmento equivale a w_{liq} , considerando que el punto presenta una parcela de aire con presión P_1 . Si la parcela tuviese presión P_2 , w_{liq} sería la distancia vertical entre el punto y la curva roja.

- b) Proceso A: Al calentarse la parcela de aire, aumenta su temperatura. Por simplicidad asumimos que w_{tot} se mantiene constante, de modo que solo el agua líquida se transforma en vapor.

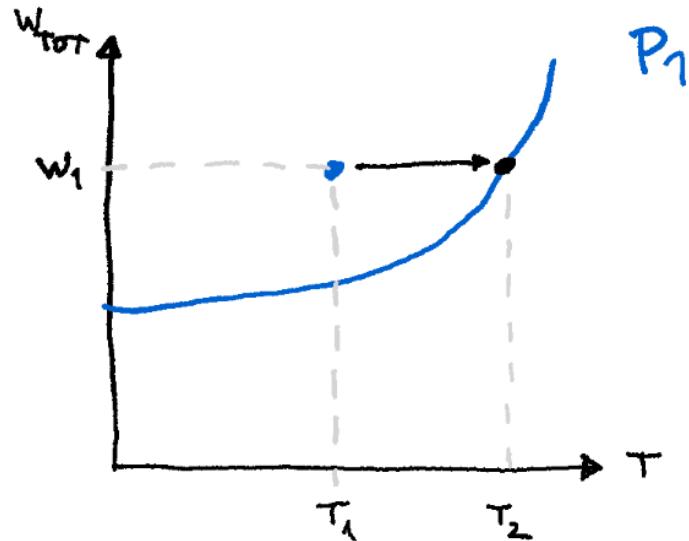


Figura 1.2: Proceso A. La flecha negra representa el proceso.

En la Figura 1.2 podemos ver el proceso A. Como la presión es constante, la curva w_{sat} no cambia. Luego, el aumento de temperatura hace que el punto “toque” a la curva w_{sat} , siendo éste el momento (punto negro) en que pierde toda su agua líquida.

Proceso B: Como el proceso consiste en precipitación, lo que disminuye es w_{liq} .

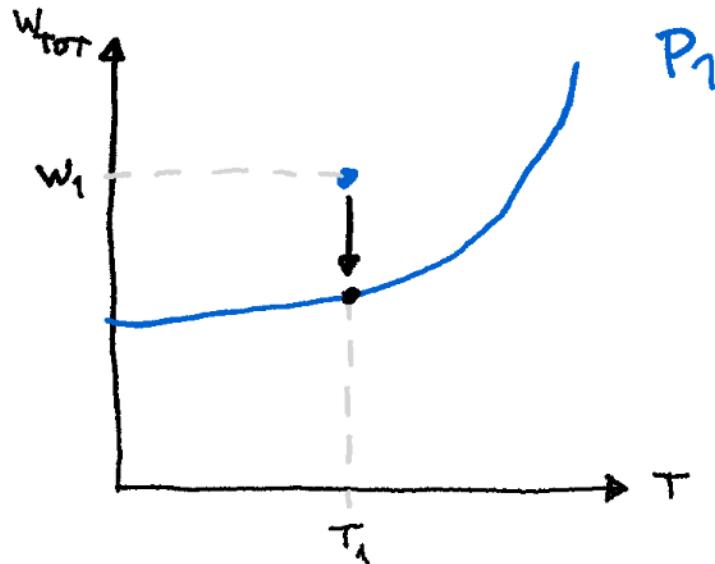


Figura 1.3: Proceso B. La flecha negra representa el proceso.

En la Figura 1.3 vemos el proceso B. Como la presión es constante la curva w_{sat} no cambia. Como además la temperatura también es constante, no queda otra que w_{tot} disminuya.

Proceso C: En este proceso, como la parcela desciende, la presión cambia (aumenta), por lo que la curva w_{sat} varía (baja). Además, como la parcela tiene agua, esta desciende siguiendo un proceso pseudo-adiabático, implicando que a medida que desciende la temperatura aumenta.

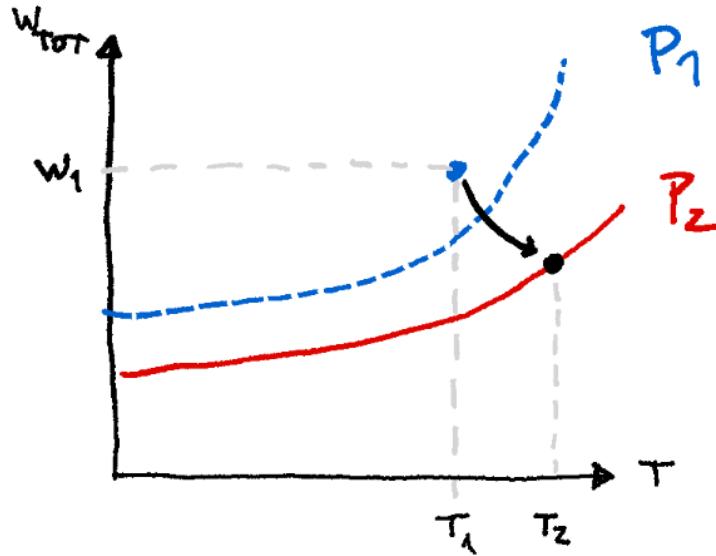


Figura 1.4: Proceso C. La flecha negra representa el proceso. La linea segmentada azul representa la curva w_{sat} inicial, mientras que la linea roja representa la curva w_{sat} final.

Considero que acá w_{tot} disminuye porque según la Ecuación 1.1, si la presión aumenta, w_{vap} disminuye

Proceso D: Para la mezcla de dos parcelas consideraremos lo siguiente.

Primero, veamos la relación entre la humedad específica

$$q = \frac{m_w}{m_w + m_a}$$

y la razón de mezcla

$$w = \frac{m_w}{m_a}$$

con m_a la masa de aire en la parcela, y m_w la masa de agua en la parcela.

Notemos que se cumple

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{w} + 1 \quad (1.3)$$

Ahora, consideraremos que las dos parcelas que se combinan tienen una masa similar o equivalente. Por ejemplo, diremos que la parcela 1 presenta una masa $m = m_v + m_l + m_a$ (con m_v la masa del agua en forma de vapor, m_l la masa de agua en forma líquida, y m_a la masa del aire), y que la parcela 2, que es solo aire (ya que está completamente seca), también tiene una masa m .

Con esto ya podemos calcular la humedad específica de la parcela mezclada. Esta parcela debiese tener masa $2m$ por lo que su humedad específica será

$$q_{\text{mezcla}} = \frac{m_w}{2m} = \frac{m_w}{2(m_w + m_a)} \quad (1.4)$$

con $m_w = m_l + m_v$. Luego, usando la Ecuación 1.3, obtenemos que la razón de mezcla de la parcela mezclada es

$$w_{\text{mezcla}} = \left[2 \frac{m_w + m_a}{m_w} - 1 \right]^{-1} = \frac{m_w}{m_w + 2m_a} \quad (1.5)$$

Calculemos ahora la razón $\frac{w}{w_{\text{mezcla}}}$, para ver en cuanto disminuye la razón de mezcla luego de mezclarse.

$$\frac{w}{w_{\text{mezcla}}} = \frac{\frac{m_w}{m_a}}{\frac{m_w}{m_w + 2m_a}} = \frac{m_w + 2m_a}{m_a} = 2 + \frac{m_w}{m_a} = 2 + w \quad (1.6)$$

Con esto último podemos decir que

$$w_{\text{mezcla}} = \frac{w}{2+w} \quad (1.7)$$

Es decir, prácticamente la razón de mezcla se reduce a un poco menos de la mitad del valor inicial.

Para que luego de este proceso, la parcela quede sin agua líquida necesitamos que w_{mezcla} resulte menor o igual que w_{sat} . Desarrollando esta desigualdad obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{w}{w+2} &\leq w_{\text{sat}} \\ w &\leq w_{\text{sat}}(2+w) \\ w &\leq 2w_{\text{sat}}ww_{\text{sat}} \\ w(1-w_{\text{sat}}) &\leq 2w_{\text{sat}} \\ w &\leq \frac{2}{1-w_{\text{sat}}}w_{\text{sat}} \\ w_l + w_v &\leq \frac{2}{1-w_{\text{sat}}}w_{\text{sat}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que w_v (parte en vapor) si o sí es menor o igual que w_{sat} obtenemos

$$\begin{aligned} w_l &\leq \frac{2}{1-w_{\text{sat}}}w_{\text{sat}} - w_{\text{sat}} \\ w_l &\leq \frac{w_{\text{sat}}}{1-w_{\text{sat}}} + \frac{w_{\text{sat}}^2}{1-w_{\text{sat}}}. \end{aligned}$$

Entonces, solo si se cumple esta condición en la parcela de aire inicial, la parcela final queda sin agua líquida. Para simplificar la condición anterior podemos despreciar w_{sat}^2 por ser muy pequeño, y si además consideramos $w_{\text{sat}} \ll 1$, nos queda que $w_l \leq w_{\text{sat}}$. Es decir, aproximadamente la porción líquida de la razón de mezcla debe ser menor al valor de w_{sat} para la presión y temperatura de la parcela.

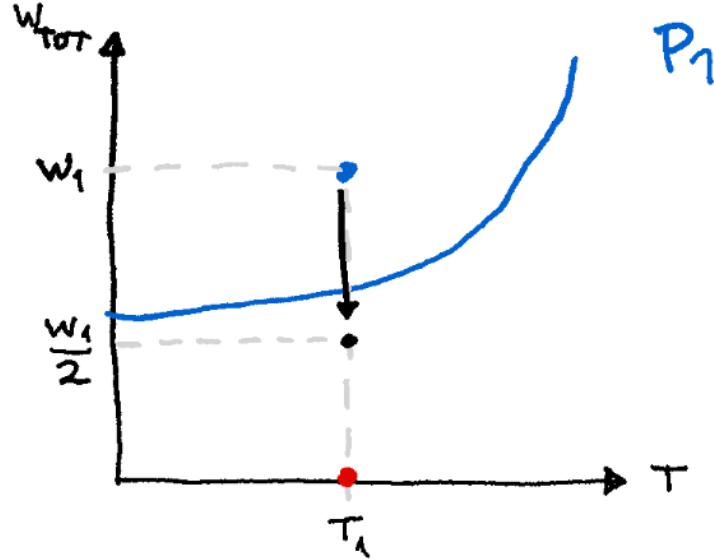


Figura 1.5: Proceso D. La flecha negra representa el proceso. El punto azul corresponde a la parcela con agua mientras que el punto rojo corresponde a la parcela seca. Luego el punto negro corresponde aproximadamente a la mezcla entre las dos parcelas iniciales.

Problema 2

- a) Para calcular la razón de mezcla usamos la humedad relativa y la relación

$$w = \frac{\text{HR}}{100} w_{\text{sat}} \quad (2.1)$$

Sin embargo para poder usar esta expresión necesitamos también w_{sat} . Esta cantidad lo obtenemos a partir de

$$w_{\text{sat}} = e_{\text{sat}} \frac{\epsilon}{P - e_{\text{sat}}} \quad (2.2)$$

y por último, e_{sat} la obtenemos usando la ecuación de Clasius-Clapeyron, en particular la siguiente forma de dicha ecuación:

$$e_{\text{sat}}(T) = 6,11 \cdot \exp \left(5,42 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (2.3)$$

con T la temperatura en Kelvin, y $\epsilon = 0,622$.

A continuación mostramos los valores obtenidos para la razón de mezcla de cada nivel.

Tabla 1: Datos de presión, temperatura, humedad relativa, presión de vapor saturada, razón de mezcla saturada, y razón de mezcla. Todo esto en los 5 niveles mas bajos.

Presión [hPa]	Temperatura [°C]	HR [%]	e_{sat} [hPa]	w_{sat}	w
953.20	21.65	49.44	26.277184	0.017633	0.008718
940.21	20.60	51.43	24.604175	0.016714	0.008596
927.93	19.51	54.01	22.968543	0.015787	0.008526
867.89	17.23	58.51	19.857118	0.014564	0.008522
800.00	16.96	17.79	19.514801	0.015552	0.002767

Para calcular la cantidad de agua usamos la siguiente expresión

$$LWC = \frac{1}{\rho_l g} \int_{P_1}^{P_2} q(p) dp, \quad (2.4)$$

con ρ_l la densidad del agua líquida, g la aceleración de gravedad, q la humedad específica y p la presión.

Como en realidad tenemos una cantidad discreta y no podemos integrar, haremos la siguiente suma.

$$LWC = \frac{1}{\rho_l g} \sum \frac{w_n + w_{n+1}}{2} \Delta p_n \quad (2.5)$$

Es decir, entre cada par consecutivo de datos calculamos la razón de mezcla promedio y la multiplicamos por la diferencia de presión Δp

Realizando lo anterior entre los primeros 4 niveles (hasta aproximadamente 870 hPa), obtenemos una cantidad de 11.37 milímetros.

- b) Para obtener el volumen antes de reventar consideraremos que la ecuación de estado

$$PV = nRT \quad (2.6)$$

se cumple en el momento que fue soltado, y justo antes de reventar. Luego tenemos que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Como queremos el volumen final, despejamos V_2 .

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} \frac{P_1}{P_2} V_1 \quad (2.7)$$

En el enunciado nos dicen que la temperatura dentro del globo siempre es igual que la temperatura del ambiente. Entonces T_1 y T_2 los podemos obtener de los datos.

Por otro lado nos dicen que la presión justo antes de reventar es igual a la exterior. Es decir, P_2 también lo podemos obtener de los datos, en particular será la menor presión registrada (punto de mayor altura).

Ahora, para obtener P_1 utilizaremos la ecuación de estado

$$P_1 = \rho_1 R_{He} T_1 \quad (2.8)$$

Notemos que usamos la constante de gases específica para el gas al interior del globo, el cual asumiremos que es Helio. Recordemos que la constante R_{He} tiene el valor de $\frac{R}{M_{He}}$ con $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$ la constante de gases ideales y $M_{He} = 4,003 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ la masa molar del Helio.

Remplazando (2.4) en (2.7) llegamos a

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{P_2} (\rho_1 R_{He} T_1) \\ &= \frac{T_2}{P_2} m_1 R_{He}. \end{aligned}$$

Remplazando los valores numéricos de T_2 (valor de temperatura cuando en el punto de menor presión; igual a 21.65°C) y P_2 (registro de menor presión; igual a 93.55 hPa) obtenemos que el volumen alcanzado es aproximadamente de unos 26.17 m^3 , alcanzando así un radio de unos 1.84 metros

- c) Consideraremos el primer y último registro que tenemos de la fase final. Estos tienen una presión de 93.55 hPa y 111.35 hPa, respectivamente.

Si consideramos una atmósfera estándar, la altura en función de la presión viene dada por

$$Z = 44307,7 \left(1 - \left(\frac{P}{1013,25} \right)^{0,190284} \right) \quad (2.9)$$

con P la presión en hPa.

Evaluamos (2.9) para ambos valores de presión y calculamos la diferencia de altura. Obtenemos un valor de 948.9 metros

Problema 3

- a) Para dibujar el perfil de temperatura consideramos que la capa límite tiene un ancho de 100 hPa (desde los 1000 hasta los 900 hPa), y que al estar mezclada mantiene constante su temperatura potencial. Nos dicen que en la superficie (la que consideramos en los 1000 hPa) presenta una temperatura de 15°C, por lo que a partir de ese punto el perfil sube siguiendo la curva adiabática seca.

Al llegar a los 900 hPa tenemos una discontinuidad o salto en 10°C y luego seguimos ascendiendo pero ahora con un gradiente de temperatura de -5 °C por cada 100 hPa, hasta llegar a los 500 hPa.

Para estimar el perfil de la temperatura punto de rocío, consideramos que en la superficie la humedad relativa es del 50%. Con este dato (y considerando que el perfil de temperatura en la superficie indican una razón de mezcla saturada de $w_{\text{sat}} \approx 10,5 \text{ g/Kg}$) obtenemos que la razón de mezcla de la parcela es $w \approx 5,25 \text{ g/Kg}$ en la superficie. Luego, como la capa límite está mezclada también asumimos que la razón de mezcla se mantiene constante, de modo que el perfil de la temperatura punto de rocío sube con razón de mezcla constante hasta los 900 hPa.

Nos mencionan que en la troposfera libre la razón de mezcla es constante en 1 g/Kg, por lo que el la temperatura punto de rocío sigue esa linea de razón de mezcla constante.

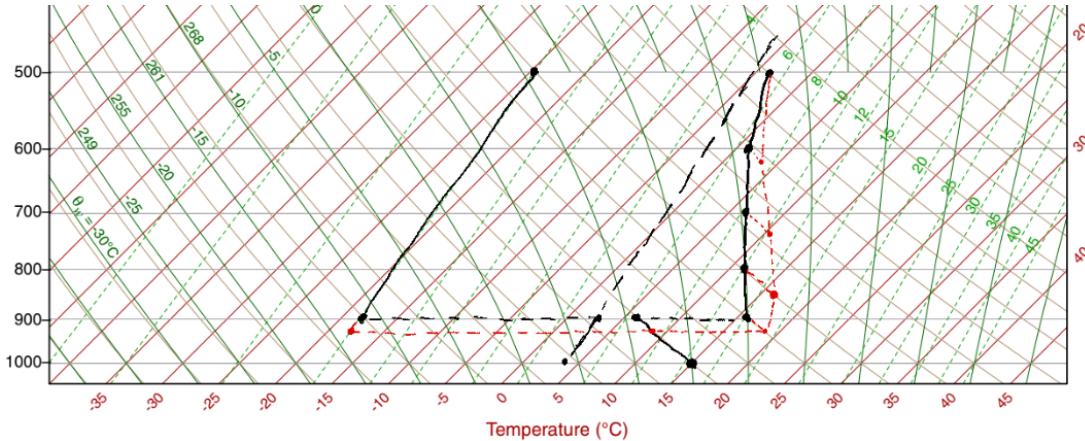


Figura 3.1: Perfiles de temperatura. La linea continua negra de la derecha representa el perfil de temperatura, mientras que la de la izquierda corresponde a la temperatura punto de rocío. Las lineas rojas corresponden a las temperaturas luego de que se aplica el descenso.

Para dibujar el descenso, se consideraron varios puntos en el perfil de temperatura (puntos negros), que se hicieron descender por trayectorias adiabáticas secas. El descenso (en hPa) para cada punto fue estimado acorde al perfil de descenso del enunciado, en donde el punto a 800 hPa, presenta el mayor descenso (de unos 50 hPa). Con este procedimiento se obtuvieron los punto rojos de la figura (3.1), y luego unimos (interpolamos?) los puntos rojos para hacernos una idea de como queda el perfil luego del descenso.

Problema 4

El modelo termodinámico estima que la altura de hasta la cual se logra calentar la capa límite, debido al calor superficial es

$$H_t = \sqrt{\frac{2 \int_0^t W dt}{\left(\Gamma + \frac{g}{c_p}\right) \rho_0 c_p}} \quad (4.1)$$

con W el flujo de calor superficial por unidad de tiempo $\left(\frac{W}{m^2} = \frac{J}{s m^2}\right)$.

En este modelo se supone que el perfil de temperatura inicial tiene un gradiente constante Γ , y que la capa se calienta de a poco de forma adiabática, tomando la pendiente $-\frac{g}{c_p}$

En la ecuación (4.1), el término $\int_0^t W dt$ corresponde al área bajo la curva de flujo de calor sensible superficial. Esta la estimamos de la siguiente manera.

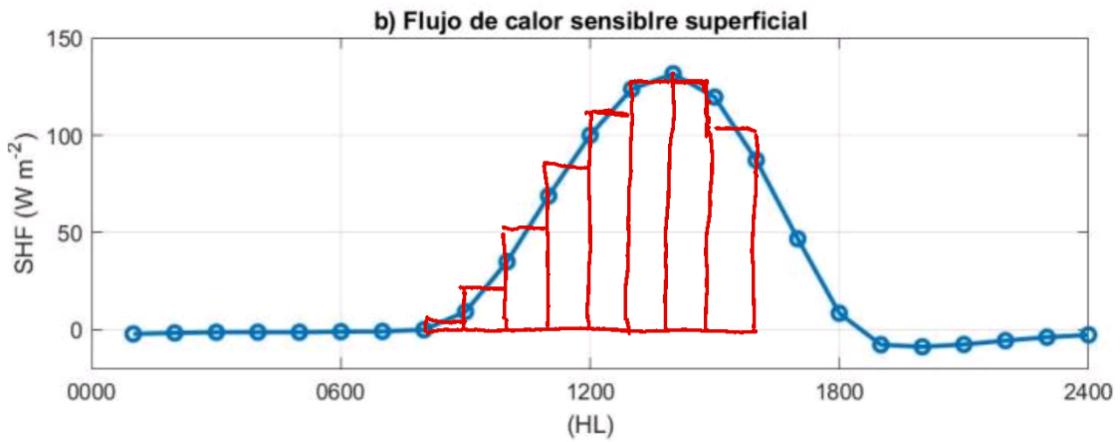


Figura 4.1: Flujo de calor sensible superficial. Los bloques en rojo esquematizan la estimación del área bajo la curva en el rango solicitado (desde las 0800 hasta las 1600). Cada bloque tiene un ancho de 1 hora y la altura corresponde al promedio de los dos valores contiguos de SHF.

De manera visual, comparando con los valores de W (SHF) de los “ticks” del eje vertical, estimo que el área es aproximadamente

$$\int_0^{16} W(t) dt = 615 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} \cdot \text{Hora} = 2214000 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}. \quad (4.2)$$

Problema 5

Para obtener la altura D , integraremos la ecuación hidrostática, obteniendo así la siguiente expresión

$$P_2 - P_1 = -\rho g D \quad (5.1)$$

Con $g = 9,78 \text{m/s}^2$ la aceleración de gravedad, y $\rho = 997 \text{ Kg/m}^3$ la densidad del agua líquida.

Luego, tenemos que

$$D = \frac{e_1 - e_2}{\rho g} \quad (5.2)$$

donde hemos remplazado P por e , ya que el gas al interior del pato es solo vapor de agua.

Notemos que estamos considerando e_1 la presión del vapor en la base del pato, y e_2 el vapor en la parte superior del pato.

Como tenemos la temperatura (20°C) y humedad relativa del ambiente (50 %), podemos obtener la temperatura punto de bulbo húmedo del ambiente, usando el gráfico Skew T (asumiendo una presión de unos 1000 hPa). Luego, como el vapor de está en contacto con agua líquida, sabemos que su presión será igual a la presión de vapor saturada, por lo que usando la ecuación de Clasius-Clapeyron podemos obtener e_1 y e_2 .

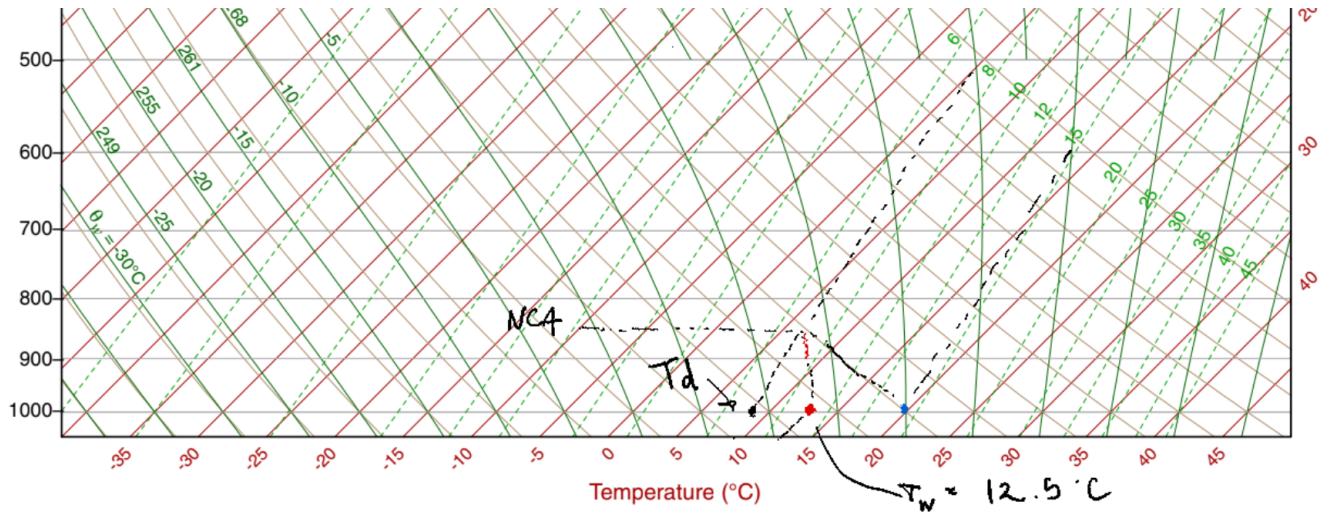


Figura 5.1: Gráfico SkewT - LogP. El punto azul muestra la temperatura medida. El punto negro muestra la temperatura punto de rocío, y finalmente el punto rojo muestra la temperatura de bulbo húmedo.

Como se observa en la Figura 5.1, se reconoce del punto azul una razón de mezcla saturada de $w_{\text{sat}} \simeq 14 \text{ g/Kg}$. Luego, como la humedad relativa es del 50 %, la temperatura punto de rocío se encuentra (al mismo nivel de presión) donde la razón de mezcla saturada es de 7 g/Kg.

Consideramos que la parcela del punto azul asciende adiabáticamente y también que una parcela del punto negro asciende a razón de mezcla constante. Identificamos el punto donde ambas trayectorias se intersectan para luego descender por un camino adiabático húmedo hasta alcanzar el nivel de presión inicial. De este modo vemos que la temperatura de bulbo húmedo es $T_w \simeq 12,5^\circ\text{C}$.

Ahora usaremos la ecuación de Clasius-Clapeyron

$$e_{\text{sat}}(T) = 6,11 \cdot \exp \left(5,42 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (5.3)$$

con T la temperatura en Kelvin. De esto obtenemos que

$$e_1 = e_{\text{sat}}(T = 20^\circ\text{C}) \simeq 23,7 \text{ hPa}, \quad (5.4)$$

$$e_2 = e_{\text{sat}}(T = 12,5^\circ\text{C}) \simeq 14,6 \text{ hPa}. \quad (5.5)$$

Finalmente, evaluando (5.4), (5.5), y el resto de los valores numéricos mencionados anteriormente, en la ecuación (5.2), obtenemos que D es aproximadamente 9.35 centímetros.

Respecto a porque es mejor usar líquidos más volátiles, creo que es principalmente a que la curva de Clasius-Clapeyron para los vapores de dichos gases queda más “empinada” o está desplazada hacia la izquierda, respecto a la curva para el vapor de agua. Mostramos en la Figura 5.2 por ejemplo, como una curva más empinada/desplazada (curva roja) respecto a una pequeña variación en la temperatura (en el rango de temperatura ambiente), presenta una alta variación en su presión de vapor.

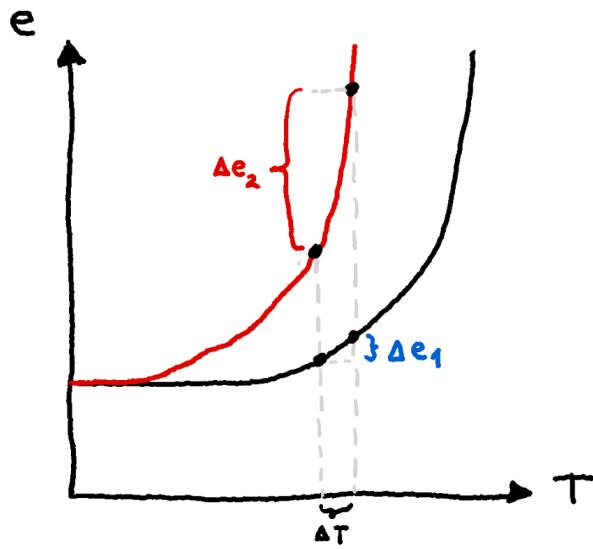
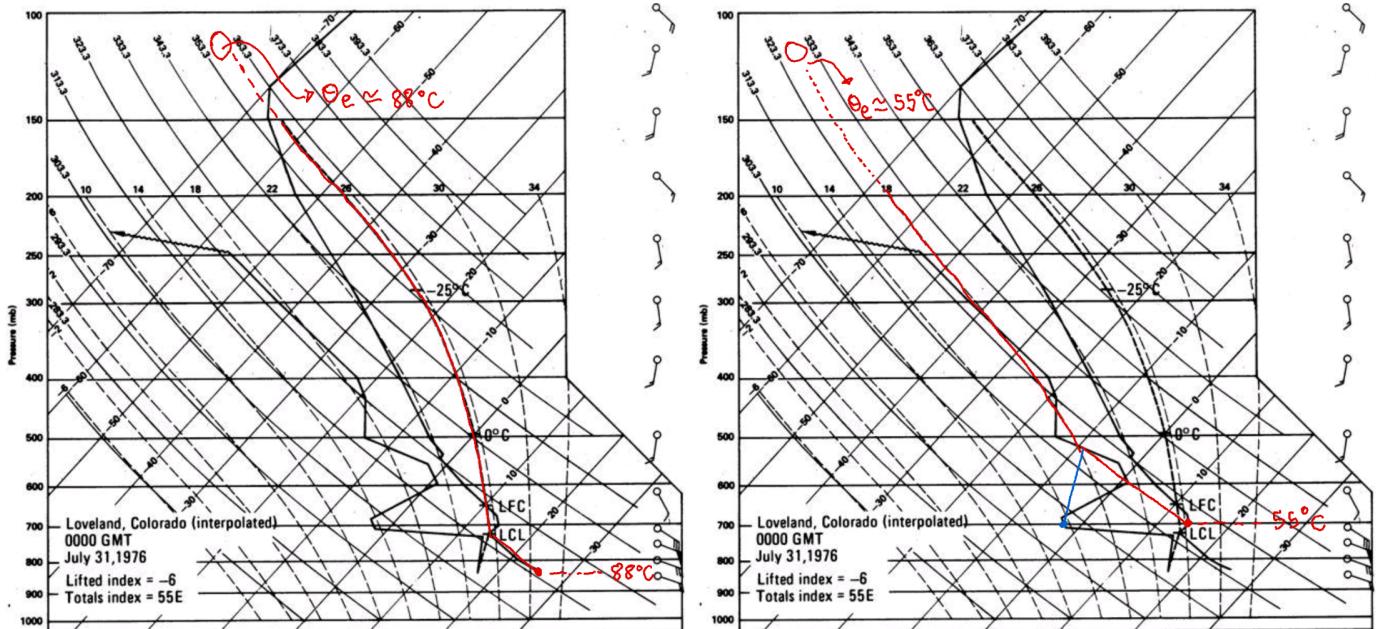


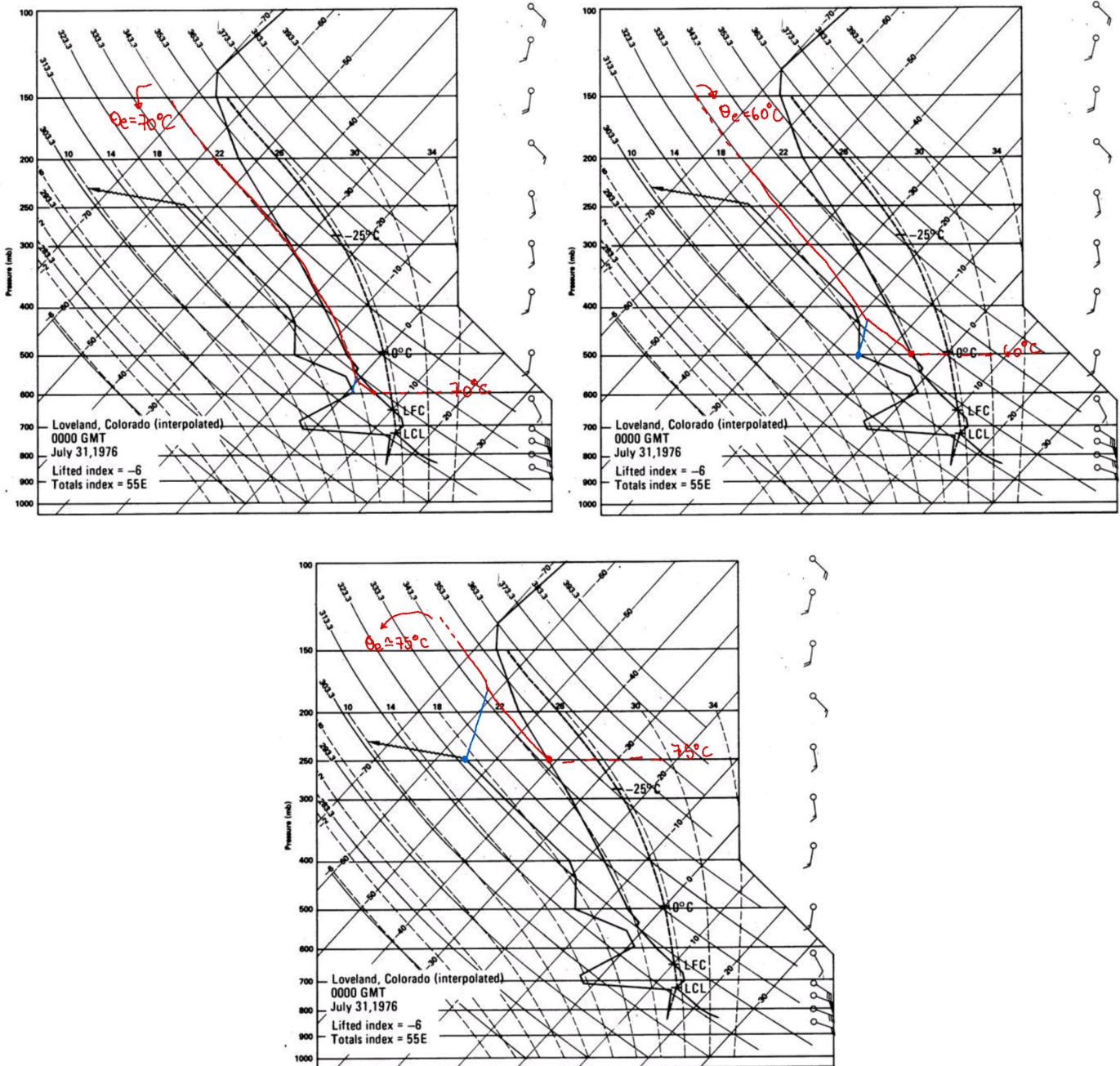
Figura 5.2: La curva saturación representa la curva e_{sat} para el vapor de agua, mientras que la curva roja, para el vapor de un líquido más volátil. Se aprecia que $\Delta e_2 > \Delta e_1$.

Problema 6

- a) Para identificar la temperatura potencial, consideramos varias parcelas a lo largo del perfil de temperatura observada, y las hacemos descender por la trayectoria adiabática hasta alcanzar el LCL (NCAA). Luego, las parcelas siguen ascendiendo por el camino adiabático húmedo hasta que dicha trayectoria se vuelve paralela con alguna curva adiabática seca. La curva con la que se vuelve paralela representa la temperatura potencial para cada curva.

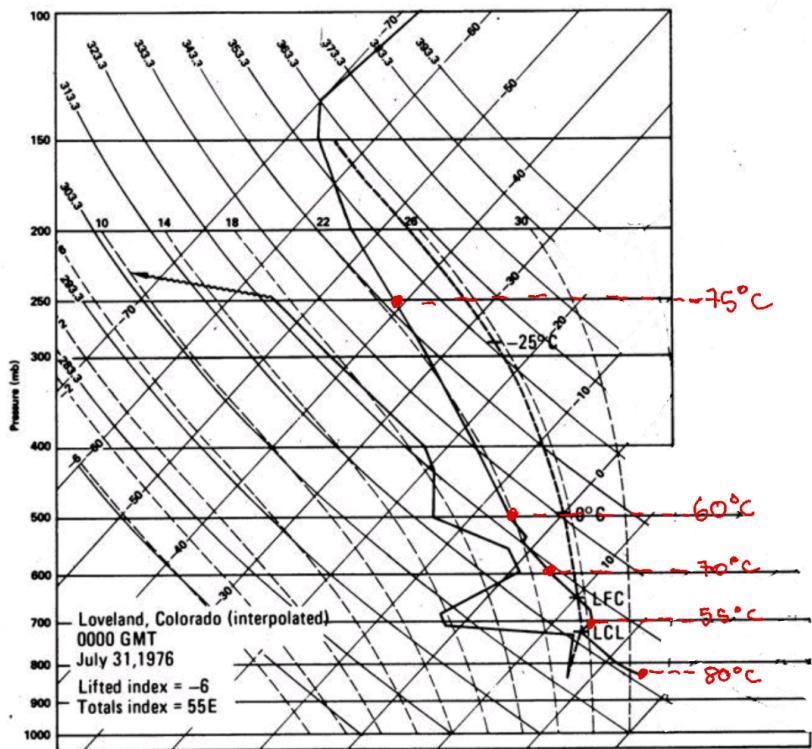
Todo esto lo hemos realizado “a mano” considerando varios puntos en el gráfico Skew T. A continuación presentamos varias figuras ilustrando el procedimiento realizado.





En las figuras la linea roja es la trayectoria de las parcelas. El segmento azul muestra la linea de razón de mezcla a partir del punto que indica la temperatura punto de rocío. Como en el gráfico no hay líneas de razón de mezcla para guiarlos, hemos estimado la pendiente de estas rectas considerando que debería ser similar al pequeño segmento entre el primer valor de la temperatura punto de rocío y lo que se señala como LCL (el LCL de la parcela de la superficie).

Ahora mostraremos todos los valores.



Para identificar rangos de inestabilidad potencial, verificamos que

$$\frac{d\theta_e}{dz} < 0. \quad (6.1)$$

Como $\frac{d}{dz} \simeq \frac{d}{d(\ln P)}$, identificamos que hay inestabilidad potencial en los rangos (820 hPa, 700 hPa) y (600 hPa, 500 hPa).

b)