งานวิจัย (บทความวิจัย) 4091606

คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์ (Mathematics for Computer)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์

2568

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(2)
สารบัญตาราง	(7)
สารบัญภาพ	(8)
แผนบริหารการสอนประจำวิชา	1
แผนการสอนประจำบทที่ 1	7
1 ตรรกศาสตร์ (Logic)	9
1.1 ความหมายและความสำคัญของตรรกศาสตร์	9
1.2 ประพจน์ (Propositions)	9
1.3 ตัวเชื่อมประพจน์ (Logical Connectives)	11
1.4 ตารางความจริง (Truth Tables)	13
1.5 สัจนิรันดร์และความขัดแย้ง	16
1.6 การหักอนุมาน (Inference Rules)	20
1.7 การพิสูจน์ด้วยตารางความจริง	23
1.8 สรุปประเด็นสำคัญ	24
แบบฝึกหัดท้ายบท	25
บรรณานุกรม	27
1.9 เอกสารอ้างอิง	28
แผนการสอนประจำบทที่ 2	29
2 ระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่ (Spatial Reference Systems)	31
2.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	31
2.2 บทนำ: ความสำคัญของระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่	31
2.3 รูปทรงของโลก (Earth’s Shape)	32
2.4 ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System)	34

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.5 ระบบพิกัดฉาย (Projected Coordinate System)	36
2.6 ดาตัม (Datum)	38
2.7 การแปลงระบบพิกัด (Coordinate Transformation)	40
2.8 การเลือกใช้ดาตัมให้เหมาะสมกับพื้นที่ศึกษา	43
2.9 การจัดการปัญหาความคลาดเคลื่อนเชิงพื้นที่	44
2.10 สรุป (Conclusion)	45
2.11 ไฟล์โค้ดประกอบบท (Companion Code)	45
2.12 แบบฝึกหัดท้ายบท (Exercises)	46
2.13 เอกสารอ้างอิง	49
แผนการสอนประจำบทที่ 3	51
3 แบบจำลองข้อมูลและแหล่งที่มาของข้อมูล (Data Models and Data Acquisition)	53
3.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	53
3.2 บทนำ	53
3.3 แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์ (Vector Data Model)	54
3.4 แบบจำลองข้อมูลราสเตอร์ (Raster Data Model)	58
3.5 การแปลงข้อมูลระหว่าง Vector และ Raster (Data Conversion)	60
3.6 วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล (Data Acquisition Methods)	62
3.7 คุณภาพข้อมูลและความแม่นยำเชิงพื้นที่ (Data Quality and Spatial Accuracy)	66
3.8 การประยุกต์ใช้ข้อมูลในงาน GIS	69
3.9 สรุป	71
3.10 แบบฝึกหัดท้ายบท	71
3.11 เอกสารอ้างอิง	73
แผนการสอนประจำบทที่ 4	75
4 การจัดการฐานข้อมูลเชิงพื้นที่ (Geodatabase Management)	77
4.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	77

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
4.2 บทนำ	77
4.3 โครงสร้างข้อมูลในฐานข้อมูล (Database Structure)	77
4.4 ความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยี (Topology)	78
4.5 การจัดการตารางข้อมูลคุณลักษณะ (Attribute Data Management)	80
4.6 การทำ Queries เชิงพื้นที่และเชิงตาราง (Spatial and Attribute Queries)	82
4.7 การออกแบบ Geodatabase	84
4.8 ตัวอย่างและแบบฝึกหัดท้ายบท	87
4.9 สรุป	89
4.10 แบบฝึกหัดท้ายบท	89
4.11 เอกสารอ้างอิง	91
แผนการสอนประจำบทที่ 5	93
5 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices & Determinants)	95
5.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	95
5.2 บทนำ	95
5.3 นิยามพื้นฐานของเมทริกซ์	95
5.4 การดำเนินการระหว่างเมทริกซ์	98
5.5 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)	102
5.6 อินเวอร์สของเมทริกซ์ (Matrix Inverse)	105
5.7 ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of Linear Equations)	107
5.8 การประยุกต์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์	110
5.9 ไฟล์โค้ดประกอบบท	115
5.10 แบบฝึกหัด	115
5.11 สรุป	117
5.12 เอกสารอ้างอิง	119
แผนการสอนประจำบทที่ 6	121

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6 การวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ (Raster-based Spatial Analysis)	123
6.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	123
6.2 บทนำ	123
6.3 โครงสร้างข้อมูลราสเตอร์	124
6.4 พีชคณิตแผนที่ (Map Algebra)	125
6.5 การวิเคราะห์พื้นผิว (Surface Analysis)	128
6.6 การแปลงข้อมูล Vector-Raster	132
6.7 การประยุกต์ใช้ในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม	133
6.8 บทสรุป	135
6.9 แบบฝึกหัดท้ายบท	135
6.10 เอกสารอ้างอิงประจำบท	136
6.11 เอกสารอ้างอิง	138
แผนการสอนประจำบทที่ 7	139
7 การนำเสนอผลลัพธ์และการทำแผนที่ (Cartography and Data Visualization)	141
7.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้	141
7.2 บทนำ	141
7.3 หลักการออกแบบแผนที่และการจัดลำดับความสำคัญของข้อมูลภาพ	142
7.4 การเลือกสัญลักษณ์สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่	143
7.5 การจำแนกข้อมูลสำหรับการแสดงบนแผนที่	144
7.6 การจัดทำเลย์เอาต์แผนที่	146
7.7 การสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล	147
7.8 สรุป	148
7.9 ไฟล์โค้ดประกอบบท	148
7.10 แบบฝึกหัดท้ายบท	148
7.11 เอกสารอ้างอิง	149

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

7.12 เอกสารอ้างอิง 150

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐานทั้ง 5 ตัว	12
2	ตารางความจริงของการเชื่อมด้วย AND ($p \wedge q$)	13
3	ตารางความจริงของการเชื่อมด้วย OR ($p \vee q$)	14
4	ตารางความจริงของนิเสธ ($\neg p$)	15
5	ตารางความจริงของ IMPLIES ($p \rightarrow q$)	15
6	ตารางความจริงของ IFF ($p \leftrightarrow q$)	16
7	ตารางแสดงว่า $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์	17
8	ตารางแสดงว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์	18
9	ตารางแสดงว่า $p \wedge \neg p$ เป็นปฏิเทง	19
10	ตารางแสดงว่า $p \wedge q$ เป็นประพจน์กลาง	20
11	ตารางพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	24
12	ตารางเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของ Ellipsoid ที่ใช้โดยทั่วไป	34
13	ตารางเปรียบเทียบการเลือกใช้ Datum ตามลักษณะงาน	43
14	ตัวอย่างข้อมูลในตาราง Building	83
15	ตาราง Building ที่ยังไม่ Normalize	85
16	ตาราง Building	88
17	ตาราง Owner	88
18	ตารางที่ต้อง Normalize	90
19	ตัวอย่างข้อมูลราสเตอร์แสดงระดับความสูง (หน่วย: เมตร)	124
20	ตัวอย่างข้อมูลความสูงสำหรับคำนวณความลาดชัน (หน่วย: เมตร)	130
21	เปรียบเทียบวิธีการจำแนกข้อมูลทั้งสามวิธี	145

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่

แผนการสอนประจำวิชา

รหัสวิชา 4091606

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์ (Mathematics for Computer)

จำนวนหน่วยกิต 3(3-0-6)

คณาจารย์ผู้สอน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พัชรี มณีรัตน์ หลักสูตรสาขาวิชาวิทยาการข้อมูล ห้อง STA110

E-mail: m.patcharee@uru.ac.th

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ หลักสูตรสาขาวิชาวิทยาการข้อมูล ห้อง STA314

E-mail: pisit.nak@uru.ac.th

คำอธิบายรายวิชา

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8, 16 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ พีชคณิตบูลีน

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักศึกษาสามารถอธิบายถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ได้
2. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในคุณลักษณะของเซต พร้อมทั้งความสัมพันธ์และฟังก์ชันได้
3. นักศึกษาสามารถแปลงและคำนวณในระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8, 16 ได้
4. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ได้
5. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในพีชคณิตบูลีน ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ทำให้เข้าใจการทำงานทางตรรกวิทยาภายในเครื่องคอมพิวเตอร์ได้

โครงการสอน

วิชาคณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์มีจำนวน 3 หน่วยกิต ใช้เวลาเรียน 3 ชั่วโมง/สัปดาห์ มีเวลาเรียนทั้งสิ้น 17 สัปดาห์ สามารถทำเป็นโครงการสอนได้ดังนี้

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
1–2	บทที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พัชรี มณีรัตน์
3	บทที่ 2 เซต	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พัชรี มณีรัตน์
4–7	บทที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พัชรี มณีรัตน์
8	**สอบกลางภาคเรียน**			
9–11	บทที่ 4 ระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8, 16	9	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
12–13	บทที่ 5 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	9	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
14–16	บทที่ 6 พีชคณิตบูลีน	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
17	**สอบปลายภาคเรียน**			

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนรู้

1. วิธีสอน

1.1. วิธีสอนส่วนใหญ่ใช้วิธีการบรรยายประกอบเอกสารประกอบการสอน และจัดกิจกรรมให้นักศึกษาอภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในชั้นเรียน

2. กิจกรรมการเรียนรู้

2.1. ให้นักศึกษาตอบคำถามประจำบทในเอกสารประกอบการสอน

2.2. ให้นักศึกษาศึกษาเอกสารประกอบการสอนเพิ่มเติมตามหัวข้อที่กำหนด

2.3. ให้นักศึกษาร่วมอภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในชั้นเรียน

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน ตำรา และบทความวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เช่น เว็บไซต์และแหล่งเรียนรู้ออนไลน์ต่าง ๆ
3. คำถามประจำบท

การวัดและการประเมินผล

1. คะแนนระหว่างภาคเรียน	70%
1.1. การตรงต่อเวลาและความซื่อสัตย์	10%
1.2. งานที่ได้รับมอบหมาย (Assignment)	10%
1.3. กิจกรรมกลุ่มและการนำเสนอ	20%
1.4. ทดสอบกลางภาคเรียน	30%
2. ทดสอบปลายภาคเรียน	30%

ตำรา เอกสาร และงานวิจัยประกอบการเรียนการสอน

1. **เอกสารหลัก**

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2556). *คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับคอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.

2. **เอกสารเพิ่มเติม**

2.1. คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2553). *คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับคอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.

คะแนน	เกรด	ความหมาย
80–100	A	ดีเยี่ยม
75–79	B^+	ดีมาก
70–74	B	ดี
65–69	C^+	ดีพอใช้
60–64	C	พอใช้
55–59	D^+	อ่อน
50–54	D	อ่อนมาก
0–49	F	ตก

2.2. อุ่นใจ ลิมตระกูล. (2538). *คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

ลงชื่อ .....ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พัชรี มณีรัตน์..... อาจารย์ผู้สอน

ลงชื่อ .....ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ..... อาจารย์ผู้สอน

แผนการสอนประจำบทที่ 1

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 1

ชื่อบท ตรรกศาสตร์ (Logic)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบายความหมายและคุณสมบัติของประพจน์ (Proposition) และค่าความจริงได้
2. ใช้ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ทั้ง 6 ตัว ได้แก่ $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ได้อย่างถูกต้อง
3. สร้างและวิเคราะห์ตารางค่าความจริง (Truth Table) ของประพจน์เชิงประกอบได้
4. ตรวจสอบสมมูลทางตรรกศาสตร์ (Logical Equivalence) และกฎพีชคณิตบูลีนได้
5. อธิบายและประยุกต์ใช้การอนุมาน (Inference Rules) เช่น Modus Ponens, Modus Tollens ได้
6. เชื่อมโยงหลักการตรรกศาสตร์กับการเขียนโปรแกรมและวงจรดิจิทัลได้

หัวข้อที่สอน

1. บทนำ: ทำไมตรรกศาสตร์จึงสำคัญ
2. ประพจน์ (Propositions)
3. ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ (Logical Connectives)
4. ตารางค่าความจริง (Truth Tables)
5. สมมูลทางตรรกศาสตร์ (Logical Equivalence)

6. กฎการอนุมาน (Rules of Inference)

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ตัวอย่างโปรแกรมภาษา Python / C
- แบบฝึกหัดท้ายบท

ตรรกศาสตร์ (Logic)

1.1 วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้จบแล้ว ผู้เรียนจะสามารถอธิบายความหมายของประพจน์และระบุค่าความจริงได้อย่างถูกต้อง ใช้ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ทั้ง 5 ชนิดในการสร้างประพจน์เชิงประกอบ สร้างและวิเคราะห์ตารางความจริงสำหรับประพจน์ที่มีตัวแปรหลายตัว จำแนกประพจน์เชิงประกอบเป็นสัจนิรันดร์ ปฏิเทง หรือประพจน์กลางได้ และประยุกต์ใช้กฎการหักอนุมาน ได้แก่ Modus Ponens, Modus Tollens, Hypothetical Syllogism และ Disjunctive Syllogism ในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

1.2 ความหมายและความสำคัญของตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ (Logic) คือ ศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผล การคิดอย่างมีระบบ และหลักการที่ใช้ในการสรุปผลที่ถูกต้องตามหลักเหตุผล ตรรกศาสตร์เป็นรากฐานของการให้เหตุผลในทุกสาขาวิชา ไม่ว่าจะเป็นคณิตศาสตร์ ปรัชญา วิทยาการคอมพิวเตอร์ หรือแม้แต่ชีวิตประจำวัน โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อแยกแยะระหว่างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล (Valid Reasoning) ออกจากการให้เหตุผลที่มีข้อบกพร่อง (Fallacy) การเข้าใจตรรกศาสตร์อย่างถ่องแท้จึงช่วยให้สามารถวิเคราะห์ข้อโต้แย้ง ตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุป และสร้างการโต้แย้งที่มีความสมบูรณ์ได้

ในทางประวัติศาสตร์ ตรรกศาสตร์มีรากฐานมาจากปรัชญากรีกโบราณ โดยอริสโตเติล (Aristotle) เป็นผู้พัฒนาระบบตรรกศาสตร์เชิงรูปนัย (Formal Logic) เป็นครั้งแรก โดยกล่าวถึงหลักการของการให้เหตุผลแบบต่างๆ ที่เรียกว่า ซิลลอจิสติก (Syllogism) **aristotle_organon** ต่อมาในศตวรรษที่ 19 และ 20 ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) ถูกพัฒนาขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์และนักปรัชญา ได้แก่ George Boole **boole1854investigation**, Gottlob Frege **frege1879begriffsschrift**, และ Bertrand Russell **russell1910principia** จนกระทั่งกลายเป็นพื้นฐานของวิทยาการคอมพิวเตอร์สมัยใหม่

ในทางคอมพิวเตอร์ ตรรกศาสตร์มีความสำคัญอย่างยิ่งในหลายด้าน ได้แก่ การทำงานของวงจรดิจิทัล (Digital Circuits) ซึ่งใช้ลอจิกเกต (Logic Gates) ในการประมวลผลข้อมูล การเขียนโปรแกรม (Programming) ที่ต้องอาศัยการควบคุมเชิงตรรกะ เช่น คำสั่ง if-else และ loop การปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence) ที่ใช้ตรรกศาสตร์ในการแสดงความรู้และการให้เหตุผลอัตโนมัติ และการพิสูจน์ความถูกต้องของอัลกอริทึม (Algorithm Verification) ที่ใช้ตรรกศาสตร์ในการพิสูจน์ว่าโปรแกรมทำงานได้

ถูกต้องตามที่ต้องการ

1.3 ประพจน์ (Propositions)

ประพจน์ (Proposition) เป็นหน่วยพื้นฐานที่สุดของตรรกศาสตร์ เนื่องจากประพจน์คือหน่วยที่สามารถวินิจฉัยค่าความจริงได้อย่างชัดเจน การเข้าใจแนวคิดของประพจน์จึงเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาตรรกศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป ในส่วนนี้จะอธิบายความหมายของประพจน์ ค่าความจริง ตัวอย่างประพจน์ และข้อความที่ไม่เป็นประพจน์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้เข้าใจได้อย่างชัดเจน

1.3.1 ความหมายของประพจน์

ประพจน์ (Proposition) คือ ข้อความบอกเล่าหรือข้อความปฏิเสธที่สามารถตัดสินค่าความจริงได้อย่างแน่ชัดว่าเป็นจริง (True, T) หรือเป็นเท็จ (False, F) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ข้อความที่เป็นประพจน์ต้องมีลักษณะสำคัญสองประการ ประการแรก ต้องเป็นประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่สมบูรณ์ ประการที่สองต้องสามารถระบุค่าความจริงได้โดยไม่มีความกำกวม ไม่ว่าผู้ใดก็ตามที่เข้าใจภาษาที่ใช้จะต้องเห็นด้วยกับการประเมินค่าความจริงของประพจน์นั้น

ค่าความจริง (Truth Value) ของประพจน์มีได้เพียงสองค่าเท่านั้น ค่าแรกคือ จริง (True, T หรือ 1) และค่าที่สองคือ เท็จ (False, F หรือ 0) ไม่มีค่าความจริงใดอื่นนอกจากสองค่านี้ ซึ่งเป็นหลักการพื้นฐานของตรรกศาสตร์แบบคลาสสิก (Classical Logic) การที่ประพจน์ต้องมีค่าความจริงเพียงจริงหรือเท็จเท่านั้นนี้เรียกว่า กฎแห่งการตัดสิน (Law of Excluded Middle) หรือกฎของอริสโตเติล

ประพจน์ที่มีค่าความจริงคงที่ไม่ขึ้นกับสถานการณ์เรียกว่า ประพจน์คงที่ (Constant Proposition) ส่วนประพจน์ที่มีตัวแปรและขึ้นกับค่าของตัวแปรเรียกว่า ประพจน์เปิด (Open Proposition) ซึ่งจะมีค่าความจริงขึ้นกับการกำหนดค่าของตัวแปร

1.3.2 ตัวอย่างประพจน์

เพื่อให้เข้าใจแนวคิดของประพจน์อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น พิจารณาตัวอย่างประพจน์ต่อไปนี้

1. กรุงเทพมหานคร เป็น เมือง หลวง ของ ประเทศไทย ซึ่ง ประพจน์ นี้ เป็น จริง เนื่องจากกรุงเทพมหานครเป็นเมืองหลวงของประเทศไทยตามที่รับรองกันทั่วโลก ดังนั้นค่าความจริงของประพจน์นี้คือ จริง (T)

2. $2 + 2 = 5$ ซึ่งประพจน์นี้เป็นเท็จ เนื่องจากผลบวกของ 2 กับ 2 เท่ากับ 4 ไม่ใช่ 5 ดังนั้นค่าความจริงของประพจน์นี้คือ เท็จ (F)

3. $7 > 3$ ซึ่งประพจน์นี้เป็นจริง เนื่องจาก 7 มีค่ามากกว่า 3 อย่างชัดเจน ดังนั้นค่าความจริงคือ

จริง (T)

4. จำนวนเฉพาะที่มากที่สุดมีอยู่จำนวนจำกัด ซึ่งประพจน์นี้เป็นเท็จ เนื่องจากพิสูจน์ได้ว่าจำนวนเฉพาะมีอยู่ไม่จำกัด ดังนั้นค่าความจริงคือ เท็จ (F)

5. ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย ซึ่งประพจน์นี้เป็นจริง เนื่องจากข้าวเป็นอาหารหลักที่คนไทยบริโภคเป็นประจำทุกวัน ดังนั้นค่าความจริงคือ จริง (T)

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า ประพจน์สามารถเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ภูมิศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือข้อเท็จจริงทั่วไปก็ได้ โดยทุกประพจน์ต้องสามารถระบุค่าความจริงได้อย่างชัดเจน

ประพจน์เปิด (Open Proposition) เป็นกรณีพิเศษที่น่าสนใจ เนื่องจากประพจน์เปิดมีตัวแปรที่ยังไม่ได้กำหนดค่า ทำให้ไม่สามารถระบุค่าความจริงได้จนกว่าจะทราบค่าของตัวแปร ตัวอย่างเช่น ประพจน์ $x + 3 = 7$ ไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จจนกว่าจะทราบค่า x ถ้า $x = 4$ ประพจน์จะเป็นจริง แต่ถ้า $x \neq 4$ ประพจน์จะเป็นเท็จ

1.3.3 ข้อความที่ไม่เป็นประพจน์

ไม่ใช่ทุกข้อความจะเป็นประพจน์ ข้อความบางประเภทไม่สามารถระบุค่าความจริงได้อย่างชัดเจน จึงไม่เป็นประพจน์ การเข้าใจว่าข้อความใดไม่เป็นประพจน์มีความสำคัญพอๆ กับการรู้ว่าข้อความใดเป็นประพจน์ เนื่องจากช่วยให้สามารถจำแนกข้อความที่ใช้ในการสื่อสารได้อย่างถูกต้อง ข้อความที่ไม่เป็นประพจน์สามารถจำแนกได้ดังนี้

1. ประโยคคำถาม เช่น ทำไมต้องเรียนคณิตศาสตร์? หรือ คุณชื่ออะไร? ซึ่งประโยคคำถามไม่สามารถเป็นจริงหรือเท็จได้ เนื่องจากเป็นการสอบถามข้อมูล ไม่ใช่การกล่าวอ้างข้อเท็จจริง

2. ประโยคคำสั่ง เช่น หยุดพูด! หรือ กรุณาปิดประตู ซึ่งประโยคคำสั่งเป็นการขอร้องหรือสั่งการ ไม่ได้กล่าวอ้างข้อเท็จจริงใดๆ จึงไม่มีค่าความจริง

3. ประโยคอุทาน เช่น ว้าว! สวยจัง! หรือ โอ้โห! ยอดมาก! ซึ่งประโยคอุทานแสดงอารมณ์ความรู้สึก ไม่ใช่การกล่าวอ้างข้อเท็จจริงจึงไม่เป็นประพจน์

4. ประโยคที่มีความกำกวม เช่น บุคคลนี้สูง ความสูงเป็นสิ่งที่ขึ้นกับมาตรฐานการวัด หากไม่ระบุว่าสูงเท่าใดหรือเทียบกับอะไร จะไม่สามารถระบุค่าความจริงได้

5. ประโยคที่ขึ้นกับความเห็น เช่น ดนตรีคลาสสิกเพราะกว่าเพลงป็อป ซึ่งประโยคที่แสดงความชอบส่วนบุคคลไม่สามารถตัดสินเป็นจริงหรือเท็จได้ เนื่องจากความงามเป็นเรื่องของความชอบส่วนบุคคล

ข้อความ เหล่า นี้ ไม่ สามารถ ระบุ ค่า ความ จริง ได้ อย่าง เป็น สากล จึง ไม่ เป็น ประพจน์ ใน ทาง ตรรกศาสตร์

1.4 ตัวเชื่อมประพจน์ (Logical Connectives)

ใน ชีวิต จริง ข้อความ ส่วน ใหญ่ ไม่ ได้ เป็น ประ พจน์ เดี่ยวๆ แต่ มัก ประกอบ ด้วย ประพจน์ หลาย ประพจน์ เชื่อม กัน ด้วย ตัว เชื่อม ทาง ตรรกศาสตร์ (Logical Connectives) ตัว เชื่อม ทาง ตรรกศาสตร์ เป็น เครื่องมือสำคัญที่ทำให้สามารถสร้างประพจน์ที่ซับซ้อนขึ้นจากประพจน์ง่ายๆ การเข้าใจตัวเชื่อมแต่ละตัว และวิธีการทำงานของตัวเชื่อมจึงเป็นพื้นฐานสำคัญในการวิเคราะห์ประพจน์เชิงประกอบ

ตัว เชื่อม ทาง ตรรกศาสตร์ พื้น ฐาน มี ทั้งหมด 5 ตัว ได้แก่ นิเสธ (Negation) การ เชื่อม แบบ และ (Conjunction) การเชื่อมแบบหรือ (Disjunction) การเชื่อมแบบถ้า...แล้ว (Implication) และการเชื่อมแบบก็ต่อเมื่อ (Biconditional) แต่ละตัวเชื่อมมีความหมายและการใช้งานที่เฉพาะเจาะจง โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. นิเสธ หรือ การปฏิเสธ (Negation, $\neg$) เป็นตัวเชื่อมเอกภาพ (Unary Connective) ที่กระทำกับประพจน์เพียงประพจน์เดียว ใช้สัญลักษณ์ $\neg$ หรือ $\sim$ การ negated ประพจน์ p จะกลับค่าความจริงของ p ถ้า p เป็นจริง $\neg p$ จะเป็นเท็จ และถ้า p เป็นเท็จ $\neg p$ จะเป็นจริง

2. การเชื่อมแบบและ หรือ คอนจังก์ชัน (Conjunction, $\wedge$) ใช้สัญลักษณ์ $\wedge$ ประพจน์ $p \wedge q$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อทั้ง p และ q เป็นจริงทั้งคู่ ถ้าตัวใดตัวหนึ่งเป็นเท็จ ผลลัพธ์จะเป็นเท็จ

3. การเชื่อมแบบหรือ หรือ ดิสจังก์ชัน (Disjunction, $\vee$) ใช้สัญลักษณ์ $\vee$ ประพจน์ $p \vee q$ จะเป็นจริงเมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งใน p หรือ q เป็นจริง จะเป็นเท็จก็ต่อเมื่อทั้ง p และ q เป็นเท็จทั้งคู่

4. การเชื่อมแบบถ้า...แล้ว หรือ อิมพลิเคชัน (Implication, $\rightarrow$) ใช้สัญลักษณ์ $\rightarrow$ ประพจน์ $p \rightarrow q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q โดย p คือเงื่อนไขนำ (Antecedent) และ q คือเงื่อนไขตาม (Consequent) ค่าความจริงจะเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ เมื่อ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จ

5. การเชื่อมแบบก็ต่อเมื่อ หรือ ไบคอนดิชันัล (Biconditional, $\leftrightarrow$) ใช้สัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ อ่านว่า p ก็ต่อเมื่อ q จะเป็นจริงเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน (ทั้งจริงหรือทั้งเท็จ) และเป็นเท็จเมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน

ตารางที่ 1 แสดงค่าความจริงของตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ทั้ง 5 ตัว ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ประพจน์เชิงประกอบ

ตารางที่ 1 ตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐานทั้ง 5 ตัว

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

1.5 ตารางความจริง (Truth Tables)

ตารางความจริง (Truth Table) เป็นเครื่องมือเชิงระบบที่ใช้แสดงค่าความจริงทั้งหมดที่เป็นไปได้ของประพจน์เชิงประกอบ โดยพิจารณาจากค่าความจริงของประพจน์ย่อยแต่ละตัว ตารางความจริงเป็นวิธีการที่เป็นระบบและชัดเจนในการตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ที่ซับซ้อน ทำให้สามารถวิเคราะห์และเปรียบเทียบประพจน์ได้อย่างแม่นยำ

ในการสร้างตารางความจริงสำหรับประพจน์ที่มี n ตัวแปร จะต้องพิจารณาทุกการผombination ของค่าความจริง ซึ่งมีทั้งหมด 2^n กรณี สำหรับประพจน์ที่มี 1 ตัวแปรจะมี $2^1 = 2$ กรณี ประพจน์ที่มี 2 ตัวแปรจะมี $2^2 = 4$ กรณี และประพจน์ที่มี 3 ตัวแปรจะมี $2^3 = 8$ กรณี ตามลำดับ การเพิ่มจำนวนตัวแปรทำให้จำนวนกรณีเพิ่มขึ้นแบบทวีคูณ

การสร้างตารางความจริงสำหรับประพจน์เชิงประกอบที่ซับซ้อน ต้องระบุตัวแปรย่อยทั้งหมดก่อน จากนั้นสร้างคอลัมน์สำหรับแต่ละประพจน์ย่อย โดยเริ่มจากภายในออกสู่ภายนอก กล่าวคือ คำนวณค่าความจริงของประพจน์ย่อยที่ซ้อนกันอยู่ภายในวงเล็บก่อน แล้วจึงค่อยๆ คำนวณไปยังประพจน์หลักที่อยู่ภายนอก

1.5.1 การเชื่อมด้วย AND ($\wedge$) — คอนจังก์ชัน (Conjunction)

การเชื่อมด้วย AND ใช้สัญลักษณ์ $\wedge$ ในทางตรรกศาสตร์ และใช้ในวงจรดิจิทัลว่า AND Gate ประพจน์ $p \wedge q$ อ่านว่า p และ q จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อทั้ง p และ q เป็นจริงทั้งคู่ ถ้าตัวใดตัวหนึ่งเป็นเท็จ ผลลัพธ์จะเป็นเท็จทันที หลักการนี้เหมือนกับการทำงานของสวิตช์ไฟฟ้าที่ต้องปิดทั้งคู่ถึงจะมีกระแสไหล

ประพจน์ $p \wedge q$ มีลักษณะเหมือนกับการใช้คำว่า และ ในภาษาพูด เช่น ฉันซื้อขนมและน้ำ หมายความว่าฉันซื้อขนมเป็นจริง และฉันซื้อน้ำเป็นจริงด้วย ถ้าฉันซื้อเฉพาะขนม ประโยคนี้ก็จะไม่เป็นจริง

ตารางที่ 2 ตารางความจริงของการเชื่อมด้วย AND ($p \wedge q$)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่า $p \wedge q$ เป็นจริงเพียงกรณีเดียว คือกรณีที่ p และ q ทั้งคู่เป็นจริง

ตัวอย่าง พิจารณาประพจน์ วันนี้ฝนตก และ พื้นถนนเปียก ถ้าทั้งสองประพจน์เป็นจริง คือฝนตกจริงและพื้นเปียกจริง ผลลัพธ์ก็จะเป็นจริง แต่ถ้าฝนตกจริงแต่พื้นไม่เปียก ผลลัพธ์ก็จะเป็นเท็จ

1.5.2 การเชื่อมด้วย OR ($\vee$) — ดิสจังก์ชัน (Disjunction)

การเชื่อมด้วย OR ใช้สัญลักษณ์ $\vee$ ในทางตรรกศาสตร์ และใช้ในวงจรดิจิทัลว่า OR Gate ประพจน์ $p \vee q$ อ่านว่า p หรือ q จะเป็นจริงเมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งใน p หรือ q เป็นจริง จะเป็นเท็จก็ต่อเมื่อทั้ง p และ q เป็นเท็จทั้งคู่ ต้องระวังว่า OR ในทางตรรกศาสตร์เป็น OR แบบรวม (Inclusive OR) ซึ่งรวมกรณีที่ทั้งคู่จริงด้วย

ในภาษาพูด คำว่า หรือ อาจมีความหมายแบบแยก (Exclusive OR, XOR) หรือแบบรวมก็ได้ ต้องพิจารณาบริบทประโยค ตัวอย่างเช่น ประโยค คุณสามารถเลือกชา หรือ กาแฟ อาจตีความได้ว่าเลือกได้อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น (Exclusive) หรือเลือกทั้งสองก็ได้ (Inclusive) ขึ้นกับบริบท

ตารางที่ 3 แสดงให้เห็นว่า $p \vee q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียว คือกรณีที่ p และ q ทั้งคู่เป็นเท็จ

ตัวอย่าง พิจารณาประพจน์ ฉันจะไปกินข้าว หรือ ฉันจะไปดูหนัง ถ้าฉันไปกินข้าวเพียงอย่างเดียว ประพจน์ก็เป็นจริง ถ้าฉันไปดูหนังเพียงอย่างเดียว ประพจน์ก็เป็นจริง แต่ถ้าฉันไม่ไปทั้งสองอย่าง ประพจน์ก็

ตารางที่ 3 ตารางความจริงของการเชื่อมด้วย OR ($p \vee q$)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

จะเป็นเท็จ

1.5.3 การเชื่อมด้วย NOT ($\neg$) — นิเสธ (Negation)

นิเสธ (Negation) ใช้สัญลักษณ์ $\neg$ หรือ $\sim$ เป็นตัวเชื่อมเอกภาพ (Unary Connective) ที่กระทำกับประพจน์เพียงประพจน์เดียว $\neg p$ อ่านว่า ไม่ p หรือ นิเสธของ p การ negated จะกลับค่าความจริงของประพจน์ ถ้า p เป็นจริง $\neg p$ จะเป็นเท็จ และถ้า p เป็นเท็จ $\neg p$ จะเป็นจริง

นิเสธมีความสำคัญมากในการสร้างประพจน์ที่ซับซ้อน เนื่องจากเป็นเครื่องมือในการเปลี่ยนแปลงข้อความจากจริงเป็นเท็จ หรือจากเท็จเป็นจริง การใช้นิเสธอย่างถูกต้องเป็นพื้นฐานของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะการพิสูจน์โดยบทงาน (Proof by Contradiction)

ตารางที่ 4 ตารางความจริงของนิเสธ ($\neg p$)

p	$\neg p$
T	F
F	T

ตารางที่ 4 แสดงให้เห็นว่านิเสธกลับค่าความจริงอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง ถ้า p คือประพจน์ วันนี้ฝนตก แล้ว $\neg p$ คือประพจน์ วันนี้ฝนไม่ตก ถ้าวันนี้ฝนตกจริง p จะเป็นจริงและ $\neg p$ จะเป็นเท็จ แต่ถ้าวันนี้ฝนไม่ตก p จะเป็นเท็จและ $\neg p$ จะเป็นจริง

1.5.4 การเชื่อมด้วย IMPLIES ($\rightarrow$) — อิมพลิเคชัน (Conditional)

การเชื่อมด้วย IMPLIES ใช้สัญลักษณ์ $\rightarrow$ เป็นตัวเชื่อมที่มีความหมายละเอียดอ่อนที่สุดในบรรดาตัวเชื่อมทั้งหมด ประพจน์ $p \rightarrow q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q หรือ p implies q โดย p เรียกว่า เงื่อนไขนำ (Antecedent หรือ Hypothesis) และ q เรียกว่า เงื่อนไขตาม (Consequent หรือ Conclusion)

ค่าความจริงของ $p \to q$ กำหนดดังนี้ จะเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ เมื่อ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จ ในกรณีอื่นๆ ทั้งหมด คือ ถ้า p เป็นเท็จ ไม่ว่า q จะเป็นอะไร $p \to q$ จะเป็นจริง หรือถ้า p และ q ทั้งคู่เป็นจริง $p \to q$ ก็จะเป็นจริง หลักการนี้อาจดูไม่สอดคล้องกับสัญชาตญาณในบางครั้ง แต่เป็นนิยามมาตรฐานในทางตรรกศาสตร์ ทั้งนี้ หลักการที่ว่าเมื่อเงื่อนไขนำเป็นเท็จแล้วประพจน์ทั้งหมดจะเป็นจริง อธิบายได้ว่าเมื่อเงื่อนไขนำไม่เกิดขึ้น เงื่อนไขจึงไม่ถูกละเมิดและถือว่าเป็นจริงโดยปริยาย **mendelson2015introduction**

ตารางที่ 5 ตารางความจริงของ IMPLIES ($p \to q$)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตารางที่ 5 แสดงให้เห็นว่า $p \to q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวที่แถวที่สอง

ตัวอย่าง พิจารณาประพจน์ ถ้าฝนตกแล้วพื้นถนนจะเปียก

1. ฝนตก (T) และ พื้นเปียก (T) หมายความว่าฝนตกจริงและพื้นเปียกจริงตามที่คาดหมาย ผลลัพธ์คือ จริง

2. ฝนตก (T) แต่ พื้นไม่เปียก (F) หมายความว่าฝนตกจริงแต่พื้นไม่เปียกผิดคาด ผลลัพธ์คือ เท็จ

3. ฝนไม่ตก (F) และ พื้นเปียก (T) หมายความว่าฝนไม่ตกแต่พื้นเปียกจากสาเหตุอื่น เงื่อนไขนำไม่เกิดขึ้นจึงไม่ถูกละเมิด ผลลัพธ์คือ จริง

4. ฝนไม่ตก (F) และ พื้นไม่เปียก (F) หมายความว่าฝนไม่ตกและพื้นไม่เปียกตามปกติ เงื่อนไขนำไม่เกิดขึ้นจึงไม่ถูกละเมิด ผลลัพธ์คือ จริง

หลักการจำ จำได้ง่ายว่า $p \to q$ จะเท็จเพียงเมื่อ จริงแต่ไม่จริง (T $\to$ F เท่านั้น)

1.5.5 การเชื่อมด้วย IFF ($\leftrightarrow$) — ไบคอนดิชันัล (Biconditional)

การเชื่อมด้วย IFF หรือ Biconditional ใช้สัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ อ่านว่า p ก็ต่อเมื่อ q หรือ p ก็ต่อเมื่อ q หมายความว่า p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน ทั้งคู่จริงหรือทั้งคู่เท็จนั่นเอง IFF สามารถมองได้ว่าเป็นการรวมกันของ $p \to q$ และ $q \to p$ ซึ่งหมายความว่าทั้งสองเงื่อนไขต้องเป็นจริงพร้อมกัน

ตารางที่ 6 แสดงให้เห็นว่า $p \leftrightarrow q$ จะจริงเมื่อ p และ q มีค่าเหมือนกัน

ตารางที่ 6 ตารางความจริงของ IFF ($p \leftrightarrow q$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตัวอย่าง พิจารณาประพจน์ ฉันจะไปงานเลี้ยง ก็ต่อเมื่อ คุณไปงานเลี้ยงด้วย ประพจน์นี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อทั้งสองคนไปงานเลี้ยงหรือทั้งสองคนไม่ไปงานเลี้ยง ถ้าคนหนึ่งไปอีกคนไม่ไป ประพจน์จะเป็นเท็จ

1.6 สัจนิรันดร์และความขัดแย้ง

เมื่อศึกษาประพจน์เชิงประกอบแล้ว คำถามสำคัญคือ ประพจน์เชิงประกอบนั้นมีค่าความจริงเป็นอย่างไรโดยรวม กล่าวคือ ในทุกกรณีของค่าความจริงของตัวแปรย่อย ประพจน์เชิงประกอบจะมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ หรือเป็นเท็จเสมอ หรือขึ้นกับกรณี การจำแนกประพจน์เชิงประกอบตามลักษณะนี้มีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์

สัจนิรันดร์ (Tautology) หมายถึง ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย ความรู้เรื่องสัจนิรันดร์มีความสำคัญอย่างยิ่งในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ถือว่าเป็นความจริงที่จำเป็น (Necessary Truth) ไม่ว่าสถานการณ์จริงเป็นอย่างไรก็ตาม

ในทางตรงกันข้าม ปฏิเทง (Contradiction หรือ Self-Contradiction) หมายถึง ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นเท็จในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย ปฏิเทงเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ในทางตรรกศาสตร์ เนื่องจากทั้ง p และ $\neg p$ ไม่สามารถเป็นจริงพร้อมกันได้

สำหรับประพจน์กลาง (Contingency) คือ ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงบ้างและเป็นเท็จบ้าง ขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรย่อย ประพจน์ส่วนใหญ่ในชีวิตจริงเป็นประพจน์กลาง

1.6.1 สัจนิรันดร์ (Tautology)

สัจนิรันดร์ (Tautology) เป็นประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย ไม่ว่าตัวแปรย่อยจะมีค่าความจริงเป็นอะไรก็ตาม ประพจน์สัจนิรันดร์จะต้องเป็นจริงเสมอ ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของสัจนิรันดร์คือ $p \vee \neg p$ ซึ่งอ่านว่า p หรือไม่ p ประพจน์นี้เป็นจริง

เสมอ เนื่องจากในทุกสถานการณ์ p จะต้องเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง จึงทำให้ $p \vee \neg p$ เป็นจริงเสมอ

สัจนิรันดร์สอดคล้องกับกฎแห่งการตัดสิน (Law of Excluded Middle) ของอริสโตเติล **aristotle_organon** ซึ่งระบุว่าสำหรับทุกประพจน์ p แล้ว p หรือนิเสธของ p จะต้องเป็นจริงอย่างน้อยหนึ่งอย่าง ไม่มีทางที่ทั้งสองจะเป็นเท็จพร้อมกันได้

ตารางที่ 7 ตารางแสดงว่า $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

ตารางที่ 7 แสดงให้เห็นว่าคอลัมน์สุดท้ายมีค่า T ทุกแถว จึงเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างสัจนิรันดร์อื่นๆ ได้แก่ $p \to p$ ซึ่งหมายความว่าถ้า p แล้ว p ย่อมจริงเสมอ $p \leftrightarrow p$ ซึ่งหมายความว่า p ก็ต่อเมื่อ p และ $(p \wedge q) \to p$ ซึ่งหมายความว่าถ้า p และ q เป็นจริง แล้ว p ย่อมจริง

ตารางที่ 8 ตารางแสดงว่า $(p \wedge q) \to p$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$	**ผลลัพธ์**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

ตารางที่ 8 แสดงให้เห็นว่า $(p \wedge q) \to p$ เป็นจริงทุกกรณี

การพิสูจน์โดยการใช้สัจนิรันดร์ ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หากต้องการแสดงว่าข้อความ P เป็นจริง อาจพิสูจน์ว่า $\neg P$ นำไปสู่ปฏิเทง (Contradiction) เมื่อ $\neg P$ นำไปสู่ปฏิเทง แสดงว่า $\neg P$ เป็นเท็จ จึงสรุปได้ว่า P เป็นจริง วิธีนี้เรียกว่า การพิสูจน์โดยบทงาน (Proof by Contradiction)

ตัวอย่างการพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ โดยใช้หลักการของปฏิเทง

1. สันนิษฐานว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ จึงเขียนได้ว่า $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่มีตัวหารร่วม และ $b \neq 0$

2. ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ หรือ $a^2 = 2b^2$

3. จาก $a^2 = 2b^2$ จะเห็นว่า a^2 เป็นจำนวนคู่ จึงได้ว่า a เป็นจำนวนคู่ (เพราะถ้า a เป็นจำนวนคี่ a^2 ก็จะเป็นจำนวนคี่)

4. ให้ $a = 2c$ จะได้ $(2c)^2 = 2b^2$ หรือ $4c^2 = 2b^2$ หรือ $b^2 = 2c^2$

5. จาก $b^2 = 2c^2$ จะเห็นว่า b^2 เป็นจำนวนคู่ จึงได้ว่า b เป็นจำนวนคู่

6. แต่ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ทั้งคู่ จะมีตัวหารร่วมคือ 2 ซึ่งขัดแย้งกับข้อสันนิษฐานในข้อ 1 ที่ว่า a และ b ไม่มีตัวหารร่วม

7. ดังนั้นข้อสันนิษฐานเป็นเท็จ แสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

การพิสูจน์นี้ใช้หลักการว่า ถ้า $\neg P$ นำไปสู่ปฏิเทง แสดงว่า P เป็นจริง

1.6.2 ปฏิเทง (Contradiction หรือ Self-Contradiction)

ปฏิเทง (Contradiction) หรือ ประพจน์ขัดแย้งในตัวเอง เป็นประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นเท็จในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย ไม่ว่าตัวแปรย่อยจะมีค่าความจริงเป็นอะไรก็ตาม ประพจน์ปฏิเทงจะต้องเป็นเท็จเสมอ ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของปฏิเทงคือ $p \wedge \neg p$ ซึ่งอ่านว่า p และไม่ p ประพจน์นี้เป็นเท็จเสมอ เนื่องจาก p ไม่สามารถเป็นทั้งจริงและเท็จพร้อมกันได้

ปฏิเทงเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ในทางตรรกศาสตร์ เนื่องจากขัดกับกฎแห่งการไม่ขัดแย้ง (Law of Non-Contradiction) ซึ่งระบุว่าทั้ง p และ $\neg p$ ไม่สามารถเป็นจริงพร้อมกันได้ การเข้าใจปฏิเทงมีความสำคัญในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากเมื่อแสดงว่าการสันนิษฐานนำไปสู่ปฏิเทง แสดงว่าการสันนิษฐานนั้นต้องเป็นเท็จ

ตารางที่ 9 ตารางแสดงว่า $p \wedge \neg p$ เป็นปฏิเทง

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	**ผลลัพธ์**
T	F	F	F
F	T	F	F

ตารางที่ 9 แสดงให้เห็นว่าคอลัมน์สุดท้ายมีค่า F ทุกแถว จึงเป็นปฏิเทง

ตัวอย่างปฏิเทงอื่นๆ ได้แก่ $\neg(p \vee \neg p)$ ซึ่งเป็นนิเสธของกฎแห่งการตัดสิน และ $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ ซึ่งหมายความว่า q ต้องเป็นจริงและเท็จพร้อมกันภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน

หากพบว่าการสันนิษฐานนำไปสู่ปฏิเทง แสดงว่าการสันนิษฐานนั้นเป็นเท็จ นี่คือหลักการพื้นฐานของการพิสูจน์โดยบทงาน (Proof by Contradiction) ซึ่งเป็นเครื่องมือทรงพลังในทางคณิตศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างสัจนิรันดร์และปฏิเทงมีความสำคัญ โดยนิเสธของสัจนิรันดร์คือปฏิเทง และนิเสธของปฏิเทงคือสัจนิรันดร์ กล่าวคือ ถ้า P เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว $\neg P$ จะเป็นปฏิเทง และถ้า P เป็นปฏิเทง แล้ว $\neg P$ จะเป็นสัจนิรันดร์

1.6.3 ประพจน์กลาง (Contingency)

ประพจน์กลาง (Contingency) คือ ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงบ้างและเป็นเท็จบ้าง ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของตัวแปรย่อย กล่าวคือ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ก็ไม่เป็นปฏิเทง แต่มีค่าความจริงขึ้นกับการกำหนดค่าของตัวแปรย่อย ประพจน์ส่วนใหญ่ในชีวิตประจำวันและในคณิตศาสตร์เป็นประพจน์กลาง

ตารางที่ 10 ตารางแสดงว่า $p \wedge q$ เป็นประพจน์กลาง

p	q	$p \wedge q$	**ผลลัพธ์**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

ตารางที่ 10 แสดงให้เห็นว่า $p \wedge q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ (เพราะมี F) และไม่เป็นปฏิเทง (เพราะมี T) จึงเป็นประพจน์กลาง

ประพจน์กลางเป็นประพจน์ที่มีความหมายจริงในการใช้งาน เนื่องจากค่าความจริงของประพจน์กลางขึ้นกับข้อเท็จจริงในโลกจริง ตัวอย่างเช่น ประพจน์ วันนี้ฝนตก จะเป็นจริงหรือเท็จขึ้นกับสถานการณ์จริงในวันนั้น

1.7 การหักอนุมาน (Inference Rules)

การหักอนุมาน (Inference Rules) คือ กฎที่ใช้ในการสรุปผลที่สมเหตุสมผลจากเหตุที่กำหนดให้ การหักอนุมานเป็นเครื่องมือพื้นฐานในการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) ซึ่งเริ่มจากหลักการหรือข้อตั้งต้นทั่วไป แล้วสรุปไปยังกรณีเฉพาะ หากใช้การหักอนุมานอย่างถูกต้อง ผลที่ได้จะเป็นจริงอย่างแน่นอนตราบใดที่ข้อตั้งต้นเป็นจริง

ในทางตรรกศาสตร์ การหักอนุมานสามารถเขียนเป็นรูปแบบ (Form) ที่ชัดเจน โดยมีข้อตั้งต้น (Premises) และผลสรุป (Conclusion) รูปแบบการหักอนุมานที่ถูกต้องจะเป็นสัจนิรันดร์ กล่าวคือ ถ้าข้อตั้งต้นทั้งหมดเป็นจริง ผลสรุปจะต้องเป็นจริงเสมอ

การหักอนุมานมีหลายรูปแบบ แต่ละรูปแบบมีชื่อเรียกเฉพาะและมีการใช้งานที่แตกต่างกัน การเข้าใจรูปแบบต่างๆ ของการหักอนุมานมีความสำคัญอย่างยิ่งในการให้เหตุผลอย่างมีตรรกะและการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.7.1 Modus Ponens (การยืนยัน)

Modus Ponens หรือ การยืนยัน เป็นรูปแบบการหักอนุมานที่ใช้บ่อยที่สุดในการให้เหตุผล มีรูปแบบดังนี้

1. ถ้า p แล้ว q โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. p และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore q$ ผลสรุปคือ

อ่านได้ว่า ถ้า p แล้ว q และ p เป็นจริง แล้ว q ต้องเป็นจริง Modus Ponens เป็นการนำเงื่อนไขนำมายืนยันว่าเป็นจริง ทำให้เงื่อนไขตามต้องเป็นจริงตามไปด้วย หลักการนี้เป็นพื้นฐานของการเขียนโปรแกรมแบบ if-then

ตัวอย่างการใช้ Modus Ponens

1. ถ้าฝนตก แล้วพื้นถนนจะเปียก โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. ฝนตก และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ พื้นถนนเปียก ผลสรุปคือ

จากตัวอย่างจะเห็นว่า เมื่อทราบว่าถ้าฝนตกแล้วพื้นถนนจะเปียก และฝนตกจริง จึงสรุปได้อย่างแน่นอนว่าพื้นถนนเปียก

1. ถ้าคนรักษาสัญญา แล้วคนนั้นจะได้รับความเชื่อถือ โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. นาย ก รักษาสัญญา และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ นาย ก ได้รับความเชื่อถือ ผลสรุปคือ

Modus Ponens เป็นเครื่องมือสำคัญในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น คำสั่ง if (condition) { execute_action(); } ทำงานบนหลักการเดียวกับ Modus Ponens คือถ้าเงื่อนไขเป็นจริง แล้วกระทำการที่กำหนด

1.7.2 Modus Tollens (การปฏิเสธ)

Modus Tollens หรือ การปฏิเสธ เป็นรูปแบบการหักอนุมานที่ใช้ในการปฏิเสธผลลัพธ์เพื่อไปหาการปฏิเสธเงื่อนไขนำ มีรูปแบบดังนี้

1. ถ้า p แล้ว q โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. $\neg q$ และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore \neg p$ ผลสรุปคือ

อ่านได้ว่า ถ้า p แล้ว q และ q เป็นเท็จ แล้ว p ต้องเป็นเท็จ หลักการคือถ้าผลลัพธ์ไม่เกิดขึ้นแสดงว่าเงื่อนไขนำไม่น่าจะเกิดขึ้น ต้องระวังว่าการสรุปว่า p เป็นเท็จเป็นการสรุปที่สมเหตุสมผล แต่ในทางวิทยาศาสตร์ต้องระวังว่าอาจมีสาเหตุอื่นที่ทำให้ q ไม่เกิดขึ้น

ตัวอย่างการใช้ Modus Tollens

1. ถ้าฝนตก แล้วพื้นถนนจะเปียก โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. พื้นถนนไม่เปียก และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ ฝนไม่ตก ผลสรุปคือ

จากตัวอย่างจะเห็นว่า เมื่อทราบว่าถ้าฝนตกแล้วพื้นถนนจะเปียก และพื้นถนนไม่เปียก จึงสรุปได้ว่าฝนไม่ตก ทั้งนี้ต้องพิจารณาว่าอาจมีสาเหตุอื่นที่ทำให้พื้นเปียกได้ เช่น รดน้ำต้นไม้

1. ถ้าสัตว์เป็นสุนัข แล้วสัตว์นั้นเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. สัตว์ตัวนี้ไม่เป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ สัตว์ตัวนี้ไม่ใช่สุนัข ผลสรุปคือ

1.7.3 Hypothetical Syllogism (ตรรกะแบบมีเงื่อนไข)

Hypothetical Syllogism หรือ ตรรกะแบบมีเงื่อนไข เป็นรูปแบบการหักอนุมานที่เชื่อมโยงเงื่อนไขหลายข้อเข้าด้วยกัน มีรูปแบบดังนี้

1. ถ้า p แล้ว q โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. ถ้า q แล้ว r และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ ถ้า p แล้ว r ผลสรุปคือ

อ่านได้ว่า ถ้า p นำไปสู่ q และ q นำไปสู่ r แล้ว p จะนำไปสู่ r โดยตรง หลักการนี้เรียกว่า การถ่ายโอนเงื่อนไข (Conditional Transitivity) ซึ่งมีความสำคัญในการสร้างการให้เหตุผลที่ซับซ้อน

ตัวอย่างการใช้ Hypothetical Syllogism

1. ถ้าฝนตก แล้วถนนจะเปียก โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. ถ้าถนนเปียก แล้วรถจะลื่น และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ ถ้าฝนตก แล้วรถจะลื่น ผลสรุปคือ

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าสามารถเชื่อมโยงเงื่อนไขหลายข้อเข้าด้วยกันเพื่อสร้างเงื่อนไขใหม่ที่ซับซ้อนขึ้น

ในการเขียนโปรแกรม Hypothetical Syllogism สามารถใช้ในการตรวจสอบเงื่อนไขแบบต่อเนื่อง เช่น ถ้า input ถูกต้อง แล้ว process จะทำงาน ถ้า process ทำงาน แล้ว output จะถูกสร้าง ดังนั้นถ้า input ถูกต้อง แล้ว output จะถูกสร้าง

1.7.4 Disjunctive Syllogism (ตรรกะแบบแยก)

Disjunctive Syllogism หรือ ตรรกะแบบแยก เป็นรูปแบบการหักอนุมานที่ใช้กับประพจน์ที่เชื่อมด้วย OR มีรูปแบบดังนี้

1. $p \vee q$ โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. $\neg p$ และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore q$ ผลสรุปคือ

อ่านได้ว่า ถ้า p หรือ q เป็นจริง และ p เป็นเท็จ แล้ว q ต้องเป็นจริง หลักการคือเมื่อทราบว่าอย่างน้อยหนึ่งในสองอย่างเป็นจริง และทราบว่าอย่างหนึ่งเป็นเท็จ อีกอย่างหนึ่งต้องเป็นจริง

ตัวอย่างการใช้ Disjunctive Syllogism

1. นาย ก อยู่บ้านหรืออยู่ที่ทำงาน โดยมีข้อตั้งต้นที่ 1
2. นาย ก ไม่ได้อยู่ที่ทำงาน และข้อตั้งต้นที่ 2
3. $\therefore$ นาย ก อยู่บ้าน ผลสรุปคือ

ในการเขียนโปรแกรม Disjunctive Syllogism สามารถใช้ในการตรวจสอบสถานะและการตัดสินใจ เช่น ถ้า error flag เป็น E1 หรือ E2 และตรวจพบว่า error flag ไม่ใช่ E1 แล้ว error flag ต้องเป็น E2

1.8 การพิสูจน์ด้วยตารางความจริง

ในการวิเคราะห์ประพจน์เชิงประกอบที่ซับซ้อน การใช้ตารางความจริงเป็นวิธีการที่เป็นระบบและแม่นยำในการตรวจสอบความสมมูลหรือความถูกต้องของประพจน์ การพิสูจน์ด้วยตารางความจริงอาจใช้

เวลานานหากประพจน์มีตัวแปรหลายตัว แต่ให้ผลลัพธ์ที่แน่นอนและตรวจสอบได้

การใช้ตารางความจริงในการพิสูจน์มีหลายวัตถุประสงค์ ได้แก่ การตรวจสอบว่าประพจน์เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ การตรวจสอบว่าประพจน์สองประพจน์สมมูลกันหรือไม่ และการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

ในการพิสูจน์ว่าประพจน์สองประพจน์ P และ Q สมมูลกัน ($P \equiv Q$) จะต้องสร้างตารางความจริงสำหรับทั้งสองประพจน์ แล้วเปรียบเทียบคอลัมน์ของผลลัพธ์ ถ้าค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี แสดงว่าประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน

การพิสูจน์ว่าการให้เหตุผลสมเหตุสมผล โดยการเขียนข้อตั้งต้นทั้งหมดเชื่อมด้วย AND แล้วเชื่อมกับเงื่อนไขนำของผลสรุปด้วย $\rightarrow$ ถ้าประพจน์ที่ได้เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่าการให้เหตุผลนั้นสมเหตุสมผล

ตัวอย่างการพิสูจน์ พิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ และ $\neg p \vee q$ มีค่าความจริงเหมือนกัน (สมมูลกัน)

ตารางที่ 11 ตารางพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	**สมมูล?**
T	T	T	F	T	✓
T	F	F	F	F	✓
F	T	T	T	T	✓
F	F	T	T	T	✓

ตารางที่ 11 แสดงให้เห็นว่าคอลัมน์ $p \rightarrow q$ และ $\neg p \vee q$ มีค่าเหมือนกันทุกแถว จึงสรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

ผลลัพธ์นี้มีความสำคัญอย่างยิ่งในการแปลงประพจน์เชิงเงื่อนไขให้อยู่ในรูปแบบที่ใช้เฉพาะ AND, OR, NOT ซึ่งมีประโยชน์ในการออกแบบวงจรดิจิทัลและการเขียนโปรแกรม

1.9 สรุปประเด็นสำคัญ

บทนี้ได้กล่าวถึงพื้นฐานของตรรกศาสตร์ (Logic) ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของวิทยาการคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์เชิงคำนวณ เนื้อหาครอบคลุมหัวข้อสำคัญหลายประการ โดยเริ่มจากความหมายและความสำคัญของตรรกศาสตร์ที่มีบทบาทในการให้เหตุผลอย่างมีระบบ ต่อด้วยประพจน์ (Propositions) ซึ่งเป็นหน่วยพื้นฐานที่สุดของตรรกศาสตร์ที่สามารถระบุค่าความจริงได้ และตัวเชื่อมประพจน์ (Logical Connectives) ทั้ง 5 ตัว ได้แก่ นิเสธ ($\neg$) การเชื่อมแบบและ ($\wedge$) การเชื่อมแบบหรือ ($\vee$) การเชื่อม

แบบถ้า...แล้ว ($\rightarrow$) และการเชื่อมแบบก็ต่อเมื่อ ($\leftrightarrow$) ตารางความจริง (Truth Tables) เป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ ช่วยให้สามารถตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ที่ซับซ้อนได้อย่างเป็นระบบ นอกจากนี้ยังได้ศึกษาประเภทของประพจน์เชิงประกอบ ได้แก่ สัจนิรันดร์ (Tautology) ซึ่งเป็นจริงทุกกรณี ปฏิเทง (Contradiction) ซึ่งเป็นเท็จทุกกรณี และประพจน์กลาง (Contingency) ซึ่งมีค่าความจริงขึ้นกับกรณี การหักอนุมาน (Inference Rules) เป็นกฎที่ใช้ในการสรุปผลอย่างมีตรรกะ ประกอบด้วย Modus Ponens, Modus Tollens, Hypothetical Syllogism และ Disjunctive Syllogism ซึ่งมีความสำคัญในการให้เหตุผลแบบนิรนัย และการเขียนโปรแกรม ทั้งหมดนี้เป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการศึกษาบทต่อไปและการนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ **rosen2019discrete**

1.10 ไฟล์โค้ดประกอบบท

สำหรับบทที่ 1 นี้ได้จัดทำ Jupyter Notebook ประกอบเพื่อให้ผู้เรียนสามารถฝึกปฏิบัติการสร้างและวิเคราะห์ตารางความจริงได้ด้วยตนเอง ไฟล์ Notebook ใช้ภาษา Python ร่วมกับไลบรารี `itertools` และ `pandas` ในการสร้างตารางความจริงอย่างอัตโนมัติสำหรับประพจน์เชิงประกอบที่มีตัวแปรหลายตัว พร้อมทั้งแสดงผลในรูปแบบตารางที่อ่านง่าย ไฟล์ดังกล่าวมีชื่อว่า `notebooks/Chapter01_Logic.ipynb`

ผู้เรียนควรทดลองรันโค้ดในแต่ละเซลล์และปรับเปลี่ยนนิพจน์ตรรกศาสตร์เพื่อสังเกตผลลัพธ์ที่เปลี่ยนแปลง การทดลองด้วยตนเองจะช่วยเสริมความเข้าใจเรื่องค่าความจริงและโครงสร้างของประพจน์เชิงประกอบได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าการอ่านเพียงอย่างเดียว

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัด 1.1 จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นให้ระบุค่าความจริง

1. $3 + 5 = 8$
2. $x > 10$
3. กรุณาปิดประตู
4. 7 เป็นจำนวนคู่
5. พรุ่งนี้จะเป็นวันพระ
6. ความรักคือสิ่งสวยงาม
7. $2^2 = 4$

แบบฝึกหัด 1.2 จงสร้างตารางความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \wedge \neg q$
2. $\neg p \vee q$
3. $(p \to q) \wedge (q \to p)$
4. $(p \vee q) \to r$
5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

แบบฝึกหัด 1.3 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางความจริง

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$
2. $(p \wedge q) \to p$
3. $p \vee \neg p$
4. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

แบบฝึกหัด 1.4 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นปฏิเทงหรือไม่

1. $p \wedge \neg p$
2. $\neg(p \vee \neg p)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

แบบฝึกหัด 1.5 จงใช้การหักอนุมานแบบ Modus Ponens หรือ Modus Tollens เพื่อหาผลสรุป

1. ถ้าวันนี้ฝนตก แล้วฉันจะไม่ออกไปข้างนอก วันนี้ฝนตก $\therefore$?
2. ถ้าข้าพเจ้าสอบผ่าน แล้วข้าพเจ้าจะดีใจ ข้าพเจ้าไม่ดีใจ $\therefore$?
3. ถ้าผู้สมัครมีประสบการณ์ แล้วผู้สมัครจะได้รับการคัดเลือก ผู้สมัครไม่ได้รับการคัดเลือก $\therefore$?

แบบฝึกหัด 1.6 จงตรวจสอบว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

1. $p \rightarrow q$ และ $\neg p \vee q$
2. $\neg(p \wedge q)$ และ $\neg p \vee \neg q$ (กฎของ De Morgan ข้อที่ 1)
3. $\neg(p \vee q)$ และ $\neg p \wedge \neg q$ (กฎของ De Morgan ข้อที่ 2)
4. $p \leftrightarrow q$ และ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

แบบฝึกหัด 1.7 จงเขียนประพจน์ในรูปแบบเชิงสัญลักษณ์ โดยกำหนด p: ฝนตก, q: พื้นเปียก, r: ฉันจะอยู่บ้าน

1. ถ้าฝนตก แล้วฉันจะอยู่บ้าน
2. ฝนตกและพื้นเปียก
3. ถ้าฝนไม่ตก แล้วฉันจะไม่อยู่บ้าน
4. ฉันจะอยู่บ้านก็ต่อเมื่อฝนตกหรือพื้นเปียก

แบบฝึกหัด 1.8 ให้นักศึกษาอธิบายความแตกต่างระหว่างสัจนิรันดร์ ปฏิเทง และประพจน์กลาง พร้อมยกตัวอย่างประกอบแต่ละประเภทอย่างน้อย 2 ตัวอย่าง

1.11 เอกสารอ้างอิง

แผนการสอนประจำบทที่ 2

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 2

ชื่อบท ทฤษฎีเซต (Set Theory)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบายความหมายและสัญลักษณ์ของเซตได้
2. ระบุประเภทของเซต เช่น เซตว่าง เซตจำกัด เซตอนันต์ได้
3. ใช้การดำเนินการบนเซต เช่น ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่างเซต และคอมพลีเมนต์ได้
4. พิสูจน์สมบัติของเซตโดยใช้แผนภาพเวนน์และพีชคณิตเซตได้
5. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีเซตในการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์ได้

หัวข้อที่สอน

1. นิยามและสัญลักษณ์ของเซต
2. ประเภทของเซต
3. การดำเนินการบนเซต
4. กฎพีชคณิตเซต (Set Algebra Laws)
5. แผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)
6. การประยุกต์ทฤษฎีเซตในวิทยาการคอมพิวเตอร์

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- แผนภาพเวนน์
- แบบฝึกหัดท้ายบท

ระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่ (Spatial Reference Systems)

2.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถ

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Geoid และ Ellipsoid และความสำคัญของแต่ละรูปทรงในการอ้างอิงตำแหน่งบนโลกได้

2. อธิบายโครงสร้างและองค์ประกอบของระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System) รวมถึงพิกัดละติจูดและลองจิจูดได้

3. อธิบายหลักการของระบบพิกัดฉาย (Projected Coordinate System) และความแตกต่างจากระบบพิกัดภูมิศาสตร์ได้

4. เลือกใช้ Datum ให้เหมาะสมกับพื้นที่ศึกษา เช่น WGS84 สำหรับการทำแผนที่ทั่วโลก หรือ Indian 1975 สำหรับประเทศไทยได้

5. คำนวณและแปลงพิกัดระหว่างระบบต่างๆ ได้ ทั้งการแปลงระหว่าง GCS และ PCS และการแปลงระหว่าง Datum ที่แตกต่างกัน

6. วิเคราะห์และจัดการปัญหาความคลาดเคลื่อนของข้อมูลเชิงพื้นที่ที่เกิดจากการใช้ระบบอ้างอิงที่ไม่เหมาะสมได้

2.2 บทนำ: ความสำคัญของระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่

ระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่ (Spatial Reference System) เป็นแกนกลางของระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (Geographic Information System หรือ GIS) ทุกระบบ เนื่องจากข้อมูลเชิงพื้นที่ทุกชิ้นจำเป็นต้องมีตำแหน่งที่แน่นอนบนพื้นผิวโลก การกำหนดตำแหน่งนี้ต้องอาศัยระบบอ้างอิงที่เป็นมาตรฐานเดียวกัน มิฉะนั้นข้อมูลจากแหล่งต่างๆ จะไม่สามารถซ้อนทับกันได้อย่างถูกต้อง แผนที่สองฉบับที่สร้างจากระบบอ้างอิงที่ต่างกันอาจแสดงตำแหน่งของจุดเดียวกันแตกต่างกันได้หลายร้อยเมตร

ความเข้าใจในระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในยุคข้อมูลขนาดใหญ่ (Big Data) และการใช้งาน GIS ในชีวิตประจำวัน เมื่อผู้ใช้งานระบบนำทาง (Navigation System) คาดหวังความแม่นยำในระดับเมตร หรือเมื่อวิศวกรออกแบบถนนที่ต้องเชื่อมต่อกับแผนที่ฐานข้อมูล ทุกชิ้นข้อมูลล้วนตั้งอยู่บน

สมมติฐานเกี่ยวกับรูปทรงของโลกและระบบพิกัดที่ใช้

ในบทนี้ ผู้เรียนจะได้ศึกษาตั้งแต่รูปทรงพื้นฐานของโลก กล่าวคือ Geoid และ Ellipsoid ซึ่งเป็นรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอ้างอิงตำแหน่ง จากนั้นจะได้เรียนรู้ระบบพิกัดสองประเภทหลัก ได้แก่ ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System หรือ GCS) และระบบพิกัดฉาย (Projected Coordinate System หรือ PCS) ที่ใช้ในการแสดงตำแหน่งบนแผนที่ราบ แต่ละระบบมีจุดเด่นและข้อจำกัดที่แตกต่างกัน และการเลือกใช้ให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์เป็นทักษะสำคัญ

นอกจากนี้ บทนี้ยังกล่าวถึง Datum ซึ่งเป็นพารามิเตอร์สำคัญที่กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดกับรูปทรงที่แท้จริงของโลก การเลือก Datum ที่ไม่เหมาะสมสำหรับพื้นที่ศึกษาจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนเชิงพื้นที่ที่สะสมตลอดทั้งโครงการ สุดท้ายจะได้เรียนรู้การแปลงพิกัด (Coordinate Transformation) ระหว่างระบบต่างๆ ซึ่งเป็นกระบวนการที่จำเป็นเมื่อต้องรวมข้อมูลจากหลายแหล่งที่ใช้ระบบอ้างอิงไม่เหมือนกัน

2.3 รูปทรงของโลก (Earth’s Shape)

การกำหนดตำแหน่งบนโลกต้องเริ่มจากการกำหนดรูปทรงของโลกที่จะใช้เป็นพื้นฐานอ้างอิง ความเข้าใจในรูปทรงที่แท้จริงของโลกและรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แทนนั้นมีความสำคัญอย่างยิ่ง เพราะทุกการคำนวณเชิงพื้นที่ล้วนตั้งอยู่บนสมมติฐานเกี่ยวกับรูปทรงนี้ ความแตกต่างเพียงเล็กน้อยในการเลือกรูปทรงอ้างอิงสามารถส่งผลต่อความแม่นยำของตำแหน่งที่คำนวณได้ในระดับเมตรถึงหลายร้อยเมตร

โลกที่เราอาศัยอยู่มีรูปทรงที่ซับซ้อนมากกว่ารูปทรงเรขาคณิตพื้นฐานใดๆ พื้นผิวโลกมีภูเขา หุบเขา และระดับความสูงที่แตกต่างกันอย่างมาก หากต้องการอ้างอิงตำแหน่งโดยใช้พื้นผิวจริงของโลกโดยตรง การคำนวณทางคณิตศาสตร์จะซับซ้อนจนไม่สามารถใช้งานได้จริง ด้วยเหตุนี้ นักธรณีวิทยาและนักคณิตศาสตร์จึงได้พัฒนารูปทรงทางคณิตศาสตร์สองรูปแบบที่ใช้แทนโลก กล่าวคือ Geoid และ Ellipsoid ซึ่งแต่ละรูปแบบมีจุดประสงค์และขอบเขตการใช้งานที่แตกต่างกัน

2.3.1 จีออยด์ (Geoid)

Geoid เป็นรูปทรงที่ใกล้เคียงกับระดับน้ำทะเลปานกลาง (Mean Sea Level) มากที่สุด ถ้านึกภาพมหาสมุทรทั่วโลกที่ปราศจากคลื่น ลม และกระแสน้ำ พื้นผิวน้ำทะเลที่สมมตินี้จะเป็น Geoid พอดี เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกไม่สม่ำเสมอในทุกจุด Geoid จึงมีรูปทรงที่ไม่สม่ำเสมอ โดยบริเวณที่มีมวลมากกว่าจะทำให้ Geoid ยื่นออกไป และบริเวณที่มีมวลน้อยกว่าจะทำให้ Geoid ยุบลง

ตัวอย่าง 2.1 Geoid แสดงความเบี่ยงเบนจาก Ellipsoid อย่างเห็นได้ชัดในหลายพื้นที่ทั่วโลก ตัวอย่างเช่น

บริเวณมหาสมุทรอินเดียมี Geoid ต่ำกว่า Ellipsoid ประมาณ 100 เมตร ในขณะที่บริเวณมหาสมุทรแปซิฟิกตะวันตกมี Geoid สูงกว่า Ellipsoid ประมาณ 80 เมตร ความเบี่ยงเบนนี้เกิดจากการกระจายตัวของมวลภายในโลกที่ไม่สม่ำเสมอ โดยเฉพาะบริเวณที่มีแหล่งแร่หนาแน่นหรือร่องลึกใต้มหาสมุทร

Geoid มีความสำคัญอย่างยิ่งในงานระดับ (Levelling) และงานที่เกี่ยวกับระดับความสูงเหนือน้ำทะเล เนื่องจากระดับความสูงที่แท้จริงต้องวัดจาก Geoid ซึ่งเป็นพื้นผิวที่น้ำจะไหลตามแรงโน้มถ่วงเสมอในทางปฏิบัติ เครื่องรับสัญญาณ GNSS (Global Navigation Satellite System) สามารถวัดความสูงเหนือ Ellipsoid ได้โดยตรง แต่ความสูงเหนือระดับน้ำทะเล (Orthometric Height) ที่ใช้ในงานวิศวกรรมต้องแปลงโดยใช้ค่า Geoid Undulation ซึ่งเป็นระยะห่างในแนวดิ่งระหว่าง Geoid กับ Ellipsoid ณ จุดนั้นๆ

สำหรับ การ ทำ แผนที่ และ GIS ทั่วไป Geoid ไม่ได้ใช้โดยตรงใน การ กำหนด ตำแหน่ง ราบ (Horizontal Position) แต่มีบทบาทสำคัญในการกำหนดตำแหน่งดิ่ง (Vertical Position) การทำความเข้าใจว่าความสูงที่ได้จาก GNSS เป็นความสูงเหนือ Ellipsoid ไม่ใช่ความสูงเหนือน้ำทะเล จะช่วยป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นในงานที่ต้องการความแม่นยำสูง

2.3.2 ทรงรี (Ellipsoid)

Ellipsoid เป็นรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แทนโลก สร้างจากการหมุน Ellipse รอบแกนสั้น (Minor Axis) ทำให้ได้รูปทรงคล้ายผลน้ำเช้ง (Spheroid) Ellipsoid มีข้อดีที่สำคัญคือสามารถนิยามได้ด้วยพารามิเตอร์เพียงสองตัว ได้แก่ ความยาวครึ่งแกนใหญ่ (Semi-major Axis หรือ a) และความยาวครึ่งแกนเล็ก (Semi-minor Axis หรือ b) หรือใช้ค่า Flattening (f) แทนครึ่งแกนเล็ก

ตัวอย่าง 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างครึ่งแกนใหญ่และความแบน (Flattening) ของ Ellipsoid สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f = \frac{a-b}{a}$$

โดยที่ a คือความยาวครึ่งแกนใหญ่ ซึ่งวัดจากจุดศูนย์กลางถึงเส้นศูนย์สูตร b คือความยาวครึ่งแกนเล็ก ซึ่งวัดจากจุดศูนย์กลางถึงขั้วโลก และ f คือค่าความแบนที่บอกว่า Ellipsoid แบนมากน้อยเพียงใด สำหรับโลก ค่า f ประมาณ $\frac{1}{298.257}$ ซึ่งหมายความว่าเส้นผ่านศูนย์กลางขั้วโลกสั้นกว่าเส้นผ่านศูนย์กลางศูนย์สูตรประมาณ 42 กิโลเมตร แม้ตัวเลขนี้ดูเหมือนน้อยเมื่อเทียบกับเส้นผ่านศูนย์กลางโลกที่ประมาณ 12,742 กิโลเมตร แต่ก็เพียงพอที่จะส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณตำแหน่งระดับเซนติเมตรได้

Ellipsoid ที่ใช้กันทั่วโลกมีหลายตัว ซึ่งแต่ละตัวพัฒนาขึ้นเพื่อให้เหมาะสมกับพื้นที่เฉพาะหรือเพื่อการใช้งานทั่วไป ตารางที่ 12 แสดง Ellipsoid ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายพร้อมข้อมูลพารามิเตอร์

ตารางที่ 12 ตารางเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของ Ellipsoid ที่ใช้โดยทั่วไป

Ellipsoid	a **(เมตร)**	f	**ใช้โดย**
WGS84	6,378,137.0	1/298.257223563	GPS, ทั่วโลก
GRS80	6,378,137.0	1/298.257222101	ยุโรป, หลายประเทศ
Krasovsky 1940	6,378,245.0	1/298.3	รัสเซีย, จีน (เก่า)
Clarke 1866	6,378,206.4	1/294.9786982	อเมริกาเหนือ (เก่า)
Everest (India 1830)	6,377,276.3	1/300.8017	เอเชียใต้ (เก่า)

การเลือก Ellipsoid ที่เหมาะสมเป็นสิ่งสำคัญ เพราะ Ellipsoid ที่ต่างกันจะให้พิกัดที่ต่างกันสำหรับจุดเดียวกันบนพื้นผิวโลก ความแตกต่างนี้อาจมีค่าถึงหลายร้อยเมตรสำหรับพื้นที่ที่ Ellipsoid ไม่ได้ออกแบบมาให้เหมาะสม ดังนั้นการรู้ว่าข้อมูลใช้ Ellipsoid ใดจึงเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการทำงานกับข้อมูลเชิงพื้นที่

2.4 ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System)

ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System หรือ GCS) เป็นระบบที่ใช้พิกัดมุมเพื่อระบุตำแหน่งบนพื้นผิวโลก โดยอ้างอิงกับ Ellipsoid ที่เลือกไว้ GCS ใช้พิกัดสองค่าหลัก ได้แก่ ละติจูด (Latitude) และลองจิจูด (Longitude) ซึ่งทั้งสองเป็นมุมที่วัดจากจุดอ้างอิงบนโลก ระบบนี้มีความสำคัญมากเพราะเป็นระบบที่ใช้กันแพร่หลายที่สุดในการระบุตำแหน่งบนโลก เช่น การระบุตำแหน่งของเมือง สถานที่ หรือจุดสนใจต่างๆ

GCS เป็นระบบพิกัดที่อยู่บนพื้นผิวโค้งของ Ellipsoid ดังนั้นระยะทางที่คำนวณจากพิกัด GCS โดยตรงจะเป็นระยะทางบนพื้นผิวโค้ง (Geodesic Distance) ไม่ใช่ระยะทางในแนวราบบนแผนที่ราบ ความเข้าใจในความแตกต่างนี้มีความสำคัญเมื่อต้องคำนวณระยะทางหรือพื้นที่จากพิกัด GCS

2.4.1 ละติจูด (Latitude)

ละติจูด (Latitude) คือมุมที่วัดจากเส้นศูนย์สูตรไปทางเหนือหรือใต้ มุมนี้วัดจาก 0 องศาที่เส้นศูนย์สูตรไปจนถึง 90 องศาที่ขั้วโลกเหนือหรือขั้วโลกใต้ ละติจูดที่วัดไปทางเหนือเรียกว่า ละติจูดเหนือ (North Latitude) และละติจูดที่วัดไปทางใต้เรียกว่า ละติจูดใต้ (South Latitude) ทุกจุดบนเส้นศูนย์สูตรมีละติจูดเท่ากับ 0 องศา และทุกจุดบนขั้วโลกเหนือมีละติจูดเท่ากับ 90 องศาเหนือ

ตัวอย่าง 2.3 การนิยามละติจูดทางดาราศาสตร์ (Astronomical Latitude) ต่างจากละติจูดทางเรขาคณิต (Geodetic Latitude) อย่างมีนัยสำคัญ ละติจูดทางดาราศาสตร์ (ϕ) คือมุมระหว่างเส้นดิ่ง (Vertical Line)

กับระนาบเส้นศูนย์สูตร โดยเส้นดิ่งนี้ถูกกำหนดโดยแรงโน้มถ่วง ซึ่งไม่ได้ตั้งฉากกับ Ellipsoid เสมอไป ในขณะที่ละติจูดทางเรขาคณิต () คือมุมระหว่างเส้นปกติ (Normal Line) ที่ตั้งฉากกับ Ellipsoid ณ จุดนั้น กับระนาบเส้นศูนย์สูตร ความแตกต่างระหว่างสองค่านี้เรียกว่า Vertical Deviation ซึ่งอาจมีค่าถึง 10–20 พิลิปดาวินาทีในพื้นที่ภูเขา หรือมากถึง 1–2 พิลิปดาวินาทีในพื้นที่ราบ ความเบี่ยงเบนนี้มีความสำคัญเฉพาะในงานที่ต้องการความแม่นยำสูงมาก

ในการคำนวณทาง GIS ละติจูดที่ใช้โดยทั่วไปคือ Geodetic Latitude ซึ่งวัดจาก Ellipsoid ที่กำหนดไว้ ละติจูดมีหน่วยเป็น องศา (Degree) พิลิปดาวินาที (Minute) และพินิตินาที (Second) โดย 1 องศาเท่ากับ 60 พิลิปดาวินาที และ 1 พิลิปดาวินาทีเท่ากับ 60 พินิตินาที ระยะทางที่สอดคล้องกับ 1 พิลิปดาวินาทีของละติจูดบนพื้นผิวโลกประมาณ 30.9 เมตร ซึ่งหมายความว่าความละเอียดของพิกัดถึง 1 พินิตินาที (1/3600 องศา) จะให้ความแม่นยำเชิงตำแหน่งประมาณ 8.6 เมตร

สำหรับประเทศไทย ละติจูดมีค่าอยู่ระหว่างประมาณ 5 องศา 37 ลิปดาถึง 20 องศา 28 พิลิปดาวินาทีเหนือ ครอบคลุมพื้นที่ตั้งแต่ภาคใต้ฝั่งอันดามันจนถึงภาคเหนือ ละติจูดของกรุงเทพมหานครอยู่ที่ประมาณ 13 องศา 45 พิลิปดาวินาทีเหนือ ซึ่งอยู่ในช่วงกึ่งกลางของประเทศ

2.4.2 ลองจิจูด (Longitude)

ลองจิจูด (Longitude) คือมุมที่วัดจากเส้นเมอริเดียนแรก (Prime Meridian) ไปทางตะวันออกหรือตะวันตก มุมนี้วัดจาก 0 องศาที่เส้นเมอริเดียนแรก ซึ่งผ่านหอดูดาวรอยัลกรีนิช (Royal Greenwich Observatory) ในกรุงลอนดอน ประเทศอังกฤษ ไปจนถึง 180 องศาทั้งทางตะวันออกและตะวันตก ลองจิจูดที่วัดไปทางตะวันออกเรียกว่า ลองจิจูดตะวันออก (East Longitude) และลองจิจูดที่วัดไปทางตะวันตกเรียกว่า ลองจิจูดตะวันตก (West Longitude) เส้นเมอริเดียนที่ 180 องศาทั้งตะวันออกและตะวันตกเป็นเส้นเดียวกัน เรียกว่า เส้นวันเปลี่ยน (International Date Line)

ตัวอย่าง 2.4 ระยะทางระหว่างเส้นลองจิจูดที่อยู่ติดกัน (1 องศา) ขึ้นอยู่กับละติจูดของจุดนั้นๆ เนื่องจากเส้นลองจิจูดเป็นเส้นวงกลมใหญ่ที่บรรจบกันที่ขั้วโลก ที่เส้นศูนย์สูตร 1 องศาของลองจิจูดเท่ากับประมาณ 111.32 กิโลเมตร แต่ที่ละติจูด 45 องศา 1 องศาของลองจิจูดจะเท่ากับประมาณ 111.32 คูณ $\cos(45°)$ ซึ่งประมาณ 78.63 กิโลเมตร และที่ละติจูด 60 องศา จะเหลือประมาณ 55.66 กิโลเมตร เมื่อเข้าใกล้ขั้วโลก เส้นลองจิจูดจะบรรจบกันจน 1 องศาที่ขั้วโลกมีความกว้างเป็นศูนย์ ความแตกต่างนี้มีความหมายในทางปฏิบัติ เช่น เมื่อต้องการประมาณความกว้างของประเทศไทยที่มีลองจิจูดตะวันออกประมาณ 97 องศาถึง 106 องศา ต้องใช้ค่าเฉลี่ยของ cos(ละติจูด) ในการคำนวณ ไม่ใช่ใช้ค่าที่เส้นศูนย์สูตร

สำหรับประเทศไทย ลองจิจูดอยู่ระหว่างประมาณ 97 องศา 20 ลิปดาถึง 105 องศา 38 ลิปดาตะวันออก ซึ่งอยู่ทางตะวันออกของเส้นเมอริเดียนแรก กรุงเทพมหานครมีลองจิจูดประมาณ 100 องศา 32 ลิปดาตะวันออก แสดงว่าอยู่ห่างจากเมอริเดียนแรกประมาณ 100 องศาขึ้นไปทางตะวันออก ลองจิจูดของไทยอยู่ในช่วงที่เป็นเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ ซึ่งใกล้กับมหาสมุทรแปซิฟิกและไม่ไกลจากเขตเวลามาตรฐาน UTC+7 มากนัก

2.5 ระบบพิกัดฉาย (Projected Coordinate System)

ระบบพิกัดฉาย (Projected Coordinate System หรือ PCS) เป็นระบบพิกัดที่แสดงตำแหน่งบนพื้นผิวราบ (Flat Plane) แทนพื้นผิวโค้งของ Ellipsoid โดยใช้การฉาย (Projection) ซึ่งเป็นการแปลงตำแหน่งจากพื้นผิวโค้งสองมิติไปยังพื้นผิวราบสองมิติ การฉายนี้จำเป็นต้องมีการบิดพื้นผิว ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ ทุกระบบพิกัดฉายจึงมีความคลาดเคลื่อนในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง เช่น ความคลาดเคลื่อนด้านระยะทาง ด้านทิศทาง หรือด้านพื้นที่

PCS มีความจำเป็นอย่างยิ่งในงานแผนที่ การสำรวจ และการคำนวณพื้นที่ เนื่องจากการทำงานกับพิกัดบนพื้นผิวโค้งในการคำนวณระยะทาง พื้นที่ และทิศทางโดยตรงนั้นซับซ้อนและไม่สะดวกในทางปฏิบัติ PCS ช่วยให้สามารถใช้ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (X, Y) ธรรมดาได้ ซึ่งการคำนวณด้วยระบบคาร์ทีเซียนนั้นง่ายและรวดเร็วกว่าการคำนวณบนพื้นผิวโค้งมาก

การเลือกระบบพิกัดฉายที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของงาน พื้นที่ศึกษา และความแม่นยำที่ต้องการ ระบบพิกัดฉายที่ดีที่สุดสำหรับงานหนึ่งอาจไม่เหมาะสมสำหรับงานอื่น นัก GIS ที่มีความเชี่ยวชาญต้องเข้าใจข้อจำกัดของแต่ละระบบเพื่อเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม

2.5.1 หลักการฉายแผนที่ (Map Projection)

การฉายแผนที่เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่แปลงตำแหน่งจากพื้นผิวโค้งของ Ellipsoid ไปยังพื้นผิวราบ ในทางทฤษฎี สามารถจินตนาการว่ามีแหล่งกำเนิดแสงวางอยู่ที่จุดหนึ่ง และมีพื้นผิวราบหรือพื้นผิวทรงกระบอก (Cylinder) หรือกรวย (Cone) ล้อมรอบ Ellipsoid เมื่อฉายเงาของจุดบน Ellipsoid ลงบนพื้นผิวราบเหล่านี้ จะได้ตำแหน่งบนแผนที่ราบ แต่ในทางปฏิบัติ การฉายแผนที่ใช้สูตรคณิตศาสตร์โดยตรงไม่ได้พึ่งพาแสงจริง

การฉายแผนที่สามารถจำแนกได้ตามลักษณะพื้นผิวที่ใช้รับเงา ดังนี้

ตัวอย่าง 2.5 การจำแนกประเภทการฉายตามพื้นผิวรับ (Surface Type) มีดังนี้

1. **การฉายแบบทรงกระบอก (Cylindrical Projection)** วางพื้นผิวรับเป็นทรงกระบอกล้อม

รอบ Ellipsoid โดยแกนของทรงกระบอกอาจสัมผัส (Tangent) หรือตัด (Secant) กับ Ellipsoid การฉายแบบ Transverse Mercator ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายในระบบ UTM เป็นการฉายแบบทรงกระบอก □□□□□□□□□□□□ (ทรงกระบอกแกนนอน) ที่แกนของทรงกระบอกตั้งฉากกับแกนหมุนของโลก ข้อดีของการฉายแบบทรงกระบอกคือแผนที่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก เหมาะสำหรับการพิมพ์และการใช้งานทั่วไป แต่มีความคลาดเคลื่อนสูงในบริเวณขั้วโลก

2. การฉายแบบกรวย (Conical Projection) วางพื้นผิวรับเป็นกรวยครอบ Ellipsoid โดยยอดกรวยอยู่เหนือขั้วโลก กรวยอาจสัมผัสหรือตัด Ellipsoid ที่หนึ่งหรือสองเส้นวงกลม การฉายแบบ Lambert Conformal Conic ที่ใช้ในระบบพิกัดของประเทศไทยเป็นตัวอย่างที่ดี ข้อดีของการฉายแบบกรวยคือความคลาดเคลื่อนกระจายตัวดีในแถบละติจูดกลาง ทำให้เหมาะสำหรับแผนที่ที่มีแนว east-west ยาว

3. การฉายแบบราบ (Azimuthal or Planar Projection) ใช้ระนาบราบสัมผัส Ellipsoid ที่จุดเดียว มักใช้สำหรับแผนที่ขั้วโลกหรือแผนที่ที่ต้องการแสดงทิศทางจากจุดศูนย์กลาง การฉายแบบ Stereographic และ Azimuthal Equidistant เป็นตัวอย่างที่นิยมใช้

นอกจากจำแนกตามพื้นผิวรับแล้ว การฉายยังจำแนกได้ตามคุณสมบัติที่รักษาไว้ ได้แก่ การฉายแบบรักษาระยะทาง (Equidistant) ที่รักษาระยะทางจากจุดศูนย์กลาง การฉายแบบรักษาพื้นที่ (Equal-area หรือ Authalic) ที่รักษาพื้นที่ของทุกภูมิภาคให้ถูกต้องตามสัดส่วน และการฉายแบบรักษามุม (Conformal หรือ Orthomorphic) ที่รักษามุมและรูปร่างของวัตถุขนาดเล็ก ซึ่งมีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการนำทางและการทำแผนที่ภูมิศาสตร์

ไม่มีการฉายใดที่สามารถรักษาทั้งระยะทาง พื้นที่ และมุมพร้อมกันได้ ความจริงทางคณิตศาสตร์นี้เรียกว่า ทฤษฎีบทการฉายแผนที่ของ Tissot (Tissot's Indicatrix Theorem) ซึ่งพิสูจน์ว่าการฉายที่รักษามุมได้ (Conformal) จะต้องบิดพื้นที่ ในขณะที่การฉายที่รักษาพื้นที่ได้ (Equal-area) จะต้องบิดมุม การเลือกการฉายจึงเป็นการเลือกว่าจะยอมรับความคลาดเคลื่อนแบบใด เพื่อให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์ของงาน

2.5.2 ระบบพิกัดฉายสากล (Universal Transverse Mercator)

ระบบพิกัดฉายสากล (Universal Transverse Mercator หรือ UTM) เป็นระบบพิกัดฉายที่ใช้กันแพร่หลายที่สุดในโลก พัฒนาโดยกองทัพสหรัฐอเมริกาสำหรับการทำแผนที่ทั่วโลก UTM ใช้การฉายแบบ Transverse Mercator ซึ่งทรงกระบอกมีแกนนอน (ตั้งฉากกับแกนโลก) และตัด Ellipsoid ตามแนวเส้นมีริเดียนสองเส้นที่เรียกว่า เส้นสัมผัสมาตรฐาน (Standard Lines) หรือเส้น Secant

ตัวอย่าง 2.6 UTM แบ่งพื้นผิวโลกเป็นโซน (Zone) ตามแนวลองจิจูด ขนาดกว้าง 6 องศาต่อโซน โดยเริ่ม

จากโซนที่ 1 ที่ลองจิจูด 180 องศาตะวันตก ไปจนถึงโซนที่ 60 ที่ลองจิจูด 180 องศาตะวันออก พื้นที่ระหว่างลองจิจูด 180 ถึง 174 องศาตะวันตกเป็นโซน 1 พื้นที่ระหว่าง 174 ถึง 168 องศาตะวันตกเป็นโซน 2 และเพิ่มขึ้นทีละ 6 องศาไปทางตะวันออก นอกจากนี้ UTM ยังแบ่งตามแนวละติจูดเป็นแถบ (Band) ขนาด 8 องศาต่อแถบ ตั้งแต่แถบ C ที่ละติจูด 80 องศาใต้ไปจนถึงแถบ X ที่ละติจูด 72 องศาเหนือ (แถบ X มีขนาด 12 องศาเนื่องจากขั้วโลกเหนือ) ระบบพิกัดแบบ UTM ประกอบด้วยหมายเลขโซนตามลองจิจูดและอักษรแถบตามละติจูด ทำให้สามารถระบุตำแหน่งได้อย่างไม่ซ้ำกันทั่วโลก

สำหรับประเทศไทย พื้นที่ส่วนใหญ่อยู่ในโซนที่ 47 (ลองจิจูด 96–102 องศาตะวันออก) และโซนที่ 48 (ลองจิจูด 102–108 องศาตะวันออก) ส่วนแถบละติจูดเป็นแถบ N (ละติจูด 0–8 องศาเหนือ) แถบ P (ละติจูด 8–16 องศาเหนือ) และแถบ Q (ละติจูด 16–24 องศาเหนือ) ดังนั้นพิกัด UTM ของกรุงเทพมหานครจะอยู่ในโซน 47P หรือ 47N ขึ้นอยู่กับ Datum ที่ใช้

UTM กำหนดให้พิกัด X (Easting) มีค่าเท่ากับ 500,000 เมตร ที่เส้น Secant กลางโซน (Central Meridian) เพื่อหลีกเลี่ยงค่าลบในพื้นที่ซ้ายของ Central Meridian และพิกัด Y (Northing) มีค่าเท่ากับ 0 ที่เส้นศูนย์สูตรสำหรับซีกโลกเหนือ หรือ 10,000,000 เมตรที่เส้นศูนย์สูตรสำหรับซีกโลกใต้ เพื่อหลีกเลี่ยงค่าลบ ด้วยการกำหนดค่าอ้างอิงนี้ ทุกจุดในโซน UTM จะมีพิกัด X และ Y เป็นค่าบวกเสมอ

สำหรับการใช้งานในประเทศไทย ระบบ UTM โซน 47 และ 48 ครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมด โดยพื้นที่ภาคตะวันออกและภาคใต้ (ฝั่งอันดามัน) อยู่ในโซน 47 ส่วนพื้นที่ส่วนใหญ่ของประเทศรวมถึงกรุงเทพมหานครอยู่ในโซน 48 การเลือกโซนที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับตำแหน่งของพื้นที่ศึกษา โดยพื้นที่ที่อยู่ใกล้ขอบโซนอาจได้รับประโยชน์จากการใช้โซนที่อยู่ใกล้กว่า เพื่อลดความคลาดเคลื่อน

2.3 ดาตัม (Datum)

ดาตัม (Datum) เป็นชุดของพารามิเตอร์ที่กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดกับรูปทรงที่แท้จริงของโลก Datum ประกอบด้วย Ellipsoid ที่ใช้ (ระบุด้วยค่า a และ f) และตำแหน่งของ Ellipsoid วางตัวเทียบกับจุดศูนย์กลางโลก ซึ่งกำหนดโดยจุดอ้างอิง (Reference Point) บนพื้นผิวโลกจริง Datum ที่ต่างกันสำหรับพื้นที่เดียวกันจะให้พิกัดที่ต่างกัน เพราะ Ellipsoid ถูกวางในตำแหน่งที่ต่างกันเทียบกับ Geoid

การเลือก Datum ที่เหมาะสมมีความสำคัญมาก เพราะ Datum กำหนดความแม่นยำของการอ้างอิงตำแหน่ง หากใช้ Datum ที่ไม่เหมาะสมกับพื้นที่ ตำแหน่งที่คำนวณได้จะคลาดเคลื่อนจากตำแหน่งจริงหลายเมตรถึงหลายร้อยเมตร ความเข้าใจใน Datum จึงเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการทำงานกับข้อมูลเชิงพื้นที่จากหลายแหล่ง

Local Datum วาง Ellipsoid ให้ใกล้เคียงกับ Geoid มากที่สุดเฉพาะในพื้นที่หนึ่งๆ ทำให้มีความแม่นยำสูงในพื้นที่นั้น แต่จะมีความคลาดเคลื่อนมากขึ้นเมื่อออกไปไกลจากพื้นที่ที่ออกแบบไว้ ในทางตรงกันข้าม Geocentric Datum เช่น WGS84 วางจุดศูนย์กลาง Ellipsoid ที่จุดศูนย์กลางมวลของโลก (Center of Mass) ทำให้มีความแม่นยำสม่ำเสมอทั่วโลก แต่อาจมีความคลาดเคลื่อนมากกว่า Local Datum ในพื้นที่เฉพาะที่ Local Datum ถูกออกแบบมาให้เหมาะสม

2.6.1 WGS84 และการใช้งานทั่วโลก

WGS84 (World Geodetic System 1984) เป็น Geocentric Datum ที่ใช้โดยระบบ GPS (Global Positioning System) และระบบ GNSS ทั่วโลก WGS84 กำหนดจุดศูนย์กลาง Ellipsoid ให้ตรงกับจุดศูนย์กลางมวลของโลก ซึ่งหมายความว่าพิกัดจากเครื่องรับ GPS โดยตรงจะเป็นพิกัดในระบบ WGS84 WGS84 ใช้ Ellipsoid GRS80 ที่มีค่า a = 6,378,137.0 เมตร และ f = 1/298.257223563

ตัวอย่าง 2.7 WGS84 มีจุดอ้างอิงหลักที่เรียกว่า WGS84 (G1150) ซึ่งเป็นค่าที่ปรับปรุงจากค่าดั้งเดิม WGS84 (G873) โดยใช้ข้อมูลจากสถานีติดตามดาวเทียม GPS กว่า 200 สถานีทั่วโลก ความแม่นยำของ WGS84 อยู่ที่ประมาณ 1–2 เซนติเมตรในแนวราบ และ 2–3 เซนติเมตรในแนวดิ่ง สำหรับการใช้งานทั่วไป เช่น การนำทางหรือการทำแผนที่ระดับมาตราส่วน 1:50,000 ความแม่นยำของ WGS84 เพียงพออย่างสมบูรณ์ แต่สำหรับงานสำรวจที่ต้องการความแม่นยำสูง อาจต้องใช้ Local Datum ที่ออกแบบมาเพื่อพื้นที่นั้นโดยเฉพาะ

WGS84 เป็นมาตรฐานที่ใช้โดย Google Maps, OpenStreetMap, และบริการแผนที่ออนไลน์ส่วนใหญ่ อย่างไรก็ตาม แม้แต่ WGS84 ก็มีการปรับปรุงหลายครั้ง และเวอร์ชันที่ใช้ในเครื่องมือต่างๆ อาจแตกต่างกันเล็กน้อย WGS84 (G1674) ที่ปรับปรุงในปี 2012 เป็นเวอร์ชันที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน แต่ความแตกต่างระหว่างเวอร์ชันต่างๆ อยู่ในระดับเซนติเมตร ซึ่งสำหรับการใช้งานทั่วไปถือว่าไม่มีนัยสำคัญ

สำหรับการใช้งาน GIS ในประเทศไทย WGS84 เป็นทางเลือกที่สะดวกเมื่อต้องการแลกเปลี่ยนข้อมูลกับระบบสากล แต่หน่วยงานราชการไทยส่วนใหญ่ใช้ Datum Indian 1975 สำหรับงานแผนที่ภายในประเทศ การรู้ว่าข้อมูลของตนใช้ Datum ใดจึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งก่อนที่จะทำการรวมข้อมูลหรือวิเคราะห์เชิงพื้นที่

2.6.2 ดาตัม Indian 1975 สำหรับประเทศไทย

Indian 1975 (หรือ Indian Datum 1975 หรือ INDA75) เป็น Local Datum ที่พัฒนาขึ้นโดยกรมแผนที่ทหารของประเทศไทย ร่วมกับ Defense Mapping Agency (DMA) ของสหรัฐอเมริกา ในปี

พ.ศ. 2518 Indian 1975 ออกแบบมาให้เหมาะสมกับพื้นที่เอเชียตะวันออกเฉียงใต้ โดยเฉพาะประเทศไทย กัมพูชา ลาว และเวียดนาม ทำให้มีความแม่นยำสูงกว่า WGS84 ในพื้นที่เหล่านี้

ตัวอย่าง 2.8 Indian 1975 ใช้ Ellipsoid Everest (India 1830) ซึ่งมีค่า a = 6,377,276.345 เมตร และ f = 1/300.8017 ซึ่งต่างจาก WGS84 อย่างมีนัยสำคัญ เมื่อแปลงพิกัดจาก WGS84 ไปยัง Indian 1975 สำหรับพื้นที่กรุงเทพมหานคร จะพบว่าค่าละติจูดและลองจิจูดมีความแตกต่างประมาณ 0.0001 องศา หรือประมาณ 10 เมตร ในทิศทางที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างนี้ไม่คงที่ตลอดพื้นที่ บริเวณภาคเหนือของไทยความแตกต่างอาจมากถึง 15–20 เมตร ในขณะที่บริเวณภาคใต้อาจน้อยกว่า 5 เมตร ความแตกต่างที่ไม่คงที่นี้เกิดจากการที่ Ellipsoid ของ Indian 1975 ไม่ได้ออกแบบมาให้เข้ากับ Geoid ของโลกได้อย่างสมบูรณ์ และการกระจายตัวของความคลาดเคลื่อนจะแตกต่างกันในแต่ละพื้นที่

ระบบพิกัดที่ใช้ในประเทศไทยโดยหน่วยงานราชการมักใช้ระบบพิกัดฉายแบบ UTM บน Datum Indian 1975 ทำให้เรียกว่า ”UTM Indian 1975” ซึ่งต่างจาก ”UTM WGS84” ที่ใช้ Ellipsoid และ Datum ต่างกัน การระบุให้ชัดเจนว่าใช้ระบบใด จะช่วยป้องกันความผิดพลาดในการรวมข้อมูลจากแหล่งต่างๆ

นอกจาก Indian 1975 แล้ว ยังมี Datum ที่เคยใช้ในประเทศไทย เช่น Indian 1960 ซึ่งเป็น Datum ที่เก่ากว่า และมีความแม่นยำน้อยกว่า ข้อมูลแผนที่เก่าอาจอ้างอิงกับ Indian 1960 ดังนั้นเมื่อทำงานกับข้อมูลแผนที่ที่มีอายุหลายสิบปี ต้องตรวจสอบ Datum ของข้อมูลนั้นก่อนเสมอ เพราะการสันนิษฐานว่าใช้ Indian 1975 อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนหลายสิบเมตร

2.7 การแปลงระบบพิกัด (Coordinate Transformation)

การแปลงระบบพิกัด (Coordinate Transformation) เป็นกระบวนการแปลงพิกัดจากระบบหนึ่งไปยังอีกระบบหนึ่ง ความจำเป็นในการแปลงเกิดขึ้นเมื่อต้องการรวมข้อมูลจากแหล่งต่างๆ ที่ใช้ระบบอ้างอิงไม่เหมือนกัน หรือเมื่อต้องการแปลงข้อมูลให้อยู่ในระบบที่มาตรฐานกว่าเพื่อการแลกเปลี่ยน การแปลงพิกัดอย่างถูกต้องเป็นหัวใจสำคัญของการทำงาน GIS ที่มีคุณภาพ

การแปลงพิกัดมีหลายระดับความซับซ้อน ตั้งแต่การแปลงอย่างง่ายระหว่าง GCS กับ PCS บน Datum เดียวกัน ไปจนถึงการแปลงที่ซับซ้อนระหว่าง Datum ที่ต่างกัน ซึ่งต้องใช้พารามิเตอร์การแปลงหลายตัว ความแม่นยำของการแปลงขึ้นอยู่กับวิธีการแปลงและความเหมาะสมของพารามิเตอร์กับพื้นที่

การเข้าใจการแปลงพิกัดอย่างถูกต้องช่วยป้องกันความผิดพลาดที่พบบ่อยมากในการทำงาน GIS ซึ่งเกิดจากการรวมข้อมูลที่ใช้ Datum ต่างกันโดยไม่ได้แปลงก่อน ผลลัพธ์คือข้อมูลจะซ้อนทับกันไม่ตรง สิ่งที่ควรทำคือตรวจสอบ Datum ของทุกชั้นข้อมูลก่อนทำการวิเคราะห์ร่วมกัน และแปลงไปยังระบบเดียวกันทุก

ครั้ง

2.7.1 การแปลงระหว่าง GCS และ PCS

การแปลงระหว่างระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (GCS) กับระบบพิกัดฉาย (PCS) เป็นการแปลงที่ใช้บ่อยที่สุด เนื่องจากข้อมูลดิจิทัลส่วนใหญ่จัดเก็บในระบบ GCS แต่การแสดงผลและการคำนวณมักต้องการระบบ PCS GCS ใช้พิกัดมุม (ละติจูดและลองจิจูด) บนพื้นผิวโค้ง ในขณะที่ PCS ใช้พิกัดคาร์ทีเซียน (X, Y) บนพื้นผิวราบ

สูตรการแปลงจาก GCS ไปยัง PCS แบบ Transverse Mercator มีดังนี้

ตัวอย่าง 2.9 สำหรับการฉายแบบ Transverse Mercator สูตรการแปลงจากละติจูด (ϕ) และลองจิจูด (λ) ไปยังพิกัด X, Y มีดังนี้

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$T = \tan^2 \phi$$

$$C = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \phi$$

$$A = (\lambda - \lambda_0) \cos \phi$$

$$X = k_0 N \left[A + \frac{(1 - T + C)A^3}{6} + \frac{(5 - 18T + T^2)A^5}{120} \right]$$

$$Y = k_0 \left[M + N \tan \phi \left(\frac{A^2}{2} + \frac{(5 - T + 9C + 4C^2)A^4}{24} + \frac{(61 - 58T + T^2)A^6}{720} \right) \right]$$

โดยที่ a คือความยาวครึ่งแกนใหญ่ของ Ellipsoid, e คือค่า Eccentricity ที่คำนวณจาก $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, λ_0 คือลองจิจูดของ Central Meridian, k_0 คือ Scale Factor ที่ Central Meridian (สำหรับ UTM มีค่าเท่ากับ 0.9996), และ M คือระยะทางตามแกน Meridian จากเส้นศูนย์สูตรถึงจุดที่ละติจูด ϕ ซึ่งคำนวณด้วยสูตร $M = a \left[(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64})\phi - (\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32}) \sin 2\phi + \frac{15e^4}{256} \sin 4\phi \right]$

การแปลงย้อนกลับจาก PCS ไปยัง GCS มีความซับซ้อนมากกว่า เนื่องจากต้องใช้การคำนวณแบบ □□ (Iterative) เพื่อหาค่าละติจูดที่แท้จริง ในทางปฏิบัติ โปรแกรม GIS ทั่วไปจะจัดการการคำนวณเหล่านี้โดยอัตโนมัติ แต่การเข้าใจหลักการเบื้องหลังช่วยให้สามารถตรวจสอบผลลัพธ์และแก้ปัญหาได้เมื่อเกิดข้อผิดพลาด

ในโปรแกรม GIS เช่น QGIS หรือ ArcGIS การแปลงระหว่าง GCS และ PCS สามารถทำได้โดยการกำหนดระบบพิกัด (Coordinate System) ของชั้นข้อมูลให้ถูกต้อง และโปรแกรมจะจัดการแปลงให้อัตโนมัติเมื่อมีการแสดงผลหรือการคำนวณข้ามระบบ อย่างไรก็ตาม ต้องระวังเมื่อสร้างชั้นข้อมูลใหม่ว่าควร

เลือกระบบพิกัดที่เหมาะสมกับพื้นที่และวัตถุประสงค์

2.7.2 การแปลงระหว่างดาตัม (Datum Transformation)

การแปลงระหว่าง Datum ที่ต่างกันเป็นสิ่งที่จำเป็นเมื่อต้องรวมข้อมูลจากแหล่งต่างๆ ที่ใช้ Datum ไม่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น การรวมข้อมูลจากกรมแผนที่ทหาร (ที่ใช้ Indian 1975) กับข้อมูลจาก Google Maps (ที่ใช้ WGS84) ต้องมีการแปลง Datum ก่อน การข้าม Datum โดยไม่ได้แปลงจะทำให้ตำแหน่งคลาดเคลื่อนหลายสิบถึงหลายร้อยเมตร

วิธีการแปลงระหว่าง Datum มีหลายระดับความซับซ้อน ตั้งแต่วิธีที่ง่ายที่สุดคือ การแปลงเรขาคณิต (Geometric Translation) ที่ใช้ค่า Offset ไปจนถึงวิธีที่ซับซ้อนที่สุดคือ การแปลงที่ใช้โมเดลทุติยภูมิ (Molodensky-Badekas Transformation) ที่คำนึงถึงการหมุนและการยืดของระบบพิกัดด้วย

ตัวอย่าง 2.10 การแปลงแบบ Helmert 7 พารามิเตอร์ เป็นวิธีมาตรฐานสำหรับการแปลงระหว่าง Datum สองระบบที่ใช้ Ellipsoid ต่างกัน วิธีนี้ใช้ 7 พารามิเตอร์ ได้แก่ การเลื่อนตำแหน่ง 3 ค่า (ΔX, ΔY, ΔZ) การหมุน 3 ค่า (R_X, R_Y, R_Z) และค่ามาตราส่วน (S) สูตรการแปลงเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -R_Z & R_Y \\ R_Z & S & -R_X \\ -R_Y & R_X & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

โดยที่ (X_1, Y_1, Z_1) คือพิกัดคาร์ทีเซียนในระบบที่ต้องการแปลง และ (X_2, Y_2, Z_2) คือพิกัดคาร์ทีเซียนในระบบเป้าหมาย สำหรับการแปลงจาก WGS84 ไปยัง Indian 1975 ค่าพารามิเตอร์ Helmert โดยประมาณคือ ΔX = 206 ม., ΔY = 46 ม., ΔZ = 117 ม., โดยไม่มีการหมุนและค่ามาตราส่วน แต่สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำสูง ควรใช้ค่าพารามิเตอร์ที่กรมแผนที่ทหารกำหนดโดยเฉพาะสำหรับประเทศไทย

สำหรับการแปลงระหว่าง WGS84 และ Indian 1975 สามารถใช้ค่า Offset อย่างง่ายได้ในบางกรณี แต่ผลลัพธ์จะมีความแม่นยำประมาณ 10–20 เมตร ซึ่งเพียงพอสำหรับงานแผนที่ระดับมาตราส่วนเล็ก แต่ไม่เพียงพอสำหรับงานวิศวกรรมหรืองานสำรวจที่ต้องการความแม่นยำสูง สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำระดับเซนติเมตร จำเป็นต้องใช้แบบจำลองการแปลงที่ซับซ้อนกว่านี้ ซึ่งอาจมีให้ใช้ในซอฟต์แวร์ GIS ระดับมืออาชีพ

ในการใช้งานจริงกับ QGIS การแปลง Datum สามารถทำได้โดยการตั้งค่า On-the-fly Projection ซึ่งจะแปลงชั้นข้อมูลทั้งหมดให้อยู่ในระบบพิกัดเดียวกันเมื่อแสดงผล อย่างไรก็ตาม การแปลงแบบ On-the-fly ใช้วิธีการแปลงแบบมาตรฐานที่อาจไม่ใช่วิธีที่แม่นยำที่สุดสำหรับพื้นที่เฉพาะ สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำสูง ควรทำการแปลง Datum อย่างชัดเจนกับข้อมูลก่อน แล้วจึงบันทึกข้อมูลในระบบพิกัดเป้าหมาย

2.8 เลือกใช้ดาตัมให้เหมาะสมกับพื้นที่ศึกษา

การเลือก Datum และระบบพิกัดที่เหมาะสมเป็นการตัดสินใจที่สำคัญในการเริ่มโครงการ GIS การเลือกที่ไม่เหมาะสมจะส่งผลต่อความแม่นยำของข้อมูลตลอดโครงการ และการแก้ไขในภายหลังจะยุ่งยากและเสียเวลา การพิจารณาต้องคำนึงถึงหลายปัจจัย ได้แก่ ขอบเขตพื้นที่ศึกษา มาตราส่วนของงาน แหล่งข้อมูลที่มีอยู่ และมาตรฐานที่หน่วยงานกำหนด

งาน GIS ที่มีขอบเขตเฉพาะในประเทศไทย เช่น การทำแผนที่ระดับจังหวัดหรือเขตการปกครอง ควรใช้ Datum Indian 1975 ตามมาตรฐานของหน่วยงานราชการไทย เนื่องจากแผนที่ฐานและข้อมูลจากหน่วยงานต่างๆ ส่วนใหญ่ใช้ Datum นี้ การใช้ Indian 1975 จะทำให้สามารถรวมข้อมูลจากหลายแหล่งได้โดยไม่ต้องแปลง Datum

ในทางตรงกันข้าม งานที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลระดับนานาชาติหรือต้องการแลกเปลี่ยนข้อมูลกับต่างประเทศ ควรใช้ WGS84 เป็น Datum มาตรฐาน เนื่องจากเป็นที่ยอมรับกันทั่วโลกและเป็น Datum ของระบบ GNSS การใช้ WGS84 จะทำให้การรวมข้อมูลกับต่างประเทศทำได้ง่ายขึ้น

สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำสูงมาก เช่น งานวิศวกรรมโยธา งานสำรวจเพื่อการก่อสร้าง หรืองานที่เกี่ยวกับที่ดิน ควรปรึกษาหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง เพื่อทราบว่ามีค่าพารามิเตอร์การแปลงเฉพาะพื้นที่หรือไม่ เนื่องจากค่า Offset ที่ใช้โดยทั่วไปอาจมีความคลาดเคลื่อนสะสมจากการเปลี่ยนแปลงของแผนที่ฐาน

ตารางที่ 13 สรุปการเลือกใช้ Datum ตามลักษณะงาน

ตารางที่ 13 ตารางเปรียบเทียบการเลือกใช้ Datum ตามลักษณะงาน

ลักษณะงาน	**Datum ที่แนะนำ**	**ระบบพิกัดฉาย**	**ความแม่นยำ**
แผนที่ทั่วไป, Navigation	WGS84	UTM WGS84	ดี
แผนที่ราชการไทย	Indian 1975	UTM Indian 1975	ดีมาก
งานแลกเปลี่ยนข้อมูลสากล	WGS84	UTM WGS84	ดี
งานสำรวจวิศวกรรม	Indian 1975 หรือ WGS84	UTM ที่เหมาะสม	สูงมาก
งาน GIS ระดับจังหวัด	Indian 1975	UTM Indian 1975	ดี

2.9 การจัดการปัญหาความคลาดเคลื่อนเชิงพื้นที่

ความคลาดเคลื่อนเชิงพื้นที่ (Spatial Error) เป็นปัญหาที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ในการทำงานกับข้อมูล GIS ความคลาดเคลื่อนนี้อาจเกิดจากหลายสาเหตุ ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนจากการฉายแผนที่ (Projection Error) ความคลาดเคลื่อนจากการเลือก Datum ที่ไม่เหมาะสม (Datum Error) ความคลาดเคลื่อนจากความละเอียดของข้อมูล (Data Resolution Error) และความคลาดเคลื่อนจากการลงรังวัดภาคสนาม (Survey Error)

การจัดการความคลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อให้ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์ GIS มีความน่าเชื่อถือ การไม่ตระหนักถึงความคลาดเคลื่อนอาจนำไปสู่ข้อสรุปที่ผิดพลาด โดยเฉพาะในงานที่ต้องการความแม่นยำสูง การรายงานความไม่แน่นอน (Uncertainty) ของข้อมูลเป็นส่วนสำคัญของการทำงาน GIS อย่างมืออาชีพ

การวิเคราะห์ความไม่แน่นอนเชิงพื้นที่ (Spatial Uncertainty Analysis) ช่วยให้เข้าใจว่าผลลัพธ์ของการวิเคราะห์มีความเชื่อมั่นเพียงใด และช่วยในการตัดสินใจว่าความละเอียดของข้อมูลเพียงพอสำหรับวัตถุประสงค์หรือไม่ ในหลายกรณี การใช้ข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่จำเป็นอาจไม่คุ้มค่า ในขณะที่การใช้ข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนสูงเกินไปอาจทำให้ผลลัพธ์ไม่น่าเชื่อถือ

ตัวอย่าง 2.11 การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากการฉายแผนที่ UTM สามารถคำนวณได้จาก Scale Factor ของจุดที่สนใจ Scale Factor ที่ Central Meridian มีค่าเท่ากับ 0.9996 แต่จะเปลี่ยนแปลงเมื่อเคลื่อนออกไปจาก Central Meridian ความคลาดเคลื่อนเชิงระยะทางสามารถประมาณได้จาก

$$\text{Scale Error} = |k - k_0| \times D$$

โดยที่ k คือ Scale Factor ณ จุดที่สนใจ, k_0 คือ Scale Factor ที่ Central Meridian (0.9996), และ D คือระยะทางจาก Central Meridian ตัวอย่างเช่น ที่ระยะ 3 องศาจาก Central Meridian Scale Factor จะประมาณ 1.0013 หรือมีความคลาดเคลื่อนระยะทางประมาณ 1.3 ส่วนใน 10,000 สำหรับระยะทาง 1 กิโลเมตรจะมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 1.3 เมตร และสำหรับระยะทาง 10 กิโลเมตรจะมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 13 เมตร ความเข้าใจนี้ช่วยในการประมาณความแม่นยำที่คาดหวังได้

การรายงานความคลาดเคลื่อนเชิงพื้นที่ (Positional Accuracy) ในเอกสารประกอบข้อมูลเป็นแนวปฏิบัติที่ดีที่ควรปฏิบัติ มาตรฐานความแม่นยำเชิงตำแหน่งของข้อมูลภูมิสารสนเทศ เช่น NMAS (National Map Accuracy Standards) หรือ EMAS (European Map Accuracy Standards) กำหนดวิธีการวัดและรายงานความแม่นยำ การทราบมาตรฐานที่ใช้จะช่วยในการประเมินคุณภาพข้อมูลและความ

เหมาะสมสำหรับงานเฉพาะ

การตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูล (Data Validation) ก่อนนำไปใช้วิเคราะห์ เป็นขั้นตอนที่ไม่ควรมองข้าม ควรตรวจสอบว่าระบบพิกัดและ Datum ของทุกชั้นข้อมูลถูกต้องและสอดคล้องกัน และเมื่อรวมข้อมูลจากหลายแหล่งแล้ว ควรตรวจสอบว่าข้อมูลซ้อนทับกันอย่างสมเหตุสมผล เช่น ถนนจากชั้นข้อมูลหนึ่งควรตรงกับถนนจากอีกชั้นข้อมูลหนึ่งภายในขอบเขตความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

สรุป (Conclusion)

บทนี้ได้กล่าวถึงหลักการพื้นฐานของระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่ (Spatial Reference Systems) ซึ่งเป็นรากฐานของระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ทุกระบบ ผู้เรียนได้ทำความเข้าใจรูปทรงของโลกทั้งในแบบ Geoid ที่เป็นรูปทรงที่ใกล้เคียงพื้นผิวน้ำทะเลจริง และ Ellipsoid ที่เป็นรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณพิกัด

ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (GCS) ที่ใช้ละติจูดและลองจิจูดเพื่อระบุตำแหน่งบนพื้นผิวโค้งของ Ellipsoid เป็นระบบที่เข้าใจง่ายและเป็นมาตรฐานสากล แต่ไม่เหมาะสำหรับการคำนวณระยะทางและพื้นที่โดยตรง ระบบพิกัดฉาย (PCS) ที่แปลงตำแหน่งลงบนพื้นผิวราบช่วยแก้ปัญหานี้ แต่ทุกการฉายย่อมมีความคลาดเคลื่อนที่ต้องตระหนัก ระบบ UTM เป็นระบบพิกัดฉายที่ใช้แพร่หลายที่สุด โดยแบ่งโลกเป็นโซน 6 องศา

Datum เป็น ปัจจัย สำคัญ ที่ กำหนด ความ สัมพันธ์ ระหว่าง ระบบ พิกัด กับ ตำแหน่ง จริง บน โลก WGS84 เป็น Geocentric Datum ที่ใช้ทั่วโลกและเป็นมาตรฐานของระบบ GPS ในขณะที่ Indian 1975 เป็น Local Datum ที่ออกแบบมาให้เหมาะสมกับประเทศไทยและภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ การเลือก Datum ที่เหมาะสมเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อให้ได้ความแม่นยำที่ต้องการ

การแปลงพิกัดระหว่างระบบเป็นทักษะที่จำเป็นในการทำงาน GIS เนื่องจากข้อมูลจากแหล่งต่างๆ มักใช้ระบบอ้างอิงที่ต่างกัน การแปลงอย่างถูกต้องช่วยป้องกันความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการผสมข้อมูลที่ไม่ได้แปลง และช่วยให้ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์มีความน่าเชื่อถือ

ความเข้าใจในระบบอ้างอิงเชิงพื้นที่จะเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาในบทต่อๆ ไป ไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ การทำแผนที่ดิจิทัล หรือการประยุกต์ใช้ GIS ในสาขาต่างๆ ทั้งการวางผังเมือง การจัดการทรัพยากรธรรมชาติ การวางแผนขนส่ง และการจัดการภัยพิบัติ

โค้ดประกอบบท (Companion Code)

ย่อหน้าเกริ่นนำ: ส่วนนี้จะแนะนำการใช้งาน Python สำหรับการแปลงพิกัดระหว่างระบบต่างๆ โดยใช้ไลบรารี PyProj ซึ่งเป็น wrapper ของ PROJ library ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในงาน GIS ทั่วโลก

ไลบรารีนี้สามารถจัดการทั้งการแปลงระหว่าง GCS และ PCS และการแปลงระหว่าง Datum ต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง

/Chapter02$_{SpatialReference.ipynb}$

ย่อหน้าปิดท้าย: ผู้เรียนควรทดลองรันโค้ดและปรับพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อเห็นผลกระทบที่ชัดเจน ลองเปลี่ยน Datum ในการแปลงและสังเกตความแตกต่างของพิกัดผลลัพธ์ รวมถึงลองคำนวณความคลาดเคลื่อนจากการฉายในตำแหน่งต่างๆ บนแผนที่

2.12 แบบฝึกหัดท้ายบท (Exercises)

แบบฝึกหัด 2.1 จงคำนวณระยะทางบนพื้นผิวโลกจากจุด A ที่ละติจูด 13 องศา 45 ลิปดาตะวันออก ลองจิจูด 100 องศา 32 ลิปดาตะวันออก ไปยังจุด B ที่ละติจูด 18 องศา 48 ลิปดาตะวันออก ลองจิจูด 98 องศา 52 ลิปดาตะวันตก โดยใช้สูตร Haversine สำหรับระยะทางบนทรงกลม

วิธีทำ

1. แปลงพิกัดเป็นเรเดียนก่อน โดยใช้สูตร radian = degree $\times \frac{\pi}{180}$ จะได้

$$\phi_1 = 13.75^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.240 \text{ rad}$$

$$\lambda_1 = 100.53^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1.755 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 18.80^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.328 \text{ rad}$$

$$\lambda_2 = 98.87^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1.726 \text{ rad}$$

2. คำนวณค่า $\Delta\phi$ และ $\Delta\lambda$

$$\Delta\phi = 0.328 - 0.240 = 0.088 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = 1.726 - 1.755 = -0.029 \text{ rad}$$

3. ใช้สูตร Haversine

$$a = \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

$$a = \sin^2(0.044) + \cos(0.240) \cdot \cos(0.328) \cdot \sin^2(-0.015)$$

$$a = (0.00194) + (0.971)(0.947)(0.000225) = 0.00194 + 0.000207 = 0.00215$$

4. คำนวณ $c = 2 \cdot 2(\sqrt{a}, \sqrt{1-a})$

$$c = 2 \cdot 2(\sqrt{0.00215}, \sqrt{0.99785}) = 2 \cdot 2(0.0464, 0.9989) = 2 \times 0.0465 = 0.0930 \text{ rad}$$

5. คูณด้วยรัศมีโลก (R = 6,371 กม.)

$$d = 6371 \times 0.0930 = 593 \text{ กิโลเมตร}$$

คำตอบ ระยะทางประมาณ 593 กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 2.2 จงแปลงพิกัด GCS ละติจูด 15 องศาเหนือ ลองจิจูด 100 องศาตะวันออก จาก WGS84 ไปยังระบบ UTM Indian 1975 โซน 47N

วิธีทำ

1. พิกัด GCS ในระบบ WGS84 คือ ϕ = 15°N, λ = 100°E กรุงเทพมหานครอยู่ในโซน UTM 47 เพราะลองจิจูด 100°E อยู่ในช่วง 96°E ถึง 102°E

2. Central Meridian ของโซน 47 คือ 99°E หรือ 1°ตะวันตกจากลองจิจูดของจุด ดังนั้น $(\lambda - \lambda_0) = 1° = 0.01745$ rad

3. สำหรับ WGS84 ซึ่งมี a = 6,378,137 m และ f = 1/298.257223563 ค่า Eccentricity squared (e^2) = 0.00669438

4. คำนวณ $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{6378137}{\sqrt{1-0.00669438\times(0.259)^2}} = 6,383,286$ m

5. คำนวณ $T = \tan^2 \phi = \tan^2(15°) = (0.268)^2 = 0.0718$

6. คำนวณ $C = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi = \frac{0.00669438}{0.99330562} \times (0.966)^2 = 0.006739 \times 0.933 = 0.00629$

7. คำนวณ $A = (\lambda - \lambda_0) \cos \phi = 0.01745 \times 0.966 = 0.01686$

8. สำหรับ UTM k_0 = 0.9996

9. Easting: $X = 0.9996 \times 6383286 \times [0.01686 + \frac{(1-0.0718+0.00629)(0.01686)^3}{6}] = 0.9996 \times 6383286 \times [0.01686 + 0.00000078] \approx 166,678$ m

10. หลังจากปรับค่าให้ Central Meridian อยู่ที่ 500,000 m โดยการเพิ่ม 500,000 จะได้ Easting ประมาณ 666,678 m

11. สำหรับ Northing เนื่องจากอยู่ซีกโลกเหนือและเหนือเส้นศูนย์สูตร ค่าจะเท่ากับระยะทางจากเส้นศูนย์สูตร ซึ่งคำนวณได้ประมาณ 1,661,000 m

คำตอบ พิกัด UTM Indian 1975 โซน 47N ประมาณ (666,678 E, 1,661,000 N) หมายเหตุ ค่าที่แท้จริงอาจแตกต่างเล็กน้อยขึ้นอยู่กับวิธีการคำนวณและค่าพารามิเตอร์ Datum ที่ใช้

แบบฝึกหัด 2.3 อธิบายความแตกต่างระหว่าง Geoid กับ Ellipsoid และยกตัวอย่างสถานการณ์ที่การใช้ Ellipsoid แทน Geoid อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในงาน GIS

วิธีทำ

1. ความหมายของ Geoid คือรูปทรงที่เป็นพื้นผิวน้ำทะเลเฉลี่ย (Mean Sea Level) ที่ขยายไปทั่วพื้นที่ทางบก เป็นรูปทรงที่ไม่สม่ำเสมอเนื่องจากแรงโน้มถ่วงไม่คงที่ในทุกจุด Geoid แสดงความเบี่ยงเบนจาก Ellipsoid ได้ถึง ±100 เมตร

2. ความหมายของ Ellipsoid คือรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่เป็นทรงรี (Spheroid) สร้างจากการหมุน Ellipse รอบแกนน้อย มีขนาดคงที่และสม่ำเสมอทั่วโลก กำหนดได้ด้วยพารามิเตอร์เพียงสองตัว

3. ความแตกต่างสำคัญคือ Geoid เป็นรูปทรงที่แท้จริงของโลกที่คำนึงถึงการกระจายมวล ในขณะที่ Ellipsoid เป็นรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แทนโลกเพื่อความสะดวกในการคำนวณ

4. สถานการณ์ที่การใช้ Ellipsoid แทน Geoid อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อน ได้แก่ งานที่เกี่ยวกับระดับความสูงเหนือน้ำทะเล (Orthometric Height) งานวิศวกรรมที่ต้องการความแม่นยำสูงในแนวดิ่ง และงานที่เกี่ยวกับการไหลของน้ำตามแรงโน้มถ่วง

5. ข้อ แนะนำ คือ สำหรับ งาน ที่ ต้องการ ความ แม่นยำ สูง ใน แนว ดิ่ง ควร ใช้ ค่า Geoid Undulation เพื่อแปลงความสูงเหนือ Ellipsoid ให้เป็นความสูงเหนือ Geoid ซึ่งใกล้เคียงกับความสูงเหนือน้ำทะเล

คำตอบ ความแตกต่างหลักคือ Geoid เป็นรูปทรงที่ไม่สม่ำเสมอและอ้างอิงกับแรงโน้มถ่วง ในขณะที่ Ellipsoid เป็นรูปทรงทางคณิตศาสตร์ที่คงที่ การใช้ Ellipsoid แทน Geoid จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในงานที่เกี่ยวกับระดับความสูงและแนวดิ่ง

Bibliography

บรรณานุกรม

แผนการสอนประจำบทที่ 3

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 3

ชื่อบท ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and Functions)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบายความหมายของความสัมพันธ์ (Relation) และผลคูณคาร์ทีเซียนได้
2. ระบุคุณสมบัติของความสัมพันธ์ เช่น Reflexive, Symmetric, Transitive ได้
3. ระบุและจำแนกประเภทของฟังก์ชัน เช่น Injective, Surjective, Bijective ได้
4. ใช้การประกอบฟังก์ชัน (Composition) และหาฟังก์ชันผกผันได้
5. ประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันในบริบทของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้

หัวข้อที่สอน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียนและความสัมพันธ์
2. คุณสมบัติของความสัมพันธ์
3. ความสัมพันธ์สมมูล (Equivalence Relation)
4. นิยามและประเภทของฟังก์ชัน
5. การประกอบฟังก์ชันและฟังก์ชันผกผัน

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ตัวอย่างโค้ดและ Diagram
- แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบจำลองข้อมูลและแหล่งที่มาของข้อมูล (Data Models and Data Acquisition)

1. วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถดำเนินการต่างๆ ได้อย่างครบถ้วน ได้แก่ การอธิบายความหมายและความสำคัญของแบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์และราสเตอร์ในระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ การบอกลักษณะสมบัติของข้อมูล Point, Line, Polygon และ Cell, Pixel, Resolution การอธิบายกระบวนการแปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบเวกเตอร์และราสเตอร์ การเลือกใช้วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลให้เหมาะสมกับประเภทงาน การประเมินคุณภาพข้อมูลและความแม่นยำเชิงพื้นที่ และการประยุกต์ใช้ข้อมูลให้สอดคล้องกับงานวิเคราะห์ที่ต้องการ

2. บทนำ

ในการทำงานกับระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์หรือ GIS นั้น ข้อมูลถือเป็นหัวใจสำคัญที่สุดในการดำเนินงาน เนื่องจากระบบ GIS ทุกระบบไม่ว่าจะเป็นระบบเชิงพื้นที่ใดๆ ก็ตาม ล้วนต้องอาศัยข้อมูลที่มีคุณภาพเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ สร้างแผนที่ และตัดสินใจบนพื้นฐานของข้อมูลเชิงพื้นที่ ก่อนที่จะสามารถนำข้อมูลมาใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผู้ใช้งาน GIS จำเป็นต้องเข้าใจแบบจำลองข้อมูลที่เป็นพื้นฐานในการจัดเก็บและแสดงผลข้อมูลเชิงพื้นที่ ซึ่งแบ่งออกเป็นสองรูปแบบหลักที่สำคัญที่สุด ได้แก่ แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์และแบบจำลองข้อมูลราสเตอร์ การเลือกใช้แบบจำลองข้อมูลที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลที่ต้องการนำเข้า ประเภทของการวิเคราะห์ที่ต้องการดำเนินการ และความละเอียดของข้อมูลที่ต้องการได้รับ ทั้งนี้ ข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้ใน GIS มีแหล่งที่มาหลากหลาย ตั้งแต่การสำรวจภาคสนามด้วยอุปกรณ์ GPS การรับข้อมูลจากดาวเทียมสำรวจระยะไกล การแปลงแผนที่กระดาษให้เป็นข้อมูลดิจิทัล รวมถึงการสร้างข้อมูลจากการสำรวจด้วยโดรนหรือเครื่องบิน การเข้าใจแหล่งที่มาและคุณภาพของข้อมูลจะช่วยให้ผู้ใช้งานสามารถเลือกใช้ข้อมูลได้อย่างเหมาะสมและประเมินความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้รับจากการวิเคราะห์ได้อย่างถูกต้อง

3.2.1 ความเป็นมาของระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์และข้อมูลเชิงพื้นที่

แนวคิดเกี่ยวกับการจัดเก็บข้อมูลเชิงพื้นที่มีรากฐานมาจากแผนที่ซึ่งมนุษย์สร้างขึ้นมานับพันปีก่อน แผนที่กระดาษแบบดั้งเดิมเป็นวิธีการจัดเก็บข้อมูลเชิงพื้นที่ในรูปแบบภาพวาดที่คงอยู่มาจนถึงยุคของการปฏิวัติดิจิทัลในศตวรรษที่ 20 การพัฒนาระบบคอมพิวเตอร์ในทศวรรษ 1960 และ 1970 ทำให้นักวิชาการและนักวิจัยเริ่มทดลองจัดเก็บข้อมูลแผนที่ในรูปแบบดิจิทัล ระบบ CAD (Computer-Aided Design) และระบบ DBMS (Database Management System) ที่พัฒนาขึ้นในยุคนั้นได้วางรากฐานสำคัญให้กับ GIS ในยุคต่อมา บริษัท Esri ซึ่งเป็นผู้พัฒนาซอฟต์แวร์ GIS รายใหญ่ของโลก ได้เปิดตัวระบบ ArcInfo ในปี ค.ศ. 1982 ซึ่งถือเป็นจุดเริ่มต้นของ GIS ที่ใช้งานได้จริงในเชิงพาณิชย์ ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา ทั้งแบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์และราสเตอร์ได้รับการพัฒนาและปรับปรุงอย่างต่อเนื่องจนกลายเป็นมาตรฐานหลักของข้อมูลเชิงพื้นที่ในปัจจุบัน ความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีดาวเทียมและการสำรวจระยะไกลในทศวรรษ 1990 และ 2000 ได้เพิ่มปริมาณข้อมูลเชิงพื้นที่ที่สามารถเข้าถึงได้อย่างมหาศาล ส่งผลให้การจัดการและการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่กลายเป็นศาสตร์ที่มีความซับซ้อนและมีความสำคัญมากขึ้นอย่างรวดเร็ว

ตัวอย่าง 3.1 ในยุคแรกของ GIS แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการจัดทำแผนที่ภูมิประเทศและการวางผังเมือง เนื่องจากสามารถแสดงขอบเขตพื้นที่ ถนน และสิ่งก่อสร้างได้อย่างแม่นยำ ในขณะเดียวกัน แบบจำลองข้อมูลราสเตอร์ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ภาพถ่ายจากดาวเทียมเพื่อจำแนกประเภทการใช้ที่ดินและพืชพรรณ ทั้งสองแบบจำลองมีข้อดีและข้อจำกัดที่แตกต่างกัน ทำให้ในปัจจุบันระบบ GIS ส่วนใหญ่รองรับทั้งสองรูปแบบเพื่อให้ผู้ใช้งานสามารถเลือกใช้ได้ตามความเหมาะสมของงาน

3.3 แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์ (Vector Data Model)

แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์เป็นวิธีการจัดเก็บข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้พิกัดและสมการทางคณิตศาสตร์ในการแสดงรูปร่างของวัตถุบนพื้นผิวโลก แนวคิดพื้นฐานของแบบจำลองเวกเตอร์คือการใช้จุดพิกัด (Coordinates) เส้น (Lines) และรูปหลายเหลี่ยม (Polygons) ในการแสดงข้อมูลทางภูมิศาสตร์ ข้อมูลเวกเตอร์มีลักษณะเด่นที่สำคัญคือความแม่นยำสูงในการแสดงตำแหน่งและขอบเขตของวัตถุ ทำให้เหมาะสำหรับการจัดเก็บข้อมูลที่ต้องการความละเอียดแม่นยำ เช่น ข้อมูลแปลงที่ดิน ถนน และอาคาร ในแบบจำลองเวกเตอร์ ทุกวัตถุทางภูมิศาสตร์จะถูกจัดเก็บในรูปแบบที่เรียกว่า Feature ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลเรขาคณิต (Geometry) และข้อมูลคุณลักษณะ (Attributes) ข้อมูลเรขาคณิตจะบรรจุข้อมูลพิกัดที่ใช้ในการแสดงรูปร่างของวัตถุ ในขณะที่ข้อมูลคุณลักษณะจะบรรจุข้อมูลที่อธิบายคุณสมบัติของวัตถุ เช่น ชื่อถนน ประเภทการใช้ที่ดิน หรือจำนวนประชากรในพื้นที่ การแยกข้อมูลเรขาคณิตออกจากข้อมูลคุณลักษณะเป็น

คุณสมบัติสำคัญที่ทำให้แบบจำลองเวกเตอร์มีความยืดหยุ่นในการจัดการและวิเคราะห์ข้อมูล

แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์มีโครงสร้างที่เป็นระบบและมีประสิทธิภาพในการจัดเก็บข้อมูลที่มีขอบเขตชัดเจน ข้อมูลเวกเตอร์จะใช้หน่วยความจำในการจัดเก็บน้อยกว่าราสเตอร์เมื่อต้องแสดงข้อมูลที่มีลักษณะเป็นเส้นหรือพื้นที่ที่มีรูปร่างไม่สม่ำเสมอ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองเวกเตอร์มีข้อจำกัดในการจัดเก็บข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง เช่น ข้อมูลอุณหภูมิหรือความสูงของพื้นที่ ซึ่งในกรณีเช่นนี้แบบจำลองราสเตอร์จะเหมาะสมกว่า

3.3.1 ข้อมูลจุด (Point)

ข้อมูลจุดเป็นองค์ประกอบพื้นฐานที่สุดในแบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์ ลักษณะเฉพาะของข้อมูลจุดคือการแทนวัตถุทางภูมิศาสตร์ด้วยตำแหน่งเดียวที่ระบุโดยพิกัด X และ Y (หรือ X, Y, Z สำหรับข้อมูลสามมิติ) โดยไม่มีมิติความยาวหรือพื้นที่ ข้อมูลจุดถูกนำมาใช้ในการแสดงวัตถุที่มีตำแหน่งเฉพาะตัวแต่ไม่มีขอบเขตพื้นที่ เช่น ตำแหน่งของสถานีวัดอุณหภูมิ ตำแหน่งของโรงพยาบาล ตำแหน่งของบ่อน้ำมัน หรือตำแหน่งของยอดเขา ข้อมูลจุดแต่ละจุดจะประกอบด้วยข้อมูลเรขาคณิตที่ระบุพิกัด และข้อมูลคุณลักษณะที่อธิบายคุณสมบัติของจุดนั้นๆ

ในทางคณิตศาสตร์ ข้อมูลจุดสามารถนิยามได้ว่าเป็นคู่อันดับ (x, y) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน หรือ (x, y, z) สำหรับข้อมูลสามมิติ ระบบพิกัดที่ใช้กันโดยทั่วไปใน GIS ได้แก่ ระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Geographic Coordinate System) ที่ใช้ละติจูดและลองจิจูด และระบบพิกัดฉาก (Projected Coordinate System) ที่ใช้หน่วยเมตรหรือกิโลเมตร การเลือกใช้ระบบพิกัดที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับขอบเขตพื้นที่และวัตถุประสงค์ของการใช้งาน ทั้งนี้ ข้อมูลจุดหลายจุดที่มีคุณลักษณะเหมือนกันสามารถจัดกลุ่มได้ในรูปแบบที่เรียกว่า Multipoint

ตัวอย่าง 3.2 ในการสร้างฐานข้อมูลโรงเรียนของกรุงเทพมหานคร ตำแหน่งของโรงเรียนแต่ละแห่งจะถูกจัดเก็บในรูปแบบข้อมูลจุด โดยข้อมูลเรขาคณิตจะประกอบด้วยพิกัดละติจูดและลองจิจูดของโรงเรียน ในขณะที่ข้อมูลคุณลักษณะจะประกอบด้วยชื่อโรงเรียน ที่อยู่ จำนวนนักเรียน และระดับชั้นที่เปิดสอน การจัดเก็บในรูปแบบเวกเตอร์ทำให้สามารถค้นหาโรงเรียนที่อยู่ในรัศมีที่กำหนดจากตำแหน่งที่สนใจ หรือวิเคราะห์ความหนาแน่นของโรงเรียนในพื้นที่ต่างๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาข้อมูลจุดที่แสดงตำแหน่งของสถานีวัดมลพิษทางอากาศในกรุงเทพมหานคร สมมติว่ามีสถานีวัดทั้งหมด 10 แห่ง โดยแต่ละสถานีมีพิกัด (x_i, y_i) และค่าความเข้มข้นของฝุ่นละออง $PM_{2.5}$ เป็นคุณลักษณะประกอบ การจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบเวกเตอร์ชนิดจุดทำให้สามารถระบุตำแหน่งของสถานีที่มี

ค่ามลพิษสูงที่สุดได้โดยการค้นหาจากคุณลักษณะ หรือสามารถวิเคราะห์การกระจายตัวของมลพิษในพื้นที่โดยการเชื่อมต่อกับข้อมูลประชากรหรือแหล่งกำเนิดมลพิษ

3.3.2 ข้อมูลเส้น (Line)

ข้อมูลเส้นเป็นองค์ประกอบที่ใช้ในการแทนวัตถุทางภูมิศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นเส้นทางหรือมีความยาวแต่ไม่มีพื้นที่ ในทางคณิตศาสตร์ ข้อมูลเส้นถูกนิยามว่าเป็นเซตของจุดที่เชื่อมต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้ง โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่ชัดเจน ข้อมูลเส้นถูกนำมาใช้ในการแสดงถนน แม่น้ำ เส้นทางสาธารณะ สายส่งไฟฟ้า ท่อส่งน้ำ หรือเส้นชั้นความสูง (Contour Lines) คุณสมบัติสำคัญของข้อมูลเส้นได้แก่ ความยาว (Length) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากผลรวมของระยะทางระหว่างจุดที่เชื่อมต่อกัน และทิศทาง (Direction) ซึ่งมีความสำคัญในการวิเคราะห์การเดินทางหรือการไหลของน้ำ

โครงสร้างของข้อมูลเส้นในแบบจำลองเวกเตอร์ประกอบด้วยลำดับของจุดพิกัดที่เรียกว่า Vertices หรือ Vertex จุดพิกัดแต่ละจุดจะถูกเชื่อมต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรงที่เรียกว่า Segments ในกรณีที่เส้นมีลักษณะโค้ง ระบบ GIS จะใช้สมการทางคณิตศาสตร์ เช่น Bezier Curve ในการแทนเส้นโค้งด้วยจุดควบคุม (Control Points) เพียงไม่กี่จุด การจัดเก็บข้อมูลเส้นในรูปแบบ Topology จะเก็บข้อมูลความเชื่อมต่อระหว่างเส้นด้วย เช่น การระบุว่าเส้นถนนสายหนึ่งเชื่อมต่อกับเส้นถนนสายใดบ้างที่จุดตัด ข้อมูล Topology มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์เครือข่าย เช่น การหาเส้นทางที่สั้นที่สุดหรือการวิเคราะห์การจราจร

ตัวอย่าง 3.4 ข้อมูลเส้นถนนในกรุงเทพมหานครเป็นตัวอย่างที่ดีของข้อมูลเส้นใน GIS แต่ละถนนจะถูกจัดเก็บในรูปแบบเส้นที่ประกอบด้วยลำดับของจุดพิกัดที่ตามแนวถนน ข้อมูลคุณลักษณะประกอบด้วยชื่อถนน ประเภทถนน (ถนนสุขุมวิท ซอย ซอยแยก ทางด่วน) จำนวนช่องทาง และความเร็วสูงสุดที่อนุญาต การจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบ Topology จะช่วยให้ระบบสามารถระบุได้ว่าถนนสายหนึ่งเชื่อมต่อกับถนนสายใดบ้างที่จุดตัด และสามารถวิเคราะห์เส้นทางการเดินรถหรือการคมนาคมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตัวอย่าง 3.5 พิจารณาแม่น้ำเจ้าพระยาที่ไหลผ่านกรุงเทพมหานคร แม่น้ำถูกจัดเก็บในรูปแบบข้อมูลเส้นที่มีลำดับจุดพิกัดตามแนวแม่น้ำ จากจุดเริ่งต้นที่จังหวัดนครสวรรค์จนถึงจุดปลายที่อ่าวไทย ข้อมูลคุณลักษณะประกอบด้วยชื่อแม่น้ำ ความกว้างเฉลี่ย ปริมาณน้ำเฉลี่ยต่อวัน และระดับคุณภาพน้ำ การคำนวณความยาวของแม่น้ำทำได้โดยการรวมระยะทางระหว่างจุดพิกัดที่เชื่อมต่อกันทั้งหมด และการวิเคราะห์ความเชื่อมต่อกับพื้นที่ริมแม่น้ำสามารถทำได้โดยการเชื่อมต่อข้อมูลเส้นกับข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมของพื้นที่

3.3.3 ข้อมูลรูปหลายเหลี่ยม (Polygon)

ข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมเป็นองค์ประกอบที่ใช้ในการแทนวัตถุทางภูมิศาสตร์ที่มีขอบเขตพื้นที่ชัดเจน ในทางคณิตศาสตร์ รูปหลายเหลี่ยมถูกนิยามว่าเป็นรูปร่างปิดที่ประกอบด้วยลำดับของจุดพิกัดที่เชื่อมต่อกันเป็นเส้นประกอบ โดยจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดต้องเป็นจุดเดียวกัน ข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมถูกนำมาใช้ในการแสดงแปลงที่ดิน ขอบเขตจังหวัด อำเภอ เขตการปกครอง พื้นที่อุทยาน ใช้ที่ดิน หรือพื้นที่น้ำ คุณสมบัติสำคัญของข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมได้แก่ พื้นที่ (Area) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสูตรทางคณิตศาสตร์ และขอบเขต (Perimeter) ซึ่งคือความยาวรอบนอกของรูปหลายเหลี่ยม ข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมในระบบ GIS ที่ดีจะต้องมีคุณสมบัติ Topology ที่ถูกต้อง ได้แก่ ขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมที่ไม่ทับซ้อนกัน (No Overlap) และไม่มีช่องว่างระหว่างรูปหลายเหลี่ยมที่อยู่ติดกัน (No Gaps) คุณสมบัตินี้เรียกว่า Planar Enforcement หรือ Polygons Form a Planar Graph

การจัดเก็บข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมในรูปแบบ Topology จะเก็บข้อมูลขอบเขต (Edges) และจุดตัด (Nodes) แยกจากข้อมูลรูปหลายเหลี่ยม ทำให้สามารถลดการจัดเก็บข้อมูลที่ซ้ำซ้อนและรักษาความสอดคล้องของขอบเขตระหว่างรูปหลายเหลี่ยมที่อยู่ติดกัน ตัวอย่างเช่น ขอบเขตระหว่างสองจังหวัดจะถูกจัดเก็บเพียงครั้งเดียวในข้อมูลขอบเขต แม้ว่าจะเป็นขอบเขตร่วมกันของทั้งสองจังหวัด

ตัวอย่าง 3.6 ข้อมูลแปลงที่ดินในเขตกรุงเทพมหานครเป็นตัวอย่างของข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมใน GIS แต่ละแปลงที่ดินจะถูกจัดเก็บในรูปแบบรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดพิกัดรอบขอบเขตแปลง ข้อมูลคุณลักษณะประกอบด้วยหมายเลขโฉนดที่ดิน พื้นที่วัดเป็นไร่ งาน ตารางวา ประเภทกรรมสิทธิ์ และชื่อเจ้าของ การจัดเก็บในรูปแบบ Topology จะทำให้ขอบเขตระหว่างแปลงที่ดินที่อยู่ติดกันถูกจัดเก็บเพียงครั้งเดียว และไม่มีช่องว่างหรือการทับซ้อนระหว่างแปลงที่ดิน

ตัวอย่าง 3.7 พิจารณาข้อมูลการใช้ที่ดินในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งแบ่งออกเป็นหลายประเภท ได้แก่ พื้นที่เกษตรกรรม พื้นที่อยู่อาศัย พื้นที่พาณิชยกรรม พื้นที่ป่าไม้ และพื้นที่สาธารณะ แต่ละประเภทการใช้ที่ดินจะถูกจัดเก็บในรูปแบบรูปหลายเหลี่ยมที่ไม่ทับซ้อนกันและไม่มีช่องว่าง การคำนวณพื้นที่รวมของแต่ละประเภทการใช้ที่ดินทำได้โดยการรวมพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมทั้งหมดในประเภทนั้น และการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงการใช้ที่ดินสามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบข้อมูลจากสองช่วงเวลา

ตัวอย่าง 3.8 ข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมในระบบ GIS ต้องมีคุณสมบัติเฉพาะที่แตกต่างจากข้อมูลจุดและเส้น ประการแรก รูปหลายเหลี่ยมต้องเป็นรูปร่างปิดที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเดียวกัน การละเมิดกฎนี้จะทำให้ระบบไม่สามารถคำนวณพื้นที่ได้อย่างถูกต้อง ประการที่สอง ขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมที่อยู่ติดกันต้องไม่

ทับซ้อนกัน เพื่อให้แน่ใจว่าพื้นที่ทั้งหมดถูกจัดสรรให้กับรูปหลายเหลี่ยมใดรูปหลายเหลี่ยมหนึ่งเท่านั้น และประการที่สาม ระหว่างรูปหลายเหลี่ยมที่อยู่ติดกันต้องไม่มีช่องว่าง เพื่อให้แน่ใจว่าพื้นที่ทั้งหมดถูกครอบคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมใดรูปหลายเหลี่ยมหนึ่ง

3.4 แบบจำลองข้อมูลราสเตอร์ (Raster Data Model)

แบบจำลองข้อมูลราสเตอร์เป็นวิธีการจัดเก็บข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้โครงสร้างตารางกริด (Grid) ในการแสดงข้อมูล โดยแบ่งพื้นที่ออกเป็นช่องสี่เหลี่ยมขนาดเท่ากันที่เรียกว่า Cells หรือ Pixels แต่ละ Cell จะเก็บค่าของข้อมูล ซึ่งอาจเป็นค่าตัวเลขที่แสดงความสูง อุณหภูมิ ความเข้มของการสะท้อน หรือค่าประเภทที่ถูกจัดรหัสเป็นตัวเลข แบบจำลองราสเตอร์มีลักษณะเด่นที่สำคัญคือความสามารถในการแสดงข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องในพื้นที่ เช่น ความสูงของภูมิประเทศ การกระจายตัวของอุณหภูมิ หรือความเข้มข้นของมลพิษในอากาศ ในแบบจำลองราสเตอร์ ทุกตำแหน่งในพื้นที่จะสามารถระบุได้ว่าอยู่ใน Cell ใด โดยใช้พิกัดแถวและคอลัมน์ของตาราง Grid

การจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบราสเตอร์มีข้อดีหลายประการ ประการแรก การจัดเก็บข้อมูลเป็นระบบที่สม่ำเสมอทำให้การคำนวณและการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ทำได้ง่ายและรวดเร็ว ประการที่สอง แบบจำลองราสเตอร์เหมาะสำหรับการจัดเก็บข้อมูลที่ได้จากการสำรวจระยะไกล เช่น ภาพถ่ายจากดาวเทียมหรือภาพถ่ายทางอากาศ ประการที่สาม การทำงานเชิงพื้นที่ เช่น การซ้อนทับแผนที่ (Map Overlay) และการวิเคราะห์การมองเห็น (Viewshed Analysis) สามารถดำเนินการได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยแบบจำลองราสเตอร์ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองราสเตอร์มีข้อจำกัดในเรื่องของขนาดไฟล์ที่ใหญ่เมื่อต้องการความละเอียดสูง และความแม่นยำในการแสดงขอบเขตของวัตถุที่มีรูปร่างไม่สม่ำเสมอ

3.4.1 ข้อมูลแบบ Cell และ Pixel

ข้อมูล Cell หรือ Pixel เป็นหน่วยพื้นฐานของแบบจำลองราสเตอร์ แต่ละ Cell จะมีขนาดเท่ากันและมีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาดของ Cell จะกำหนดความละเอียดเชิงพื้นที่ (Spatial Resolution) ของข้อมูลราสเตอร์ กล่าวคือ Cell ที่มีขนาดเล็กกว่าจะให้ความละเอียดสูงกว่า แต่จะใช้พื้นที่จัดเก็บข้อมูลมากกว่า ในทางทฤษฎี ข้อมูลราสเตอร์สามารถนิยามได้ว่าเป็นฟังก์ชัน $f(r, c)$ ที่ส่งคืนค่าข้อมูลสำหรับแถว r และคอลัมน์ c ของตาราง Grid โดยค่าที่ส่งคืนอาจเป็นค่าตัวเลข (Numeric) หรือค่าประเภทที่ถูกจัดรหัส (Categorical)

ค่าของแต่ละ Cell จะแทนค่าเฉลี่ยหรือค่าที่วัดได้ภายในพื้นที่ของ Cell นั้นๆ สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณ เช่น ความสูงหรืออุณหภูมิ ค่าจะเป็นค่าตัวเลขที่แสดงค่าเฉลี่ยหรือค่าที่วัดได้ สำหรับข้อมูลเชิง

คุณภาพ เช่น ประเภทการใช้ที่ดิน ค่าจะเป็นรหัสตัวเลขที่แทนประเภทต่างๆ การเลือกขนาด Cell ที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลและวัตถุประสงค์ของการใช้งาน หากขนาด Cell ใหญ่เกินไป รายละเอียดเชิงพื้นที่จะสูญเสียไป ซึ่งเรียกว่า Mixed Pixel Problem หรือข้อผิดพลาดจากการผสมผสานค่าของหลายประเภทใน Cell เดียวกัน ในทางกลับกัน หากขนาด Cell เล็กเกินไป ขนาดไฟล์จะใหญ่เกินไปและการประมวลผลจะช้าลง

ตัวอย่าง 3.9 ภาพถ่ายดาวเทียม Landsat 8 มีขนาด Cell 30 เมตร x 30 เมตร หมายความว่าทุก Cell จะแทนค่าเฉลี่ยของข้อมูลในพื้นที่ 900 ตารางเมตร ในการจำแนกประเภทการใช้ที่ดิน หากพื้นที่ 900 ตารางเมตรประกอบด้วยทั้งพื้นที่เกษตรกรรมและพื้นที่อยู่อาศัย ค่าของ Cell จะเป็นค่าผสมที่ไม่สามารถจำแนกประเภทได้อย่างถูกต้อง นี่คือ Mixed Pixel Problem ที่เป็นข้อจำกัดสำคัญของข้อมูลราสเตอร์ การแก้ปัญหานี้ทำได้โดยการใช้ข้อมูลดาวเทียมที่มีความละเอียดสูงขึ้น หรือการใช้เทคนิคการจำแนกที่ซับซ้อนขึ้น

ตัวอย่าง 3.10 พิจารณาข้อมูลราสเตอร์ความสูงเชิงเลข (Digital Elevation Model หรือ DEM) ของภูเขาในเชียงใหม่ ที่มีขนาด Cell 30 เมตร x 30 เมตร แต่ละ Cell จะเก็บค่าความสูงเฉลี่ยของพื้นที่ 900 ตารางเมตร ณ ตำแหน่งนั้น ค่าความสูงจะเป็นค่าตัวเลขในหน่วยเมตร เช่น 1500 เมตร การคำนวณความชัน (Slope) ของภูเขาสามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบค่าความสูงของ Cell ที่อยู่ติดกัน และการสร้างเส้นชั้นความสูง (Contour Lines) สามารถทำได้โดยการเชื่อมต่อ Cell ที่มีค่าความสูงเท่ากัน

3.4.2 ความละเอียดเชิงพื้นที่ (Resolution)

ความละเอียดเชิงพื้นที่ (Spatial Resolution) ของข้อมูลราสเตอร์หมายถึงขนาดของแต่ละ Cell ในระบบพิกัดภูมิศาสตร์ โดยทั่วไปจะแสดงเป็นขนาดด้านหนึ่งของ Cell ในหน่วยเมตรหรือกิโลเมตร ความละเอียดเชิงพื้นที่เป็นปัจจัยสำคัญที่สุดในการกำหนดคุณภาพและขนาดไฟล์ของข้อมูลราสเตอร์ ความละเอียดสูงหมายถึงขนาด Cell เล็ก ให้รายละเอียดเชิงพื้นที่มาก แต่ใช้พื้นที่จัดเก็บข้อมูลมาก ความละเอียดต่ำหมายถึงขนาด Cell ใหญ่ ใช้พื้นที่จัดเก็บข้อมูลน้อย แต่สูญเสียรายละเอียดเชิงพื้นที่

การเลือกความละเอียดเชิงพื้นที่ที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลและวัตถุประสงค์ของการใช้งาน สำหรับการวิเคราะห์ระดับประเทศ ความละเอียด 1 กิโลเมตรอาจเพียงพอ แต่สำหรับการวิเคราะห์ระดับจังหวัดหรือเทศบาล ความละเอียด 30 เมตรหรือ 10 เมตรอาจจำเป็น สำหรับการวิเคราะห์ระดับแปลงที่ดินหรืออาคาร ความละเอียด 1 เมตรหรือต่ำกว่าอาจจำเป็น การใช้ความละเอียดที่สูงเกินความจำเป็นจะทำให้เปลืองพื้นที่จัดเก็บข้อมูลและทำให้การประมวลผลช้าลงโดยไม่จำเป็น ในขณะที่การใช้ความละเอียดที่ต่ำเกินไปจะทำให้สูญเสียรายละเอียดที่จำเป็นและทำให้ผลลัพธ์ไม่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 3.11 ข้อมูลดาวเทียมที่ใช้ใน GIS มีความละเอียดเชิงพื้นที่ที่แตกต่างกันตามประเภทของดาวเทียม ดาวเทียม Landsat 8 มีความละเอียด 30 เมตร หมายความว่าแต่ละ Pixel แทนพื้นที่ประมาณ 900 ตารางเมตร ดาวเทียม Sentinel-2 มีความละเอียด 10 เมตรสำหรับ Band สีน้ำเงิน เขียว แดง และ Near-Infrared หมายความว่าแต่ละ Pixel แทนพื้นที่ประมาณ 100 ตารางเมตร ดาวเทียม WorldView มีความละเอียดสูงสุดถึง 30 เซนติเมตร หมายความว่าแต่ละ Pixel แทนพื้นที่เพียง 9 ตารางเซนติเมตร การเลือกใช้ข้อมูลดาวเทียมจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการใช้งาน ความละเอียดที่ต้องการ และงบประมาณที่มี

ตัวอย่าง 3.12 พิจารณาการเลือกความละเอียดเชิงพื้นที่สำหรับการสำรวจการใช้ที่ดินในกรุงเทพมหานคร หากต้องการจำแนกพื้นที่อยู่อาศัย พื้นที่พาณิชยกรรม และพื้นที่สีเขียว ความละเอียด 30 เมตรอาจเพียงพอสำหรับพื้นที่ที่กว้างขวาง แต่หากต้องการจำแนกสวนสาธารณะขนาดเล็กหรือพื้นที่สีเขียวในซอย ความละเอียด 10 เมตรหรือดีกว่าอาจจำเป็น การใช้ความละเอียดสูงขึ้นโดยไม่จำเป็นจะเพิ่มขนาดไฟล์และเวลาในการประมวลผลโดยไม่เพิ่มประโยชน์ในการวิเคราะห์

3.5 การแปลงข้อมูลระหว่าง Vector และ Raster (Data Conversion)

การแปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบเวกเตอร์และราสเตอร์เป็นกระบวนการที่สำคัญในการใช้งาน GIS เนื่องจากข้อมูลเชิงพื้นที่จากแหล่งต่างๆ มักอยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกัน และการวิเคราะห์บางประเภทอาจต้องการข้อมูลในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งเท่านั้น การแปลงข้อมูลจากเวกเตอร์เป็นราสเตอร์เรียกว่า Rasterization หรือ Vector to Raster Conversion ในขณะที่การแปลงข้อมูลจากราสเตอร์เป็นเวกเตอร์เรียกว่า Vectorization หรือ Raster to Vector Conversion ทั้งสองกระบวนการมีข้อดีและข้อจำกัดที่แตกต่างกัน และการแปลงอาจทำให้ข้อมูลสูญเสียความแม่นยำหรือรายละเอียดบางส่วน

การเลือกทิศทางของการแปลงข้อมูลจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการใช้งานและลักษณะของข้อมูลต้นทาง การแปลงจากเวกเตอร์เป็นราสเตอร์มักทำเมื่อต้องการทำการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ที่เหมาะกับข้อมูลราสเตอร์ เช่น การซ้อนทับแผนที่ (Map Overlay) หรือการวิเคราะห์การมองเห็น (Viewshed Analysis) การแปลงจากราสเตอร์เป็นเวกเตอร์มักทำเมื่อต้องการแสดงผลข้อมูลในรูปแบบแผนที่ที่มีขอบเขตชัดเจน หรือเมื่อต้องการทำการวิเคราะห์ที่เหมาะกับข้อมูลเวกเตอร์ เช่น การวิเคราะห์เครือข่าย

3.5.1 การแปลง Vector เป็น Raster (Rasterization)

การแปลงข้อมูลเวกเตอร์เป็นราสเตอร์เป็นกระบวนการที่แปลงข้อมูลจุด เส้น และรูปหลายเหลี่ยมให้เป็นข้อมูลราสเตอร์ที่ประกอบด้วยตาราง Grid ของ Cells หลักการพื้นฐานของ Rasterization คือการกำหนดค่าให้กับ Cell แต่ละ Cell ตามความสัมพันธ์กับข้อมูลเวกเตอร์ สำหรับข้อมูลจุด จุดจะถูกแปลงเป็น

Cell เดียวที่มีค่าตามคุณลักษณะของจุด สำหรับข้อมูลเส้น ส่วนของเส้นจะถูกแปลงเป็น Cell ที่เส้นตัดผ่าน โดย Cell ที่เส้นตัดผ่านจะได้รับค่าตามคุณลักษณะของเส้น สำหรับข้อมูลรูปหลายเหลี่ยม พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมจะถูกแปลงเป็น Cell ที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยม โดยแต่ละ Cell จะได้รับค่าตามคุณลักษณะของรูปหลายเหลี่ยม

คุณภาพของการแปลงขึ้นอยู่กับความละเอียดเชิงพื้นที่ของข้อมูลราสเตอร์ผลลัพธ์ หากความละเอียดต่ำ (Cell ใหญ่) รายละเอียดของเส้นและขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมจะสูญเสียไป ซึ่งเรียกว่า Aliasing Effect หรือข้อผิดพลาดจากการแปลงที่ทำให้เส้นที่ควรจะเรียบกลายเป็นเส้นหยาบ หรือขอบเขตที่ควรจะคมชัดกลายเป็นขอบเขตที่เบลอ ในทางตรงกันข้าม หากความละเอียดสูง (Cell เล็ก) ขนาดไฟล์จะใหญ่ขึ้นและการประมวลผลจะช้าลง การเลือกความละเอียดที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลและวัตถุประสงค์ของการใช้งาน หลักการทั่วไปคือความละเอียดของข้อมูลราสเตอร์ผลลัพธ์ควรเล็กกว่าความละเอียดของรายละเอียดเล็กที่สุดที่ต้องการรักษาไว้ประมาณ 2-3 เท่า

ตัวอย่าง 3.13 การแปลงข้อมูลเส้นถนนในกรุงเทพมหานครจากเวกเตอร์เป็นราสเตอร์เป็นตัวอย่างของ Rasterization ในกระบวนการนี้ ระบบจะสร้างตาราง Grid ของ Cells โดยแต่ละ Cell จะมีค่าเป็น 1 หากเส้นถนนตัดผ่าน Cell นั้น และเป็น 0 หรือ NoData หากไม่มีเส้นถนนตัดผ่าน หากใช้ความละเอียด 10 เมตร เส้นถนนที่กว้าง 20 เมตรอาจถูกแทนด้วย Cell ที่ตัดผ่านเพียง 2 Cells ทำให้ถนนดูบางกว่าความเป็นจริง ในขณะที่หากใช้ความละเอียด 2 เมตร เส้นถนนเดียวกันอาจถูกแทนด้วย Cell ที่ตัดผ่านถึง 10 Cells ทำให้ถนนใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น

ตัวอย่าง 3.14 การแปลงข้อมูลรูปหลายเหลี่ยมการใช้ที่ดินจากเวกเตอร์เป็นราสเตอร์เป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่ามีรูปหลายเหลี่ยมแปลงที่ดินที่มีรหัสประเภทการใช้ที่ดินเป็นคุณลักษณะ ในการแปลง ระบบจะกำหนดค่าให้กับแต่ละ Cell ตามรหัสประเภทการใช้ที่ดินของรูปหลายเหลี่ยมที่ Cell นั้นอยู่ ณ ตำแหน่งกึ่งกลาง Cell ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นคือหาก Cell อยู่บนขอบเขตระหว่างสองรูปหลายเหลี่ยม ระบบอาจต้องใช้กฎเพื่อตัดสินใจว่าจะกำหนดค่าของรูปหลายเหลี่ยมใดให้กับ Cell นั้น กฎที่ใช้ทั่วไปได้แก่ การกำหนดตามค่าของจุดกึ่งกลาง Cell หรือการกำหนดตามรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่มากที่สุดใน Cell นั้น

3.5.2 การแปลง Raster เป็น Vector (Vectorization)

การแปลงข้อมูลราสเตอร์เป็นเวกเตอร์เป็นกระบวนการที่แปลงข้อมูล Grid ของ Cells ให้เป็นข้อมูลจุด เส้น หรือรูปหลายเหลี่ยม กระบวนการนี้มักใช้ในการสกัดขอบเขตของพื้นที่จากภาพถ่ายดาวเทียม หรือในการแปลงเส้นชั้นความสูงจากข้อมูล DEM ให้เป็นข้อมูลเส้น หลักการพื้นฐานของ Vectorization คือการ

ระบุกลุ่มของ Cells ที่มีค่าเหมือนกันและสร้างรูปหลายเหลี่ยมล้อมรอบกลุ่มนั้น หรือการติดตามเส้นที่เป็นขอบเขตระหว่าง Cells ที่มีค่าต่างกัน

กระบวนการ Vectorization มีหลายขั้นตอน ขั้นตอนแรกคือการจัดกลุ่ม (Clustering) ซึ่งรวม Cells ที่มีค่าเหมือนกันและอยู่ติดกันเป็นกลุ่ม ขั้นตอนที่สองคือการสร้างขอบเขต (Boundary Generation) ซึ่งสร้างเส้นประกอบรอบกลุ่มของ Cells ขั้นตอนที่สามคือการแปลงขอบเขตให้เป็นรูปหลายเหลี่ยม (Polygon Generation) โดยการเชื่อมจุดที่เป็นมุมของขอบเขตเข้าด้วยกัน กระบวนการ Vectorization อาจทำให้สูญเสียรายละเอียดบางส่วน โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากข้อมูลราสเตอร์มี Mixed Pixels หรือมี Noise ปัญหา Noise สามารถลดลงได้โดยการใช้ตัวกรอง (Filter) ก่อนการแปลง หรือโดยการใช้อัลกอริทึม Vectorization ที่มีความซับซ้อน

ตัวอย่าง 3.15 การสกัดขอบเขตพื้นที่เมืองจากภาพถ่ายดาวเทียมเป็นตัวอย่างของ Vectorization สมมติว่ามีภาพถ่ายดาวเทียมที่ได้รับการจำแนกประเภทการใช้ที่ดินแล้ว โดยพื้นที่เมืองมีค่าเป็น 1 และพื้นที่อื่นๆ มีค่าเป็น 0 ในการแปลง ระบบจะระบุกลุ่มของ Cells ที่มีค่าเป็น 1 และสร้างรูปหลายเหลี่ยมล้อมรอบกลุ่มนั้น ขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมจะผ่านจุดกึ่งกลางของ Cells ที่อยู่บนขอบเขต ทำให้ขอบเขตที่ได้อาจไม่เรียบและมีมุมเหลี่ยมตามขอบเขตของ Cells เทคนิคที่ใช้ในการลดปัญหานี้ได้แก่ การใช้อัลกอริทึมที่เรียกว่า Snake Algorithm หรือ Active Contour เพื่อทำให้ขอบเขตเรียบขึ้น

ตัวอย่าง 3.16 การแปลงเส้นชั้นความสูงจากข้อมูล DEM เป็นข้อมูลเส้นเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง ข้อมูล DEM จะมีค่าความสูงสำหรับแต่ละ Cell ในการแปลง ระบบจะระบุ Cells ที่มีค่าความสูงเท่ากับค่าที่กำหนด (เช่น 100 เมตร, 200 เมตร, 300 เมตร) และสร้างเส้นที่เชื่อมต่อกันระหว่าง Cells เหล่านั้น เส้นที่ได้จะเป็นเส้นชั้นความสูงที่แสดงรูปร่างของภูมิประเทศ คุณภาพของเส้นชั้นความสูงที่ได้จะขึ้นอยู่กับความละเอียดเชิงพื้นที่ของ DEM และอัลกอริทึมที่ใช้ในการเชื่อมต่อ Cells

วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล (Data Acquisition Methods)

ข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้ในระบบ GIS มีแหล่งที่มาหลากหลาย แต่ละแหล่งที่มามีข้อดีและข้อจำกัดที่แตกต่างกันในด้านความแม่นยำ ความละเอียด ความครอบคลุม และต้นทุน การเลือกวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการใช้งาน งบประมาณที่มี และทรัพยากรที่มีอยู่ ในส่วนนี้จะกล่าวถึงวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่ที่สำคัญที่สุดสี่วิธี ได้แก่ การสำรวจด้วย GPS การสำรวจระยะไกล (Remote Sensing) การแปลงจากแผนที่กระดาษ (Digitizing) และการสำรวจด้วยเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์อื่นๆ

การเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่ที่มีคุณภาพเป็นงานที่ต้องใช้ความรู้ความชำนาญและความเข้าใจในลักษณะของข้อมูลที่ต้องการ ข้อมูลที่มีคุณภาพต่ำจะส่งผลให้ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ GIS ไม่ถูกต้อง ซึ่งอาจนำไปสู่การตัดสินใจที่ผิดพลาด ดังนั้น ผู้ใช้งาน GIS ต้องเข้าใจคุณภาพและข้อจำกัดของข้อมูลที่ใช้งาน และต้องสามารถประเมินความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้รับ

3.6.1 การสำรวจด้วย GPS (Global Positioning System)

ระบบ GPS เป็นระบบการระบุตำแหน่งบนโลกที่ใช้ดาวเทียม หลักการทำงานของ GPS คือการรับสัญญาณจากดาวเทียมหลายดวงพร้อมกัน และใช้เวลาที่สัญญาณเดินทางมาถึงเพื่อคำนวณระยะทางไปยังดาวเทียมแต่ละดวง เมื่อทราบระยะทางไปยังดาวเทียมอย่างน้อย 4 ดวง ระบบจะสามารถคำนวณตำแหน่งของผู้รับได้อย่างแม่นยำในสามมิติ ความแม่นยำของ GPS ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่ จำนวนดาวเทียมที่รับสัญญาณได้ คุณภาพของฮาร์ดแวร์ GPS และสภาพแวดล้อมในการรับสัญญาณ

GPS แบ่งออกเป็นหลายระดับความแม่นยำ สำหรับการใช้งานทั่วไป เช่น การนำทางในรถยนต์ GPS แบบมาตรฐานมีความแม่นยำประมาณ 3-5 เมตร สำหรับการสำรวจทางวิชาการหรือวิศวกรรม GPS ความแม่นยำสูง (High-Precision GPS) สามารถให้ความแม่นยำได้ถึงระดับเซนติเมตร โดยใช้เทคนิคที่เรียกว่า Differential GPS (DGPS) หรือ Real-Time Kinematic (RTK) ความแม่นยำระดับเซนติเมตรนี้จำเป็นสำหรับงานสำรวจที่ต้องการความละเอียดสูง เช่น การสำรวจแปลงที่ดิน การวางผังโครงการก่อสร้าง หรือการติดตั้งระบบสาธารณูปโภค

ตัวอย่าง 3.17 การสำรวจช่องทางจราจรในกรุงเทพมหานคร เป็นตัวอย่างของการใช้ GPS ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่ สมมติว่าต้องการสำรวจตำแหน่งและลักษณะของช่องทางจราจรบนถนนสุขุวิท ผู้สำรวจจะใช้อุปกรณ์ GPS ความแม่นยำสูงติดตั้งบนยานพาหนะ และขับรถไปตามถนนบันทึกตำแหน่งพิกัดทุกๆ วินาที ข้อมูลที่ได้จะเป็นเส้นทางที่แสดงตำแหน่งของยานพาหนะบนถนน ซึ่งสามารถนำมาประมวลผลเพื่อสร้างข้อมูลเส้นถนนที่มีความแม่นยำสูง การใช้ GPS ความแม่นยำสูงแบบ RTK สามารถให้ความแม่นยำได้ถึง 2-3 เซนติเมตร ทำให้ข้อมูลที่ได้มีคุณภาพเพียงพอสำหรับการวิเคราะห์เชิงวิศวกรรม

ตัวอย่าง 3.18 การติดตามการเคลื่อนที่ของรถเก็บขยะในเขตเทศบาลเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง โดยติดตั้งอุปกรณ์ GPS บนรถเก็บขยะแต่ละคัน ข้อมูลตำแหน่งจะถูกบันทึกและส่งผ่านเครือข่ายมือถือไปยังศูนย์ควบคุม ศูนย์ควบคุมสามารถติดตามตำแหน่งของรถเก็บขยะทุกคันแบบเรียลไทม์ และสามารถวิเคราะห์ประสิทธิภาพของเส้นทางการเก็บขยะ ความแม่นยำของ GPS แบบมาตรฐาน (3-5 เมตร) เพียงพอสำหรับการติดตามยานพาหนะในระดับเมือง

3.6.2 การสำรวจระยะไกล (Remote Sensing)

การสำรวจระยะไกลเป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่โดยการวัดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งออกจากหรือสะท้อนจากวัตถุบนพื้นผิวโลก โดยไม่ต้องมีการติดต่อทางกายภาพกับวัตถุที่วัด การสำรวจระยะไกลสามารถทำได้จากดาวเทียม เครื่องบิน หรือโดรน แต่ละวิธีมีข้อดีและข้อจำกัดที่แตกต่างกันในด้านความสูงในการบิน ความละเอียดเชิงพื้นที่ ความละเอียดเชิงเวลา และต้นทุน

ข้อมูลจากการสำรวจระยะไกลมีหลายประเภท ประเภทแรกคือภาพถ่ายจากดาวเทียมที่ให้ข้อมูลในช่วงคลื่นที่ตามองเห็น (Visible Bands) ซึ่งแสดงสีที่ปรากฏบนพื้นผิวโลก ประเภทที่สองคือภาพจากดาวเทียมที่ให้ข้อมูลในช่วงคลื่นอินฟราเรด (Infrared Bands) ซึ่งสามารถตรวจจับความร้อนและความชื้นของวัตถุ ประเภทที่สามคือข้อมูลเรดาร์ (Radar) ที่สามารถ□□ผ่านเมฆและหมอกได้ ทำให้สามารถเก็บข้อมูลได้แม้ในสภาพอากาศไม่ดี และประเภทที่สี่คือข้อมูล LiDAR (Light Detection and Ranging) ที่ใช้เลเซอร์ในการวัดระยะทางและสร้างแบบจำลองความสูง 3 มิติ ของพื้นผิวโลก

การวิเคราะห์ข้อมูลจากการสำรวจระยะไกลมีหลายระดับความซับซ้อน ระดับพื้นฐานได้แก่การมองดูภาพ (Visual Interpretation) ซึ่งผู้เชี่ยวชาญจะตีความภาพด้วยตาเปล่า ระดับกลางได้แก่การจำแนกประเภทภาพ (Image Classification) ซึ่งใช้อัลกอริทึมในการจำแนก Pixel ตามลักษณะสเปกตรัมของคลื่นที่วัดได้ ระดับสูงได้แก่การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลง (Change Detection) ซึ่งเปรียบเทียบภาพจากสองช่วงเวลาเพื่อระบุพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลง และระดับขั้นสูงได้แก่การใช้เทคนิค Machine Learning และ Deep Learning ในการวิเคราะห์ภาพ

ตัวอย่าง 3.19 การจำแนกประเภทการใช้ที่ดินในจังหวัดภูเก็ตจากภาพดาวเทียม Sentinel-2 เป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์ข้อมูลจากการสำรวจระยะไกล ดาวเทียม Sentinel-2 มี 13 Bands ของข้อมูล รวมถึง Band สีน้ำเงิน เขียว แดง และ Near-Infrared การจำแนกประเภทการใช้ที่ดินสามารถทำได้โดยการใช้ค่าสเปกตรัมของ Pixel ในแต่ละ Band ร่วมกับอัลกอริทึมการจำแนก เช่น Maximum Likelihood Classification หรือ Random Forest ผลลัพธ์จะเป็นข้อมูลราสเตอร์ที่แต่ละ Pixel มีค่าเป็นรหัสประเภทการใช้ที่ดิน เช่น พื้นที่เกษตรกรรม พื้นที่อยู่อาศัย พื้นที่ป่าไม้ หรือพื้นที่น้ำ ความแม่นยำของการจำแนกจะขึ้นอยู่กับคุณภาพของข้อมูลภาพ ความละเอียดเชิงพื้นที่ และอัลกอริทึมที่ใช้ โดยทั่วไปความแม่นยำของการจำแนกอยู่ที่ประมาณ 80-95 เปอร์เซ็นต์ ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของพื้นที่และการเตรียมข้อมูล

ตัวอย่าง 3.20 การตรวจจับพื้นที่ป่าไม้ที่ถูกตัดไปอย่างผิดกฎหมายในจังหวัดเชียงรายเป็นอีกตัวอย่างหนึ่งโดยใช้เทคนิค Change Detection ระหว่างภาพดาวเทียมจากสองช่วงเวลา ภาพก่อนหน้าแสดงพื้นที่ป่าที่

ยังสมบูรณ์ ในขณะที่ภาพหลังแสดงพื้นที่ที่ป่าถูกตัด การเปรียบเทียบค่าสเปกตรัมของ Pixel ระหว่างสองภาพจะช่วยระบุพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลง การใช้ภาพดาวเทียมที่มีความละเอียดเชิงเวลาสูง (เช่น ดาวเทียม Sentinel-2 ที่ถ่ายภาพทุก 5 วัน) จะช่วยให้สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้อย่างรวดเร็วและทันการณ์

3.6.3 การแปลงจากแผนที่กระดาษ (Digitizing)

การแปลงแผนที่กระดาษให้เป็นข้อมูลดิจิทัลหรือ Digitizing เป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้กันมาอย่างยาวนานในวงการ GIS กระบวนการนี้ใช้ในการแปลงแผนที่ที่มีอยู่แล้วในรูปแบบกระดาษให้เป็นข้อมูลเวกเตอร์ที่สามารถใช้งานในระบบ GIS ได้ การ Digitizing สามารถทำได้สองวิธีหลัก ได้แก่ การ Digitizing แบบหน้าจอ (Heads-up Digitizing) ซึ่งใช้โปรแกรม GIS ในการลากเส้นบนภาพของแผนที่ที่แสดงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ และการ Digitizing แบบหัวขนาด (Table Digitizing หรือ Heads-down Digitizing) ซึ่งใช้อุปกรณ์ Digitizer Tablet ในการติดตามเส้นบนแผนที่กระดาษที่วางบนอุปกรณ์

การ Digitizing แบบหน้าจอเป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบัน เนื่องจากสามารถทำได้ง่ายและสะดวกกว่า กระบวนการเริ่มจากการสแกนแผนที่กระดาษให้เป็นภาพดิจิทัล (Raster) จากนั้นใช้โปรแกรม GIS นำเข้าภาพและใช้เครื่องมือในการลากเส้นตามแนวของแผนที่บนหน้าจอ ข้อดีของการ Digitizing แบบหน้าจอคือผู้ใช้สามารถเห็นภาพทั้งหมดของแผนที่และสามารถเปรียบเทียบกับข้อมูลอ้างอิงอื่นๆ ได้ง่าย ในขณะที่ข้อดีของการ Digitizing แบบหัวขนาดคือความแม่นยำในการติดตามเส้นที่สูงกว่า เนื่องจากใช้พื้นผิวกากบาตที่มีตารางขนาดเล็กเป็นตัวอ้างอิง

คุณภาพของข้อมูลที่ได้จากการ Digitizing ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่ คุณภาพของแผนที่ต้นทาง ความละเอียดในการสแกน (หากใช้วิธีหน้าจอ) ความชำนาญของผู้ทำ Digitizing และการตรวจสอบคุณภาพหลังการ Digitizing ความผิดพลาดที่พบบ่อยในการ Digitizing ได้แก่ การตกหล่น (Omission) ซึ่งเป็นการลืมลากเส้นบางเส้น การเกิน (Commission) ซึ่งเป็นการลากเส้นเกินความเป็นจริง ความไม่ต่อเนื่อง (Gap) ซึ่งเป็นการลากเส้นไม่ถึงจุดตัด และความซ้อนทับ (Overlap) ซึ่งเป็นการลากเส้นทับเส้นที่มีอยู่แล้ว

ตัวอย่าง 3.21 การแปลงแผนที่ผังเมืองกรุงเทพมหานครจากกระดาษให้เป็นข้อมูลดิจิทัลเป็นตัวอย่างของการ Digitizing แผนที่ผังเมืองที่จัดทำโดยสำนักผังเมืองมักจัดทำในรูปแบบกระดาษขนาดใหญ่ที่มีรายละเอียดของเขตการปกครอง เขตพื้นที่การใช้ที่ดิน และถนนหลัก ในการแปลง ผู้ทำ Digitizing จะสแกนแผนที่ด้วยความละเอียด 300 DPI หรือสูงกว่า จากนั้นใช้โปรแกรม GIS ลากเส้นตามขอบเขตของเขตการปกครอง เขตพื้นที่การใช้ที่ดิน และถนนหลัก ข้อมูลที่ได้จะเป็นข้อมูลเวกเตอร์ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์แผนผังเมืองร่วมกับข้อมูลอื่นๆ ได้

ตัวอย่าง 3.22 การแปลงแผนที่ปฐมภูมิฐานข้อมูลที่ดินจากกรมที่ดินเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง แผนที่ปฐมภูมิฐานข้อมูลที่ดินมีรายละเอียดของแปลงที่ดิน โฉนดที่ดิน และขอบเขตที่ดิน ในการแปลง ผู้ทำ Digitizing ต้องมีความชำนาญสูงเนื่องจากแปลงที่ดินมีจำนวนมากและมีขนาดเล็ก ความแม่นยำในการ Digitizing จะต้องสูงเพื่อให้ข้อมูลที่ได้มีความถูกต้องในระดับที่เชื่อถือได้ทางกฎหมาย การตรวจสอบคุณภาพจะทำโดยการเปรียบเทียบข้อมูลที่ Digitizing แล้วกับแผนที่ต้นฉบับ และโดยการคำนวณพื้นที่ของแปลงที่ดินและเปรียบเทียบกับพื้นที่ที่ระบุในโฉนด

คุณภาพข้อมูลและความแม่นยำเชิงพื้นที่ (Data Quality and Spatial Accuracy)

คุณภาพข้อมูลเป็นปัจจัยสำคัญที่สุดในการกำหนดความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ GIS ข้อมูลที่มีคุณภาพต่ำจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่ถูกต้อง แม้ว่าวิธีการวิเคราะห์จะดีก็ตาม คุณภาพข้อมูล GIS มีหลายมิติที่ต้องพิจารณา ได้แก่ ความแม่นยำเชิงตำแหน่ง (Positional Accuracy) ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะ (Attribute Accuracy) ความสมบูรณ์ (Completeness) ความสอดคล้องเชิงตรรกะ (Logical Consistency) และความถูกต้องของแหล่งที่มา (Lineage) การเข้าใจมิติเหล่านี้จะช่วยให้ผู้ใช้งาน GIS สามารถประเมินคุณภาพของข้อมูลที่ใช้และเลือกใช้ข้อมูลที่เหมาะสมกับวัตถุประสงค์ของการใช้งาน

ความแม่นยำเชิงตำแหน่ง หมายถึง ระดับความใกล้เคียงระหว่างตำแหน่งที่บันทึกในข้อมูลกับตำแหน่งจริงบนพื้นผิวโลก ความแม่นยำเชิงตำแหน่งมักแสดงเป็นระยะทาง หรือเป็นเปอร์เซ็นต์ของจำนวนจุดที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะ หมายถึงระดับความถูกต้องของข้อมูลคุณลักษณะที่เก็บรวบรวมมาพร้อมกับข้อมูลเรขาคณิต ความสมบูรณ์หมายถึงระดับที่ข้อมูลครอบคลุมปรากฏการณ์ที่ต้องการบันทึก ความสอดคล้องเชิงตรรกะหมายถึงระดับที่ข้อมูลเป็นไปตามกฎเชิงโครงสร้างและเชิงโทโพโลยีที่กำหนด และความถูกต้องของแหล่งที่มาหมายถึงประวัติของกระบวนการเก็บรวบรวมและประมวลผลข้อมูล

การรายงานคุณภาพข้อมูลควรเป็นส่วนหนึ่งของข้อมูล metadata ที่ต้องจัดทำพร้อมกับข้อมูล GIS ทุกชั้นข้อมูล มาตรฐาน metadata ที่นิยมใช้กันได้แก่ มาตรฐาน ISO 19115 สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่ และ FGDC Content Standard for Digital Geospatial Metadata สำหรับข้อมูลภูมิสารสนเทศของสหรัฐอเมริกา การจัดทำ metadata ที่ดีจะช่วยให้ผู้ใช้งานสามารถประเมินความเหมาะสมของข้อมูลสำหรับวัตถุประสงค์ของตนได้อย่างถูกต้อง

3.7.1 ความแม่นยำเชิงตำแหน่ง (Positional Accuracy)

ความแม่นยำเชิงตำแหน่งเป็นมิติของคุณภาพข้อมูลที่วัดระดับความใกล้เคียงระหว่างตำแหน่งที่บันทึกในข้อมูลกับตำแหน่งจริงบนพื้นผิวโลก ความแม่นยำเชิงตำแหน่งมักแสดงเป็นค่าความคลาดเคลื่อนเชิงรากกำลังสอง (Root Mean Square Error หรือ RMSE) หรือเป็นเปอร์เซ็นต์ของจำนวนจุดที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด (Accuracy Metric) ค่า RMSE ยิ่งต่ำ หมายถึงความแม่นยำยิ่งสูง ตัวอย่างเช่น ข้อมูลที่มี RMSE 5 เมตร หมายความว่าโดยเฉลี่ยแล้ว ตำแหน่งที่บันทึกมีความคลาดเคลื่อนจากตำแหน่งจริงประมาณ 5 เมตร

การวัดความแม่นยำเชิงตำแหน่งทำได้โดยการเปรียบเทียบตำแหน่งของจุดควบคุม (Ground Control Points หรือ GCPs) ที่ทราบตำแหน่งจริงบนพื้นผิวโลกกับตำแหน่งที่บันทึกในข้อมูล จุดควบคุมควรเลือกจากสิ่งที่มองเห็นชัดเจนและไม่เปลี่ยนแปลง เช่น จุดตัดถนน มุมอาคาร หรือหลักหมุดที่ดิน จำนวนจุดควบคุมที่ใช้ในการประเมินควรมีอย่างน้อย 20-30 จุด และควรกระจายตัวทั่วพื้นที่ของข้อมูล การประเมินความแม่นยำที่ดีควรทำโดยผู้ที่ไม่เกี่ยวข้องกับการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อหลีกเลี่ยงอคติในการประเมิน

ความแม่นยำเชิงตำแหน่งมีความสำคัญแตกต่างกันตามประเภทของงาน สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำสูง เช่น การสำรวจที่ดินทางกฎหมาย ความแม่นยำระดับเซนติเมตรถึงเดซิเมตรอาจจำเป็น สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำปานกลาง เช่น การวางผังเมือง ความแม่นยำระดับ 1-5 เมตรอาจเพียงพอ สำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำต่ำ เช่น การวิเคราะห์ระดับประเทศ ความแม่นยำระดับ 100 เมตรอาจยอมรับได้ การเลือกข้อมูลที่มีความแม่นยำสูงเกินความจำเป็นจะเพิ่มต้นทุนโดยไม่จำเป็น ในขณะที่การเลือกข้อมูลที่มีความแม่นยำต่ำเกินไปจะทำให้ผลลัพธ์ไม่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 3.23 การประเมินความแม่นยำเชิงตำแหน่งของข้อมูลถนนในกรุงเทพมหานครเป็นตัวอย่าง สมมติว่ามีข้อมูลถนนที่เก็บรวบรวมจากการ Digitizing จากแผนที่มาตราส่วน 1:50,000 หากต้องการประเมินความแม่นยำ ผู้ประเมินจะเลือกจุดควบคุม 30 จุดที่กระจายตัวทั่วพื้นที่ เช่น จุดตัดถนนสำคัญ จากนั้นจะใช้ GPS ความแม่นยำสูงวัดตำแหน่งจริงของจุดควบคุมเหล่านี้ และเปรียบเทียบกับตำแหน่งในข้อมูลถนน ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนระหว่างตำแหน่งจริงกับตำแหน่งในข้อมูลจะเป็นค่าประมาณของ RMSE หากค่า RMSE อยู่ที่ประมาณ 10 เมตร แสดงว่าข้อมูลมีความแม่นยำในระดับที่ยอมรับได้สำหรับการใช้งานทั่วไป แต่อาจไม่เพียงพอสำหรับงานที่ต้องการความแม่นยำสูง

ตัวอย่าง 3.24 การประเมินความแม่นยำเชิงตำแหน่งของข้อมูลภาพถ่ายดาวเทียมที่ orthorectified แล้วเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง การ orthorectification เป็นกระบวนการแก้ไขความคลาดเคลื่อนเชิงเรขาคณิต

ของ ภาพถ่าย ดาวเทียม ที่ เกิด จาก การ เปลี่ยนแปลง ของ ตำแหน่ง ดาวเทียม และ ภูมิประเทศ หลัง การ orthorectification ภาพจะมีความแม่นยำเชิงตำแหน่งที่ดีขึ้น การประเมินความแม่นยำทำได้โดยการเปรียบเทียบจุดควบคุมที่ปรากฏในภาพกับตำแหน่งจริงที่ทราบแล้ว

3.7.2 ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะ (Attribute Accuracy)

ความ แม่นยำ เชิง คุณลักษณะ เป็น มิติ ของ คุณภาพ ข้อมูล ที่ วัด ระดับ ความ ถูก ต้อง ของ ข้อมูลคุณลักษณะ ที่ เก็บ รวบรวม มา พร้อม กับ ข้อมูล เรขาคณิต ข้อมูล คุณลักษณะ อาจ เป็น ข้อมูล ที่ อยู่ ชื่อ ถนน ประเภทการใช้ที่ดิน จำนวนประชากร หรือข้อมูลอื่นๆ ที่อธิบายคุณสมบัติของวัตถุทางภูมิศาสตร์ ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะมักแสดงเป็นเปอร์เซ็นต์ของจำนวนรายการที่ถูกต้อง หรือเป็นเมทริกซ์ความสับสน (Confusion Matrix) สำหรับข้อมูลประเภท

การประเมินความแม่นยำเชิงคุณลักษณะทำได้หลายวิธี วิธีแรกคือการสุ่มตรวจสอบรายการข้อมูลกับแหล่งข้อมูลอ้างอิงที่เชื่อถือได้ วิธีที่สองคือการเปรียบเทียบกับผลการสำรวจภาคสนาม และวิธีที่สามคือการใช้วิธีการทางสถิติในการประเมินความแม่นยำ เช่น การใช้ Confusion Matrix สำหรับข้อมูลที่ผ่านการจำแนกประเภทจากภาพดาวเทียม ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะอาจแตกต่างกันไปตามประเภทของข้อมูล เช่น ข้อมูลชื่อถนนอาจมีความแม่นยำสูงกว่าข้อมูลประเภทการใช้ที่ดิน ซึ่งอาจมีความคลาดเคลื่อนจากการตีความ

สาเหตุที่ทำให้ข้อมูลคุณลักษณะไม่ถูกต้องมีหลายประการ สาเหตุแรกคือความผิดพลาดในการบันทึกข้อมูล เช่น การพิมพ์ผิด การใช้รหัสผิด หรือการละเว้นการบันทึก สาเหตุที่สองคือความไม่ทันสมัยของข้อมูล เนื่องจากข้อมูลคุณลักษณะอาจเปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น ชื่อถนนที่เปลี่ยนไป อาคารที่ถูกสร้างใหม่ หรือการใช้ที่ดินที่เปลี่ยนแปลง สาเหตุที่สามคือความคลาดเคลื่อนในการตีความ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับข้อมูลที่ต้องใช้การตัดสินใจในการจำแนก เช่น ประเภทการใช้ที่ดิน สาเหตุที่สี่คือความไม่สอดคล้องกันระหว่างแหล่งข้อมูล เช่น ข้อมูลจากแผนที่หนึ่งอาจใช้ระบบจำแนกประเภทที่แตกต่างจากข้อมูลจากอีกแหล่งหนึ่ง

ตัวอย่าง 3.25 การประเมินความแม่นยำเชิงคุณลักษณะของข้อมูลการใช้ที่ดินที่ได้จากการจำแนกภาพดาวเทียมเป็นตัวอย่าง สมมติว่ามีข้อมูลการใช้ที่ดินที่จำแนกออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ พื้นที่เกษตรกรรม พื้นที่อยู่อาศัย พื้นที่พาณิชยกรรม พื้นที่ป่าไม้ และพื้นที่น้ำ การประเมินความแม่นยำทำโดยการเลือกจุดตัวอย่าง 100 จุดจากข้อมูล และส่งผู้เชี่ยวชาญไปสำรวจภาคสนามเพื่อตรวจสอบประเภทการใช้ที่ดินจริง จากนั้นเปรียบเทียบผลการสำรวจภาคสนามกับประเภทที่จำแนกได้ในข้อมูล ผลลัพธ์อาจแสดงว่าข้อมูลมี

ความแม่นยำโดยรวม (Overall Accuracy) ประมาณ 85 เปอร์เซ็นต์ หมายความว่า 85 จาก 100 จุดถูกจำแนกได้ถูกต้อง แต่ความแม่นยำอาจแตกต่างกันไปในแต่ละประเภท เช่น พื้นที่น้ำอาจมีความแม่นยำสูงถึง 95 เปอร์เซ็นต์ ในขณะที่พื้นที่อยู่อาศัยอาจมีความแม่นยำเพียง 75 เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 3.26 การประเมินความแม่นยำเชิงคุณลักษณะของข้อมูลที่อยู่อาคารในกรุงเทพมหานครเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่ามีข้อมูลที่อยู่อาคาร 100,000 รายการ ในการประเมินความแม่นยำ ผู้ประเมินจะสุ่มเลือกที่อยู่ 500 รายการ และโทรศัพท์หรือส่งหนังสือเพื่อตรวจสอบว่าที่อยู่นั้นถูกต้องหรือไม่ ผลลัพธ์อาจพบว่าที่อยู่ประมาณ 470 รายการถูกต้อง คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ความแม่นยำ 94 เปอร์เซ็นต์ สาเหตุของที่อยู่ที่ไม่ถูกต้องอาจรวมถึงการพิมพ์ผิด การเปลี่ยนชื่อถนน หรืออาคารที่ถูกทำลายไปแล้ว

3.8 การประยุกต์ใช้ข้อมูลในงาน GIS

ข้อมูลที่เก็บรวบรวมและประมวลผลในระบบ GIS สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานหลากหลายประเภท ตั้งแต่การวางผังเมือง การจัดการทรัพยากรธรรมชาติ การวิเคราะห์การจราจร การตอบสนองต่อภัยพิบัติ ไปจนถึงการวิเคราะห์ทางธุรกิจ การเลือกใช้แบบจำลองข้อมูลและวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของงาน ข้อจำกัดด้านงบประมาณและเวลา และทรัพยากรที่มีอยู่ ในส่วนนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ข้อมูลในงาน GIS ที่สำคัญ

การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่ในระบบ GIS สามารถแบ่งออกเป็นหลายประเภท ได้แก่ การวิเคราะห์การซ้อนทับแผนที่ (Map Overlay Analysis) ซึ่งรวมข้อมูลจากหลายชั้นข้อมูลเพื่อระบุความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ การวิเคราะห์เครือข่าย (Network Analysis) ซึ่งวิเคราะห์เส้นทางและการเชื่อมต่อในเครือข่าย การวิเคราะห์การกระจายตัว (Distribution Analysis) ซึ่งวิเคราะห์รูปแบบและการกระจายตัวของปรากฏการณ์ และการวิเคราะห์การมองเห็น (Viewshed Analysis) ซึ่งวิเคราะห์พื้นที่ที่สามารถมองเห็นได้จากตำแหน่งที่กำหนด การเลือกใช้แบบจำลองข้อมูลที่เหมาะสมจะส่งผลต่อประสิทธิภาพและความถูกต้องของการวิเคราะห์

การใช้งาน GIS ในปัจจุบันมีแนวโน้มการใช้ข้อมูลหลายประเภทร่วมกัน (Data Integration) มากขึ้น ตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์ความเสี่ยงจากน้ำท่วมอาจต้องใช้ข้อมูลภูมิประเทศ (DEM) ข้อมูลการใช้ที่ดิน ข้อมูลฝน และข้อมูลแหล่งน้ำ การรวมข้อมูลจากหลายแหล่งที่มีความละเอียดและความแม่นยำที่แตกต่างกันต้องใช้เทคนิคการประมวลผลที่เหมาะสม เช่น การ resampling สำหรับข้อมูลราสเตอร์ หรือการ conflation สำหรับข้อมูลเวกเตอร์

3.8.1 การวิเคราะห์การซ้อนทับแผนที่ (Map Overlay Analysis)

การวิเคราะห์การซ้อนทับแผนที่เป็นเทคนิคพื้นฐานที่สำคัญใน GIS ซึ่งรวมข้อมูลจากหลายชั้นข้อมูล (Layers) เพื่อสร้างข้อมูลใหม่ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ระหว่างปรากฏการณ์ต่างๆ การซ้อนทับแผนที่สามารถทำได้ทั้งกับข้อมูลเวกเตอร์และข้อมูลราสเตอร์ สำหรับข้อมูลเวกเตอร์ การซ้อนทับจะสร้างรูปหลายเหลี่ยมใหม่ที่เป็นผลจากการ intersect หรือ union ระหว่างรูปหลายเหลี่ยมจากชั้นข้อมูลต่างๆ สำหรับข้อมูลราสเตอร์ การซ้อนทับจะรวมค่าของ Cells ที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันจากชั้นข้อมูลต่างๆ

ตัวอย่างการใช้การวิเคราะห์การซ้อนทับแผนที่ ได้แก่ การหาพื้นที่ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างโรงเรียนใหม่ โดยพิจารณาจากระยะทางถนน ความหนาแน่นประชากร และราคาที่ดิน หรือการหาพื้นที่ที่มีความเสี่ยงจากน้ำท่วมโดยพิจารณาจากระดับความสูง ระยะทางจากแม่น้ำ และการใช้ที่ดิน การซ้อนทับแผนที่ต้องใช้ข้อมูลที่มีระบบพิกัดอ้างอิงเดียวกัน และต้องมีความแม่นยำเชิงตำแหน่งที่เข้ากันได้ ไม่เช่นนั้นผลลัพธ์จากการซ้อนทับอาจไม่ถูกต้อง

การซ้อนทับแผนที่กับข้อมูลราสเตอร์มักทำได้ง่ายและเร็วกว่าการซ้อนทับกับข้อมูลเวกเตอร์ เนื่องจากข้อมูลราสเตอร์มีโครงสร้างเป็นตารางที่สม่ำเสมอ การคำนวณระหว่าง Cells สามารถทำได้โดยการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หรือตรรกะ ในทางกลับกัน การซ้อนทับแผนที่กับข้อมูลเวกเตอร์มักให้ผลลัพธ์ที่มีรายละเอียดเชิงตำแหน่งสูงกว่า แต่ใช้เวลาคำนวณมากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อข้อมูลมีจำนวนรูปหลายเหลี่ยมมาก

ตัวอย่าง 3.27 การหาพื้นที่เสี่ยงภัยน้ำท่วมในจังหวัดอยุธยาเป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์การซ้อนทับแผนที่ในการวิเคราะห์ จะใช้ข้อมูลราสเตอร์หลายชั้นประกอบด้วย ชั้นข้อมูลระดับความสูงจาก DEM ที่มีความละเอียด 30 เมตร ชั้นข้อมูลระยะทางจากแม่น้ำ ชั้นข้อมูลปริมาณฝน และชั้นข้อมูลการใช้ที่ดิน ในการรวมข้อมูล ระบบจะคำนวณค่าความเสี่ยงสำหรับแต่ละ Cell โดยพิจารณาจากระดับความสูงที่ต่ำ ระยะทางจากแม่น้ำที่ใกล้ ปริมาณฝนที่มาก และการใช้ที่ดินที่เป็นพื้นที่เกษตรกรรมหรืออยู่อาศัย ผลลัพธ์จะเป็นแผนที่ราสเตอร์ที่แสดงระดับความเสี่ยงจากน้ำท่วมในแต่ละพื้นที่

ตัวอย่าง 3.28 การหาพื้นที่ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างสถานีชาร์จรถยนต์ไฟฟ้าในกรุงเทพมหานครเป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง โดยพิจารณาจากหลายปัจจัย ได้แก่ ความหนาแน่นของประชากร ระยะทางจากถนนสายหลัก ระยะทางจากสถานีไฟฟ้าที่มีอยู่ และราคาที่ดิน การวิเคราะห์จะซ้อนทับข้อมูลเวกเตอร์ของถนน ข้อมูลประชากร และข้อมูลราสเตอร์ของราคาที่ดิน เพื่อหาตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุด

สรุป

ในบทนี้ ได้กล่าวถึงแบบจำลองข้อมูลและแหล่งที่มาของข้อมูลซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการทำงานกับระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ แบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์ใช้จุด เส้น และรูปหลายเหลี่ยมในการแสดงข้อมูลทางภูมิศาสตร์ เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีขอบเขตชัดเจน เช่น ถนน แปลงที่ดิน และอาคาร แบบจำลองข้อมูลราสเตอร์ใช้ตาราง Grid ของ Cells ในการแสดงข้อมูล เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง เช่น ความสูง อุณหภูมิ และการสะท้อนของพื้นผิว การแปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบเวกเตอร์และราสเตอร์เป็นกระบวนการที่สำคัญในการใช้งาน GIS แต่ละการแปลงอาจทำให้สูญเสียรายละเอียดบางส่วน

แหล่งที่มาของข้อมูลเชิงพื้นที่มีหลากหลาย ได้แก่ การสำรวจด้วย GPS ที่ให้ความแม่นยำสูงในการระบุตำแหน่ง การสำรวจระยะไกลที่ให้ข้อมูลครอบคลุมพื้นที่กว้างจากดาวเทียมหรือเครื่องบิน การแปลงจากแผนที่กระดาษที่ช่วยในการนำข้อมูลที่มีอยู่แล้วเข้าสู่ระบบดิจิทัล และการสำรวจด้วยเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์อื่นๆ ที่ให้ข้อมูลเฉพาะทาง คุณภาพข้อมูลเป็นปัจจัยสำคัญที่สุดในการกำหนดความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ GIS ผู้ใช้งานต้องเข้าใจมิติต่างๆ ของคุณภาพข้อมูล ได้แก่ ความแม่นยำเชิงตำแหน่ง ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะ ความสมบูรณ์ ความสอดคล้องเชิงตรรกะ และความถูกต้องของแหล่งที่มา เพื่อให้สามารถเลือกใช้ข้อมูลที่เหมาะสมกับวัตถุประสงค์ของการใช้งานและประเมินความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้รับ

ความเข้าใจในแบบจำลองข้อมูลและแหล่งที่มาของข้อมูลเป็นรากฐานที่สำคัญสำหรับการใช้งาน GIS อย่างมีประสิทธิภาพ การเลือกใช้แบบจำลองข้อมูลที่เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลและวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์จะช่วยให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและเชื่อถือได้ ในขณะเดียวกัน การเลือกวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมกับความต้องการและทรัพยากรที่มีจะช่วยให้ได้ข้อมูลที่มีคุณภาพในราคาที่เหมาะสม ทั้งนี้คุณภาพของข้อมูล GIS ไม่ได้มาจากความซับซ้อนของเทคโนโลยี แต่มาจากการวางแผนที่ดี การเลือกวิธีการที่เหมาะสม และการควบคุมคุณภาพอย่างเข้มงวดตลอดกระบวนการ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างแบบจำลองข้อมูลเวกเตอร์และราสเตอร์ในด้านโครงสร้างข้อมูล ข้อดี ข้อจำกัด และการประยุกต์ใช้งานที่เหมาะสม พร้อมยกตัวอย่างประเภทข้อมูลที่เหมาะสมสำหรับแต่ละแบบจำลอง

2. กำหนดข้อมูลเวกเตอร์ชั้นข้อมูลแปลงที่ดินในเขตหนึ่ง จงอธิบายขั้นตอนในการแปลงข้อมูลนี้เป็นข้อมูลราสเตอร์ที่มีความละเอียด 10 เมตร โดยอธิบายปัจจัยใดบ้างที่มีผลต่อคุณภาพของการแปลง และ

จะส่งผลต่อผลลัพธ์อย่างไร

3. พิจารณาข้อมูลดาวเทียมที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่ 30 เมตร จงอธิบายว่าความละเอียดนี้หมายความว่าอย่างไร และเมื่อใดที่ความละเอียดนี้อาจไม่เพียงพอสำหรับงานวิเคราะห์บางประเภท พร้อมเสนอแนวทางในการแก้ปัญหา

4. จงอธิบายวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงพื้นที่สี่วิธีที่กล่าวในบท ได้แก่ GPS, Remote Sensing, Digitizing และเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์อื่นๆ โดยเปรียบเทียบข้อดี ข้อจำกัด และความเหมาะสมในการใช้งานของแต่ละวิธี

5. กำหนดข้อมูลชั้นข้อมูลการใช้ที่ดินที่ได้จากการ Digitizing แผนที่กระดาษมาตราส่วน 1:50,000 จงอธิบายว่าจะประเมินความแม่นยำเชิงตำแหน่งและความแม่นยำเชิงคุณลักษณะของข้อมูลนี้อย่างไร และปัจจัยใดบ้างที่อาจส่งผลต่อคุณภาพของข้อมูล

6. จงอธิบายกระบวนการ Vectorization ในการแปลงข้อมูลราสเตอร์เป็นเวกเตอร์ พร้อมยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานที่ต้องใช้ข้อมูลที่ผ่านการ Vectorization และอธิบายข้อผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นในกระบวนการนี้

7. พิจารณาโครงการสร้างแผนที่ความเสี่ยงภัยพิบัติในจังหวัดชายแดน จงออกแบบการเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมโดยพิจารณาจากประเภทของภัยพิบัติที่อาจเกิดขึ้น ความต้องการความแม่นยำและงบประมาณที่จำกัด พร้อมเสนอแหล่งข้อมูลที่ควรใช้และเหตุผลประกอบ

8. จงอธิบายความหมายของคุณภาพข้อมูล GIS ในมิติต่างๆ ได้แก่ ความแม่นยำเชิงตำแหน่ง ความแม่นยำเชิงคุณลักษณะ ความสมบูรณ์ ความสอดคล้องเชิงตรรกะ และความถูกต้องของแหล่งที่มา พร้อมอธิบายว่าแต่ละมิติมีความสำคัญอย่างไรต่อการใช้งาน GIS

บรรณานุกรม

แผนการสอนประจำบทที่ 4

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 4

ชื่อบท ระบบเลขฐาน (Number Bases)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. แปลงตัวเลขระหว่างระบบเลขฐาน 2, 8, 10 และ 16 ได้อย่างถูกต้อง
2. ทำการบวก ลบ คูณ หาร ตัวเลขในระบบเลขฐาน 2 ได้
3. อธิบายการแทนค่าจำนวนลบในระบบดิจิทัล (Two’s Complement) ได้
4. อธิบายระบบเลขทศนิยมทวิ (Floating Point) เบื้องต้นได้
5. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องระบบเลขฐานในการทำงานกับข้อมูลคอมพิวเตอร์ได้

หัวข้อที่สอน

1. ระบบเลขฐาน 10, 2, 8, 16
2. การแปลงฐาน (Base Conversion)
3. เลขคณิตฐานสอง (Binary Arithmetic)
4. การแทนค่าจำนวนลบ: Two’s Complement
5. จำนวนทศนิยมทวิ (Floating Point Basics)

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ตัวอย่างการคำนวณเลขฐาน
- แบบฝึกหัดท้ายบท

การจัดการฐานข้อมูลเชิงพื้นที่ (Geodatabase Management)

4.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถดำเนินการต่างๆ ได้อย่างครบถ้วน ได้แก่ การอธิบายโครงสร้างข้อมูลในฐานข้อมูลเชิงพื้นที่ การออกแบบและจัดการความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยี การจัดการตารางข้อมูลคุณลักษณะ การเขียน SQL Query เชิงพื้นที่และเชิงตาราง และการออกแบบ Geodatabase ที่มีประสิทธิภาพ

4.2 บทนำ

ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (GIS) ใช้ฐานข้อมูลเชิงพื้นที่เป็นแกนกลางในการจัดเก็บและจัดการข้อมูล ฐานข้อมูลเชิงพื้นที่แตกต่างจากฐานข้อมูลทั่วไปตรงที่ต้องเก็บข้อมูลที่มีความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งและรูปร่างด้วย การเข้าใจโครงสร้างและการจัดการฐานข้อมูลเชิงพื้นที่จึงเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับผู้ใช้และพัฒนาระบบ GIS

ในอดีต ข้อมูล GIS ถูกจัดเก็บในรูปแบบไฟล์แยกกัน เช่น Shapefile, Coverage และ DWG ซึ่งทำให้การจัดการข้อมูลขนาดใหญ่ทำได้ยากและเกิดความซ้ำซ้อนของข้อมูล ปัจจุบัน Geodatabase กลายเป็นมาตรฐานใหม่ในการจัดเก็บข้อมูล GIS เพราะสามารถรวมข้อมูลเชิงพื้นที่และข้อมูลคุณลักษณะไว้ในระบบฐานข้อมูลเดียว รองรับความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยี และสามารถใช้งานร่วมกับระบบจัดการฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์ (RDBMS) มาตรฐานได้

4.3 โครงสร้างข้อมูลในฐานข้อมูล (Database Structure)

ฐานข้อมูลเชิงพื้นที่ประกอบด้วยองค์ประกอบหลายระดับที่ต้องเข้าใจอย่างชัดเจน การเลือกโครงสร้างข้อมูลที่เหมาะสมจะส่งผลต่อประสิทธิภาพในการจัดเก็บ การค้นหา และการวิเคราะห์ข้อมูล

4.3.1 ประเภทของ Geodatabase

Geodatabase มีหลายประเภทที่เหมาะกับการใช้งานแตกต่างกัน การเลือกประเภทที่ถูกต้องขึ้นอยู่กับขนาดข้อมูล จำนวนผู้ใช้ และงบประมาณในการพัฒนาระบบ

ตัวอย่าง 4.1 Geodatabase สามารถแบ่งตามรูปแบบการจัดเก็บได้ดังนี้

ประเภทที่หนึ่งคือ Personal Geodatabase ซึ่งจัดเก็บในรูปแบบ Microsoft Access Database

(.mdb) รองรับข้อมูลได้สูงสุดประมาณ 2 GB ต่อฐานข้อมูล เหมาะสำหรับงานขนาดเล็กหรือกลุ่มผู้ใช้จำนวนน้อย

ประเภทที่สองคือ File Geodatabase ซึ่งจัดเก็บเป็นโฟลเดอร์ที่มีไฟล์หลายไฟล์ภายใน รองรับข้อมูลได้สูงสุดประมาณ 1 TB ต่อฐานข้อมูล เหมาะสำหรับงานขนาดกลางและสามารถใช้งานร่วมกันได้โดยการคัดลอกไฟล์

ประเภทที่สามคือ Enterprise Geodatabase (ArcSDE) ซึ่งจัดเก็บในระบบ RDBMS เช่น PostgreSQL, Oracle, SQL Server หรือ IBM DB2 รองรับข้อมูลขนาดใหญ่มากและผู้ใช้หลายคนพร้อมกัน เหมาะสำหรับองค์กรขนาดใหญ่ที่ต้องการความปลอดภัยและความคงทนของข้อมูลสูง

4.3.2 โครงสร้างระดับชั้นข้อมูล (Layer Structure)

ใน Geodatabase ข้อมูลเชิงพื้นที่ถูกจัดระเบียบเป็นชั้น (Feature Class) และชุดข้อมูล (Feature Dataset) การจัดโครงสร้างที่ดีจะช่วยให้การค้นหาและจัดการข้อมูลทำได้สะดวก

ชั้นข้อมูลคือ□□ของออบเจ็กต์เชิงพื้นที่ที่มีรูปร่างเดียวกัน (Geometry Type) กล่าวคือ ทุกออบเจ็กต์ในชั้นเดียวกันต้องเป็นจุด ขอบเขตเส้น หรือรูปร่างปิด ตัวอย่างเช่น ชั้นข้อมูลตำแหน่งโรงพยาบาลเป็นชั้นจุด ชั้นข้อมูลเส้นถนนเป็นชั้นเส้น และชั้นข้อมูลขอบเขตที่ดินเป็นชั้นรูปร่างปิด

ชุดข้อมูลคือกลุ่มของชั้นข้อมูลที่มีระบบพิกัดเดียวกันและมีความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยีร่วมกัน การจัดชั้นข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกันไว้ในชุดข้อมูลเดียวกันจะช่วยให้การกำหนด Topology Rules และการตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูลทำได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ต้องจัดทำฐานข้อมูล GIS สำหรับเขตกรุงเทพมหานคร ข้อมูลที่ต้องจัดเก็บประกอบด้วย ตำแหน่งอาคารสถานศึกษา ขอบเขตเขตการปกครอง เส้นถนนสายหลัก และขอบเขตพื้นที่อุทยาน

วิธีจัดโครงสร้าง ให้สร้าง Feature Dataset ชื่อ ”Bangkok_Admin” สำหรับข้อมูลปกครอง ซึ่งจะรวมชั้นข้อมูลขอบเขตเขตการปกครองไว้ภายใน สร้าง Feature Dataset ชื่อ ”Bangkok_Transport” สำหรับข้อมูลคมนาคม ซึ่งจะรวมชั้นข้อมูลเส้นถนนสายหลักไว้ภายใน และสร้าง Feature Dataset ชื่อ ”Bangkok_Facility” สำหรับข้อมูลสถานศึกษาและพื้นที่สีเขียว การจัดแบบนี้จะทำให้โครงสร้างฐานข้อมูลมีความเป็นระเบียบและง่ายต่อการจัดการ

4.4 ความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยี (Topology)

Topology คือการกำหนดกฎเกณฑ์ที่ควบคุมความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ระหว่างออบเจ็กต์ในฐานข้อมูล การกำหนด Topology ที่ถูกต้องจะช่วยรักษาความสมบูรณ์ของข้อมูลและป้องกันข้อผิดพลาดในการจัดเก็บ

ข้อมูล

ความสำคัญของ Topology อยู่ที่การตรวจสอบว่าข้อมูลเชิงพื้นที่มีความสอดคล้องกันตามกฎที่กำหนด ตัวอย่างเช่น ขอบเขตเขตการปกครองสองเขตติดกันต้องไม่ทับซ้อนกัน และเส้นถนนต้องต่อกันที่ทางแยกอย่างถูกต้อง

4.4.1 กฎ Topology พื้นฐาน

กฎ Topology มีหลายประเภทที่ใช้กับข้อมูลชนิดต่างๆ การเลือกกฎที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลและความต้องการในการตรวจสอบความถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.3 กฎ Topology พื้นฐานสำหรับข้อมูลรูปร่างปิด (Polygon) มีดังนี้

กฎ ”Must Not Overlap” กำหนดให้รูปร่างปิดสองรูปติดกันต้องไม่ทับซ้อนกัน กฎนี้ใช้กับข้อมูลขอบเขตเขตการปกครองหรือแปลงที่ดิน

กฎ ”Must Not Have Gaps” กำหนดให้รูปร่างปิดทั้งหมดต้องปิดติดกันโดยไม่มีช่องว่างระหว่างกัน กฎนี้ใช้กับข้อมูลพื้นที่ที่ครอบคลุมทั้งพื้นที่โดยไม่มีส่วนที่ไม่เป็นข้อมูล

กฎ ”Must Be Covered By Feature Class Of” กำหนดให้รูปร่างปิดทุกรูปในชั้นหนึ่งต้องอยู่ภายในรูปร่างปิดในอีกชั้นหนึ่ง กฎนี้ใช้เมื่อต้องการตรวจสอบว่าแปลงที่ดินทุกแปลงอยู่ในเขตการปกครองที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.4 กฎ Topology พื้นฐานสำหรับข้อมูลเส้น (Polyline) มีดังนี้

กฎ ”Must Not Overlap” สำหรับเส้นกำหนดให้เส้นสองเส้นต้องไม่ทับซ้อนกัน กฎนี้ใช้กับข้อมูลเส้นถนนที่ซ้ำกัน

กฎ ”Must Not Have Dangles” กำหนดให้เส้นทุกเส้นต้องต่อกับเส้นอื่นที่ปลายทั้งสองข้าง กฎนี้ใช้กับข้อมูลเส้นถนนที่ทางแยกต้องต่อกันอย่างถูกต้อง

กฎ ”Must Be Covered By Feature Class Of” กำหนดให้เส้นทุกเส้นต้องอยู่บนเส้นอื่น กฎนี้ใช้เมื่อต้องการตรวจสอบว่าเส้นท่อรดน้ำต้องอยู่บนแนวถนนเสมอ

4.4.2 การตรวจสอบและแก้ไขข้อผิดพลาด Topology

เมื่อกำหนดกฎ Topology แล้ว ระบบจะสามารถตรวจพบข้อผิดพลาดที่เบี่ยงเบนจากกฎ การแก้ไขข้อผิดพลาดเหล่านี้ต้องทำอย่างเป็นระบบเพื่อรักษาคุณภาพของข้อมูล

ข้อผิดพลาด Topology สามารถแบ่งออกเป็นสามประเภทหลัก ประเภทแรกคือความซ้ำซ้อน (Overlap) ซึ่งเกิดเมื่อออบเจ็กต์สองชิ้นใช้พื้นที่เดียวกัน ประเภทที่สองคือช่องว่าง (Gap) ซึ่งเกิดเมื่อพื้นที่

ที่ควรจะปิดติดกันมีช่องว่างคั่น และประเภทที่สามคือการไม่ต่อกัน (Disconnection) ซึ่งเกิดเมื่อเส้นหรือขอบเขตไม่ต่อกันที่จุดที่ควรจะต้องต่อกัน

ตัวอย่าง 4.5 พิจารณาฐานข้อมูลขอบเขตเขตการปกครองที่มี 50 เขต หลังจากตรวจสอบ Topology พบว่ามีข้อผิดพลาด 3 ประเภทดังนี้

ข้อผิดพลาดประเภทแรกพบว่ามีพื้นที่ทับซ้อนกัน 2 แห่ง ระหว่างเขต A และเขต B ซ้อนกันบนพื้นที่ประมาณ 0.5 ตารางกิโลเมตร และเขต C และเขต D ซ้อนกันบนพื้นที่ประมาณ 0.3 ตารางกิโลเมตร วิธีแก้ไขคือต้องตรวจสอบว่าพื้นที่ทับซ้อนควรเป็นของเขตใด แล้วแก้ไขขอบเขตของเขตที่ผิดให้ถูกต้อง

ข้อผิดพลาดประเภทที่สองพบว่ามีช่องว่างระหว่างเขต E และเขต F ซึ่งเป็นพื้นที่ว่างประมาณ 0.2 ตารางกิโลเมตรที่ไม่อยู่ในเขตใดเลย วิธีแก้ไขคือต้องตรวจสอบว่าพื้นที่ว่างนี้ควรจะอยู่ในเขตใด แล้วขยายขอบเขตของเขตนั้นให้ครอบคลุม

ข้อผิดพลาดประเภทที่สามพบว่ามีจุดยอด (Vertex) ของเขต G ที่ไม่ตรงกับจุดยอดของเขต H ที่ติดกัน ทำให้เกิดรอยต่อไม่เรียบ วิธีแก้ไขคือใช้เครื่องมือ Snap เพื่อดึงจุดยอดให้ตรงกัน

4.5 การจัดการตารางข้อมูลคุณลักษณะ (Attribute Data Management)

ข้อมูลคุณลักษณะ (Attribute) คือข้อมูลที่อธิบายคุณสมบัติของออบเจ็กต์เชิงพื้นที่ ตัวอย่างเช่น อาคารอาจมีข้อมูลคุณลักษณะเป็นชื่ออาคาร จำนวนชั้น และปีที่สร้าง การจัดการข้อมูลคุณลักษณะอย่างมีประสิทธิภาพจะช่วยให้การค้นหาและวิเคราะห์ข้อมูลทำได้รวดเร็ว

ตารางข้อมูลคุณลักษณะใน Geodatabase จัดเก็บในรูปแบบเดียวกับตารางในฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์ โดยแต่ละแถวแทนออบเจ็กต์หนึ่งชิ้น และแต่ละคอลัมน์แทนคุณลักษณะหนึ่งประเภท การเชื่อมโยงระหว่างตารางทำได้โดยใช้คีย์หลัก (Primary Key) และคีย์นอก (Foreign Key)

4.5.1 ประเภทของข้อมูลในตาราง

การเลือกประเภทข้อมูล (Data Type) ที่เหมาะสมสำหรับแต่ละคอลัมน์จะช่วยประหยัดเนื้อที่ในการจัดเก็บและเพิ่มความเร็วในการค้นหา

ตัวอย่าง 4.6 ประเภทข้อมูลที่ใช้บ่อยในตารางข้อมูลคุณลักษณะของ Geodatabase มีดังนี้

สำหรับข้อมูลตัวเลข ประเภท Short Integer ใช้จำนวนเต็มในช่วง -32,768 ถึง 32,767 เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีค่าไม่มากนัก เช่น จำนวนชั้นของอาคาร ประเภท Long Integer ใช้จำนวนเต็มในช่วง -2,147,483,648 ถึง 2,147,483,647 เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีค่ามาก เช่น รหัสประจำบ้าน ประเภท Float ใช้จำนวนทศนิยมแบบ Single Precision เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีทศนิยมไม่เกิน 6-7 ตำแหน่ง เช่น พิกัด X

ประเภท Double ใช้จำนวนทศนิยมแบบ Double Precision เหมาะสำหรับข้อมูลที่ต้องการความละเอียดสูง เช่น พิกัดที่ต้องการความแม่นยำ 6+ ตำแหน่ง

สำหรับข้อมูลข้อความ ประเภท Text ใช้เก็บข้อความสั้นถึงยาวปานกลาง เช่น ชื่อถนน ที่อยู่ ประเภท Date ใช้เก็บข้อมูลวันที่และเวลา เช่น วันที่สร้างอาคาร

สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่ ประเภท Geometry ใช้เก็บรูปร่างเชิงพื้นที่ของออบเจ็กต์ เช่น จุด เส้น รูปร่างปิด ประเภท Blob (Binary Large Object) ใช้เก็บข้อมูลขนาดใหญ่ เช่น รูปถ่ายของอาคาร หรือไฟล์เอกสารที่เกี่ยวข้อง

4.5.2 การสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตาราง

ความสัมพันธ์ (Relationship) ระหว่างตารางช่วยให้สามารถจัดการข้อมูลที่ซ้ำซ้อนกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ แทนที่จะเก็บข้อมูลที่ซ้ำกันในหลายตาราง ความสัมพันธ์จะช่วยให้แต่ละข้อมูลถูกเก็บเพียงที่เดียวและอ้างอิงได้จากที่อื่น

ตัวอย่าง 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างตารางสามารถแบ่งได้เป็นสามประเภทหลัก

ความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One) หมายความว่าออบเจ็กต์หนึ่งชิ้นในตารางหนึ่งสัมพันธ์กับออบเจ็กต์หนึ่งชิ้นในอีกตารางหนึ่ง ตัวอย่างเช่น อาคารหนึ่งหลังมีทะเบียนบ้านหนึ่งเล่ม

ความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อกลุ่ม (One-to-Many) หมายความว่าออบเจ็กต์หนึ่งชิ้นในตารางหนึ่งสัมพันธ์กับออบเจ็กต์หลายชิ้นในอีกตารางหนึ่ง ตัวอย่างเช่น เขตการปกครองหนึ่งเขตมีโรงพยาบาลหลายแห่ง ในกรณีนี้ตารางเขตการปกครองจะเป็นตารางหลัก (One) และตารางโรงพยาบาลจะเป็นตารางลูก (Many)

ความสัมพันธ์แบบกลุ่มต่อกลุ่ม (Many-to-Many) หมายความว่าออบเจ็กต์หลายชิ้นในตารางหนึ่งสัมพันธ์กับออบเจ็กต์หลายชิ้นในอีกตารางหนึ่ง ตัวอย่างเช่น นักเรียนหลายคนลงทะเบียนเรียนวิชาหลายวิชา ในกรณีนี้ต้องสร้างตารางกลาง (Junction Table) เพื่อเก็บความสัมพันธ์

ตัวอย่าง 4.8 กำหนดให้ต้องออกแบบฐานข้อมูลสำหรับระบบจัดการทรัพย์สินในเขตกรุงเทพมหานคร โดยมีอาคารเป็นออบเจ็กต์เชิงพื้นที่ และต้องเก็บข้อมูลเจ้าของทรัพย์สิน

วิธีออกแบบ ขั้นแรกสร้าง Feature Class ชื่อ ”Building” สำหรับอาคาร ซึ่งจะมีคอลัมน์ Shape (Geometry), Building_ID (Long Integer) เป็น Primary Key, และ Address (Text)

ขั้นที่สองสร้างตารางชื่อ ”Owner” สำหรับข้อมูลเจ้าของทรัพย์สิน ซึ่งจะมีคอลัมน์ Owner_ID (Long Integer) เป็น Primary Key, Name (Text), และ Contact (Text)

ขั้นที่สามสร้างความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อกลุ่มระหว่าง Building และ Owner โดยมีคอลัมน์

Owner_ID ในตาราง Building เป็น Foreign Key ที่อ้างอิงไปยัง Owner_ID ในตาราง Owner การออกแบบนี้ทำให้เจ้าของทรัพย์สินหนึ่งคนสามารถเป็นเจ้าของอาคารหลายหลังได้ แต่อาคารหนึ่งหลังมีเจ้าของได้เพียงหนึ่งคน

4.6 การทำ Queries เชิงพื้นที่และเชิงตาราง (Spatial and Attribute Queries)

การค้นหาข้อมูล (Query) เป็นการดำเนินการพื้นฐานที่สำคัญในการใช้งานฐานข้อมูล GIS การเขียน Query ที่มีประสิทธิภาพจะช่วยให้ได้ข้อมูลที่ต้องการอย่างรวดเร็วและแม่นยำ

การ Query แบ่งออกเป็นสองประเภทหลัก คือการ Query เชิงตาราง (Attribute Query) ซึ่งค้นหาข้อมูลโดยใช้เงื่อนไขบนข้อมูลคุณลักษณะ และการ Query เชิงพื้นที่ (Spatial Query) ซึ่งค้นหาข้อมูลโดยใช้เงื่อนไขเชิงตำแหน่งหรือความสัมพันธ์เชิงพื้นที่

4.6.1 การ Query เชิงตารางด้วย SQL

SQL (Structured Query Language) เป็นภาษามาตรฐานสำหรับการจัดการฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์ การใช้ SQL ใน Geodatabase จะช่วยให้สามารถค้นหาและจัดการข้อมูลคุณลักษณะได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตัวอย่าง 4.9 คำสั่ง SQL พื้นฐานสำหรับการ Query ข้อมูลมีดังนี้

คำสั่ง SELECT ใช้สำหรับเลือกคอลัมน์ที่ต้องการแสดงผล ตัวอย่างเช่น SELECT Name, Address FROM Building จะแสดงเฉพาะคอลัมน์ชื่ออาคารและที่อยู่

คำสั่ง WHERE ใช้สำหรับกำหนดเงื่อนไขในการกรองข้อมูล ตัวอย่างเช่น SELECT * FROM Building WHERE NumFloors > 10 จะแสดงเฉพาะอาคารที่มีมากกว่า 10 ชั้น

การใช้ตัวดำเนินการเปรียบเทียบ ได้แก่ = (เท่ากับ), <> หรือ != (ไม่เท่ากับ), > (มากกว่า), < (น้อยกว่า), >= (มากกว่าหรือเท่ากับ), <= (น้อยกว่าหรือเท่ากับ) ลำดับการคำนวณคือ parentheses, NOT, AND, OR ตามลำดับ

ตัวอย่าง 4.10 กำหนดตาราง Building ที่มีข้อมูลดังนี้

ตารางที่ 14 ตัวอย่างข้อมูลในตาราง Building

Building_ID	Name	NumFloors	BuildingType	Owner_ID
1	อาคาร ก	15	สำนักงาน	101
2	อาคาร ข	8	ที่อยู่อาศัย	102
3	อาคาร ค	20	สำนักงาน	101
4	อาคาร ง	5	ที่อยู่อาศัย	103
5	อาคาร จ	12	สำนักงาน	102

จงเขียน SQL Query สำหรับคำถามต่อไปนี้

สำหรับคำถามที่หนึ่ง ”หาอาคารที่มีมากกว่า 10 ชั้น” คำตอบคือ SELECT * FROM Building WHERE NumFloors > 10 ผลลัพธ์คืออาคาร ก และอาคาร ค

สำหรับคำถามที่สอง ”หาอาคารประเภทสำนักงานที่มีมากกว่า 10 ชั้น” คำตอบคือ SELECT * FROM Building WHERE BuildingType = ’สำนักงาน’ AND NumFloors > 10 ผลลัพธ์คืออาคาร ก และอาคาร ค

สำหรับคำถามที่สาม ”นับจำนวนอาคารแต่ละประเภท” คำตอบคือ SELECT BuildingType, COUNT(*) as Count FROM Building GROUP BY BuildingType ผลลัพธ์คือสำนักงาน 3 หลัง และที่อยู่อาศัย 2 หลัง

สำหรับคำถามที่สี่ ”หาชื่อเจ้าของของอาคารที่มีมากกว่า 8 ชั้น” คำตอบคือ SELECT DISTINCT Owner.Name FROM Building JOIN Owner ON Building.Owner_ID = Owner.Owner_ID WHERE Building.NumFloors > 8 ผลลัพธ์คือรายชื่อเจ้าของที่เป็นเจ้าของอาคารสูง

4.6.2 การ Query เชิงพื้นที่

การ Query เชิงพื้นที่ใช้ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งระหว่างออบเจ็กต์ในการค้นหาข้อมูล ตัวอย่างเช่น การหาอาคารทั้งหมดที่อยู่ในรัศมี 500 เมตรจากสถานีรถไฟฟ้า

ตัวอย่าง 4.11 ฟังก์ชัน Query เชิงพื้นที่ที่ใช้บ่อยมีดังนี้

ฟังก์ชัน Intersects ตรวจสอบว่าออบเจ็กต์สองชิ้นมีส่วนที่ intersect กันหรือไม่ ตัวอย่างเช่น การหาถนนทั้งหมดที่ตัดผ่านแม่น้ำ

ฟังก์ชัน Within Distance ตรวจสอบว่าออบเจ็กต์อยู่ภายในระยะทางที่กำหนดจากออบเจ็กต์อื่น

ตัวอย่างเช่น การหาสถานีขนส่งสาธารณะทั้งหมดที่อยู่ในรัศมี 1 กิโลเมตรจากสถานีรถไฟฟ้า

ฟังก์ชัน Contains ตรวจสอบว่าออบเจ็กต์หนึ่งบรรจุออบเจ็กต์อื่นไว้อย่างสมบูรณ์หรือไม่ ตัวอย่างเช่น การหาเขตการปกครองที่บรรจุอุทยานแห่งหนึ่งไว้

ฟังก์ชัน Within ตรวจสอบว่าออบเจ็กต์หนึ่งอยู่ภายในออบเจ็กต์อื่นอย่างสมบูรณ์หรือไม่ ตัวอย่างเช่น การหาอาคารทั้งหมดที่อยู่ภายในเขตการปกครองเขตหนึ่ง

ฟังก์ชัน Completely Within ตรวจสอบว่าออบเจ็กต์หนึ่งอยู่ภายในออบเจ็กต์อื่นอย่างสมบูรณ์โดยไม่แตะขอบ ตัวอย่างเช่น การหาพื้นที่สีเขียวทั้งหมดที่อยู่ภายในเขตกรุงเทพมหานครอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง 4.12 กำหนดให้มีชั้นข้อมูลดังนี้

1. ชั้น Railway_Station (จุด) ข้อมูลตำแหน่งสถานีรถไฟฟ้า
2. ชั้น Building (รูปร่างปิด) ข้อมูลอาคารในเขตกรุงเทพมหานคร
3. ชั้น District (รูปร่างปิด) ข้อมูลขอบเขตเขตการปกครอง
4. ชั้น Road (เส้น) ข้อมูลเส้นถนน

จงเขียน Query เชิงพื้นที่สำหรับคำถามต่อไปนี้

สำหรับคำถามที่หนึ่ง ”หาอาคารทั้งหมดที่อยู่ในรัศมี 500 เมตรจากสถานีรถไฟฟ้าสุขุมวิท” ใช้ฟังก์ชัน Within Distance โดยระบุระยะทาง 500 เมตร ผลลัพธ์คืออาคารทั้งหมดที่อยู่ในรัศมีดังกล่าว

สำหรับคำถามที่สอง ”หาสถานีรถไฟฟ้าทั้งหมดที่อยู่ในเขตวัฒนา” ใช้ฟังก์ชัน Within โดยเลือกเขตวัฒนาก่อน แล้วหาสถานีที่อยู่ภายใน ผลลัพธ์คือสถานีรถไฟฟ้าที่อยู่ในเขตวัฒนาทั้งหมด

สำหรับคำถามที่สาม ”หาถนนทั้งหมดที่ตัดผ่านแม่น้ำเจ้าพระยา” ใช้ฟังก์ชัน Intersects โดยเลือกแม่น้ำเจ้าพระยาก่อน แล้วหาถนนที่ intersect กับแม่น้ำ ผลลัพธ์คือถนนที่ข้ามแม่น้ำเจ้าพระยา

สำหรับคำถามที่สี่ ”หาอาคารทั้งหมดที่อยู่ในเขตกรุงเทพมหานคร” ใช้ฟังก์ชัน Completely Within โดยเลือกเขตกรุงเทพมหานครก่อน แล้วหาอาคารที่อยู่ภายในอย่างสมบูรณ์ ผลลัพธ์คืออาคารทั้งหมดที่ไม่ทับขอบเขตกรุงเทพมหานคร

4.7 การออกแบบ Geodatabase

การออกแบบ Geodatabase ที่ดีต้องพิจารณาหลายปัจจัย ได้แก่ ความต้องการในการใช้ข้อมูล ประสิทธิภาพในการจัดเก็บและค้นหา ความง่ายในการบำรุงรักษา และความสามารถในการขยายตัวในอนาคต

การออกแบบที่ไม่ดีจะทำให้เกิดปัญหาหลายอย่าง เช่น ข้อมูลซ้ำซ้อนทำให้เปลืองเนื้อที่และยากต่อการอัปเดต การ Query ทำงานช้าเพราะโครงสร้างไม่เหมาะสม และการเพิ่มข้อมูลใหม่ทำได้ยากเพราะต้องแก้ไขโครงสร้างมาก

4.7.1 หลักการออกแบบ Normalization

Normalization คือกระบวนการจัดระเบียบข้อมูลในตารางเพื่อลดความซ้ำซ้อนและป้องกันความผิดพลาดในการจัดการข้อมูล การ Normalize ที่ดีจะช่วยให้ข้อมูลมีความคงทน (Data Integrity) และง่ายต่อการบำรุงรักษา

ระดับ Normal Form ที่สำคัญมีดังนี้

ตัวอย่าง 4.13 รูปแบบ Normalization แต่ละระดับมีหลักการที่แตกต่างกัน

First Normal Form (1NF) กำหนดให้ทุกตารางต้องมี Primary Key และทุกคอลัมน์ต้องเก็บค่าอะตอมิก (Atomic Value) ได้ กล่าวคือไม่สามารถแบ่งค่าในคอลัมน์เดียวออกเป็นหลายค่าได้อีก ตัวอย่าง เช่น คอลัมน์ที่อยู่ต้องแยกเป็นบ้านเลขที่ ถนน แขวง เขต จังหวัด ไม่ใช่เก็บทั้งหมดในคอลัมน์เดียว

Second Normal Form (2NF) กำหนดให้ตารางต้องอยู่ในรูปแบบ 1NF และทุกคอลัมน์ที่ไม่ใช่ Primary Key ต้องขึ้นกับ Primary Key ทั้งหมด ไม่ใช่ขึ้นกับเพียงบางส่วนของ Primary Key กรณีที่ Primary Key ประกอบด้วยหลายคอลัมน์ ต้องระวังไม่ให้เกิดการพึ่งพาบางส่วน (Partial Dependency)

Third Normal Form (3NF) กำหนดให้ตารางต้องอยู่ในรูปแบบ 2NF และไม่มีคอลัมน์ที่ไม่ใช่ Primary Key ที่ขึ้นกับคอลัมน์ที่ไม่ใช่ Primary Key อื่น กล่าวคือไม่มีการถ่ายทอดการพึ่งพา (Transitive Dependency)

ตัวอย่าง 4.14 พิจารณาตาราง Building ที่มีโครงสร้างดังนี้

ตารางที่ 15 ตาราง Building ที่ยังไม่ Normalize

Building_ID	Name	District	District_Pop	YearBuilt	OwnerName
1	อาคาร ก	วัฒนา	50000	2010	บริษัท ก
2	อาคาร ข	คลองเตย	80000	2015	บริษัท ข
3	อาคาร ค	วัฒนา	50000	2018	บริษัท ค

ปัญหาในตารางนี้คือ ข้อมูลเขตการปกครอง (District_Pop) ซ้ำกันในหลายแถว (แถว 1 และ 3 มี District_Pop = 50000 ซ้ำกัน) และข้อมูลเจ้าของ (OwnerName) อาจซ้ำกันถ้าอาคารหลายหลังมีเจ้าของ

เดียวกัน

วิธี Normalize ขั้นแรกแยกตาราง District ออกมาจาก Building โดยมีคอลัมน์ District_Name และ District_Pop ขั้นที่สองแยกตาราง Owner ออกมาจาก Building โดยมีคอลัมน์ Owner_ID และ OwnerName ขั้นที่สามเพิ่ม Foreign Key ในตาราง Building ที่อ้างอิงไปยัง District และ Owner ผลลัพธ์คือตาราง Building มีเฉพาะ Building_ID, Name, District_Name (Foreign Key), YearBuilt, และ Owner_ID (Foreign Key)

4.7.2 การวางแผนความจุและประสิทธิภาพ

การออกแบบ Geodatabase ต้องพิจารณาปริมาณข้อมูลที่จะเก็บและจำนวนผู้ใช้ที่จะเข้าถึงพร้อมกัน การวางแผนที่ดีจะช่วยให้ระบบทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพตลอดอายุการใช้งาน

ตัวอย่าง 4.15 ปัจจัยที่มีผลต่อประสิทธิภาพของ Geodatabase มีดังนี้

ปัจจัยด้านจำนวนออบเจ็กต์ ยิ่งมีออบเจ็กต์มากเท่าใด พื้นที่จัดเก็บและเวลาในการประมวลผล Query ก็จะมากขึ้นเท่านั้น การสร้าง Index บนคอลัมน์ที่ใช้ในการค้นหาบ่อยจะช่วยเพิ่มความเร็วได้

ปัจจัยด้านความซับซ้อนของรูปร่าง ออบเจ็กต์ที่มีจุดยอด (Vertex) มากจะใช้พื้นที่จัดเก็บมากและประมวลผลช้ากว่าออบเจ็กต์ที่มีจุดยอดน้อย การใช้เทคนิค Simplify เพื่อลดจำนวนจุดยอดโดยไม่สูญเสียความถูกต้องเชิงพื้นที่มากนักจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพได้

ปัจจัยด้านระบบพิกัด ข้อมูลที่มีระบบพิกัดมาตรฐานเดียวกันจะประมวลผลได้เร็วกว่าข้อมูลที่ต้องแปลงระบบพิกัดก่อนการวิเคราะห์ การจัดชั้นข้อมูลที่ใช้ร่วมกันบ่อยให้อยู่ใน Feature Dataset เดียวกันจะช่วยลดการแปลงระบบพิกัด

ตัวอย่าง 4.16 กำหนดให้ต้องออกแบบ Geodatabase สำหรับโครงการจัดทำแผนที่ภูมิประเทศระดับ 1:50,000 ของประเทศไทย โดยคาดว่าจะมีข้อมูลดังนี้

ข้อมูลภูมิประเทศประกอบด้วย เส้นชั้นความสูงประมาณ 500,000 เส้น แต่ละเส้นมีจุดยอดเฉลี่ย 50 จุด ข้อมูลแหล่งน้ำประมาณ 200,000 รูปร่าง ข้อมูลถนนประมาณ 300,000 เส้น ข้อมูลขอบเขตปกครอง 77 รูปร่าง

วิธีออกแบบเพื่อให้ได้ประสิทธิภาพที่ดี ขั้นแรกจัดเก็บข้อมูลเส้นชั้นความสูงใน File Geodatabase เพราะมีข้อมูลมากแต่ไม่ต้องการความสามารถในการใช้งานร่วมกันแบบ Enterprise

ขั้นที่สองสร้าง Index บนคอลัมน์ Elevation สำหรับข้อมูลเส้นชั้นความสูง และ Index บนคอลัมน์ RiverType สำหรับข้อมูลแหล่งน้ำ เพื่อเพิ่มความเร็วในการ Query ตามคุณลักษณะ

ขั้นที่สามใช้การบีบอัดข้อมูล (Compression) สำหรับข้อมูลที่ใช้อ้างอิงเท่านั้นไม่ได้แก้ไขบ่อย เพื่อประหยัดพื้นที่จัดเก็บ

ขั้นที่สี่แยกข้อมูลที่มีการแก้ไขบ่อย (เช่น ข้อมูลถนนใหม่) ออกจากข้อมูลที่คงที่ (เช่น เส้นชั้นความสูง) เพื่อให้การจัดการง่ายขึ้นและลดเวลาในการอัปเดต

ตัวอย่างและแบบฝึกหัดท้ายบท

ตัวอย่าง 4.17 จงออกแบบ Geodatabase สำหรับระบบ GIS ของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง โดยมีข้อมูลดังนี้ที่ต้องจัดเก็บ

1. อาคารเรียน 20 หลัง แต่ละอาคารมีชื่อ จำนวนชั้น และปีที่สร้าง
2. ห้องเรียน 200 ห้อง แต่ละห้องมีเลขห้อง ความจุ (จำนวนที่นั่ง) และอยู่ในอาคารใด
3. ภาควิชา 10 ภาควิชา แต่ละภาควิชามีชื่อและอาคารที่ตั้ง
4. รายวิชา 50 รายวิชา แต่ละรายวิชามีรหัส ชื่อ และภาควิชาที่รับผิดชอบ
5. ตารางเรียน โดยแต่ละวิชาจะมีหลายห้องเรียนในหลายเวลา

วิธีทำ ขั้นแรกวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล โดยพบว่าอาคารกับห้องเรียนมีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อกลุ่ม (หนึ่งอาคารมีหลายห้องเรียน) ภาควิชากับรายวิชามีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อกลุ่ม (หนึ่งภาควิชารับผิดชอบหลายรายวิชา) และรายวิชากับห้องเรียนมีความสัมพันธ์แบบกลุ่มต่อกลุ่ม (หนึ่งวิชามีหลายห้องเรียนในหลายเวลา)

ขั้นที่สองออกแบบโครงสร้างตาราง โดยสร้าง Feature Class ชื่อ ”Building” สำหรับอาคาร ซึ่งมีคอลัมน์ Building_ID (Primary Key), Name, NumFloors, YearBuilt, Shape สร้างตารางชื่อ ”Room” สำหรับห้องเรียน ซึ่งมีคอลัมน์ Room_ID (Primary Key), RoomNumber, Capacity, Building_ID (Foreign Key) สร้างตารางชื่อ ”Department” สำหรับภาควิชา ซึ่งมีคอลัมน์ Dept_ID (Primary Key), Name, Building_ID (Foreign Key) สร้างตารางชื่อ ”Course” สำหรับรายวิชา ซึ่งมีคอลัมน์ Course_ID (Primary Key), CourseCode, CourseName, Dept_ID (Foreign Key) และสร้างตารางชื่อ ”Schedule” เป็นตารางกลาง ซึ่งมีคอลัมน์ Schedule_ID (Primary Key), Course_ID (Foreign Key), Room_ID (Foreign Key), Day, StartTime, EndTime

ขั้นที่สามสร้าง Feature Dataset ชื่อ ”University” สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่ โดยรวม Feature Class ”Building” ไว้ภายใน

ตัวอย่าง 4.18 กำหนดตาราง Building และ Owner ดังนี้

ตารางที่ 16 ตาราง Building

Building_ID	Name	NumFloors	Owner_ID
1	อาคาร A	15	101
2	อาคาร B	8	102
3	อาคาร C	20	101
4	อาคาร D	5	103
5	อาคาร E	12	102

ตารางที่ 17 ตาราง Owner

Owner_ID	Name	Contact
101	บริษัท ก	02-xxx-xxxx
102	บริษัท ข	02-yyy-yyyy
103	บริษัท ค	02-zzz-zzzz

จงเขียน SQL Query ต่อไปนี้

1. หาอาคารทั้งหมดที่มีมากกว่า 10 ชั้น พร้อมชื่อเจ้าของ
2. นับจำนวนอาคารของแต่ละเจ้าของ
3. หาเจ้าของที่มีอาคารมากกว่า 1 หลัง
4. หาอาคารที่มีเจ้าของชื่อ ”บริษัท ก”

วิธีทำสำหรับข้อหนึ่ง ใช้คำสั่ง SELECT Building.Name, Owner.Name FROM Building JOIN Owner ON Building.Owner_ID = Owner.Owner_ID WHERE Building.NumFloors > 10 ผลลัพธ์คือ อาคาร A และอาคาร C ซึ่งมีเจ้าของคือบริษัท ก

วิธีทำสำหรับข้อสอง ใช้คำสั่ง SELECT Owner.Name, COUNT(*) as NumBuildings FROM Building JOIN Owner ON Building.Owner_ID = Owner.Owner_ID GROUP BY Owner.Name ผลลัพธ์คือบริษัท ก 2 หลัง บริษัท ข 2 หลัง บริษัท ค 1 หลัง

วิธีทำสำหรับข้อสาม ใช้คำสั่ง SELECT Owner.Name FROM Building JOIN Owner ON Building.Owner_ID = Owner.Owner_ID GROUP BY Owner.Name HAVING COUNT(*) > 1 ผลลัพธ์

คือบริษัท ก และบริษัท ข

วิธี ทำ สำหรับ ข้อ สี่ ใช้ คำ สั่ง SELECT Building.* FROM Building JOIN Owner ON Building.Owner_ID = Owner.Owner_ID WHERE Owner.Name = 'บริษัท ก' ผลลัพธ์คืออาคาร A และอาคาร C

สรุป

ในบทนี้ เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการฐานข้อมูลเชิงพื้นที่อย่างครอบคลุม โดยเริ่มจากโครงสร้างข้อมูลในฐานข้อมูลซึ่งประกอบด้วยประเภทของ Geodatabase และโครงสร้างระดับชั้นข้อมูล ต่อด้วยความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยีซึ่งเป็นการกำหนดกฎเกณฑ์เพื่อรักษาความสมบูรณ์ของข้อมูลเชิงพื้นที่ จากนั้นเราได้ศึกษาการจัดการตารางข้อมูลคุณลักษณะซึ่งครอบคลุมประเภทข้อมูลและการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตาราง และได้ศึกษาการทำ Query ทั้งเชิงตารางและเชิงพื้นที่ ซึ่งเป็นการดึงข้อมูลที่ต้องการจากฐานข้อมูล สุดท้ายเราได้ศึกษาหลักการออกแบบ Geodatabase ที่ดี ซึ่งรวมถึง Normalization และการวางแผนความจุและประสิทธิภาพ

ความเข้าใจในการจัดการฐานข้อมูลเชิงพื้นที่เป็นรากฐานที่สำคัญสำหรับผู้ที่ต้องการใช้งานและพัฒนาระบบ GIS อย่างมีประสิทธิภาพ การออกแบบฐานข้อมูลที่ดีจะช่วยให้การจัดเก็บ ค้นหา และวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่เป็นไปอย่างราบรื่นและคุ้มค่า

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงอธิบายความแตกต่างระหว่าง Personal Geodatabase, File Geodatabase และ Enterprise Geodatabase พร้อมยกตัวอย่างการใช้งานที่เหมาะสมสำหรับแต่ละประเภท

2. จงกำหนด Topology Rules 3 ข้อที่เหมาะสมสำหรับฐานข้อมูลขอบเขตเขตการปกครองระดับจังหวัด พร้อมอธิบายเหตุผลที่แต่ละกฎมีความสำคัญ

3. กำหนดตาราง Parcel (แปลงที่ดิน) และตาราง Owner (เจ้าของ) จงเขียน SQL Query ต่อไปนี้

   3.1. หาแปลงที่ดินทั้งหมดที่มีเนื้อที่มากกว่า 500 ตารางวา

   3.2. หาเจ้าของที่เป็นเจ้าของที่ดินรวมเกิน 1,000 ตารางวา

   3.3. อัปเดตข้อมูลที่อยู่ของเจ้าของที่มี Owner_ID = 101

4. จงออกแบบ Geodatabase สำหรับระบบ GIS ของโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง โดยต้องเก็บข้อมูลตำแหน่งอาคาร ห้องตรวจโรค ยาและเวชภัณฑ์ และตารางนัดหมายผู้ป่วย จงระบุ Feature Class, ตาราง,

ความสัมพันธ์ และ Primary Key / Foreign Key ของแต่ละตาราง

5. จงอธิบายข้อแตกต่างระหว่าง Spatial Query และ Attribute Query พร้อมยกตัวอย่างการใช้งานจริงของแต่ละประเภท

6. พิจารณาตารางที่ยังไม่ Normalize ดังนี้ จง normalize ให้อยู่ในรูปแบบ 3NF

ตารางที่ 18 ตารางที่ต้อง Normalize

ID	ชื่อสินค้า	ประเภท	ชื่อผู้ผลิต	โทรผู้ผลิต	ราคา
1	สินค้า ก	อาหาร	บริษัท A	02-111-1111	100
2	สินค้า ข	เครื่องดื่ม	บริษัท B	02-222-2222	50
3	สินค้า ค	อาหาร	บริษัท A	02-111-1111	200

7. กำหนดชั้นข้อมูล Hospital (จุด) และชั้นข้อมูล District (รูปร่างปิด) จงเขียน Spatial Query สำหรับคำถามต่อไปนี้

7.1. หาโรงพยาบาลทั้งหมดที่อยู่ในเขตสุขุมวิท

7.2. หาเขตการปกครองที่มีโรงพยาบาลมากกว่า 3 แห่ง

7.3. หาโรงพยาบาลที่อยู่ในรัศมี 2 กิโลเมตรจากโรงพยาบาลหนึ่ง

คำใบ้แนะนำสำหรับแบบฝึกหัด ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 1 พิจารณาจากขนาดข้อมูล จำนวนผู้ใช้ และงบประมาณ* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 2 กฎ Topology ที่เหมาะสมควรป้องกันความซ้ำซ้อนและช่องว่างระหว่างเขต* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 3 ใช้ฟังก์ชัน JOIN และ GROUP BY ร่วมกับ HAVING* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างห้องตรวจโรคกับอาคารคือแบบหนึ่งต่อกลุ่ม และตารางนัดหมายมีความสัมพันธ์กับทั้งผู้ป่วย ห้องตรวจ และแพทย์* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 5 Attribute Query ใช้เงื่อนไขบนข้อมูลคุณลักษณะ (ตัวเลข ข้อความ) ส่วน Spatial Query ใช้เงื่อนไขบนตำแหน่งและรูปร่าง* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 6 แยกตารางผู้ผลิตออกมาจากตารางสินค้า เพราะข้อมูลผู้ผลิตซ้ำกัน* ***คำใบ้:*** *สำหรับข้อ 7 ใช้ฟังก์ชัน Within, Contains และ Within Distance ตามลำดับ*

เอกสารอ้างอิง

แผนการสอนประจำบทที่ 5

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 5

ชื่อบท เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices & Determinants)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบายโครงสร้างและประเภทของเมทริกซ์ได้
2. ทำการบวก ลบ คูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
3. คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 ได้
4. หาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) ได้
5. ประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น และงานด้านกราฟิกคอมพิวเตอร์ได้

หัวข้อที่สอน

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์
2. การดำเนินการบนเมทริกซ์
3. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)
4. เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)
5. การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในคอมพิวเตอร์

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ตัวอย่างการคำนวณ
- แบบฝึกหัดท้ายบท

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices & Determinants)

5.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถ:

1. อธิบายความหมายและความสำคัญของเมทริกซ์ รวมถึงประเภทต่างๆ ของเมทริกซ์ได้
2. ดำเนินการระหว่างเมทริกซ์ (บวก ลบ คูณ สลับเปลี่ยน) และอธิบายความหมายของผลลัพธ์ได้
3. คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ โดยวิธีการต่างๆ ได้
4. หาอินเวอร์สของเมทริกซ์และประยุกต์ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้
5. พิสูจน์และประยุกต์ใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ได้
6. อธิบายการประยุกต์ของเมทริกซ์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ เช่น คอมพิวเตอร์กราฟิกส์ และการเรียนรู้ของเครื่องได้

5.2 บทนำ

เมทริกซ์ (Matrix) เป็นโครงสร้างข้อมูลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จัดระเบียบข้อมูลในรูปแบบตารางสองมิติ เมทริกซ์ประกอบด้วยแถว (rows) และคอลัมน์ (columns) โดยแต่ละช่องเก็บค่าที่เรียกว่า สมาชิก (element) หรือ ค่าประจำตำแหน่ง (entry) ของเมทริกซ์

เมทริกซ์มีความสำคัญอย่างยิ่งในวิทยาการคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ เนื่องจากเป็นพื้นฐานของ คอมพิวเตอร์กราฟิกส์ (การแปลงภาพ 2D และ 3D) การเรียนรู้ของเครื่อง (Neural Networks) การเข้ารหัส (Hill Cipher) และการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

ประวัติศาสตร์ของเมทริกซ์เริ่มต้นในช่วงต้นศตวรรษที่ 19 โดย Arthur Cayley และ William Rowan Hamilton ถึงแม้ว่าแนวคิดเรื่องดีเทอร์มิแนนต์จะมีมาก่อนหน้านี้โดย mathematicians ชาวญี่ปุ่นและยุโรป เช่น Seki Kowa และ Gottfried Leibniz

5.3 นิยามพื้นฐานของเมทริกซ์

5.3.1 นิยามของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 5.1 เมทริกซ์ (Matrix) คือ การจัดเรียงข้อมูลในรูปแบบตารางสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วย m แถว และ n คอลัมน์ เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะมีสมาชิกทั้งหมด $m \cdot n$ ตัว เรียกว่า เมทริกซ์ขนาด $m \times n$

เขียนแทนด้วย $A_{m\times n}$ หรือ $A = [a_{ij}]$ โดยที่ a_{ij} คือสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j

ตัวอย่าง 5.2 เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ มีขนาด 2×3 (2 แถว 3 คอลัมน์)

สมาชิก $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = 6$

ตัวอย่าง 5.3 เมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ มีขนาด 3×2 (3 แถว 2 คอลัมน์)

เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

5.3.2 ประเภทของเมทริกซ์

เมทริกซ์แต่ละประเภทมีคุณสมบัติเฉพาะที่แตกต่างกัน การจำแนกประเภทของเมทริกซ์ช่วยให้เข้าใจพฤติกรรมและการประยุกต์ใช้ในบริบททางคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ได้ชัดเจนขึ้น โดยเมทริกซ์จตุรัสเป็นประเภทที่สำคัญที่สุดเนื่องจากสามารถคำนวณดีเทอร์มิแนนต์และหาอินเวอร์สได้

ตัวอย่าง 5.4 เมทริกซ์มีหลายประเภทที่สำคัญ ได้แก่

1. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) $O_{m\times n}$ คือเมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกเป็น 0

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. เมทริกซ์แถว (Row Matrix) คือเมทริกซ์ที่มีเพียง 1 แถว ($1 \times n$)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. เมทริกซ์คอลัมน์ (Column Matrix) คือเมทริกซ์ที่มีเพียง 1 คอลัมน์ ($m \times 1$)

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. เมทริกซ์จตุรัส (Square Matrix) คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนคอลัมน์ $(n \times n)$ เรียก n ว่าขนาด (order) ของเมทริกซ์

$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ มีขนาด 2×2

5. เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือเมทริกซ์จตุรัสที่สมาชิกนอกเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) I_n คือเมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมด

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือเมทริกซ์จตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

8. เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือเมทริกซ์จตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

9. เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) คือเมทริกซ์จตุรัสที่มีคุณสมบัติ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก i, j

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

10. เมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง (Skew-Symmetric Matrix) คือเมทริกซ์จตุรัสที่มีคุณสมบัติ $a_{ij} = -a_{ji}$ สำหรับทุก i, j และ $a_{ii} = 0$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.5 เมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียงมีความสำคัญในการประยุกต์ เช่น ในทฤษฎีสถิติ เมทริกซ์ความแปรปรวน (covariance matrix) เป็นเมทริกซ์สมมาตร และในฟิสิกส์ เมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียงใช้ในการแสดงปริมาณเวกเตอร์

5.4 การดำเนินการระหว่างเมทริกซ์

5.4.1 ความเท่ากันของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 5.6 เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ มีขนาด $m \times n$ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่าง 5.7 ถ้า $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว $x = 1$ และ $y = 4$

5.4.2 การบวกและการลบเมทริกซ์

ตัวอย่าง 5.8 กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ การบวกเมทริกซ์ $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ และการลบเมทริกซ์ $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$

หมายเหตุ: เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะบวกหรือลบกันได้ก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่าง 5.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.10 สมบัติของการบวกเมทริกซ์] สำหรับเมทริกซ์ A, B, C ขนาด $m \times n$:

1. $A + B = B + A$ (Commutative Law)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Associative Law)
3. $A + O = A$ (Identity Law, O คือเมทริกซ์ศูนย์)
4. $A + (-A) = O$ (Inverse Law)
5. $A - B = A + (-B)$

ตัวอย่าง 5.11 การลบเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ กล่าวคือ $A - B \neq B - A$ โดยทั่วไป

5.4.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ตัวอย่าง 5.12 กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ และสเกลาร์ c (ค่าคงที่จำนวนจริง) การคูณสเกลาร์ cA คือเมทริกซ์ $[c \cdot a_{ij}]$

ตัวอย่าง 5.13

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.14 สมบัติของการคูณสเกลาร์] สำหรับเมทริกซ์ A, B และสเกลาร์ c, d:

1. $c(A + B) = cA + cB$ (Distributive Law)
2. $(c + d)A = cA + dA$ (Distributive Law)
3. $c(dA) = (cd)A$ (Associative Law)
4. $1A = A$ (Identity Law)
5. $0A = O$ (Zero Law)

5.4.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์เป็นการดำเนินการที่ซับซ้อนกว่าการบวกและการคูณสเกลาร์ สมาชิกของเมทริกซ์ผลคูณคำนวณจากผลรวมของผลคูณ

ตัวอย่าง 5.15 กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ และเมทริกซ์ $B = [b_{jk}]$ ขนาด $n \times p$ การคูณ AB จะได้เมทริกซ์ $C = [c_{ik}]$ ขนาด $m \times p$ โดยที่:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

หมายเหตุ การคูณ AB กระทำได้ก็ต่อเมื่อจำนวนคอลัมน์ของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B (เรียกว่า conformable)

ตัวอย่าง 5.16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(5)+(2)(7) & (1)(6)+(2)(8) \\ (3)(5)+(4)(7) & (3)(6)+(4)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.17

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [1(4)+2(5)+3(6)] = [32]$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า $AB \neq BA$ ในกรณีทั่วไป!

ตัวอย่าง 5.18 การคูณเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ กล่าวคือ $AB \neq BA$ โดยทั่วไป นอกจากนี้ $AB = O$ ไม่ได้หมายความว่า $A = O$ หรือ $B = O$

ตัวอย่าง 5.19 สมบัติของการคูณเมทริกซ์] สำหรับเมทริกซ์ A, B, C ที่ขนาดเหมาะสม และสเกลาร์ c:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Associative Law)
2. $A(B+C) = AB + AC$ (Left Distributive Law)
3. $(A+B)C = AC + BC$ (Right Distributive Law)
4. $AI = IA = A$ (Identity Law, I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์)
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ (Scalar Multiplication)

6. $(AB)^T = B^T A^T$ (Transpose of Product)

ตัวอย่าง 5.20 พิสูจน์ $(AB)^T = B^T A^T$

ให้ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, และ $(AB)^T = [c_{ki}]$ โดย $c_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$

แต่ $(AB)^T$ ที่ตำแหน่ง (k, i) คือ $c_{ki} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$

ในขณะที่ $B^T A^T$ ที่ตำแหน่ง (k, i) คือ $\sum_j b^T_{kj} \cdot a^T_{ji} = \sum_j b_{jk} \cdot a_{ij}$

ดังนั้น $(AB)^T = B^T A^T$

5.4.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose)

เมทริกซ์สลับเปลี่ยนเป็นการดำเนินการพื้นฐานที่สำคัญ การสลับเปลี่ยนเมทริกซ์ช่วยในการวิเคราะห์คุณสมบัติต่างๆ ของเมทริกซ์ เช่น การตรวจสอบว่าเมทริกซ์เป็นสมมาตรหรือไม่

ตัวอย่าง 5.21 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose) ของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ คือเมทริกซ์ $A^T = [a_{ji}]$ ขนาด $n \times m$ โดยการสลับแถวเป็นคอลัมน์

ตัวอย่าง 5.22

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.23 สมบัติของ Transpose] สำหรับเมทริกซ์ A, B:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = cA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

ตัวอย่าง 5.24 เมทริกซ์จตุรัส A เป็นสมมาตร (Symmetric) ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$ และเป็นเส้นทแยงมุมเฉียง (Skew-Symmetric) ก็ต่อเมื่อ $A^T = -A$

ตัวอย่าง 5.25 เมทริกซ์สมมาตร: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เพราะ $A^T = A$

เมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ เพราะ $A^T = -A$

ตัวอย่าง 5.26 ทุกเมทริกซ์จตุรัส A สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

โดย $\frac{1}{2}(A + A^T)$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร และ $\frac{1}{2}(A - A^T)$ เป็นเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

ดีเทอร์มิแนนต์เป็นค่าจำเพาะ (scalar value) ที่คำนวณได้จากเมทริกซ์จตุรัส ดีเทอร์มิแนนต์มีความสำคัญในการกำหนดคุณสมบัติต่างๆ ของเมทริกซ์ เช่น การหาอินเวอร์ส และการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

5.5.1 นิยามของดีเทอร์มิแนนต์

ตัวอย่าง 5.27 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ของเมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย det(A) หรือ $|A|$

ตัวอย่าง 5.28 สำหรับเมทริกซ์ขนาด 1×1: det($[a]$) $= a$

ตัวอย่าง 5.29 สำหรับเมทริกซ์ขนาด 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

ตัวอย่าง 5.30

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

ตัวอย่าง 5.31 สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3 สามารถคำนวณได้โดยกฎของ Sarrus ดังนี้

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

ตัวอย่าง 5.32

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = (1)(5)(9)+(2)(6)(7)+(3)(4)(8)-(3)(5)(7)-(2)(4)(9)-(1)(6)(8)$$

$$= 45+84+96-105-72-48=0$$

ตัวอย่าง 5.33 กฎของ Sarrus ใช้ได้เฉพาะกับเมทริกซ์ขนาด 3×3 เท่านั้น สำหรับเมทริกซ์ขนาดใหญ่กว่าต้องใช้วิธีการอื่น เช่น cofactor expansion หรือการลดรูป (row reduction)

5.5.2 Cofactor Expansion

สำหรับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ สามารถคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ได้โดยใช้การกระจาย cofactor ตามแถวหรือคอลัมน์ใดก็ได้

ตัวอย่าง 5.34 กำหนดเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]$ ขนาด $n\times n$ minor ของ a_{ij} คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยที่ได้จากการลบแถว i และคอลัมน์ j เขียนแทนด้วย M_{ij}

Cofactor ของ a_{ij} คือ $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A สามารถคำนวณได้โดยการกระจายตามแถวที่ i:

$$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$$

หรือการกระจายตามคอลัมน์ที่ j:

$$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$$

ตัวอย่าง 5.35 คำนวณ $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ โดยการกระจายตามแถวแรก

$$M_{11}=\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix}=45-48=-3,\ C_{11}=(-1)^{1+1}(-3)=-3$$

$$M_{12}=\det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix}=36-42=-6,\ C_{12}=(-1)^{1+2}(-6)=6$$

$$M_{13}=\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}=32-35=-3,\ C_{13}=(-1)^{1+3}(-3)=-3$$

$$\det(A)=1(-3)+2(6)+3(-3)=-3+12-9=0$$

ตัวอย่าง 5.36 คำนวณ det $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ โดยการกระจายตามคอลัมน์ที่ 3

$$M_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 0 - 20 = -20,\ C_{13} = (-1)^{1+3}(-20) = -20$$

$$M_{23} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 5 = 7,\ C_{23} = (-1)^{2+3}(7) = -7$$

$$M_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 0 = 8,\ C_{33} = (-1)^{3+3}(8) = 8$$

$$\det(A) = 3(-20) + 1(-7) + 0(8) = -60 - 7 + 0 = -67$$

ตัวอย่าง 5.37 ในการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ ควรเลือกแถวหรือคอลัมน์ที่มีศูนย์มากที่สุด เพื่อลดจำนวนการคำนวณ ในตัวอย่างข้างต้น การกระจายตามคอลัมน์ที่ 3 มีสมาชิก $a_{33} = 0$ ทำให้มีเพียง 2 cofactor ที่ต้องคำนวณ

5.5.3 สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ตัวอย่าง 5.38 สมบัติสำคัญของดีเทอร์มิแนนต์:

1. $\det(I) = 1$ โดยที่ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์
2. ถ้ามีแถวหรือคอลัมน์เป็นศูนย์ทั้งหมด $\Rightarrow \det(A) = 0$
3. ถ้าสลับแถวสองแถว $\Rightarrow$ ดีเทอร์มิแนนต์เปลี่ยนเครื่องหมาย
4. ถ้าคูณแถวด้วยสเกลาร์ $c \Rightarrow \det(cA) = c^n \det(A)$ สำหรับเมทริกซ์ $n \times n$
5. ถ้าแถวหนึ่งเป็นผลรวมของสองแถว $\Rightarrow$ ดีเทอร์มิแนนต์แยกได้
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Multiplicative Property)
7. $\det(A^T) = \det(A)$
8. เมทริกซ์สามเหลี่ยม: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$ (ผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก)

ตัวอย่าง 5.39

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

ตัวอย่าง 5.40 พิสูจน์ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ สำหรับเมทริกซ์ 2×2

ให้ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = ae \cdot cf + ae \cdot dh + bg \cdot cf + bg \cdot dh - af \cdot ce - af \cdot dg - bh \cdot ce - bh \cdot dg = ae \cdot cf - af \cdot ce + ae \cdot dh - bh \cdot ce + bg \cdot cf - af \cdot dg + bg \cdot dh - bh \cdot dg = a \cdot e \cdot (cf - dh) - b \cdot g \cdot (af - ce) + \cdots$

ใช้ความจริงที่ว่าทุกพจน์จัดรูปได้เป็น $(ad - bc)(eh - fg) = \det(A)\det(B)$

ตัวอย่าง 5.41 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ โดยทั่วไป

ตัวอย่าง 5.42 เมทริกซ์จตุรัส A จะมีอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ (เรียกว่า nonsingular หรือ invertible)

อินเวอร์สของเมทริกซ์ (Matrix Inverse)

อินเวอร์สของเมทริกซ์เปรียบเสมือนตัวผกผันการคูณในระบบจำนวน กล่าวคือ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

5.6.1 นิยามของอินเวอร์ส

ตัวอย่าง 5.43 กำหนดเมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ แล้ว B คืออินเวอร์ส (inverse) ของ A เขียนแทนด้วย A^{-1} และเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์ส (invertible หรือ nonsingular)

ตัวอย่าง 5.44 เมทริกซ์จตุรัส A มีอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่าง 5.45 สำหรับเมทริกซ์ 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{เมื่อ } ad - bc \neq 0$$

ตรวจสอบ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1(4)-2(3)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

ตรวจสอบ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

ตัวอย่าง 5.46 หาอินเวอร์สของ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ใช้สูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$

$\det(A) = 2(1-0) - 1(0-1) + 1(0-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

C_{ij} (cofactor): $C_{11} = +\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(-1) = 1$ $C_{13} = +\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$C_{21} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ $C_{22} = +\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -(-1) = 1$

$C_{31} = +\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ $C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$ $C_{33} = +\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.47 สมบัติของอินเวอร์ส] สำหรับเมทริกซ์ invertible A, B:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (สังเกตการสลับที่)
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

ตัวอย่าง 5.48 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ไม่ใช่ $A^{-1}B^{-1}$ ต้องระวังลำดับการคูณ!

ตัวอย่าง 5.49 พิสูจน์ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ต้องแสดงว่า $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ และ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

ดังนั้น $B^{-1}A^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของ AB

5.7 ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of Linear Equations)

ระบบสมการเชิงเส้นเป็นเครื่องมือพื้นฐานในคณิตศาสตร์ประยุกต์ เมทริกซ์ช่วยให้การแก้ระบบสมการเชิงเส้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น

5.7.1 การเขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์

การเขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ช่วยให้สามารถใช้เครื่องมือทางพีชคณิตเชิงเส้นในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีการนี้เปลี่ยนระบบสมการหลายตัวแปรให้เป็นรูปแบบเชิงเมทริกซ์ที่กระชับและเหมาะสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลข

ตัวอย่าง 5.50 ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร m สมการ สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

หรือเขียนย่อว่า $Ax = b$ โดยที่ A คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์, x คือเวกเตอร์ตัวแปร, และ b คือเวกเตอร์ค่าคงที่

ตัวอย่าง 5.51 ระบบสมการ:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 3y + z = 10 \\ 3x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

5.7.2 การแก้ระบบสมการโดยใช้อินเวอร์สเมทริกซ์

ตัวอย่าง 5.52 ถ้า A มีอินเวอร์ส ($Ax = b$) แล้ว $x = A^{-1}b$

ตัวอย่าง 5.53 แก้ระบบสมการโดยใช้อินเวอร์ส:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1(4)-2(3)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + 11 \\ 7.5 - 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $x = 1$, $y = 2$

5.7.3 การแก้ระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

ตัวอย่าง 5.54 กฎของคราเมอร์] สำหรับระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ โดยที่ A ขนาด $n \times n$ และ $\det(A) \neq 0$ คำตอบคือ:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

โดยที่ A_i คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนคอลัมน์ที่ i ของ A ด้วยเวกเตอร์ b

ตัวอย่าง 5.55 แก้ระบบโดยใช้กฎของคราเมอร์:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1(4) - 2(3) = -2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}, x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{5(4)-2(11)}{-2} = \frac{20-22}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{1(11)-5(3)}{-2} = \frac{11-15}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

ดังนั้น $x = 1$, $y = 2$

ตัวอย่าง 5.56 กฎของคราเมอร์มีประสิทธิภาพในการแสดงทฤษฎี แต่ในทางปฏิบัติการคำนวณมีความซับซ้อน $O(n!)$ สำหรับระบบขนาดใหญ่ วิธี Gaussian elimination มีประสิทธิภาพมากกว่าคือ $O(n^3)$

5.7.4 การแก้ระบบสมการโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian Elimination)

วิธีการกำจัดแบบเกาส์ใช้การแปลงเมทริกซ์ขยาย (augmented matrix) ให้เป็นรูปแบบ row echelon form

ตัวอย่าง 5.57 Augmented Matrix ของระบบ $Ax = b$ คือ $[A|b]$ ขนาด $n \times (n+1)$

การดำเนินการแถว (Row Operations) มีดังนี้

1. สลับแถว ($R_i \leftrightarrow R_j$)
2. คูณแถวด้วยสเกลาร์ไม่เป็นศูนย์ (cR_i)
3. แทน R_i ด้วย $R_i + cR_j$ ($i \neq j$)

การดำเนินการเหล่านี้ไม่เปลี่ยนคำตอบของระบบสมการ

ตัวอย่าง 5.58 แก้ระบบสมการโดยวิธี Gaussian elimination:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + 5y + 3z = 23 \\ x + 3z = 7 \end{cases}$$

Augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 2 & 5 & 3 & | & 23 \\ 1 & 0 & 3 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 0 & 3 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2 & 2 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

จาก $4z = 8 \Rightarrow z = 2$

จาก $y + z = 5 \Rightarrow y + 2 = 5 \Rightarrow y = 3$

จาก $x + 2y + z = 9 \Rightarrow x + 6 + 2 = 9 \Rightarrow x = 1$

ดังนั้น $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$

ตัวอย่าง 5.59 ระบบสมการ $Ax = b$ มีคำตอบเดียวก็ต่อเมื่อ det$(A) \neq 0$ (เมทริกซ์ A invertible) และไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบไม่จำกัดก็ต่อเมื่อ det$(A) = 0$ (เมทริกซ์ A singular)

ตัวอย่าง 5.60 ถ้า det$(A) = 0$ จะพิจารณาได้ว่า ถ้า b อยู่ใน column space ของ A จะมีคำตอบไม่จำกัด แต่ถ้า b ไม่อยู่ใน column space ของ A จะไม่มีคำตอบ

5.8 ประยุกต์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์

5.8.1 การแปลงในคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ (Computer Graphics)

เมทริกซ์ใช้ในการแปลงภาพกราฟิก 2 มิติ และ 3 มิติ อย่างมีประสิทธิภาพ โดยการแปลงหลักๆ ประกอบด้วยการเลื่อน การขยายหรือหด และการหมุน ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้โดยใช้ homogeneous coordinates

ตัวอย่าง 5.61 การแปลง 2 มิติ] การแปลงจุด (x, y) ในระบบ 2 มิติ สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

โดยใช้ homogeneous coordinates

การเลื่อน (Translation) กำหนดได้ดังนี้ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

การขยายหรือหด (Scaling) กำหนดได้ดังนี้ $S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

การหมุน (Rotation) กำหนดได้ดังนี้ $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

การแปลงผสมสามารถทำได้โดยการคูณเมทริกซ์: $P' = T \cdot R \cdot S \cdot P$

ตัวอย่าง 5.62 หมุนจุด $(1,0)$ รอบจุดกำเนิด $90°$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = R \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

จุดใหม่คือ $(0,1)$

5.8.2 การเข้ารหัส Hill Cipher

ตัวอย่าง 5.63 Hill Cipher เป็นระบบเข้ารหัสแบบบล็อกที่ใช้เมทริกซ์ ข้อความธรรมดาถูกแปลงเป็นเวกเตอร์ตัวเลข แล้วคูณด้วยเมทริกซ์กุญแจ K ผลลัพธ์คือข้อความเข้ารหัส

การเข้ารหัส: $C = K \cdot P \pmod{26}$

การถอดรหัส: $P = K^{-1} \cdot C \pmod{26}$

ตัวอย่าง 5.64 ใช้เมทริกซ์กุญแจ $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ เข้ารหัสข้อความ "HI"

$H = 7$, $I = 8$ (A=0, B=1, ..., Z=25)

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, C = K \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \end{pmatrix} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$C = 11 = L$, $C = 15 = P$

ดังนั้น "HI" เข้ารหัสเป็น "LP"

หมายเหตุ: การถอดรหัสต้องใช้ K^{-1} ซึ่งมีอยู่ก็ต่อเมื่อ $\det(K) \neq 0 \pmod{26}$ นั่นคือ $\gcd(\det(K), 26) = 1$

5.8.3 เมทริกซ์ในการเรียนรู้ของเครื่อง

ตัวอย่าง 5.65 โมเดล Linear Regression สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$y = X\beta + \epsilon$

โดยที่ X คือ design matrix ขนาด $n \times p$, β คือเวกเตอร์ของ parameters ขนาด $p \times 1$, y คือเวกเตอร์ของ target values ขนาด $n \times 1$, และ ϵ คือเวกเตอร์ของ errors ขนาด $n \times 1$

ค่า β ที่เหมาะสมที่สุดคำนวณได้จาก

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

ตัวอย่าง 5.66 สำหรับข้อมูล 3 ตัวอย่าง 2 features: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 56 \end{pmatrix}, \det(X^T X) = 3(56) - 12(12) = 168 - 144 = 24 \neq 0$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.33 & -0.5 \\ -0.5 & 0.125 \end{pmatrix}$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 3+5+7 \\ 6+20+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 68 \end{pmatrix}$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} 2.33 & -0.5 \\ -0.5 & 0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-34 \\ -7.5+8.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $y = 1 + 1x$

ตัวอย่าง 5.67 Neural Networks ใช้เมทริกซ์ในการคำนวณ forward propagation:

$$A^{(l)} = f(Z^{(l)})$$

$$Z^{(l)} = A^{(l-1)} W^{(l)} + b^{(l)}$$

โดยที่ $W^{(l)}$ คือเมทริกซ์น้ำหนัก (weight matrix) และ $b^{(l)}$ คือ bias vector

5.8.4 เมทริกซ์ประชิดในทฤษฎีกราฟ

เมทริกซ์ประชิดเป็นเครื่องมือสำคัญในการแทนกราฟในรูปแบบเมทริกซ์ ทำให้สามารถใช้คุณสมบัติทางพีชคณิตในการวิเคราะห์กราฟได้

ตัวอย่าง 5.68 Adjacency Matrix ของกราฟ G ที่มี n โหนด คือเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ โดยที่ $a_{ij} = 1$ ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างโหนด i และ j และ $a_{ij} = 0$ ในกรณีอื่น โดยสมบัติที่สำคัญคือ $(A^k)_{ij}$ บอกจำนวนเส้นทางความยาว k จากโหนด i ไปยังโหนด j และผลรวมของแถวที่ i เท่ากับ degree ของโหนด i

ตัวอย่าง 5.69 กราฟรูปสามเหลี่ยม (3 โหนด เชื่อมกันทุกคู่):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(A^2)_{ij}$ บอกจำนวนเส้นทาง 2 ขั้นจาก i ไป j เช่น $(A^2)_{12} = 1$ หมายความว่ามี 1 เส้นทาง 2 ขั้นจากโหนด 1 ไปโหนด 2 (คือ $1 \to 3 \to 2$)

5.8.5 PageRank Algorithm

PageRank เป็นอัลกอริทึมที่ใช้เมทริกซ์ในการจัดอันดับเว็บเพจ โดยพิจารณาจำนวนและคุณภาพของลิงก์ที่เชื่อมมายังหน้านั้น

สมมติว่ามี n เว็บเพจ กำหนดเมทริกซ์การเชื่อมโยง (Link Matrix) L ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าหน้า } j \text{ มีลิงก์ไปหน้า } i \\ 0 & \text{ในกรณีอื่น} \end{cases}$$

PageRank vector **r** หาได้จาก

$$\mathbf{r} = c \cdot L^T \cdot \mathbf{r} + \frac{1-c}{n} \cdot \mathbf{1}$$

โดยที่ c คือ damping factor (ปกติ $c = 0.85$) และ **1** คือเวกเตอร์ของ 1 ทั้งหมด

ตัวอย่าง 5.70 พิจารณาเว็บ 3 หน้า A, B, C โดยมีการเชื่อมโยงดังนี้ A มีลิงก์ไป B และ C, B มีลิงก์ไป C, และ C มีลิงก์ไป A

เมทริกซ์การเชื่อมโยง:

$$L^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ค่า PageRank ของแต่ละหน้าคือ eigenvector ที่สำคัญที่สุดของ L^T

5.8.6 การประมวลผลภาพ (Image Processing)

ในการประมวลผลภาพ เมทริกซ์คอนโวลูชัน (Convolution Matrix) หรือเรียกว่า Kernel ใช้ในการทำ operations ต่างๆ เช่น blur, sharpen, edge detection

สำหรับภาพขาวดำ ภาพถูกแทนด้วยเมทริกซ์ I ของ pixel values

การคอนโวลูชัน กำหนดได้ดังนี้:

$$(I * K)_{ij} = \sum_m \sum_n I_{i+m,j+n} \cdot K_{m,n}$$

ตัวอย่าง 5.71 Edge Detection Kernel] เมทริกซ์ Sobel สำหรับ edge detection ในแนวนอน:

$$K_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

และในแนวตั้ง:

$$K_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Edge magnitude: $E = \sqrt{(K_x * I)^2 + (K_y * I)^2}$

ตัวอย่าง 5.72 Gaussian Blur Kernel] เมทริกซ์ Gaussian blur ขนาด 3×3:

$$K = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ใช้ในการทำให้ภาพเบลอ โดยค่าในเมทริกซ์บวกกันได้ 1 เพื่อรักษาความสว่างรวมของภาพ

5.8.7 Principal Component Analysis (PCA)

PCA เป็นเทคนิคในการลดมิติของข้อมูลโดยใช้ค่าเฉพาะ (Eigenvalues) และเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvectors) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix)

กำหนดข้อมูล X ขนาด $n \times p$ (n ตัวอย่าง, p features) ขั้นตอนการทำ PCA มีดังนี้ ประกอบด้วย การคำนวณ Covariance Matrix จาก $\Sigma = \frac{1}{n-1} X^T X$, การหา eigenvectors และ eigenvalues ของ Σ, การเรียง eigenvectors ตาม eigenvalues จากมากไปน้อย, และการเลือก k eigenvectors แรกเป็น principal components

ข้อมูลที่ลดมิติแล้ว กำหนดได้ดังนี้ $Y = X \cdot W_k$ โดยที่ W_k คือเมทริกซ์ของ k eigenvectors

ตัวอย่าง 5.73 สำหรับข้อมูล 2 มิติ:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Covariance Matrix:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.67 & 1.67 \\ 1.67 & 1.67 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues: $\lambda_1 = 3.33, \lambda_2 = 0$

Eigenvector ที่สำคัญ: $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ข้อมูลที่ลดมิติเป็น 1 มิติ: $Y = X \cdot \mathbf{v}_1$

5.9 โค้ดประกอบบท

ในบทนี้จะได้ฝึกปฏิบัติการคำนวณเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้ภาษา Python ผ่าน Jupyter Notebook ซึ่งจะช่วยให้เห็นผลลัพธ์และขั้นตอนการคำนวณได้อย่างชัดเจน แนะนำให้ทดลองรันโค้ดและปรับค่าตัวเลขด้วยตนเองเพื่อเสริมความเข้าใจ

`notebooks/Chapter05_MatrixOperations.ipynb`

5.10 ฝึกหัด

5.10.1 ส่วนที่ 1: พื้นฐานเมทริกซ์

1. จงระบุขนาดของเมทริกซ์ต่อไปนี้:

   1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   1.2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   1.3. $C = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

2. จงระบุว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์ชนิดใด (จตุรัส, สมมาตร, สามเหลี่ยมบน, สามเหลี่ยมล่าง, เส้นทแยงมุม, เอกลักษณ์, ศูนย์):

   2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.10.2 ส่วนที่ 2: การดำเนินการระหว่างเมทริกซ์

1. กำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ จงหา:

   1.1. $A + B$

   1.2. $A - B$

   1.3. $3A$

   1.4. $A \cdot B$

   1.5. $B \cdot A$

2. จงหา transpose ของเมทริกซ์ต่อไปนี้:

   2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   2.2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

5.10.3 ส่วนที่ 3: ดีเทอร์มิแนนต์

1. จงคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้โดยใช้วิธี cofactor expansion:

   1.1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   1.2. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2. จงคำนวณดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้กฎของ Sarrus:

2.1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

5.10.4 ส่วนที่ 4: อินเวอร์สของเมทริกซ์

1. จงหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี):

1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.3. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. จงตรวจสอบว่า $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ สำหรับข้อ 1(a)

5.10.5 ส่วนที่ 5: การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

1. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้อินเวอร์สเมทริกซ์:

1.1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์:

2.1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

สรุป

ในบทนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สาระสำคัญที่ควรจำ:

เมทริกซ์คือการจัดเรียงข้อมูลในรูปตารางสองมิติ มีหลายประเภท เช่น จตุรัส, เส้นทแยงมุม, สมมาตร, สามเหลี่ยม

การดำเนินการระหว่างเมทริกซ์ประกอบด้วย การบวก ลบ คูณด้วยสเกลาร์ คูณเมทริกซ์ และ transpose การคูณเมทริกซ์ไม่มีสมบัติสลับที่

ดีเทอร์มิแนนต์เป็นค่าจำเพาะของเมทริกซ์จตุรัส คำนวณได้โดย cofactor expansion หรือกฎของ Sarrus (สำหรับ 3×3) สมบัติสำคัญคือ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

อินเวอร์สของเมทริกซ์ A^{-1} ทำให้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ มีอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามารถทำได้โดยอินเวอร์สเมทริกซ์ ($x = A^{-1}b$), กฎของคราเมอร์, หรือ Gaussian elimination

การประยุกต์ในคอมพิวเตอร์กราฟิกส์, การเข้ารหัส, การเรียนรู้ของเครื่อง, และทฤษฎีกราฟ

เมทริกซ์เป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการศึกษาต่อในสาขาคณิตศาสตร์ขั้นสูง เช่น พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) และการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

Bibliography

[1] Rosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 8th ed., McGraw-Hill, 2019.

[2] Anton, Howard. *Elementary Linear Algebra*. 12th ed., Wiley, 2019.

[3] Lay, David C., Lay, Steven R., and McDonald, Judi J. *Linear Algebra and Its Applications*. 5th ed., Pearson, 2015.

[4] Strang, Gilbert. *Linear Algebra and Its Applications*. 4th ed., Cengage Learning, 2005.

5.1.2 เอกสารอ้างอิง

แผนการสอนประจำบทที่ 6

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 6

ชื่อบท พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบายสัจพจน์และกฎของพีชคณิตบูลีนได้
2. ลดรูปสมการบูลีนโดยใช้กฎพีชคณิตบูลีนได้
3. สร้างและวิเคราะห์วงจรลอจิกเกตจากนิพจน์บูลีนได้
4. ใช้แผนที่การ์โน (Karnaugh Map) ในการลดรูปฟังก์ชันบูลีนได้
5. เชื่อมโยงพีชคณิตบูลีนกับการออกแบบวงจรดิจิทัลและการเขียนโปรแกรมได้

หัวข้อที่สอน

1. สัจพจน์และกฎของพีชคณิตบูลีน
2. การลดรูปนิพจน์บูลีน
3. วงจรลอจิกเกต (Logic Gates)
4. แผนที่การ์โน (Karnaugh Map)
5. การประยุกต์ใช้พีชคณิตบูลีนในวงจรดิจิทัล

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ซอฟต์แวร์จำลองวงจรลอจิก
- แบบฝึกหัดท้ายบท

การวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ (Raster-based Spatial Analysis)

6.1 วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถ:

1. อธิบายความหมายและความสำคัญของระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์แบบราสเตอร์ได้
2. ดำเนินการ Map Algebra ขั้นพื้นฐานและขั้นสูงได้
3. จำแนกประเภทการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ (Local, Neighborhood, Zonal, Global) และประยุกต์ใช้ได้
4. คำนวณและแปลความหมายของ Slope, Aspect, Hillshade และ Viewshed ได้
5. ประยุกต์ใช้การวิเคราะห์ราสเตอร์ในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมได้
6. แปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบ Vector และ Raster สำหรับการวิเคราะห์ได้

6.2 บทนำ

ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (Geographic Information System: GIS) เป็นเทคโนโลยีที่ใช้ในการเก็บรวบรวม จัดเก็บ จัดการ วิเคราะห์ และแสดงผลข้อมูลเชิงพื้นที่ ข้อมูลเชิงพื้นที่สามารถจัดเก็บได้สองรูปแบบหลัก ได้แก่ รูปแบบเวกเตอร์ (Vector) ที่ใช้จุด เส้น และรูปหลายเหลี่ยมแทนข้อมูล และรูปแบบราสเตอร์ (Raster) ที่ใช้กริดของพิกเซลในการแทนค่าความเข้มข้นหรือคุณลักษณะของข้อมูลในพื้นที่

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ (Raster-based Spatial Analysis) ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้โครงสร้างข้อมูลแบบกริด การวิเคราะห์ราสเตอร์มีความสำคัญอย่างยิ่งในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม เนื่องจากข้อมูลราสเตอร์สามารถแสดงปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องในพื้นที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น อุณหภูมิ ความสูง ปริมาณน้ำฝน และการกระจายตัวของพืชพรรณ

การวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ประกอบด้วยหัวข้อหลักหลายประการ ได้แก่ Map Algebra ซึ่งเป็นพีชคณิตสำหรับการคำนวณแผนที่ การวิเคราะห์เชิงพื้นที่ที่แบ่งตามขอบเขตการคำนวณ การวิเคราะห์พื้นผิวที่ได้จากข้อมูลระดับสูง และการแปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบ Vector และ Raster ความเข้าใจในหลักการเหล่านี้จะทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัยและการปฏิบัติงานจริงได้

6.3 โครงสร้างข้อมูลราสเตอร์

6.3.1 นิยามของข้อมูลราสเตอร์

ข้อมูลราสเตอร์ (Raster Data) คือ ข้อมูลเชิงพื้นที่ที่จัดเก็บในรูปแบบกริดสองมิติ ประกอบด้วยแถวและคอลัมน์ของพิกเซล (Pixel) หรือเซลล์ (Cell) ที่มีขนาดเท่ากันทุกตัว โดยแต่ละพิกเซลเก็บค่าหนึ่งค่าที่แสดงถึงคุณลักษณะหรือปรากฏการณ์ในพื้นที่ที่พิกเซลนั้นครอบคลุม ขนาดของพิกเซลเรียกว่า ความละเอียดเชิงพื้นที่ (Spatial Resolution) ซึ่งกำหนดรายละเอียดของข้อมูล

การใช้ข้อมูลราสเตอร์มีข้อได้เปรียบหลายประการ ได้แก่ โครงสร้างข้อมูลที่เรียบง่ายและเข้าใจง่าย การคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ และความเหมาะสมกับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องในพื้นที่ อย่างไรก็ตาม ข้อมูลราสเตอร์มีข้อจำกัดในเรื่องขนาดไฟล์ที่ใหญ่เมื่อใช้ความละเอียดสูง และความไม่แม่นยำในการแสดงขอบเขตของวัตถุที่มีรูปร่างซับซ้อน

ตัวอย่าง 6.1 พิจารณาข้อมูลราสเตอร์ที่แสดงระดับความสูงของพื้นที่ กริดขนาด 4×4 พิกเซล ซึ่งแต่ละพิกเซลมีค่าระดับความสูงเป็นเมตร ดังแสดงในตารางที่ 19

ตารางที่ 19 ตัวอย่างข้อมูลราสเตอร์แสดงระดับความสูง (หน่วย: เมตร)

	คอลัมน์ 1	**คอลัมน์ 2**	**คอลัมน์ 3**	**คอลัมน์ 4**
แถว 1	100	120	135	142
แถว 2	105	118	130	140
แถว 3	95	110	125	138
แถว 4	88	98	115	132

ในตารางที่ 19 แต่ละพิกเซลแทนค่าระดับความสูงเฉลี่ยในพื้นที่ที่พิกเซลนั้นครอบคลุม ค่าความสูงเพิ่มขึ้นจากซ้ายไปขวาและจากล่างขึ้นบน ซึ่งบ่งบอกว่าพื้นที่มีความสูงมากทางด้านขวาบน

6.3.2 ประเภทของข้อมูลราสเตอร์

ข้อมูลราสเตอร์สามารถจำแนกได้หลายประเภทตามลักษณะของค่าที่เก็บในพิกเซล การจำแนกประเภทข้อมูลราสเตอร์มีความสำคัญในการเลือกวิธีการวิเคราะห์ที่เหมาะสม

1. ข้อมูลเชิงปริมาณต่อเนื่อง (Continuous Data) คือ ข้อมูลที่ค่าในพิกเซลสามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างต่อเนื่องในช่วงค่าที่กำหนด ตัวอย่างเช่น ระดับความสูง อุณหภูมิ ความชื้น และความเข้มของการ

สะท้อนแสงจากดาวเทียม ข้อมูลประเภทนี้มักใช้ในการวิเคราะห์พื้นผิวและการประมาณค่าในตำแหน่งที่ไม่มีข้อมูล

2. ข้อมูลเชิงหมวดหมู่ (Categorical Data) คือ ข้อมูลที่ค่าในพิกเซลแทนประเภทหรือคลาสของวัตถุ เช่น ประเภทการใช้ที่ดิน ชนิดพืชพรรณ และเขตการปกครอง ค่าในข้อมูลประเภทนี้มักเป็นจำนวนเต็มที่แทนรหัสของแต่ละประเภท

3. ข้อมูลเชิงลำดับ (Ordinal Data) คือ ข้อมูลที่มีการจัดลำดับความสำคัญ โดยค่าที่สูงกว่าหมายถึงระดับที่สูงกว่า แต่ไม่สามารถระบุความแตกต่างเชิงปริมาณได้ ตัวอย่างเช่น ระดับความเสี่ยงของการเกิดไฟป่า (ต่ำ กลาง สูง) หรือระดับความเหมาะสมของที่ดินสำหรับเกษตรกรรม

ชีชคณิตแผนที่ (Map Algebra)

6.4.1 แนะนำ Map Algebra

Map Algebra เป็นชุดของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์และตรรกะที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ Map Algebra ถูกพัฒนาขึ้นโดย Dana Tomlin ในทศวรรษ 1980 และกลายเป็นพื้นฐานของการวิเคราะห์ราสเตอร์ในระบบ GIS สมัยใหม่ หลักการพื้นฐานของ Map Algebra คือการปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์จะถูกนำไปใช้กับพิกเซลที่ตำแหน่งเดียวกันในกริดต่างๆ ผลลัพธ์จะเป็นกริดใหม่ที่มีค่าของการปฏิบัติการ

Map Algebra มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ เนื่องจากเป็นเครื่องมือที่ทรงพลังในการรวมข้อมูลจากหลายแหล่ง คำนวณดัชนีทางวิทยาศาสตร์ และสร้างแบบจำลองเชิงพื้นที่ที่ซับซ้อน การเข้าใจ Map Algebra อย่างถ่องแท้จะเป็นรากฐานสำหรับการเรียนรู้การวิเคราะห์ราสเตอร์ขั้นสูงต่อไป

การดำเนินการ Map Algebra สามารถจำแนกได้เป็น 4 ประเภทหลักตามจำนวนมิติที่ใช้ในการคำนวณ ได้แก่ Local Operations ที่ทำงานกับพิกเซลเดี่ยว Neighborhood Operations ที่ทำงานกับพิกเซลและพิกเซลรอบข้าง Zonal Operations ที่ทำงานกับกลุ่มของพิกเซลที่อยู่ในโซนเดียวกัน และ Global Operations ที่ทำงานกับพิกเซลทั้งหมดในกริด

6.4.2 การดำเนินการระดับพิกเซล (Local Operations)

การดำเนินการระดับพิกเซล (Local Operations) คือ การดำเนินการที่คำนวณค่าของพิกเซลผลลัพธ์จากค่าของพิกเซลเดี่ยวหนึ่งตัวหรือหลายตัวที่ตำแหน่งเดียวกันในกริดต่างๆ การดำเนินการระดับพิกเซลเป็นพื้นฐานที่สุดของ Map Algebra เนื่องจากทำงานโดยตรงกับค่าของแต่ละพิกเซลโดยไม่ต้องพิจารณาความสัมพันธ์กับพิกเซลรอบข้าง

การดำเนินการระดับพิกเซลสามารถแบ่งได้เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์และการดำเนินการทางตรรกะ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยการบวก การลบ การคูณ การหาร และฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์อื่นๆ การดำเนินการทางตรรกะประกอบด้วย AND OR NOT และ XOR ซึ่งมักใช้ในการรวมข้อมูลเชิงหมวดหมู่

ตัวอย่าง 6.2 การบวกกริดสองชั้นข้อมูล (Grid Addition) พิจารณากริดสองชั้นที่แสดงปริมาณน้ำฝนรายเดือนของเดือนมกราคมและเดือนกุมภาพันธ์ การบวกกริดทั้งสองจะได้กริดผลลัพธ์ที่แสดงปริมาณน้ำฝนรวมของทั้งสองเดือน สำหรับพิกเซลที่ตำแหน่ง (i, j) ค่าผลลัพธ์จะเป็น $R_{ij} = G1_{ij} + G2_{ij}$ โดยที่ $G1_{ij}$ และ $G2_{ij}$ เป็นค่าปริมาณน้ำฝนของเดือนมกราคมและกุมภาพันธ์ตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.3 การคูณกริดด้วยค่าคงที่ (Grid Scalar Multiplication) ในการแปลงหน่วยของข้อมูล อาจต้องคูณกริดด้วยค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น หากข้อมูลระดับความสูงเก็บในหน่วยเซนติเมตร แต่ต้องการหน่วยเป็นเมตร จะต้องคูณค่าทุกพิกเซลด้วย 0.01 สำหรับพิกเซลที่ตำแหน่ง (i, j) ค่าผลลัพธ์จะเป็น $R_{ij} = 0.01 \times G_{ij}$

ตัวอย่าง 6.4 การดำเนินการทางตรรกะ (Logical Operations) การดำเนินการทางตรรกะมักใช้ในการสร้างแผนที่แสดงพื้นที่ที่ตรงตามเงื่อนไขหลายประการ ตัวอย่างเช่น การหาพื้นที่ที่มีความสูงมากกว่า 1000 เมตร และมีความลาดชันน้อยกว่า 15 องศา สำหรับพิกเซลที่ตำแหน่ง (i, j) ผลลัพธ์จะเป็น $R_{ij} = (H_{ij} > 1000) \wedge (S_{ij} < 15)$ โดยที่ H คือกริดความสูง และ S คือกริดความลาดชัน

ตัวอย่าง 6.5 การ คำนวณ ดัชนี พืช พรรณ (Vegetation Index) ดัชนี พืช พรรณ ปกติ (Normalized Difference Vegetation Index: NDVI) คำนวณจากข้อมูลการสะท้อนแสงในช่วงแสงแดง (Red) และแสงใกล้อินฟราเรด (Near-Infrared: NIR) สูตรคือ

$$\text{NDVI} = \frac{\text{NIR} - \text{Red}}{\text{NIR} + \text{Red}}$$

โดยที่ NIR คือค่าการสะท้อนในช่วงใกล้อินฟราเรด และ Red คือค่าการสะท้อนในช่วงแสงแดง ค่า NDVI มีค่าตั้งแต่ -1 ถึง $+1$ โดยค่าที่ใกล้ $+1$ บ่งบอกว่าพื้นที่มีพืชพรรณหนาแน่น

6.4.3 การดำเนินการระดับพื้นที่ใกล้เคียง (Neighborhood Operations)

การดำเนินการระดับพื้นที่ใกล้เคียง (Neighborhood Operations) คือ การดำเนินการที่คำนวณค่า ของ พิกเซล ผลลัพธ์ จาก ค่า ของ พิกเซล เป้า หมาย และ พิกเซล รอบ ข้าง ที่ อยู่ ภายใน หน้าต่าง การ คำนวณ (Kernel หรือ Window) การดำเนินการระดับพื้นที่ใกล้เคียงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ลักษณะภูมิประเทศ การตรวจจับขอบของวัตถุ และการปรับแต่งข้อมูลเชิงพื้นที่

หน้าต่างการคำนวณอาจมีรูปร่างต่างกัน เช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส วงกลม หรือรูปร่างที่กำหนดเอง ขนาดของหน้าต่างกำหนดระยะทางสูงสุดจากพิกเซลเป้าหมายที่จะรวมในการคำนวณ การเลือกขนาดหน้าต่างขึ้นอยู่กับลักษณะของปรากฏการณ์ที่ต้องการวิเคราะห์และความละเอียดเชิงพื้นที่ของข้อมูล

ตัวอย่าง 6.6 การคำนวณค่าเฉลี่ยความสูงในพื้นที่ (Local Mean Elevation) สำหรับพิกเซลที่ตำแหน่ง (i, j) ค่าเฉลี่ยจะคำนวณจากค่าความสูงของพิกเซลเป้าหมายและพิกเซลรอบข้างทั้งหมดในหน้าต่างขนาด 3×3 หากหน้าต่างมีพิกเซล 9 ตัว ค่าเฉลี่ยจะเป็น

$$\bar{H}_{ij} = \frac{1}{9} \sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=-1}^{1} H_{i+m,j+n}$$

การคำนวณนี้ทำให้ได้กริดใหม่ที่แสดงค่าเฉลี่ยความสูงในพื้นที่โดยรอบแต่ละพิกเซล ซึ่งช่วยลดผลกระทบของค่าผิดปกติ (Outliers) และสร้างแผนที่ความสูงที่เรียบขึ้น

ตัวอย่าง 6.7 การคำนวณความลาดชัน (Slope) ความลาดชันเป็นการวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าระดับความสูงในทิศทางที่ลาดที่สุด สามารถคำนวณได้จากค่าความสูงของพิกเซลและพิกเซลรอบข้างในหน้าต่าง 3×3 โดยใช้สูตรคำนวณความลาดชันดังนี้

$$S = \text{arctan} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

โดยที่ $\frac{dz}{dx}$ และ $\frac{dz}{dy}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงในทิศทาง x และ y ตามลำดับ ค่าความลาดชันจะแสดงในหน่วยองศาหรือเปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 6.8 การคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของความสูง (Local Standard Deviation) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นการวัดความไม่สม่ำเสมอของพื้นที่ ค่าที่สูงบ่งบอกว่าพื้นที่มีความแปรปรวนสูง เช่น พื้นที่ภูเขาที่มีหุบเขาสลับกับยอดเขา ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณจาก

$$\sigma_{ij} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (H_k - \bar{H}_{ij})^2}$$

โดยที่ N คือจำนวนพิกเซลในหน้าต่าง และ $\bar{H}_{ij}$ คือค่าเฉลี่ยของความสูงในหน้าต่าง

6.4.4 การดำเนินการระดับโซน (Zonal Operations)

การดำเนินการระดับโซน (Zonal Operations) คือ การดำเนินการที่คำนวณค่าสถิติสำหรับกลุ่มของพิกเซลที่อยู่ในโซนเดียวกัน โดยโซนถูกกำหนดจากกริดอ้างอิง (Zone Grid) ที่แต่ละพิกเซลมีค่าเป็นรหัส

ของโซนที่พิกเซลนั้นสังกัด การดำเนินการระดับโซนมักใช้ในการคำนวณสถิติของคุณลักษณะภายในเขตการปกครอง พื้นที่อนุรักษ์ หรือประเภทการใช้ที่ดิน

ผลลัพธ์ของการดำเนินการระดับโซนจะเป็นกริดใหม่ที่แต่ละพิกเซลมีค่าเป็นค่าสถิติของโซนที่พิกเซลนั้นสังกัด หรืออาจเป็นตารางสรุปที่แสดงค่าสถิติสำหรับแต่ละโซนก็ได้ การเลือกรูปแบบผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์

ตัวอย่าง 6.9 การคำนวณพื้นที่เฉลี่ยของแต่ละเขตการปกครอง (Mean Area per Zone) พิจารณากริดความสูงและกริดเขตการปกครอง การคำนวณความสูงเฉลี่ยของแต่ละเขตการปกครองจะได้ผลลัพธ์ดังนี้ สำหรับโซนที่มีรหัส k ความสูงเฉลี่ยจะเป็น

$$\bar{H}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i \in Z_k} H_i$$

โดยที่ Z_k คือเซตของพิกเซลที่อยู่ในโซน k และ N_k คือจำนวนพิกเซลในโซน k

ตัวอย่าง 6.10 การคำนวณความยาวของแม่น้ำในแต่ละลุ่มน้ำ (Total Stream Length per Watershed) การดำเนินการระดับโซนสามารถใช้ในการรวมค่าของพิกเซลที่เป็นแม่น้ำภายในแต่ละลุ่มน้ำ ผลลัพธ์จะเป็นตารางที่แสดงความยาวรวมของแม่น้ำในแต่ละลุ่มน้ำ ซึ่งมีประโยชน์ในการประเมินทรัพยากรน้ำและการวางแผนการจัดการลุ่มน้ำ

ตัวอย่าง 6.11 การนับจำนวนพิกเซลในแต่ละโซน (Pixel Count per Zone) การดำเนินการระดับโซนสามารถใช้นับจำนวนพิกเซลในแต่ละโซนเพื่อคำนวณพื้นที่รวมของแต่ละโซน หากทราบขนาดของพิกเซล (เช่น 30×30 เมตร) สามารถคำนวณพื้นที่ได้โดย

$$A_k = N_k \times (\Delta x \times \Delta y)$$

โดยที่ A_k คือพื้นที่ของโซน k และ Δx, Δy คือขนาดของพิกเซลในทิศทาง x และ y

6.5 การวิเคราะห์พื้นผิว (Surface Analysis)

6.5.1 แนะนำการวิเคราะห์พื้นผิว

การ วิเคราะห์ พื้น ผิว (Surface Analysis) เป็นการ ศึกษา คุณลักษณะ และ พฤติกรรม ของปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องในพื้นที่ ข้อมูลพื้นผิวมักได้จากข้อมูลระดับความสูง (Digital Elevation Model: DEM) ซึ่งเป็นการแสดงค่าความสูงของพื้นผิวโลกในรูปแบบราสเตอร์ การวิเคราะห์

พื้นผิวมีการประยุกต์ใช้หลากหลาย เช่น การวางแผนเส้นทาง การประเมินภัยพิบัติ และการจัดการทรัพยากรธรรมชาติ

พื้นผิวทางกายภาพที่พบบ่อยที่สุดคือ ความสูงของภูมิประเทศ ซึ่งสามารถวิเคราะห์คุณลักษณะต่างๆ ได้แก่ ความลาดชัน (Slope) ทิศทางของความลาด (Aspect) เงา (Hillshade) และพื้นที่ที่มองเห็นได้ (Viewshed) นอกจากนี้ยังสามารถวิเคราะห์พื้นผิวอื่นๆ เช่น อุณหภูมิ ความชื้น และความดันบรรยากาศ

การวิเคราะห์พื้นผิวต้องอาศัยข้อมูลระดับความสูงที่มีความละเอียดเพียงพอเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ความละเอียดของข้อมูลระดับความสูงควรเลือกให้เหมาะสมกับขนาดของลักษณะภูมิประเทศที่ต้องการวิเคราะห์ หากความละเอียดต่ำเกินไป อาจไม่สามารถตรวจจับลักษณะภูมิประเทศขนาดเล็กได้

6.5.2 ความลาดชัน (Slope)

ความลาดชัน (Slope) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงต่อหนึ่งหน่วยระยะทางในทิศทางที่ลาดที่สุด ความลาดชันเป็นคุณลักษณะพื้นฐานที่สำคัญของภูมิประเทศ มีการใช้งานหลากหลาย เช่น การประเมินความเสี่ยงดินถล่ม การวางแผนการก่อสร้าง และการจัดหาข้อมูลสำหรับการเกษตร

ความลาดชันสามารถแสดงได้สองรูปแบบ ได้แก่ ความลาดชันในหน่วยองศา (Degree Slope) ที่มีค่าตั้งแต่ $0°$ ถึง $90°$ และความลาดชันในหน่วยเปอร์เซ็นต์ (Percent Slope) ที่มีค่าเป็น $100 \times \tan(\theta)$ โดยที่ θ คือความลาดชันในหน่วยองศา ความลาดชันในหน่วยเปอร์เซ็นต์จะมีค่าเป็น 0% สำหรับพื้นราบ และเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตสำหรับพื้นที่ดิ่ง

การคำนวณความลาดชันใช้ค่าความสูงของพิกเซลเป้าหมายและพิกเซลรอบข้างในหน้าต่าง 3×3 โดยมีสูตรดังนี้

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(z_{i+1,j+1} + 2z_{i+1,j} + z_{i+1,j-1}) - (z_{i-1,j+1} + 2z_{i-1,j} + z_{i-1,j-1})}{8 \cdot \Delta x}$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{(z_{i-1,j-1} + 2z_{i,j-1} + z_{i+1,j-1}) - (z_{i-1,j+1} + 2z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1})}{8 \cdot \Delta y}$$

โดยที่ $z_{i,j}$ คือค่าความสูงที่พิกเซล (i, j) และ Δx, Δy คือขนาดของพิกเซล

ตัวอย่าง 6.12 พิจารณาหน้าต่าง 3×3 ของข้อมูลระดับความสูงที่มีค่าเป็นเมตร ดังแสดงในตารางที่ 20

จากตารางที่ 20 พิกเซลเป้าหมายอยู่ที่แถว 2 คอลัมน์ 2 มีค่า $z_{2,2} = 108$ เมตร สมมติขนาดพิกเซล $\Delta x = \Delta y = 30$ เมตร คำนวณได้ $\frac{dz}{dx} = \frac{(105+2(115)+112)-(100+2(102)+98)}{8\times30} = \frac{447-402}{240} = 0.1875$ เมตรต่อเมตร และ $\frac{dz}{dy} = \frac{(100+2(102)+98)-(105+2(115)+112)}{8\times30} = \frac{402-447}{240} = -0.1875$ เมตรต่อเมตร ความลาดชันจะเป็น $\arctan(\sqrt{0.1875^2 + (-0.1875)^2}) \approx 15.5°$

ตารางที่ 20 ตัวอย่างข้อมูลความสูงสำหรับคำนวณความลาดชัน (หน่วย: เมตร)

	คอลัมน์ 1	**คอลัมน์ 2**	**คอลัมน์ 3**
แถว 1	100	110	105
แถว 2	102	108	115
แถว 3	98	105	112

6.5.3 ทิศทางของความลาด (Aspect)

ทิศทางของความลาด (Aspect) คือ ทิศทางที่พื้นที่หันไปหรือทิศทางที่ลาดลงมากที่สุด Aspect มีค่าเป็นมุมที่วัดจากทิศเหนือในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มีค่าตั้งแต่ $0°$ (ทิศเหนือ) ถึง $360°$ (กลับมาทิศเหนือ) การทราบทิศทางของความลาดมีความสำคัญในการวิเคราะห์การรับแสงอาทิตย์ การกระจายตัวของพืชพรรณ และการประเมินผลกระทบของลม

ทิศทางของความลาดคำนวณจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงในทิศทาง x และ y โดยใช้สูตร

$$\phi = 180° + \arctan 2\left(\frac{dz}{dy}, -\frac{dz}{dx}\right)$$

โดยที่ ϕ คือทิศทางของความลาดในหน่วยองศา และ $\arctan 2$ คือฟังก์ชันอาร์แทนเจนต์ที่คืนค่ามุมในช่วง $-180°$ ถึง $180°$ ค่าทิศทางจะถูกปรับให้อยู่ในช่วง $0°$ ถึง $360°$

ตัวอย่าง 6.13 จากตัวอย่างการคำนวณความลาดชันในหัวข้อก่อนหน้า $\frac{dz}{dx} = 0.1875$ และ $\frac{dz}{dy} = -0.1875$ คำนวณทิศทางของความลาดได้ $\phi = 180° + \arctan 2(-0.1875, -0.1875) = 180° + 135° = 315°$ ซึ่งหมายความว่าความลาดหันไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ (Northwest)

ตัวอย่าง 6.14 การประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์การรับแสงอาทิตย์ ทิศทางของความลาดมีผลต่อปริมาณแสงอาทิตย์ที่พื้นที่ได้รับ ในซีกโลกเหนือ พื้นที่ที่หันไปทางทิศใต้ (Aspect ประมาณ $180°$) จะได้รับแสงอาทิตย์มากกว่าพื้นที่ที่หันไปทางทิศเหนือ ส่งผลให้มีอุณหภูมิสูงกว่าและความชื้นต่ำกว่า ข้อมูลนี้มีประโยชน์ในการวางแผนการเพาะปลูกและการจัดวางอาคาร

6.5.4 เงา (Hillshade)

เงา (Hillshade) คือ แผนที่ที่แสดงความสว่างของพื้นผิวตามทิศทางของแสงอาทิตย์ การคำนวณเงาใช้ทิศทางและมุมของรังสีแสงอาทิตย์เป็นอินพุต ผลลัพธ์จะเป็นกริดที่แต่ละพิกเซลมีค่าความสว่างตั้งแต่ 0

ถึง 255 (สำหรับข้อมูล 8-bit) หรือ 0 ถึง 1 (สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณปกติ)

การคำนวณเงาใช้สูตร

$$H = 255 \times \cos(\theta_s) \times \cos(V_{ij}) + 255 \times \sin(\theta_s) \times \sin(V_{ij}) \times \cos(\phi_s - \phi_{ij})$$

โดยที่ θ_s คือมุมทิฐิของดวงอาทิตย์ (Solar Zenith Angle) ϕ_s คือทิศทางอะซิมัทของดวงอาทิตย์ (Solar Azimuth) และ V_{ij} และ ϕ_{ij} คือมุมทิฐิและทิศทางอะซิมัทของพิกเซล (i, j)

ตัวอย่าง 6.15 การสร้างแผนที่เงาสำหรับการวิเคราะห์ภูมิประเทศ แผนที่เงาช่วยให้เห็นลักษณะภูมิประเทศได้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยเฉพาะในพื้นที่ที่มีความลาดชันมากและมีหุบเขาลึก การใช้แผนที่เงาร่วมกับข้อมูลอื่น เช่น การใช้ที่ดิน ช่วยให้การตีความข้อมูลเชิงพื้นที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ตัวอย่าง 6.16 การประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ทัศนียภาพ (Visual Impact Analysis) การคำนวณเงาสามารถใช้ในการประเมินว่าอาคารหรือโครงสร้างใหม่จะสร้างเงาตกกระทบพื้นที่ใดบ้างในช่วงเวลาต่างๆ ของวันและฤดูกาล ข้อมูลนี้มีประโยชน์ในการวางแผนผังเมืองและการออกแบบอาคาร

6.5.5 พื้นที่ที่มองเห็นได้ (Viewshed)

พื้นที่ที่มองเห็นได้ (Viewshed) คือ พื้นที่บนพื้นผิวที่สามารถมองเห็นจากตำแหน่งที่กำหนดได้ การวิเคราะห์ Viewshed มีการใช้งานหลากหลาย เช่น การวางตำแหน่งอาคารสูง การวางแผนเส้นทางถนน การจัดตำแหน่งสถานีฐานสัญญาณ และการประเมินทัศนียภาพของภูมิประเทศ

หลักการคำนวณ Viewshed คือการลากเส้นตรงจากตำแหน่งผู้สังเกตไปยังแต่ละพิกเซลในกริด และตรวจสอบว่ามีพื้นที่สูงกว่าเส้นนี้หรือไม่ หากมี แสดงว่าพิกเซลนั้นไม่สามารถมองเห็นได้จากตำแหน่งผู้สังเกต

ตัวอย่าง 6.17 การวิเคราะห์ Viewshed สำหรับการจัดตำแหน่งหอสังเกตการณ์ สมมติต้องเลือกตำแหน่งหอสังเกตการณ์ที่สามารถมองเห็นพื้นที่ได้มากที่สุด การวิเคราะห์ Viewshed จะคำนวณพื้นที่ที่มองเห็นได้จากแต่ละตำแหน่งที่เป็นไปได้ และเลือกตำแหน่งที่มีพื้นที่มองเห็นมากที่สุด

ตัวอย่าง 6.18 การวิเคราะห์ Viewshed สำหรับการจัดตำแหน่งสถานีฐานสัญญาณโทรศัพท์มือถือ การวิเคราะห์ Viewshed สามารถประเมินพื้นที่ที่จะได้รับสัญญาณจากสถานีฐาน โดยคำนึงถึงอุปสรรคจากภูมิประเทศ ผลลัพธ์ช่วยในการวางแผนจำนวนและตำแหน่งของสถานีฐานให้ครอบคลุมพื้นที่บริการ

6.6 การแปลงข้อมูล Vector-Raster

6.6.1 ความสำคัญของการแปลงข้อมูล

ข้อมูลเชิงพื้นที่มีอยู่สองรูปแบบหลักคือ Vector และ Raster การวิเคราะห์บางประเภทต้องใช้ข้อมูลรูปแบบในรูปแบบหนึ่งโดยเฉพาะ ดังนั้นการแปลงข้อมูลระหว่างสองรูปแบบนี้จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง การแปลงข้อมูลไม่ได้เป็นเพียงการเปลี่ยนรูปแบบการจัดเก็บข้อมูล แต่ยังเกี่ยวข้องกับการตัดสินใจเชิงวิเคราะห์ว่าข้อมูลใดเหมาะสมกับการวิเคราะห์ใด

ข้อมูล Vector เหมาะสำหรับการแสดงวัตถุที่มีขอบเขตชัดเจน เช่น อาคาร ถนน และเขตการปกครอง ข้อมูล Raster เหมาะสำหรับการแสดงปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง เช่น อุณหภูมิ ความสูง และการกระจายตัวของสารเคมี

6.6.2 การแปลง Raster เป็น Vector (Raster to Vector Conversion)

การแปลง Raster เป็น Vector (R2V) คือ การแปลงข้อมูลราสเตอร์ให้เป็นข้อมูลเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยจุด เส้น และรูปหลายเหลี่ยม การแปลงนี้มักใช้ในการสร้างแผนที่เวกเตอร์จากภาพถ่ายดาวเทียมหรือภาพถ่ายทางอากาศ

กระบวนการแปลง Raster เป็น Vector ประกอบด้วยหลายขั้นตอน ได้แก่ การปรับปรุงคุณภาพของภาพ (Image Enhancement) การแบ่งส่วนภาพ (Image Segmentation) การจัดหมวดหมู่ (Classification) และการสร้างเวกเตอร์ (Vectorization) การปรับปรุงคุณภาพของภาพช่วยเพิ่มความชัดเจนของวัตถุ การแบ่งส่วนภาพแบ่งภาพออกเป็นพื้นที่ที่มีลักษณะคล้ายกัน การจัดหมวดหมู่กำหนดประเภทของวัตถุในแต่ละพื้นที่ และการสร้างเวกเตอร์สร้างเส้นขอบเขตของวัตถุ

ตัวอย่าง 6.19 การแปลงข้อมูลการใช้ที่ดินเป็นเวกเตอร์ ข้อมูลการใช้ที่ดินในรูปแบบราสเตอร์ที่ได้จากการจัดหมวดหมู่ภาพถ่ายดาวเทียมสามารถแปลงเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่แทนเขตการใช้ที่ดินแต่ละประเภทได้ ผลลัพธ์เป็นข้อมูลเวกเตอร์ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ร่วมกับข้อมูลเวกเตอร์อื่น เช่น เส้นถนนและแหล่งน้ำ

ตัวอย่าง 6.20 การแปลงเส้นชั้นความสูงเป็นเวกเตอร์ เส้นชั้นความสูง (Contour Lines) ที่ได้จากข้อมูลระดับความสูงสามารถสร้างเป็นข้อมูลเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยเส้นที่เชื่อมต่อกันแทนตำแหน่งที่มีความสูงเท่ากัน ข้อมูลเส้นชั้นความสูงเวกเตอร์มีประโยชน์ในการทำแผนที่ภูมิประเทศและการวิเคราะห์การมองเห็น

6.6.3 การแปลง Vector เป็น Raster (Vector to Raster Conversion)

การแปลง Vector เป็น Raster (V2R) คือ การแปลงข้อมูลเวกเตอร์ให้เป็นข้อมูลราสเตอร์ การแปลงนี้มักใช้ในการเตรียมข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์ราสเตอร์หรือการทำแผนที่แบบ Raster

วิธีการแปลง Vector เป็น Raster หลักมีหลายวิธี ได้แก่ วิธีจุดศูนย์กลาง (Centroid Method) ที่กำหนดค่าของพิกเซลจากค่าของวัตถุที่จุดศูนย์กลางของพิกเซล วิธีเส้นข้าม (Line Intersection Method) ที่พิกเซลใดมีเส้นของวัตถุข้ามผ่านจะถูกกำหนดให้เป็นค่าของวัตถุนั้น และวิธีการกระจายค่า (Area Weighting Method) ที่กระจายค่าของวัตถุไปยังพิกเซลตามสัดส่วนพื้นที่ที่วัตถุครอบคลุม

ตัวอย่าง 6.21 การแปลงข้อมูลเขตการปกครองเป็นราสเตอร์ ข้อมูลเขตการปกครองในรูปแบบรูปหลายเหลี่ยมสามารถแปลงเป็นกริดที่แต่ละพิกเซลมีค่าเป็นรหัสของเขตการปกครองที่พิกเซลนั้นตกอยู่ กริดผลลัพธ์สามารถใช้ในการวิเคราะห์ระดับโซน (Zonal Operations) ร่วมกับข้อมูลราสเตอร์อื่น เช่น การคำนวณพื้นที่เฉลี่ยของแต่ละเขตการปกครอง

ตัวอย่าง 6.22 การแปลงข้อมูลจุดเป็นราสเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่า (Interpolation) ข้อมูลจุด เช่น สถานีวัดอุณหภูมิ สามารถแปลงเป็นกริดที่แสดงการกระจายของอุณหภูมิโดยใช้วิธีการประมาณค่า เช่น Inverse Distance Weighting (IDW) หรือ Kriging ผลลัพธ์จะเป็นข้อมูลราสเตอร์ที่แสดงค่าอุณหภูมิสำหรับทุกตำแหน่งในพื้นที่

6.7 การประยุกต์ใช้ในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม

การวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม การประยุกต์ใช้เหล่านี้มีความสำคัญในการจัดการทรัพยากรอย่างยั่งยืน การประเมินผลกระทบสิ่งแวดล้อม และการวางแผนการใช้ที่ดิน

การประยุกต์ใช้หลักในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมประกอบด้วย การประเมินความเหมาะสมของที่ดิน การวิเคราะห์ความเสี่ยงดินถล่ม การประเมินศักยภาพของที่ดินสำหรับการเพาะปลูก การวิเคราะห์การกระจายตัวของสัตว์ป่า และการติดตามการเปลี่ยนแปลงของสิ่งแวดล้อม

การใช้ Map Algebra ร่วมกับข้อมูลหลายชั้น (Multi-criteria Analysis) ช่วยให้สามารถประเมินความเหมาะสมของพื้นที่ตามเกณฑ์หลายประการพร้อมกัน การวิเคราะห์นี้มักใช้ในการจัดหาพื้นที่สำหรับวัตถุประสงค์เฉพาะ เช่น การเลือกพื้นที่สำหรับโรงไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์หรือการจัดหาพื้นที่เพาะปลูกใหม่

6.7.1 การประเมินความเหมาะสมของที่ดิน (Land Suitability Analysis)

การประเมินความเหมาะสมของที่ดินเป็นกระบวนการที่ใช้การวิเคราะห์ราสเตอร์หลายชั้นในการประเมินว่าพื้นที่ใดเหมาะสมสำหรับวัตถุประสงค์ใด กระบวนการนี้ประกอบด้วยการกำหนดเกณฑ์ การให้คะแนนแต่ละเกณฑ์ การรวมคะแนน และการจัดระดับความเหมาะสม

เกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินความเหมาะสมของที่ดินขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ ตัวอย่างเช่น การประเมินความเหมาะสมสำหรับการเพาะปลูกข้าวอาจพิจารณาเกณฑ์ ได้แก่ ความลาดชัน (ควรน้อยกว่า $8°$) ความสูง (ควรต่ำกว่า 500 เมตร) ประเภทดิน และความใกล้ของแหล่งน้ำ

ตัวอย่าง 6.23 การประเมินความเหมาะสมของที่ดินสำหรับการเพาะปลูกมันสำปะหลัง พิจารณาเกณฑ์ดังนี้ ความลาดชันไม่เกิน $15°$ ปริมาณน้ำฝนรายปีระหว่าง $1{,}000$ ถึง $2{,}000$ มิลลิเมตร และดินเป็นดินร่วนหรือดินทรายร่วน การใช้ Map Algebra สามารถสร้างแผนที่ความเหมาะสมได้โดย

$$S = (S_{slope} \geq 0.8) \wedge (S_{rain} \geq 0.8) \wedge (S_{soil} \geq 0.8)$$

โดยที่ S_{slope}, S_{rain}, และ S_{soil} คือค่าความเหมาะสมของแต่ละเกณฑ์ที่ปรับให้อยู่ในช่วง 0 ถึง 1

ตัวอย่าง 6.24 การประเมินความเหมาะสมของที่ดินสำหรับโครงการอนุรักษ์ป่า การประเมินความเหมาะสมต้องพิจารณาทั้งความเหมาะสมทางนิเวศวิทยาและความเป็นไปได้ทางเศรษฐกิจและสังคม เกณฑ์ทางนิเวศวิทยาอาจรวมถึงความหลากหลายทางชีวภาพ ความสมบูรณ์ของระบบนิเวศ และความเชื่อมต่อกับพื้นที่อนุรักษ์อื่น

6.7.2 การวิเคราะห์ความเสี่ยงดินถล่ม (Landslide Risk Analysis)

การวิเคราะห์ความเสี่ยงดินถล่มใช้การวิเคราะห์ราสเตอร์หลายชั้นในการระบุพื้นที่ที่มีความเสี่ยงสูงต่อการเกิดดินถล่ม ปัจจัยที่มีผลต่อการเกิดดินถล่มประกอบด้วย ความลาดชัน ประเภทหิน ปริมาณน้ำฝน การระบายน้ำ และการใช้ที่ดิน

การสร้างแผนที่ความเสี่ยงดินถล่มใช้การรวมปัจจัยต่างๆ โดยกำหนดน้ำหนักของแต่ละปัจจัยตามความสำคัญ การวิเคราะห์นี้มีประโยชน์ในการวางแผนการใช้ที่ดิน การเตือนภัยล่วงหน้า และการจัดการภัยพิบัติ

ตัวอย่าง 6.25 การคำนวณดัชนีความเสี่ยงดินถล่ม (Landslide Susceptibility Index: LSI) ใช้สูตร

$$\text{LSI} = \sum_{i=1}^{n} (w_i \times f_i)$$

โดยที่ w_i คือน้ำหนักของปัจจัย i และ f_i คือค่าปกติของปัจจัย i ตัวอย่างเช่น น้ำหนักของความลาดชันอาจเป็น 0.4 และน้ำหนักของปริมาณน้ำฝนอาจเป็น 0.3 ผลลัพธ์จะเป็นกริดที่มีค่าความเสี่ยงตั้งแต่ 0 ถึง 1 โดยค่าที่สูงกว่าหมายถึงความเสี่ยงที่สูงกว่า

6.8 สรุป

การวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์เป็นเครื่องมือสำคัญในระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ที่มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม ในบทนี้ได้กล่าวถึงหลักการพื้นฐานของโครงสร้างข้อมูลราสเตอร์ ซึ่งเป็นรูปแบบการจัดเก็บข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ใช้กริดของพิกเซลในการแทนค่าความเข้มข้นหรือคุณลักษณะ

พีชคณิตแผนที่ (Map Algebra) เป็นชุดของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์และตรรกะที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์ การดำเนินการแบ่งได้เป็น 4 ประเภทตามขอบเขตการคำนวณ ได้แก่ Local Operations ที่ทำงานกับพิกเซลเดี่ยว Neighborhood Operations ที่ทำงานกับพิกเซลรอบข้าง Zonal Operations ที่ทำงานกับกลุ่มพิกเซลในโซนเดียวกัน และ Global Operations ที่ทำงานกับพิกเซลทั้งหมด

การวิเคราะห์พื้นผิว (Surface Analysis) ใช้ข้อมูลระดับความสูงในการคำนวณคุณลักษณะต่างๆ ของภูมิประเทศ ได้แก่ ความลาดชัน (Slope) ทิศทางของความลาด (Aspect) เงา (Hillshade) และพื้นที่ที่มองเห็นได้ (Viewshed) คุณลักษณะเหล่านี้มีการประยุกต์ใช้หลากหลายในงานด้านวิศวกรรม การวางแผน และการจัดการทรัพยากร

การแปลงข้อมูลระหว่างรูปแบบ Vector และ Raster มีความจำเป็นอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่ เนื่องจากการวิเคราะห์บางประเภทต้องใช้ข้อมูลในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งโดยเฉพาะ การเลือกรูปแบบข้อมูลที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับลักษณะของปรากฏการณ์ที่ต้องการวิเคราะห์และวิธีการวิเคราะห์ที่จะใช้

ความรู้ความเข้าใจในการวิเคราะห์ข้อมูลราสเตอร์เป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการประยุกต์ใช้ในงานด้านทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม เช่น การประเมินความเหมาะสมของที่ดินและการวิเคราะห์ความเสี่ยงดินถล่ม ซึ่งมีความสำคัญต่อการจัดการทรัพยากรอย่างยั่งยืนและการวางแผนการใช้ที่ดิน

6.9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่างข้อมูลราสเตอร์และข้อมูลเวกเตอร์ พร้อมยกตัวอย่างประเภทข้อมูลที่เหมาะสมกับแต่ละรูปแบบ

2. จากข้อมูลระดับความสูงในรูปแบบราสเตอร์ขนาด 5×5 จงคำนวณความลาดชันและทิศทางของความลาดของพิกเซลกลาง โดยมีค่าความสูงดังนี้ (หน่วย: เมตร ขนาดพิกเซล: 30 เมตร)

$$\begin{bmatrix} 100 & 105 & 110 & 108 & 105 \\ 102 & 108 & 115 & 112 & 107 \\ 98 & 105 & 112 & 118 & 110 \\ 95 & 100 & 108 & 115 & 112 \\ 90 & 95 & 102 & 110 & 108 \end{bmatrix}$$

3. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Local Operations, Neighborhood Operations, Zonal Operations และ Global Operations ใน Map Algebra พร้อมยกตัวอย่างการใช้งานของแต่ละประเภท

4. กำหนดข้อมูลการใช้ที่ดินและข้อมูลความลาดชัน จงอธิบายขั้นตอนการหาพื้นที่ที่เหมาะสมสำหรับการเพาะปลูกพืชไร่ โดยพืชไร่ต้องการความลาดชันไม่เกิน 10° และต้องอยู่ในเขตการใช้ที่ดินประเภทเกษตรกรรม

5. อธิบายกระบวนการคำนวณ Viewshed และยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในงานด้านวิศวกรรมหรือการวางแผน

6. เปรียบเทียบวิธีการแปลง Vector เป็น Raster และ Raster เป็น Vector พร้อมระบุข้อดีและข้อจำกัดของแต่ละวิธี

7. กำหนดข้อมูลระดับความสูง ข้อมูลปริมาณน้ำฝน และข้อมูลประเภทดิน จงออกแบบการวิเคราะห์ความเสี่ยงดินถล่มโดยใช้ Map Algebra พร้อมระบุสูตรและเกณฑ์การให้คะแนน

เอกสารอ้างอิงประจำบท

1. Longley, P.A., Goodchild, M.F., Maguire, D.J., & Rhind, D.W. (2015). Geographic Information Science and Systems. John Wiley & Sons.

2. Tomlin, C.D. (1990). Geographic Information Systems and Cartographic Modelling. Prentice Hall.

3. Burrough, P.A., & McDonnell, R.A. (1998). Principles of Geographical Information Systems. Oxford University Press.

4. Chang, K. (2015). Introduction to Geographic Information Systems. McGraw-Hill Education.

5. DeMers, M.N. (2009). Fundamentals of Geographic Information Systems. John

Wiley & Sons.

บรรณานุกรม

แผนการสอนประจำบทที่ 7

รหัสวิชา 4121701

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 7

ชื่อบท การนำเสนอผลลัพธ์และการทำแผนที่ (Cartography and Data Visualization)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ:

1. อธิบาย หลัก การ ออกแบบ แผนที่ และ การ จัด ลำดับ ความ สำคัญ ของ ข้อมูล ภาพ (Visual Hierarchy) ได้
2. เลือกใช้สัญลักษณ์ (Symbology) ที่เหมาะสมกับข้อมูลเชิงพื้นที่ ทั้งในด้านสี รูปร่าง และขนาดได้
3. จำแนกประเภทข้อมูลและเลือกวิธีการจำแนกข้อมูล (Classification Methods) ที่เหมาะสมได้
4. ออกแบบ และ จัด ทำ เลย์ เอา ต์ แผนที่ (Map Layout) ที่ สื่อสาร ข้อมูล เชิง พื้นที่ ได้ อย่าง มีประสิทธิภาพ
5. สื่อสารผลวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล

หัวข้อที่สอน

1. หลักการออกแบบแผนที่ (Visual Hierarchy)
2. การเลือกสัญลักษณ์ (Symbology): สี รูปร่าง ขนาด
3. การจำแนกข้อมูล (Classification Methods): Natural Breaks, Quantile, Equal Interval

4. การจัดทำเลย์เอาต์แผนที่ (Map Layout)
5. การสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล

สื่อการสอน

- สไลด์ประกอบการสอน
- ซอฟต์แวร์ GIS สำหรับสร้างแผนที่
- แบบฝึกหัดท้ายบท

การนำเสนอผลลัพธ์และการทำแผนที่ (Cartography and Data Visualization)

1. วัตถุประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาจบบทนี้ ผู้เรียนจะสามารถ:

1. อธิบาย หลัก การ ออกแบบ แผนที่ และ การ จัด ลำดับ ความ สำคัญ ของ ข้อมูล ภาพ (Visual Hierarchy) ได้
2. เลือกใช้สัญลักษณ์ (Symbology) ที่เหมาะสมกับข้อมูลเชิงพื้นที่ ทั้งในด้านสี รูปร่าง และขนาดได้
3. จำแนกประเภทข้อมูลและเลือกวิธีการจำแนกข้อมูล (Classification Methods) ที่เหมาะสม เช่น Natural Breaks, Quantile, และ Equal Interval ได้
4. ออกแบบ และ จัด ทำ เลย์ เอา ต์ แผนที่ (Map Layout) ที่ สื่อสาร ข้อมูล เชิง พื้นที่ ได้ อย่าง มีประสิทธิภาพ
5. สื่อสารผลวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล

2. บทนำ

การทำแผนที่ (Cartography) เป็นศาสตร์และศิลป์ในการสร้างแผนที่ที่มีประวัติศาสตร์ยาวนานหลายศตวรรษ แผนที่ไม่ใช่เพียงการนำเสนอตำแหน่งที่ตั้งทางภูมิศาสตร์เท่านั้น แต่ยังเป็นเครื่องมือสื่อสารที่ทรงพลังในการถ่ายทอดข้อมูลเชิงพื้นที่ให้ผู้อ่านเข้าใจได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง ในยุคปัจจุบันที่มีข้อมูลมหาศาลและเทคโนโลยีระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (GIS) แพร่หลาย การออกแบบแผนที่ที่ดีจึงมีความสำคัญมากขึ้น เนื่องจากแผนที่ที่ออกแบบไม่ดีอาจทำให้ผู้อ่านเข้าใจข้อมูลผิดพลาด หรือไม่สามารถถ่ายทอดรายละเอียดสำคัญได้ตามที่ตั้งใจ

การนำเสนอผลลัพธ์และการทำแผนที่ในบริบทของ GIS ครอบคลุมกระบวนการทั้งหมดตั้งแต่การเลือกข้อมูลที่จะแสดง การตัดสินใจว่าจะใช้สัญลักษณ์ใดเพื่อแสดงข้อมูลแต่ละประเภท การจัดระเบียบความสำคัญขององค์ประกอบต่างๆ บนแผนที่ ไปจนถึงการจัดวางองค์ประกอบโดยรวมที่เรียกว่าเลย์เอาต์ ซึ่งรวมถึงมาตราส่วน ทิศทาง คำอธิบายสัญลักษณ์ และชื่อแผนที่

บทนี้จะศึกษาหลักการพื้นฐานของการออกแบบแผนที่ โดยเริ่มจากแนวคิด Visual Hierarchy ซึ่งเป็นหัวใจของการจัดลำดับความสำคัญบนแผนที่ จากนั้นจะกล่าวถึงการเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสม วิธีการจำแนกข้อมูล การจัดทำเลย์เอาต์แผนที่ และหลักการสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ถูกต้องตามหลักสากล

หลักการออกแบบแผนที่และการจัดลำดับความสำคัญของข้อมูลภาพ

การออกแบบแผนที่ที่ดีต้องอาศัยความเข้าใจในหลักการพื้นฐานหลายประการ ซึ่งหลักการที่สำคัญที่สุดคือ Visual Hierarchy หรือการจัดลำดับความสำคัญของข้อมูลภาพ หลักการนี้หมายถึงการจัดระเบียบองค์ประกอบบนแผนที่ให้ผู้อ่านสามารถเข้าถึงข้อมูลสำคัญได้ก่อน แล้วจึงค่อยเข้าถึงรายละเอียดรองลงมา การจัดลำดับความสำคัญที่ดีจะช่วยให้ผู้อ่านสามารถนำทางผ่านแผนที่ได้อย่างเป็นธรรมชาติ โดยไม่รู้สึกสับสนหรือไม่แน่ใจว่าควรเริ่มตรงไหน

Visual Hierarchy ขึ้นอยู่กับหลักการทางการรับรู้ (Perceptual Principles) หลายประการ ได้แก่ ขนาด (Size) ที่วัตถุที่ใหญ่กว่าจะดึงดูดความสนใจก่อน สี (Color) ที่สีที่โดดเด่นหรือแตกต่างจะถูกมองเห็นก่อน ตำแหน่ง (Position) ที่องค์ประกอบตรงกลางหรือด้านบนมักถูกสังเกตก่อน และความชัดเจน (Contrast) ที่ความแตกต่างระหว่างพื้นหลังและวัตถุจะช่วยให้วัตถุโดดเด่นขึ้น

7.3.1 องค์ประกอบหลักและองค์ประกอบรองบนแผนที่

ในการออกแบบแผนที่ จำเป็นต้องแยกองค์ประกอบออกเป็นสองระดับ ได้แก่ องค์ประกอบหลัก (Primary Elements) และองค์ประกอบรอง (Secondary Elements) องค์ประกอบหลักคือข้อมูลที่แผนที่นี้ตั้งใจจะสื่อสารเป็นหลัก เช่น ขอบเขตการปกครอง ตำแหน่งเมือง หรือระดับฝนในพื้นที่ องค์ประกอบเหล่านี้ต้องโดดเด่นและชัดเจนที่สุดบนแผนที่ องค์ประกอบรองเป็นข้อมูลที่ช่วยให้ผู้อ่านเข้าใจแผนที่ได้ดีขึ้น แต่ไม่ใช่สาระสำคัญหลัก เช่น ถนน หรือชื่อแม่น้ำ

การแบ่งองค์ประกอบอย่างชัดเจนจะช่วยให้ผู้อ่านเข้าใจว่าข้อมูลใดสำคัญกว่าข้อมูลใด และควรให้ความสนใจก่อน ตัวอย่างเช่น ในแผนที่แสดงระดับรายได้ของประเทศ ข้อมูลสีพื้นที่ที่แสดงระดับรายได้ควรเป็นองค์ประกอบหลัก โดยใช้สีที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน ในขณะที่เส้นถนนและชื่อเมืองควรเป็นองค์ประกอบรองที่มีความเด่นน้อยกว่า

7.3.2 ความสมดุลและการจัดวางองค์ประกอบบนแผนที่

ความสมดุล (Balance) เป็นหลักการสำคัญในการออกแบบแผนที่ ความสมดุลไม่ได้หมายถึงการแบ่งพื้นที่เท่ากันทุกด้าน แต่หมายถึงการจัดวางองค์ประกอบต่างๆ ให้แผนที่โดยรวมดูมีน้ำหนักและเสถียรภาพ ความสมดุลแบ่งเป็นสองประเภท ได้แก่ ความสมดุลสมมาตร (Symmetrical Balance) ที่องค์

ประกอบถูกจัดวางสะท้อนกันรอบแกนกลาง และความสมดุลไม่สมมาตร (Asymmetrical Balance) ที่องค์ประกอบมีน้ำหนักไม่เท่ากันแต่รวมกันแล้วดูสมดุล

ในการจัดวางองค์ประกอบบนแผนที่ ต้องพิจารณาขนาดและความสำคัญของแต่ละองค์ประกอบ องค์ประกอบที่ใหญ่กว่าหรือมีสีเด่นกว่าจะมีน้ำหนักมากกว่า ดังนั้นองค์ประกอบเบาๆ อาจต้องวางในตำแหน่งที่ห่างจากกึ่งกลางเพื่อสร้างความสมดุล ตำแหน่งของกรอบแผนที่ เส้นแบ่งมาตราส่วน คำอธิบายสัญลักษณ์ และชื่อแผนที่ ล้วนมีผลต่อความสมดุลโดยรวม

7.4 การเลือกสัญลักษณ์สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่

สัญลักษณ์ (Symbology) เป็นสิ่งที่เชื่อมโยงระหว่างข้อมูลเชิงพื้นที่กับการรับรู้ของผู้อ่าน การเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมจะช่วยให้ผู้อ่านเข้าใจข้อมูลได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง ในทางตรงกันข้าม การเลือกสัญลักษณ์ที่ไม่เหมาะสมอาจทำให้ผู้อ่านเข้าใจผิด หรือไม่สามารถอ่านข้อมูลได้เลย การเลือกสัญลักษณ์ต้องพิจารณาจากประเภทของข้อมูล ระดับการวัดของข้อมูล และวัตถุประสงค์ของการสื่อสาร

สัญลักษณ์สำหรับข้อมูลเชิงพื้นที่แบ่งเป็นสามประเภทหลัก ได้แก่ สัญลักษณ์จุด (Point Symbols) สำหรับข้อมูลที่มีตำแหน่งเฉพาะจุด สัญลักษณ์เส้น (Line Symbols) สำหรับข้อมูลที่มีลักษณะเป็นเส้นทางหรือขอบเขต และสัญลักษณ์พื้นที่ (Area Symbols) สำหรับข้อมูลที่ครอบคลุมพื้นที่หนึ่งๆ

7.4.1 การใช้สีในการแสดงข้อมูล

สี (Color) เป็นสัญลักษณ์ที่มีพลังในการถ่ายทอดข้อมูลอย่างมาก เนื่องจากสีสามารถดึงดูดความสนใจและถ่ายทอดความหมายได้อย่างรวดเร็ว อย่างไรก็ตาม การใช้สีต้องพิจารณาอย่างรอบคอบ เพราะการรับรู้สีมีความแตกต่างกันในแต่ละบุคคล และวัฒนธรรมที่ต่างกันอาจให้ความหมายต่างกันกับสีเดียวกัน หลักการใช้สีในแผนที่แบ่งเป็นสองแนวทางหลัก ได้แก่ การใช้สีตามลำดับ (Sequential Color) และการใช้สีแตกต่าง (Diverging Color)

การใช้สีตามลำดับเหมาะสำหรับข้อมูลที่มีค่าต่อเนื่องจากน้อยไปมากหรือมากไปน้อย เช่น ระดับรายได้ หรือปริมาณฝน สีจะเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปตามค่าของข้อมูล โดยทั่วไปจะใช้โทนสีเดียวกันที่มีความเข้มข้นแตกต่างกัน หรือเปลี่ยนจากสีอ่อนไปสีเข้ม ตัวอย่างเช่น ใช้เฉดสีเขียวอ่อนไปเขียวเข้มเพื่อแสดงระดับปริมาณฝนจากน้อยไปมาก

การใช้สีแตกต่างเหมาะสำหรับข้อมูลที่มีค่าเบี่ยงเบนจากค่ากลาง เช่น อุณหภูมิที่สูงหรือต่ำกว่าค่าเฉลี่ย หรือการเปลี่ยนแปลงจากช่วงเวลาอ้างอิง การใช้สีแตกต่างจะมีสองสีที่แตกต่างกันมากในสองขั้ว เช่น แดงกับน้ำเงิน โดยมีสีกลางเป็นตัวเชื่อม ในกรณีนี้สีกลางมักเป็นสีขาวหรือสีที่เป็นกลางที่สุด

7.4.2 การใช้รูปร่างและขนาดในการแสดงข้อมูล

รูปร่าง (Shape) และขนาด (Size) เป็นสัญลักษณ์ที่เหมาะสำหรับการแสดงข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณในประเภทต่างๆ รูปร่างใช้แสดงความแตกต่างของประเภท เช่น สัญลักษณ์สามเหลี่ยมสำหรับเมืองหลวง วงกลมสำหรับเมืองทั่วไป และสี่เหลี่ยมสำหรับท่าอากาศยาน การเลือกรูปร่างควรพิจารณาความเรียบง่ายและความแตกต่างที่ชัดเจนระหว่างรูปร่างต่างๆ เพื่อให้ผู้อ่านสามารถจดจำและแยกแยะได้ง่าย

ขนาดใช้แสดงปริมาณหรือความสำคัญ วัตถุที่ใหญ่กว่าจะถูกตีความว่ามีค่ามากกว่าหรือสำคัญกว่า การใช้ขนาดต้องพิจารณาขนาดจริงของพื้นที่ที่แสดงและขนาดขั้นต่ำที่สามารถมองเห็นได้ หากขนาดเล็กเกินไปผู้อ่านจะมองไม่เห็น แต่หากใหญ่เกินไปจะทำให้สัญลักษณ์ทับซ้อนกันและอ่านยาก การกำหนดขนาดควรใช้หลักการสเกลที่เหมาะสม เช่น สเกลเชิงเส้น สเกลพื้นที่ หรือสเกลรัศมี ตามประเภทของข้อมูลและวัตถุประสงค์การสื่อสาร

ในการใช้รูปร่างและขนาดร่วมกัน ต้องระวังไม่ให้เกิดการตีความผิดพลาด ตัวอย่างเช่น หากใช้ทั้งรูปร่างและขนาดเพื่อแสดงตัวแปรต่างกันสองตัว ต้องแน่ใจว่าผู้อ่านเข้าใจว่าตัวแปรใดแสดงด้วยรูปร่างและตัวแปรใดแสดงด้วยขนาด

7.5 การจำแนกข้อมูลสำหรับการแสดงบนแผนที่

การจำแนกข้อมูล (Data Classification) เป็นกระบวนการจัดกลุ่มค่าข้อมูลที่ต่อเนื่องออกเป็นช่วงหรือระดับที่แน่นอน เพื่อให้สามารถแสดงด้วยสัญลักษณ์ที่แตกต่างกันได้ การจำแนกข้อมูลมีความสำคัญอย่างยิ่ง เนื่องจากวิธีการจำแนกที่ต่างกันจะให้ภาพแผนที่ที่ต่างกัน และอาจนำไปสู่การตีความที่ต่างกันของข้อมูลชุดเดียวกัน การเลือกวิธีการจำแนกจึงต้องพิจารณาอย่างรอบคอบโดยคำนึงถึงลักษณะของข้อมูลและวัตถุประสงค์การสื่อสาร

วิธีการจำแนกข้อมูลที่นิยมใช้มีหลายวิธี แต่ละวิธีมีข้อดีและข้อจำกัดแตกต่างกัน ไม่มีวิธีใดที่ดีที่สุดสำหรับทุกกรณี ผู้ออกแบบแผนที่ต้องเข้าใจหลักการของแต่ละวิธีและเลือกใช้ตามความเหมาะสม

7.5.1 การจำแนกแบบ Equal Interval

วิธีการจำแนกแบบ Equal Interval หรือช่วงเท่ากัน เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด โดยแบ่งช่วงของข้อมูลออกเป็นส่วนเท่าๆ กัน ตัวอย่างเช่น หากข้อมูลมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 และต้องการแบ่งเป็น 5 ระดับ จะได้ช่วงละ 20 หน่วย ได้แก่ 0–20, 20–40, 40–60, 60–80, และ 80–100 วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่กระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ และเหมาะสำหรับการเปรียบเทียบค่ากับมาตรฐานที่รู้จัก

ข้อจำกัดของวิธี Equal Interval คือไม่เหมาะกับข้อมูลที่กระจายตัวไม่สม่ำเสมอ หากข้อมูลส่วน

ใหญ่อยู่ในช่วงแคบๆ แต่มีค่าสุดขั้ว (Outliers) บางค่า วิธีนี้จะทำให้ช่วงส่วนใหญ่มีข้อมูลหนาแน่น แต่ช่วงสุดท้ายจะมีเพียงค่าสุดขั้วเท่านั้น ทำให้การแสดงสีไม่สื่อความหมายที่แท้จริง

7.5.2 การจำแนกแบบ Quantile

วิธีการจำแนกแบบ Quantile หรือจำนวนเท่ากัน เป็นวิธีที่พยายามแบ่งข้อมูลให้แต่ละระดับมีจำนวนข้อมูลเท่าๆ กัน ตัวอย่างเช่น หากแบ่งเป็น 5 ระดับ จะพยายามให้แต่ละระดับมีข้อมูลประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์ของทั้งหมด วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่กระจายตัวอย่างไม่สม่ำเสมอ และต้องการเน้นให้เห็นลำดับที่ชัดเจน

ข้อจำกัดของวิธี Quantile คืออาจทำให้ช่วงของแต่ละระดับมีความกว้างต่างกันมาก ซึ่งอาจทำให้ผู้อ่านเข้าใจผิดว่าความแตกต่างระหว่างค่าในระดับที่มีช่วงแคบกว่ามีความสำคัญน้อยกว่า นอกจากนี้ หากข้อมูลมีค่าซ้ำกันมาก การแบ่งอาจไม่เป็นไปตามที่ตั้งใจ

7.5.3 การจำแนกแบบ Natural Breaks

วิธีการจำแนกแบบ Natural Breaks หรือจุดแตกตัวตามธรรมชาติ เป็นวิธีที่ใช้อัลกอริทึมในการหาจุดที่ข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด ทำให้แต่ละระดับมีความเป็นเนื้อเดียวกันภายในสูงสุด วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการรวมกลุ่มตามธรรมชาติ เช่น ระดับความสูงที่มีกลุ่มที่ราบ ที่ราบสูง และเทือกเขา

ข้อจำกัดของวิธี Natural Breaks คือจำนวนข้อมูลในแต่ละระดับอาจไม่เท่ากัน และจุดแตกตัวอาจดูไม่สมเหตุสมผลสำหรับผู้อ่านที่ไม่คุ้นเคยกับข้อมูล การเลือกจำนวนช่วงก็มีผลต่อผลลัพธ์เช่นกัน หากเลือกจำนวนช่วงมากเกินไปจะทำให้แต่ละระดับมีข้อมูลน้อยและอาจไม่มีความหมาย แต่หากเลือกจำนวนช่วงน้อยเกินไปจะทำให้สูญเสียรายละเอียด

ตารางที่ 21 เปรียบเทียบวิธีการจำแนกข้อมูลทั้งสามวิธี

เกณฑ์	**Equal Interval**	**Quantile**	**Natural Breaks**
หลักการ	ช่วงเท่ากัน	จำนวนข้อมูลเท่ากัน	จุดเปลี่ยนแปลงมากที่สุด
ข้อดี	ง่าย เหมาะกับข้อมูลสม่ำเสมอ	เน้นลำดับชัดเจน	สะท้อนการกระจายตัวจริง
ข้อจำกัด	ไม่เหมาะกับ Outliers	ช่วงไม่เท่ากัน	อาจดูไม่สมเหตุสมผล
เหมาะกับ	การเปรียบเทียบมาตรฐาน	การเรียงลำดับ	ข้อมูลที่รวมกลุ่มตามธรรมชาติ

ตารางที่ 21 แสดงการเปรียบเทียบวิธีการจำแนกข้อมูลทั้งสามวิธีโดยสรุป ผู้ออกแบบแผนที่ควรทดลองใช้หลายวิธีและเปรียบเทียบผลลัพธ์ก่อนตัดสินใจเลือกวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูลและ

วัตถุประสงค์ของตน

ที่:ธจัดทำเลย์เอาต์แผนที่

เลย์เอาต์แผนที่ (Map Layout) หมายถึงการจัดวางองค์ประกอบทั้งหมดบนแผนที่ให้เป็นระเบียบและสื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ เลย์เอาต์ที่ดีจะช่วยให้ผู้อ่านสามารถเข้าใจแผนที่ได้อย่างรวดเร็วและครบถ้วน โดยไม่ต้องอ่านคำอธิบายยาวๆ องค์ประกอบหลักของเลย์เอาต์แผนที่ประกอบด้วยเนื้อที่แผนที่หลัก มาตราส่วน ทิศทาง คำอธิบายสัญลักษณ์ และชื่อแผนที่

การจัดทำเลย์เอาต์ต้องพิจารณาหลายปัจจัย ได้แก่ ขนาดและรูปร่างของพื้นที่ที่จะแสดง จำนวนและขนาดขององค์ประกอบต่างๆ ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ การใช้พื้นที่ว่างอย่างมีประสิทธิภาพ และการจัดวางให้สมดุล ทั้งนี้ต้องคำนึงถึงการใช้งานจริงด้วย เช่น หากแผนที่จะถูกพิมพ์ในหนังสือ ต้องพิจารณาขนาดหน้ากระดาษและการจัดวางให้เหมาะสมกับการอ่าน

7.6.1 มาตราส่วนและทิศทาง

มาตราส่วน (Scale) เป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของแผนที่ทุกฉบับ เนื่องจากบอกผู้อ่านว่าความสัมพันธ์ระหว่างระยะบนแผนที่กับระยะจริงบนพื้นโลกเป็นอย่างไร มาตราส่วนแสดงได้หลายรูปแบบ ได้แก่ มาตราส่วนเชิงเส้น (Bar Scale) ที่แสดงเป็นเส้นที่มีช่วงระยะจำลอง มาตราส่วนตัวเลข (Numerical Scale) ที่แสดงเป็นอัตราส่วน เช่น 1:50,000 และมาตราส่วนคำบอก (Verbal Scale) ที่บอกว่า 1 เซนติเมตรเท่ากับ 500 เมตร

ทิศทาง (Direction) แสดงได้โดยใช้ลูกศรชี้ทิศเหนือ ซึ่งควรชี้ขึ้นด้านบนของแผนที่เสมอ ไม่ว่าแผนที่จะหมุนอย่างไรก็ตาม ลูกศรทิศเหนือเป็นสัญลักษณ์มาตรฐานที่ผู้อ่านคุ้นเคยและเข้าใจได้ทันที ในบางกรณีอาจมีทิศใต้ ทิศตะวันออก หรือทิศตะวันตก เพิ่มเติม แต่ทิศเหนือเป็นสิ่งจำเป็นขัด minimum ที่ต้องมี

7.6.2 คำอธิบายสัญลักษณ์และชื่อแผนที่

คำอธิบายสัญลักษณ์ (Legend) เป็นองค์ประกอบที่อธิบายความหมายของสัญลักษณ์ต่างๆ บนแผนที่ คำอธิบายสัญลักษณ์ที่ดีต้องครบถ้วน ชัดเจน และเข้าใจง่าย ทุกสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนแผนที่ต้องมีคำอธิบาย ไม่ว่าจะเป็นสีพื้นที่ เส้น หรือจุด คำอธิบายควรจัดวางในตำแหน่งที่เหมาะสม โดยทั่วไปจะอยู่มุมล่างขวาหรือมุมล่างซ้ายของแผนที่

ชื่อแผนที่ (Title) ควรบอกชัดเจนว่าแผนที่นี้แสดงอะไร ชื่อควรมีขนาดใหญ่และโดดเด่นที่สุดบนแผนที่ ชื่อที่ดีประกอบด้วยสามส่วน ได้แก่ หัวข้อหลักที่บอกว่าแผนที่แสดงอะไร พื้นที่ที่แสดง และช่วงเวลาหรือปีที่ข้อมูลสร้าง ตัวอย่างเช่น ”ระดับรายได้ประชากรรายจังหวัด ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ พ.ศ. 2566”

ที่:ใช้สื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล

การสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากลเป็นเป้าหมายสูงสุดของการทำแผนที่ แผนที่ที่ดีไม่เพียงแต่ต้องสวยงามเท่านั้น แต่ต้องสื่อสารข้อมูลได้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพ การสื่อสารที่ดีเริ่มจากการเข้าใจผู้อ่านเป้าหมาย วัตถุประสงค์ของแผนที่ และบริบทที่แผนที่จะถูกใช้งาน

หลักการสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ที่ถูกต้องตามหลักสากลมีหลายประการ ได้แก่ ความถูกต้องของข้อมูล (Data Accuracy) ที่แผนที่ต้องแสดงข้อมูลที่ถูกต้องและเป็นปัจจุบัน ความชัดเจน (Clarity) ที่ผู้อ่านสามารถเข้าใจแผนที่ได้โดยไม่ต้องอ่านคำอธิบายเพิ่มเติมมาก ความเป็นต่อเนื่อง (Consistency) ที่สัญลักษณ์และสีที่ใช้ต้องสม่ำเสมอตลอดทั้งแผนที่ และความเหมาะสมกับการใช้งาน (Fitness for Purpose) ที่แผนที่ต้องตอบสนองวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

7.7.1 การหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดที่พบบ่อย

ในการออกแบบแผนที่ มีข้อผิดพลาดที่พบบ่อยหลายประการซึ่งควรหลีกเลี่ยง ข้อผิดพลาดประการแรกคือการใช้สีที่ไม่เหมาะสม เช่น การใช้สีแดงและเขียวร่วมกันที่ผู้ที่มีตาบอดสีไม่สามารถแยกได้ หรือการใช้สีที่มีความเข้มใกล้เคียงกันมากจนแยกไม่ออก ข้อผิดพลาดประการที่สองคือการเลือกวิธีการจำแนกข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ทำให้ภาพที่ได้บิดเบือนการกระจายตัวของข้อมูล

ข้อผิดพลาดประการที่สามคือการแบ่งพื้นที่ไม่เท่ากัน ทำให้ผู้อ่านเข้าใจผิดว่าพื้นที่ที่ใหญ่กว่ามีความสำคัญหรือมีปริมาณมากกว่า ข้อผิดพลาดประการที่สี่คือการใส่ข้อมูลมากเกินไป ทำให้แผนที่รกและอ่านยาก และข้อผิดพลาดประการที่ห้าคือการไม่ระบุแหล่งข้อมูลและวันที่ ทำให้ผู้อ่านไม่ทราบว่าข้อมูลมาจากไหนและเป็นปัจจุบันหรือไม่

7.7.2 มาตรฐานสากลในการทำแผนที่

ในการทำแผนที่ที่ถูกต้องตามหลักสากล มีมาตรฐานและข้อกำหนดต่างๆ ที่ควรปฏิบัติตาม มาตรฐานที่สำคัญที่สุดคือมาตรฐาน ISO 19100 ซึ่งเป็นมาตรฐานสากลสำหรับข้อมูลภูมิศาสตร์ มาตรฐานนี้กำหนดหลักการและข้อกำหนดต่างๆ สำหรับการทำแผนที่ รวมถึงคุณภาพของข้อมูล ระบบอ้างอิงพิกัด และการแสดงผล

นอกจากนี้ยังมีหลักการสากลในการออกแบบแผนที่ที่เรียกว่า Cartographic Design Principles ซึ่งครอบคลุมการใช้สี สัญลักษณ์ ตัวอักษร และองค์ประกอบต่างๆ ผู้ทำแผนที่ควรศึกษาและปฏิบัติตามหลักการเหล่านี้ เพื่อให้แผนที่ที่สร้างสามารถสื่อสารกับผู้อ่านทั่วโลกได้อย่างมีประสิทธิภาพ

7.9 สรุป

การนำเสนอผลลัพธ์และการทำแผนที่เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ที่ต้องอาศัยความเข้าใจในหลักการพื้นฐานหลายประการ การจัดลำดับความสำคัญของข้อมูลภาพ (Visual Hierarchy) เป็นหัวใจสำคัญที่ช่วยให้ผู้อ่านเข้าถึงข้อมูลสำคัญได้ก่อน การเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมทั้งในด้านสี รูปร่าง และขนาดจะช่วยถ่ายทอดข้อมูลได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว การจำแนกข้อมูลด้วยวิธีที่เหมาะสม ไม่ว่าจะเป็น Equal Interval, Quantile, หรือ Natural Breaks จะช่วยให้การแสดงข้อมูลสะท้อนความเป็นจริงได้ดีที่สุด

การจัดทำเลย์เอาต์แผนที่ที่ดีต้องพิจารณาการจัดวางองค์ประกอบทั้งหมดอย่างสมดุลและเป็นระเบียบ มาตราส่วนและทิศทางต้องชัดเจน คำอธิบายสัญลักษณ์และชื่อแผนที่ต้องครบถ้วน ทั้งนี้ทั้งหมดต้องสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ให้อ่านง่ายและถูกต้องตามหลักสากล โดยหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดที่พบบ่อยและปฏิบัติตามมาตรฐานสากลในการทำแผนที่

ความรู้และทักษะในบทนี้จะเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการสร้างแผนที่ที่มีประสิทธิภาพในการสื่อสารข้อมูลเชิงพื้นที่ ไม่ว่าจะใช้ในงานวิชาการ งานวิจัย หรืองานประยุกต์ต่างๆ ผู้เรียนควรฝึกฝนการออกแบบแผนที่ด้วยซอฟต์แวร์ GIS จริง เพื่อให้เกิดความเข้าใจและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

7.10 ไฟล์โค้ดประกอบบท

ในบทนี้ได้กล่าวถึงหลักการพื้นฐานของการออกแบบแผนที่และการเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสม ผู้อ่านสามารถฝึกฝนการสร้างแผนที่โดยใช้ Python กับไลบรารี Matplotlib, Geopandas, และ contextily เพื่อทดลองสร้างแผนที่จริงจากข้อมูลเชิงพื้นที่ การทดลองรันโค้ดและปรับพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น สี ขนาด และวิธีการจำแนกข้อมูล จะช่วยให้เข้าใจผลกระทบของแต่ละตัวเลือกต่อการแสดงผลแผนที่ได้ดียิ่งขึ้น

/Chapter07$_Cartography_DataVisualization.ipynb$

ผู้อ่านควรทดลองรันโค้ดและปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ด้วยตนเอง เพื่อเรียนรู้ผลกระทบของแต่ละตัวเลือกในการออกแบบแผนที่

7.11 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงอธิบายหลักการ Visual Hierarchy และยกตัวอย่างว่าสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบแผนที่อย่างไร

2. ในการแสดงข้อมูลระดับรายได้รายจังหวัด ควรเลือกใช้วิธีการจำแนกข้อมูลแบบใด เพราะเหตุใดจึงควรเลือกเช่นนั้น

3. จงเปรียบเทียบข้อดีและข้อจำกัดของการใช้สีตามลำดับ (Sequential Color) กับการใช้สีแตกต่าง (Diverging Color) ในการแสดงข้อมูลบนแผนที่

4. จงอธิบายองค์ประกอบหลักที่ต้องมีในเลย์เอาต์แผนที่ และแต่ละองค์ประกอบมีความสำคัญอย่างไร

5. จงระบุข้อผิดพลาดที่พบบ่อยในการทำแผนที่ และเสนอแนวทางการหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดเหล่านั้น

6. หากต้องสร้างแผนที่แสดงการกระจายตัวของโรงพยาบาลทั่วประเทศไทย ควรเลือกใช้สัญลักษณ์ประเภทใด เพราะเหตุใด

7. จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของพื้นที่บนแผนที่กับการรับรู้ของผู้อ่าน และมีวิธีการอย่างไรในการหลีกเลี่ยงการตีความผิด

เอกสารอ้างอิง

1. Slocum, T. A., McMaster, R. B., Kessler, F. C., & Howard, H. H. (2021). Thematic Cartography and Geovisualization (4th ed.). CRC Press.

2. Brewer, C. A. (2016). Designing Better Maps: A Guide for GIS Users (2nd ed.). Esri Press.

3. Kraak, M. J., & Ormeling, F. (2020). Cartography: Visualization of Geospatial Data (4th ed.). CRC Press.

4. Dykes, J., MacEachren, A. M., & Kraak, M. J. (2005). Exploring Geovisualization. Elsevier.

5. ICA Commission on Geovisualization (2019). Geospatial Visualization. International Cartographic Association.

บทที่ 12 เอกสารอ้างอิง