

Consideremos una parcela de aire de volumen $dV = Adz$, como el de la figura 1.

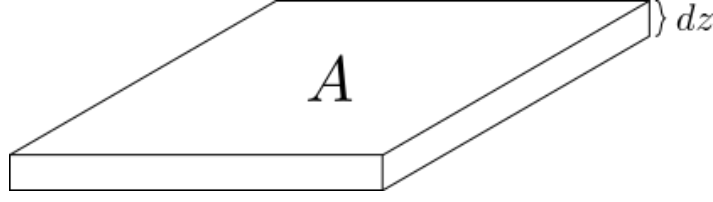


Figura 1: Parcela de aire muy pequeña, de volumen Adz .

La masa de aire dentro de esta parcela es $dM = \rho_A dV$, con ρ_A la densidad del aire. Ahora, como la parcela es bien delgada (con cambio de altura mínimo) podemos asumir que la ecuación de estado $P = \rho_A R_d T_v$ se cumple. Con esto último en cuenta, despejamos la densidad de la ecuación de estado y la expresión para la masa nos queda

$$dM = \frac{P}{R_d T_v} A dz \quad (1)$$

Dentro de esta parcela, la cantidad de masa de (vapor de) agua será simplemente $dM_W = q dM$, con q la humedad específica dentro de la parcela. Ahora, ¿Que volumen ocuparía toda esa masa de vapor de agua se condensase?. Este volumen sería equivalente a dM_W / ρ_W , con ρ_W la densidad del agua (en estado líquido), lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} dV_W &= \frac{dM_W}{\rho_W} \\ &= \frac{q dM}{\rho_W} \\ dV_W &= \frac{qP}{R_d T_v \rho_W} A dz \end{aligned}$$

Consideremos lo siguiente ahora. El volumen de agua condensada lo pondremos en una columna de área transversal A , como en la figura 2

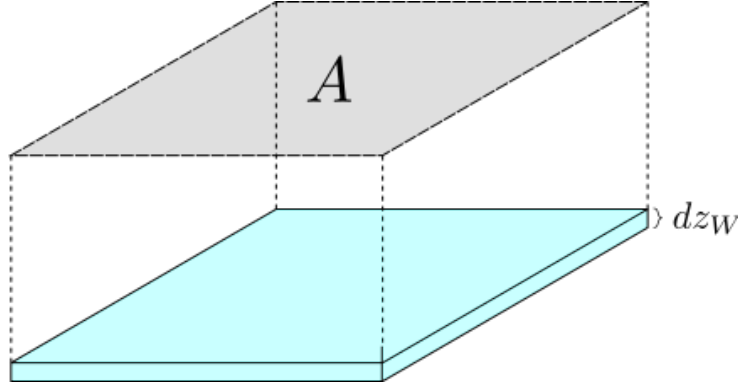


Figura 2: Volumen de agua condensada en una columna de área transversal A .

Acorde a la figura, nombraremos dz_W a la altura de la columna de agua. Notemos que $dz_W = dV_W / A$. Con esto en cuenta llegamos a la siguiente expresión

$$dz_W = \frac{qP}{R_d T_v \rho_W} dz \quad (2)$$

En resumen, la ecuación (2) nos dice que tendremos un nivel de precipitación (por unidad de área, y en unidades de longitud) dz_W , para una columna de aire de altura dz . Ahora, para obtener el nivel de precipitación de una columna de aire de altura z_1 (con $z_1 \gg dz$) con su base a nivel del mar, hay que integrar. Entoces, la expresión para el nivel de precipitación queda

$$z_W = \int_0^{z_1} \frac{q(z)P(z)}{R_d T_v \rho_W} dz \quad (3)$$

Notemos que ahora sí consideramos la dependencia en z de q y P . Recordemos también que estas equivalen a

$$q(z) = q_0 e^{-z/H_v} \quad (4)$$

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad (5)$$

con $q_0 = 10 \text{ [g/Kg]}$, $H_v = 3 \text{ Km}$, $P_0 = 1013 \text{ hPa}$ y $H = 8 \text{ Km}$.

Remplazamos (4) y (5) en (3) y nos queda

$$z_W(z_1) = \int_0^{z_1} \frac{q_0 P_0}{R_d T_v \rho_W} e^{-z/\bar{H}} dz, \quad (6)$$

con $\bar{H} = \frac{H_v H}{H_v + H} = \frac{24}{11} \text{ Km}$. Para integrar (6) de forma sencilla asumiremos que el ni R_d , T_v ni ρ_W dependen de z . Entoces, el nivel de precipitación resulta

$$\begin{aligned} z_W(z_1) &= \frac{q_0 P_0}{R_d T_v \rho_W} \int_0^{z_1} e^{-z/\bar{H}} dz \\ &= -\frac{q_0 P_0 \bar{H}}{R_d T_v \rho_W} e^{-z/\bar{H}} \Big|_0^{z_1} \\ &= -\frac{q_0 P_0 \bar{H}}{R_d T_v \rho_W} (e^{-z_1/\bar{H}} - 1) \end{aligned}$$

Recordemos que de (5) tenemos que $H = \frac{R_d T_v}{g}$, por lo que podemos simplificar lo anterior.

$$\begin{aligned} z_W(z_1) &= \frac{q_0 P_0 \bar{H}}{\rho_W g H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}}) \\ &= \frac{q_0 P_0}{\rho_W g H} \frac{H_v H}{H_v + H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}}) \end{aligned}$$

Finalmente, queda

$$z_W(z_1) = \frac{q_0 P_0}{\rho_W g} \frac{H_v}{H_v + H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}}) \quad (7)$$