Consideremos una parcela de aire de volumen $dV = Adz$, como el de la figura 1.

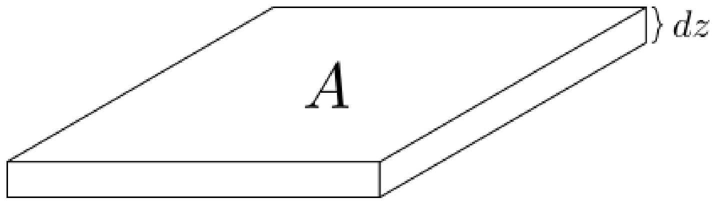

Figura 1: Parcela de aire muy pequeña, de volumen Adz.

La masa de aire dentro de esta parcela es $dM = \rho_A dV$, con ρ_A la densidad del aire. Ahora, como la parcela es bien delgada (con cambio de altura minimo) podemos asumir que la ecuación de estado $P = \rho_A R_d T_v$ se cumple. Con esto último en cuenta, despejamos la densidad de la ecuación de estado y la expresión para la masa nos queda

$$dM = \frac{P}{R_d T_V} A\,dz \tag{1}$$

Dentro de esta parcela, la cantidad de masa de (vapor de) agua será simplemente $dM_W = qdM$, con q la humedad específica dentro de la parcela. Ahora, ¿Que volumen ocuparía toda esa masa de vapor de agua se condensase?. Este volumen sería equivalente a dM_W/ρ_W, con ρ_W la densidad del agua (en estado liquido), lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} dV_W &= \frac{dM_W}{\rho_W} \\ &= \frac{qdM}{\rho_W} \\ dV_W &= \frac{qP}{R_d T_V \rho_W} A\,dz \end{aligned}$$

Consideremos lo siguiente ahora. El volumen de agua condensada lo pondremos en una columna de area transversal A, como en la figura 2

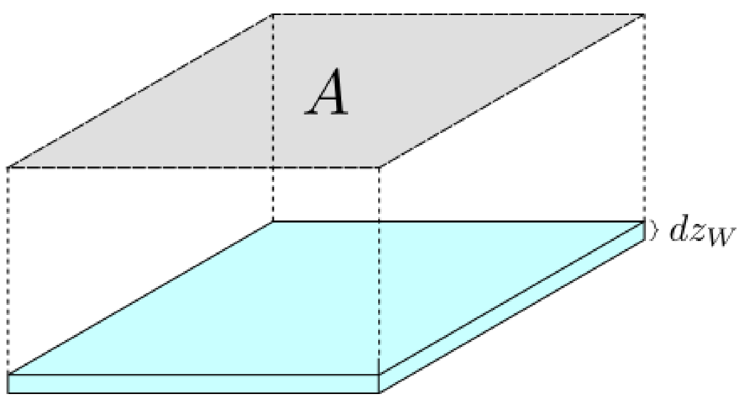

Figura 2: Volumen de agua condensada en una columna de area transversal A.

Acorde a la figura, nombraremos dz_W a la altura de la columna de agua, por unidad de área. Notemos que $dz_W = dV_W/A$. Con esto en cuenta llegamos a la siguiente expresión

$$dz_W = \frac{qP}{R_d T_V \rho_W}\,dz \tag{2}$$

En resumen, la ecuación (2) nos dice que tendremos un nivel de precipitación (por unidad de área, y en unidades de longitud) dz_W, para una columna de aire de altura dz. Ahora, para obtener el nivel de precipitación de una columna aire de altura z_1 (con $z_1 \gg dz$) con su base a nivel del mar, hay que integrar. Entoces, la expreción para el nivel de precipitación queda

$$z_W = \int_0^{z_1} \frac{q(z)P(z)}{R_d T_v \rho_W} dz \tag{3}$$

Notemos que ahora sí consideramos la dependencia en z de q y P. Recordemos también que estas equivalen a

$$q(z) = q_0 e^{-z/H_v} \tag{4}$$

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \tag{5}$$

con $q_0 = 10\,[\mathrm{g/Kg}]$, $H_v = 3\,\mathrm{Km}$, $P_0 = 1013\,\mathrm{hPa}$ y $H = 8\,\mathrm{Km}$.

Remplazamos (4) y (5) en (3) y nos queda

$$z_W(z_1) = \int_0^{z_1} \frac{q_0 P_0}{R_d T_v \rho_W} e^{-z/\bar{H}} dz, \tag{6}$$

con $\bar{H} = \frac{H_v H}{H_v + H} = \frac{24}{11}\,\mathrm{Km}$. Para integrar (6) de forma sencilla asumiremos que el ni R_d, T_v ni ρ_W dependen de z. Entoces, el nivel de precipitación resulta

$$\begin{aligned}
z_W(z_1) &= \frac{q_0 P_0}{R_d T_v \rho_W} \int_0^{z_1} e^{-z/\bar{H}} dz \\
&= -\frac{q_0 P_0 \bar{H}}{R_d T_v \rho_W} e^{-z/\bar{H}} \Big|_0^{z_1} \\
&= -\frac{q_0 P_0 \bar{H}}{R_d T_v \rho_W} (e^{-z_1/\bar{H}} - 1)
\end{aligned}$$

Recordemos que de (5) tenemos que $H = \frac{R_d T_v}{g}$, por lo que podemos simplificar lo anterior.

$$\begin{aligned}
z_W(z_1) &= \frac{q_0 P_0 \bar{H}}{\rho_W g H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}}) \\
&= \frac{q_0 P_0}{\rho_W g H} \frac{H_v H}{H_v + H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}})
\end{aligned}$$

Finalmente, queda

$$z_W(z_1) = \frac{q_0 P_0}{\rho_W g} \frac{H_v}{H_v + H} (1 - e^{-z_1/\bar{H}}) \tag{7}$$

Evaluemos ahora los valores numéricos de las constantes de la ecuación (7). Por simplicidad consideremos también que z_1 tiende a infinito, de modo que la parte exponencial se haga cero.

$$\begin{aligned}
zW &= \frac{10 \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{Kg}}\right] 1013 \left[\mathrm{hPa}\right]}{997 \left[\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right] 9{,}78 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]} \frac{3}{11} \\
&= \frac{10^{-2} \cdot 1013 \left[\mathrm{Pa}\right] \cdot 10^2}{997 \left[\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right] 9{,}78 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]} \frac{3}{11}
\end{aligned}$$

Simplificamos las unidades

$$
\begin{aligned}
z_W &= \frac{1013}{997 \cdot 9{,}78} \frac{3}{11} \frac{\left[\mathrm{Pa}\right]}{\left[\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]} \\
&= \frac{1013 \cdot 10^2}{997 \cdot 978} \frac{3}{11} \frac{\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]}{\left[\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]} \\
&= \frac{1013 \cdot 10^2}{997 \cdot 978} \frac{3}{11} \frac{\left[\mathrm{N\,s}^2\right]}{\left[\mathrm{Kg}\right]} \\
&= \frac{1013 \cdot 10^2}{997 \cdot 978} \frac{3}{11} \left[\frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\right] \frac{\left[\mathrm{s}^2\right]}{\left[\mathrm{Kg}\right]} \\
&= \frac{1013 \cdot 10^2}{997 \cdot 978} \frac{3}{11} \left[\mathrm{m}\right] \\
&= \frac{1013 \cdot 10^5}{997 \cdot 978} \frac{3}{11} \left[\mathrm{mm}\right]
\end{aligned}
$$

Finalemnte, tenemos que el nivel de agua en una columna de aire (de altura “infinita”) es $z_W = 28{,}3\,\mathrm{mm}$