เอกสารคำสอน รหัสวิชา 4091606

คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์ (Mathematics for Computer)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์

2568

สารบัญ

	หน้า
สารบัญตาราง	**(7)**
สารบัญภาพ	**(9)**
แผนบริหารการสอนประจำวิชา	**1**
แผนการสอนประจำบทที่ 1	**7**
1 ตรรกศาสตร์ (Logic)	**9**
1.1 ความหมายและความสำคัญของตรรกศาสตร์	9
1.2 ประพจน์ (Propositions)	9
1.3 ตัวเชื่อมประพจน์ (Logical Connectives)	11
1.4 ตารางค่าความจริง (Truth Tables)	11
1.5 สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง	15
1.6 ความสมมูลเชิงตรรกะและกฎพีชคณิตของประพจน์	19
1.7 ตัวเชื่อมเพิ่มเติม XOR, NAND, NOR	22
1.8 ประพจน์เปิดและตัวบ่งปริมาณ (Predicates and Quantifiers)	24
1.9 การอนุมาน (Inference Rules)	25
1.10 การพิสูจน์ด้วยตารางค่าความจริง	32
สรุปบทเรียน	36
แบบฝึกหัดท้ายบท	37
เฉลยแบบฝึกหัด	39
คำถามท้ายบทที่ 1	41
ใบงานที่ 1	42
เอกสารอ้างอิง	44
แผนการสอนประจำบทที่ 2	**45**
2 ทฤษฎีเซต (Set Theory)	**47**
2.1 ความเป็นมาและความสำคัญของทฤษฎีเซต	47

2.2 นิยามพื้นฐานของเซต 48
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต 52
2.4 การดำเนินการระหว่างเซต (Set Operations) 54
2.5 กฎของเดมอร์แกน (De Morgan's Laws) 63
2.6 การนับจำนวนสมาชิกของเซต (Cardinality). 67
2.7 การประยุกต์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ 70
2.8 เซตที่นับได้และเซตที่นับไม่ได้ 73
สรุปบทเรียน 75
แบบฝึกหัด 76
เฉลยแบบฝึกหัด. 80
คำถามท้ายบทที่ 2 83
ใบงานที่ 2 84
เอกสารอ้างอิง 86

แผนการสอนประจำบทที่ 3 87

3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and Functions) 89

3.1 พื้นฐานความสัมพันธ์และคู่อันดับ 89
3.2 โดเมน เรนจ์ และความสัมพันธ์ผกผัน. 92
3.3 การประกอบความสัมพันธ์ 95
3.4 การปิดคุณสมบัติของความสัมพันธ์ 95
3.5 พื้นฐานฟังก์ชัน โดเมน โคโดเมน และเรนจ์ 97
3.6 ประเภทของฟังก์ชันและการประกอบฟังก์ชัน 98
3.7 ฟังก์ชันพิเศษในทางคอมพิวเตอร์. 101
3.8 ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series). 102
3.9 การประยุกต์ใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ 106
สรุปบทเรียน 109
แบบฝึกหัด 110
เฉลยแบบฝึกหัด. 112
คำถามท้ายบทที่ 3 114
ใบงานที่ 3 115

เอกสารอ้างอิง 117

แผนการสอนประจำบทที่ 4 119

4 ระบบเลขฐาน (Number Bases) 121

4.1 ระบบเลขฐานสิบ (Decimal System) 121

4.2 ระบบเลขฐานสอง (Binary System) 123

4.3 ระบบเลขฐานแปด (Octal System) 126

4.4 ระบบเลขฐานสิบหก (Hexadecimal System) 127

4.5 การแปลงฐานทั่วไป 130

4.6 การแปลงจำนวนทศนิยมระหว่างฐาน 132

4.7 การบวกและลบเลขฐานสอง 134

4.8 การคูณและการหารเลขฐานสอง 137

4.9 การแทนข้อมูลในคอมพิวเตอร์ 138

สรุปบทเรียน 141

แบบฝึกหัดท้ายบท 142

เฉลยแบบฝึกหัด 144

คำถามท้ายบทที่ 4 145

ใบงานที่ 4 146

เอกสารอ้างอิง 147

แผนการสอนประจำบทที่ 5 149

5 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices & Determinants) 151

5.1 นิยามพื้นฐานของเมทริกซ์ 151

5.2 การดำเนินการระหว่างเมทริกซ์ 156

5.3 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) 163

5.4 ตัวผกผันของเมทริกซ์ (Matrix Inverse) 170

5.5 ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of Linear Equations) 173

5.6 การประยุกต์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ 177

สรุปบทเรียน 182

แบบฝึกหัด 183

เฉลยแบบฝึกหัด. 185
คำถามท้ายบทที่ 5 187
ใบงานที่ 5 188
เอกสารอ้างอิง 190

แผนการสอนประจำบทที่ 6 191

6 พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) 193

6.1 นิยามพื้นฐานของพีชคณิตบูลีน 193
6.2 การดำเนินการทางบูลีน (Boolean Operations) 195
6.3 กฎของพีชคณิตบูลีน (Boolean Identities). 200
6.4 กฎของ De Morgan (De Morgan’s Laws) 204
6.5 นิพจน์บูลีนและฟังก์ชันบูลีน (Boolean Expressions and Functions) 205
6.6 รูปแบบปกติ (Canonical Forms). 208
6.7 การลดรูปนิพจน์บูลีน (Boolean Expression Simplification) 211
6.8 แผนที่คาร์นอ (Karnaugh Map) 216
6.9 การประยุกต์ในวงจรดิจิทัล 220
6.10 ตัวอย่างในวิทยาการคอมพิวเตอร์ 225
สรุปบทเรียน 230
แบบฝึกหัด 231
เฉลยแบบฝึกหัด. 234
คำถามท้ายบทที่ 6 236
ใบงานที่ 6 237
เอกสารอ้างอิง 239

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐาน 5 ชนิด 11
ตารางที่ 2 ประพจน์เชื่อม $(p \wedge q)$ 11
ตารางที่ 3 ประพจน์เลือก $(p \vee q)$ 12
ตารางที่ 4 นิเสธ $(\neg p)$. 13
ตารางที่ 5 ประพจน์มีเงื่อนไข $(p \rightarrow q)$ 14
ตารางที่ 6 เงื่อนไขสองทาง $(p \leftrightarrow q)$. 14
ตารางที่ 7 ตารางพิสูจน์ความสมมูลของ Biconditional. 15
ตารางที่ 8 ตารางแสดงว่า $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์ 16
ตารางที่ 9 ตารางแสดงว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์ 17
ตารางที่ 10 ตารางแสดงว่า $p \wedge \neg p$ เป็นข้อขัดแย้ง. 18
ตารางที่ 11 ตารางแสดงว่า $p \wedge q$ เป็นประพจน์กลาง. 18
ตารางที่ 12 กฎพีชคณิตของประพจน์ (โดยที่ T แทนสัจนิรันดร์ และ F แทนข้อขัดแย้ง) 20
ตารางที่ 13 ตารางพิสูจน์ความสมมูลของประพจน์เงื่อนไขและแย้งสลับที่ 21
ตารางที่ 14 ตารางค่าความจริงของ XOR $(p \oplus q)$ 23
ตารางที่ 15 ตารางค่าความจริงของ NAND และ NOR 23
ตารางที่ 16 ตารางแสดงกฎการอนุมานแบบ Modus Ponens 26
ตารางที่ 17 ตารางค่าความจริงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของกฎการยืนยันเงื่อนไขนำ. 27
ตารางที่ 18 ตารางแสดงกฎการอนุมานแบบ Modus Tollens 29
ตารางที่ 19 ตารางค่าความจริงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของกฎการปฏิเสธเงื่อนไขตาม 29
ตารางที่ 20 ตารางพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. 34
ตารางที่ 21 ความสัมพันธ์ระหว่าง Relational Algebra และ Set Theory 71
ตารางที่ 22 ความซับซ้อนเชิงเวลา (Time Complexity) ของ Hash Set Operations 73
ตารางที่ 23 ตารางเปรียบเทียบฐานสิบ ฐานสอง และฐานสิบหก 129
ตารางที่ 24 ตาราง ASCII Code แสดงการเปรียบเทียบรหัสฐานสิบและฐานสิบหก 139
ตารางที่ 25 ความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตบูลีน ทฤษฎีเซต และตรรกศาสตร์ 194

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ 1 วงจรสวิตช์ไฟฟ้าแบบอนุกรม แสดงการทำงานของ $p \wedge q$ 12
ภาพที่ 2 วงจรสวิตช์ไฟฟ้าแบบขนาน แสดงการทำงานของ $p \vee q$ 13
ภาพที่ 3 ตารางค่าความจริงและสัญลักษณ์ของลอจิกเกต XOR 22
ภาพที่ 4 แผนภาพเวนน์แสดงการดำเนินการยูเนียน $A \cup B$ 56
ภาพที่ 5 แผนภาพแสดงเซตไม่ทับซ้อน เมื่อ $A \cap B = \emptyset$. 57
ภาพที่ 6 แผนภาพเวนน์แสดงการดำเนินการอินเตอร์เซกชัน $A \cap B$. 58
ภาพที่ 7 แผนภาพเวนน์แสดง Distributive Law $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 59
ภาพที่ 8 แผนภาพเวนน์แสดงผลต่างของเซต $A - B$ 61
ภาพที่ 9 แผนภาพเวนน์แสดงส่วนเติมเต็ม (Complement) A^c ของเซต A 63
ภาพที่ 10 กฎของเดมอร์แกน: แผนภาพเวนน์แสดง $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ และ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 64
ภาพที่ 11 แผนภาพประกอบหลักการรวม-การแยก แสดงการหักส่วนซ้ำ $A \cap B$ ออกจาก $|A| + |B|$. 68
ภาพที่ 12 แผนภาพเปรียบเทียบลักษณะการจับคู่ของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง 99
ภาพที่ 13 แผนภาพแสดงการประกอบฟังก์ชัน $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ ที่ส่งผ่านข้อมูลจากเซต A ผ่าน B ไปยัง C. 100
ภาพที่ 14 แผนภาพแสดงค่าประจำหลักของเลขฐานสิบ 122
ภาพที่ 15 แผนภาพแสดงค่าประจำหลักของเลขฐานสอง 124
ภาพที่ 16 แผนภาพแสดงการจัดกลุ่มเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบหก 128
ภาพที่ 17 แผนภาพแสดงมิติของเมทริกซ์และตำแหน่งสมาชิก. 152
ภาพที่ 18 แผนภาพแสดงประเภทของเมทริกซ์ที่สำคัญ 154
ภาพที่ 19 แผนภาพแสดงการคูณแถวของเมทริกซ์กับหลักของเมทริกซ์ 159
ภาพที่ 20 แผนภาพแสดงดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2 163
ภาพที่ 21 แผนภาพแสดงการหมุน การขยาย และการเฉือนด้วยเมทริกซ์ 178
ภาพที่ 22 การแมปแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One) และแบบทั่วถึง (Onto) ของฟังก์ชัน 206

แผนการสอนประจำวิชา

รหัสวิชา 4091606
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์ (Mathematics for Computer)
จำนวนหน่วยกิต 3(3-0-6)
คณาจารย์ผู้สอน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ หลักสูตรสาขาวิชาวิทยาการข้อมูล ห้อง STA314
E-mail: pisit.nak@uru.ac.th

คำอธิบายรายวิชา

วิชา 4091606 คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์ ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8 และ 16 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ตลอดจนพีชคณิตบูลีน เพื่อใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการคำนวณ การจัดการข้อมูล และการทำงานของระบบคอมพิวเตอร์

บท	ชื่อบท	รากฐานจากบทก่อน	สู่การประยุกต์ในบทถัดไป
1	ตรรกศาสตร์ (Logic)	—	เป็นรากฐานให้ทุกบท
2	ทฤษฎี เซต (Set Theory)	ตรรกศาสตร์	เป็นรากฐานให้ทุกบท
3	ความ สัมพันธ์ และฟังก์ชัน	บท 1–2	ใช้ในบท 4, 5, 6
4	ระบบเลขฐาน	บท 1–2	ใช้ในบท 6
5	เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	บท 1–2	ใช้ในบท 6
6	พีชคณิตบูลีน	บท 1–5 ทั้งหมด	จุดสูงสุดของทุกบท

บทที่ 1 ตรรกศาสตร์ (Logic) เป็นบทแรกและเป็นรากฐานที่สำคัญที่สุดของวิชานี้ ศึกษาหลักการให้เหตุผลและการวิเคราะห์ค่าความจริงของประโยค โดยครอบคลุมประพจน์ ตัวเชื่อมประพจน์ (และ $\wedge$ หรือ $\vee$ นิเสธ $\neg$ ถ้า...แล้ว $\rightarrow$ ก็ต่อเมื่อ $\leftrightarrow$) ตารางค่าความจริง และการอนุมาน ตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการออกแบบวงจรดิจิทัล การเขียนโปรแกรม และการพิสูจน์ความถูกต้องของขั้นตอนวิธี ในบริบทของการเชื่อมโยงกับบทอื่น หลักการตรรกศาสตร์จะถูกนำไปใช้ในบทที่ 3 สำหรับการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ ในบทที่ 6 สำหรับการดำเนินการบูลีน (AND, OR, NOT) และในการพิสูจน์สูตรต่างๆ ตลอดทั้งวิชา

บทที่ 2 ทฤษฎีเซต (Set Theory) สร้างรากฐานต่อยอดจากตรรกศาสตร์โดยใช้แนวคิดเรื่องกลุ่มของสิ่งต่างๆ มาจัดระเบียบและจำแนกข้อมูล เนื้อหาครอบคลุมเซต สมาชิก การดำเนินการระหว่างเซต ได้แก่ ยูเนียน $A \cup B$ อินเตอร์เซกชัน $A \cap B$ ผลต่าง $A - B$ และคอมพลีเมนต์ A^c รวมถึงเซตของจำนวน ทฤษฎีเซตเป็นภาษาพื้นฐานของฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์ คำสั่ง SQL ที่ใช้ UNION, INTERSECT, EXCEPT ล้วนสะท้อนการดำเนินการระหว่างเซตโดยตรง ในบทที่ 3 ความรู้เรื่องเซตจะถูกนำไปใช้กับผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ และ

ความสัมพันธ์บนเซต สัญลักษณ์ $\cup$ $\cap$ – A^c จะปรากฏซ้ำในบทที่ 6 เมื่อเชื่อมโยงกับ AND, OR, NOT ในพีชคณิตบูลีน

บทที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and Functions) ต่อยอดจากทฤษฎีเซตโดยศึกษาความเชื่อมโยงระหว่างสมาชิกในเซตผ่านผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์ $R \subseteq A \times B$ ช่วยให้เข้าใจโครงสร้างข้อมูลเชิงสัมพันธ์ในฐานข้อมูล กราฟในโครงสร้างข้อมูล และการวิเคราะห์เครือข่าย ฟังก์ชัน $f : A \to B$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ชนิดพิเศษที่สมาชิกแต่ละตัวในเซตต้นกำเนิดจับคู่กับสมาชิกตัวเดียวในเซตเป้าหมาย มีบทบาทสำคัญในการเขียนโปรแกรมและการคำนวณ ในบริบทของบทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถแทนด้วยเมทริกซ์ได้ และในบทที่ 6 ฟังก์ชันบูลีนเป็นพื้นฐานของลอจิกวงจรดิจิทัล

บทที่ 4 ระบบเลขฐาน (Number Bases) ศึกษาวิธีการแทนจำนวนในรูปแบบต่างๆ โดยเฉพาะฐาน 2 (binary) ฐาน 8 (octal) และฐาน 16 (hexadecimal) ซึ่งเป็นรากฐานของการทำงานของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบเลขฐานสองในการประมวลผลข้อมูล เนื้อหานี้เชื่อมโยงกับสถาปัตยกรรมคอมพิวเตอร์ การเข้ารหัสข้อมูล และการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ในระดับต่ำ การแทนจำนวนในระบบเลขฐานต่างๆ ใช้หลักการเดียวกับการดำเนินการระหว่างเซตในบทที่ 2 คือการจัดกลุ่มและจำแนก ในบทที่ 6 ระบบเลขฐานสองเป็นพื้นฐานของการคำนวณบูลีนในวงจรดิจิทัล โดยบิต 0 และ 1 สอดคล้องกับค่าประพจน์เท็จและจริง

บทที่ 5 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices and Determinants) ศึกษาโครงสร้างข้อมูลแบบตารางสองมิติพร้อมการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การบวก การคูณเมทริกซ์ และเมทริกซ์ผกผัน เมทริกซ์เป็นเครื่องมือสำคัญในคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ การเรียนรู้ของเครื่อง และการประมวลผลภาพ การแปลงเมทริกซ์ใช้ในการหมุน การย่อ/ขยาย และการเลื่อนภาพ ความรู้เรื่องความสัมพันธ์จากบทที่ 3 ช่วยในการทำความเข้าใจการแปลงเชิงเส้นผ่านเมทริกซ์ และในบทที่ 6 เมทริกซ์จะถูกนำไปใช้ในการออกแบบวงจรคอมบิเนชันและซีเควนเชียล

บทที่ 6 พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) เป็นบทสุดท้ายที่รวมความรู้จากทุกบทเข้าด้วยกัน การเชื่อมโยงระหว่างตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซตปรากฏชัดเจนที่สุดในบทนี้ โดยค่าความจริง จริง (T) เท็จ (F) ในตรรกศาสตร์สอดคล้องกับสมาชิกในเซต และการดำเนินการบูลีน AND ($\cdot$) OR ($+$) NOT () มีคุณสมบัติเหมือนกับ $\cap$ $\cup$ complement ในทฤษฎีเซต กล่าวคือ $A \cap B$ มีคุณสมบัติเหมือน $A \cdot B$ และ $A \cup B$ มีคุณสมบัติเหมือน $A + B$ ตามกฎของเดมอร์แกน $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ซึ่งมีรูปแบบเดียวกับในตรรกศาสตร์ พีชคณิตบูลีนเป็นรากฐานของวงจรดิจิทัล ตรรกศาสตร์ในการเขียนโปรแกรม และการค้นหาข้อมูลในฐานข้อมูลด้วยเงื่อนไข AND, OR, NOT

ทุกบทในวิชานี้เชื่อมโยงกันทั้ง 6 บท โดยบทที่ 1 และ 2 เป็นรากฐานสำคัญที่สุด หลักการจากทั้งสองบทนี้จะถูกนำไปใช้ในทุกบทถัดไป ความเข้าใจอย่างแท้จริงในตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซตจะทำให้การเรียนรู้บทที่ 3 ถึง 6 เป็นไปอย่างราบรื่น และเมื่อมาถึงบทที่ 6 จะเห็นภาพรวมว่าทุกแนวคิดได้เชื่อมโยงกันอย่างเป็นระบบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักศึกษาสามารถอธิบายถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ได้
2. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในคุณลักษณะของเซต พร้อมทั้งความสัมพันธ์และฟังก์ชันได้
3. นักศึกษาสามารถแปลงและคำนวณในระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8, 16 ได้

4. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ได้
5. นักศึกษา มี ความ รู้ ความ เข้าใจ ใน พีช คณิต บู ลีน ซึ่ง เป็น เครื่อง มือ ที่ ทำให้ เข้าใจ การ ทำงาน ทาง ตรรกวิทยาภายในเครื่องคอมพิวเตอร์ได้

โครงการสอน

วิชาคณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์มีจำนวน 3 หน่วยกิต ใช้เวลาเรียน 3 ชั่วโมง/สัปดาห์ มีเวลาเรียนทั้งสิ้น 17 สัปดาห์ สามารถทำเป็นโครงการสอนได้ดังนี้

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
1–2	บทที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
3–4	บทที่ 2 เซต	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
5–7	บทที่ 3 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน	9	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
8	**สอบกลางภาคเรียน**			
9–11	บทที่ 4 ระบบเลขฐานต่าง ๆ โดยเฉพาะเลขฐาน 2, 8, 16	9	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
12–13	บทที่ 5 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	6	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
14–16	บทที่ 6 พีชคณิตบูลีน	9	บรรยาย สรุปบทเรียน อภิปราย ซักถาม และ แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ศึกษาเอกสารประกอบการสอน การตอบคำถามท้ายบท	ผศ.ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ
17	**สอบปลายภาคเรียน**			

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนรู้

1. วิธีสอน
    1.1. วิธีสอนส่วนใหญ่ใช้วิธีการบรรยายประกอบเอกสารประกอบการสอน และจัดกิจกรรมให้นักศึกษาอภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในชั้นเรียน
2. กิจกรรมการเรียนรู้
    2.1. ให้นักศึกษาตอบคำถามประจำบทในเอกสารประกอบการสอน
    2.2. ให้นักศึกษาศึกษาเอกสารประกอบการสอนเพิ่มเติมตามหัวข้อที่กำหนด
    2.3. ให้นักศึกษาร่วมอภิปราย ซักถาม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในชั้นเรียน

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน ตำรา และบทความวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เช่น เว็บไซต์และแหล่งเรียนรู้ออนไลน์ต่าง ๆ
3. คำถามประจำบท

การวัดและการประเมินผล

1. คะแนนระหว่างภาคเรียน 70%
    1.1. การตรงต่อเวลาและความซื่อสัตย์ 10%
    1.2. งานที่ได้รับมอบหมาย (Assignment) 10%
    1.3. กิจกรรมกลุ่มและการนำเสนอ 20%
    1.4. ทดสอบกลางภาคเรียน 30%
2. ทดสอบปลายภาคเรียน 30%

คะแนน	เกรด	ความหมาย
80–100	A	ดีเยี่ยม
75–79	B^+	ดีมาก
70–74	B	ดี
65–69	C^+	ดีพอใช้
60–64	C	พอใช้
55–59	D^+	อ่อน
50–54	D	อ่อนมาก
0–49	F	ตก

ตำรา เอกสาร และงานวิจัยประกอบการเรียนการสอน

1. เอกสารหลัก
    คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2556). *คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับคอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.
2. เอกสารเพิ่มเติม

2.1. คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2553). *คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับคอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.

2.2. อุ่นใจ ลิมตระกูล. (2538). *คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

ลงชื่อ .....ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ นาคใจ..... อาจารย์ผู้สอน

แผนการสอนประจำบทที่ 1

รหัสวิชา 4091606

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

หน่วยกิต 3 (3-0-6)

บทที่ 1

ชื่อบท ตรรกศาสตร์ (Logic)

จำนวนชั่วโมง 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อนักศึกษาเรียนบทนี้จบแล้ว นักศึกษาจะสามารถ

1. อธิบายความหมายและคุณสมบัติของประพจน์ และค่าความจริงได้
2. ใช้ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์พื้นฐาน 5 ตัว ได้แก่ $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ และอธิบายตัวเชื่อมเพิ่มเติม เช่น $\oplus$ ได้อย่างถูกต้อง
3. สร้างและวิเคราะห์ตารางค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบได้
4. ตรวจสอบสมมูลทางตรรกศาสตร์ และกฎพีชคณิตบูลีนได้
5. อธิบายและประยุกต์ใช้การอนุมาน เช่น Modus Ponens, Modus Tollens ได้
6. เชื่อมโยงหลักการตรรกศาสตร์กับการเขียนโปรแกรมและวงจรดิจิทัลได้

หัวข้อที่สอน

1. ประพจน์
2. ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์
3. ตารางค่าความจริง
4. สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง
5. สมมูลทางตรรกศาสตร์และกฎพีชคณิตของประพจน์
6. ตัวเชื่อมเพิ่มเติม XOR, NAND, NOR
7. ประพจน์เปิดและตัวบ่งปริมาณ
8. กฎการอนุมาน

สื่อการสอน

1. สไลด์ประกอบการสอน
2. ตัวอย่างโปรแกรมภาษา Python / C
3. แบบฝึกหัดท้ายบท

ตรรกศาสตร์ (Logic)

ในระบบคอมพิวเตอร์และการประมวลผลดิจิทัล การตัดสินใจของโปรแกรมอาศัยเงื่อนไขที่ชัดเจนและแน่ชัด ตัวอย่างเช่น ระบบควบคุมการเข้าถึงข้อมูลจะอนุญาตให้ผู้ใช้เข้าสู่ระบบได้ก็ต่อเมื่อ “รหัสผ่านถูกต้อง” และ “ผู้ใช้มีสิทธิ์ระดับผู้ดูแลระบบ” การตัดสินใจเหล่านี้อาศัยหลักการทางตรรกศาสตร์ ซึ่งเป็นกลไกในการแยกแยะข้อสรุปที่สมเหตุสมผลออกจากข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล

บทนี้ศึกษาตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ ซึ่งเป็นระบบตรรกศาสตร์พื้นฐานที่สุดในการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ Enderton, 2001 เนื้อหาเริ่มต้นจากการทำความเข้าใจประพจน์ ซึ่งเป็นหน่วยข้อมูลพื้นฐานที่สามารถระบุค่าความจริงได้อย่างแน่นอน จากนั้นจะศึกษาตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐาน 5 ชนิด ตารางค่าความจริง สัจนิรันดร์ ข้อขัดแย้ง Velleman, 2019 และกฎการอนุมานทางตรรกศาสตร์ Copi, Cohen, & McMahon, 2014; Hurley & Watson, 2024 ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการออกแบบวงจรดิจิทัลและการพิสูจน์ความถูกต้องของขั้นตอนวิธี

1.1 ความหมายและความสำคัญของตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ คือ ศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผล การคิดอย่างมีระบบ และหลักการสรุปผลที่ถูกต้องตามหลักเหตุผล โดยมีจุดมุ่งหมายสำคัญในการแยกแยะการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลออกจากข้อโต้แย้งที่มีข้อบกพร่อง การเข้าใจตรรกศาสตร์อย่างถ่องแท้ช่วยให้สามารถวิเคราะห์โครงสร้างของเงื่อนไข ตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุป และสร้างขั้นตอนวิธีที่มีความเสถียรได้

ในทางประวัติศาสตร์ ตรรกศาสตร์มีรากฐานมาจากปรัชญากรีกโบราณ โดยอริสโตเติลเป็นผู้พัฒนาระบบตรรกศาสตร์เชิงรูปนัยเป็นครั้งแรก ผ่านการอ้างเหตุผลที่เรียกว่า ตรรกบท Aristotle, 1938 ต่อมาในศตวรรษที่ 19 และ 20 ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้รับการพัฒนาอย่างก้าวกระโดดโดยนักคณิตศาสตร์ ได้แก่ George Boole Boole, 1854, Gottlob Frege Frege, 1879, และ Bertrand Russell Whitehead & Russell, 1910 จนกลายเป็นรากฐานของวิทยาการคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน

ในทางวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ตรรกศาสตร์นำไปประยุกต์ใช้ใน 3 ด้านหลัก ได้แก่ การออกแบบวงจรดิจิทัลที่ใช้ลอจิกเกตในการประมวลผลบิตข้อมูล การเขียนโปรแกรมที่ใช้โครงสร้างเงื่อนไขในการควบคุมลำดับการทำงาน และการตรวจสอบความถูกต้องของขั้นตอนวิธีเพื่อยืนยันว่าโปรแกรมทำงานได้ถูกต้องตามข้อกำหนด

1.2 ประพจน์ (Propositions)

ประพจน์ คือ ข้อความบอกเล่าหรือข้อความปฏิเสธที่มีค่าความจริงชัดเจนเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น คือ เป็นจริง (True, T) หรือเป็นเท็จ (False, F) โดยไม่พบความกำกวม เงื่อนไขข้อนี้ตัดข้อความสามกลุ่มออกไปจากการเป็นประพจน์ ได้แก่ ประโยคคำสั่ง ประโยคคำถาม และประโยคแสดงความรู้สึกหรือความคิดเห็น เพราะทั้งสามกลุ่มไม่มีค่าความจริงให้ตัดสิน การจำกัดขอบเขตเช่นนี้ทำให้ตรรกศาสตร์นำไปคำนวณด้วยเครื่องได้

การตรวจว่าข้อความใดเป็นประพจน์ทำได้โดยถามว่าข้อความนั้นระบุค่าความจริงได้หรือไม่ ถ้าระบุได้ว่าเป็นจริง (T) หรือเท็จ (F) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงค่าเดียว ข้อความนั้นเป็นประพจน์ แต่ถ้าระบุไม่ได้เพราะเป็นคำสั่ง คำถาม หรือการแสดงความรู้สึก ข้อความนั้นไม่เป็นประพจน์

1.2.1 ความหมายและค่าความจริงของประพจน์

ค่าความจริงของประพจน์ในตรรกศาสตร์คลาสสิกมีได้เพียงสองค่า ได้แก่ จริง (T หรือ 1) และ เท็จ (F หรือ 0) หลักการนี้เรียกว่า กฎทวิภาวะ ซึ่งระบุว่าประพจน์ใดๆ จะต้องมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น[1]

ประพจน์ที่มีค่าความจริงแน่นอนไม่เปลี่ยนแปลงตามสถานการณ์ เรียกว่า ประพจน์ค่าคงตัว ส่วนข้อความที่มีตัวแปรแฝงอยู่และค่าความจริงเปลี่ยนไปตามค่าของตัวแปร เรียกว่า ประพจน์เปิด ซึ่งจะกลายเป็นประพจน์สมบูรณ์เมื่อได้รับการแทนค่าตัวแปรแล้ว

1.2.2 ตัวอย่างประพจน์และการวิเคราะห์

การ แยกแยะ ข้อความ ทั่วไป ออก จาก ประพจน์ ทาง ตรรกศาสตร์ เป็น ทักษะ พื้น ฐาน ใน การ เขียนโปรแกรมและการกำหนดเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ ข้อความที่เป็นประพจน์ต้องสามารถตัดสินผลลัพธ์ได้อย่างแน่ชัดโดยไม่อิงกับความคิดเห็นส่วนบุคคล เกณฑ์ที่ใช้ตัดสินคือถามว่าข้อความนั้นถูกหรือผิดได้หรือไม่ ถ้าตอบได้ว่าถูกหรือผิดอย่างใดอย่างหนึ่งก็เป็นประพจน์ ถ้าตอบไม่ได้เพราะยังขาดข้อมูลหรือขึ้นกับมุมมองของผู้ตอบก็ไม่เป็นประพจน์ พิจารณาตัวอย่างการประเมินประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1 (การวิเคราะห์ความเป็นประพจน์และค่าความจริง) พิจารณาข้อความต่อไปนี้ พร้อมระบุว่าเป็นประพจน์หรือไม่และมีค่าความจริงอย่างไร

1. $2 + 3 = 5$
2. กรุงเทพมหานครเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย
3. กรุณาปิดประตูห้องเรียน
4. $x + 4 = 9$

วิธีทำ การวิเคราะห์ความเป็นประพจน์และค่าความจริงทีละข้อ มีรายละเอียดดังนี้

1. เป็นประพจน์ เนื่องจากเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่ระบุค่าความจริงได้ชัดเจน โดย $2 + 3 = 5$ มีค่าความจริงเป็นจริง (T)

2. เป็นประพจน์ เนื่องจากเป็นข้อเท็จจริงทางภูมิศาสตร์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (T)

3. ไม่เป็นประพจน์ เนื่องจากเป็นประโยคขอร้องหรือคำสั่ง ไม่สามารถประเมินค่าความจริงว่าเป็นจริงหรือเท็จได้

4. เป็นประพจน์เปิด เนื่องจากมีตัวแปร x ยังไม่สามารถตัดสินค่าความจริงได้จนกว่าจะกำหนดค่าให้แก่ x เช่น หาก $x = 5$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง แต่หาก $x = 1$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

■

[1] กฎทวิภาวะแตกต่างจากกฎกึดกันกลาง ซึ่งระบุว่าประพจน์ $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์เสมอ รายละเอียดจะกล่าวในหัวข้อความสมมูลเชิงตรรกะ

1.3

1.4

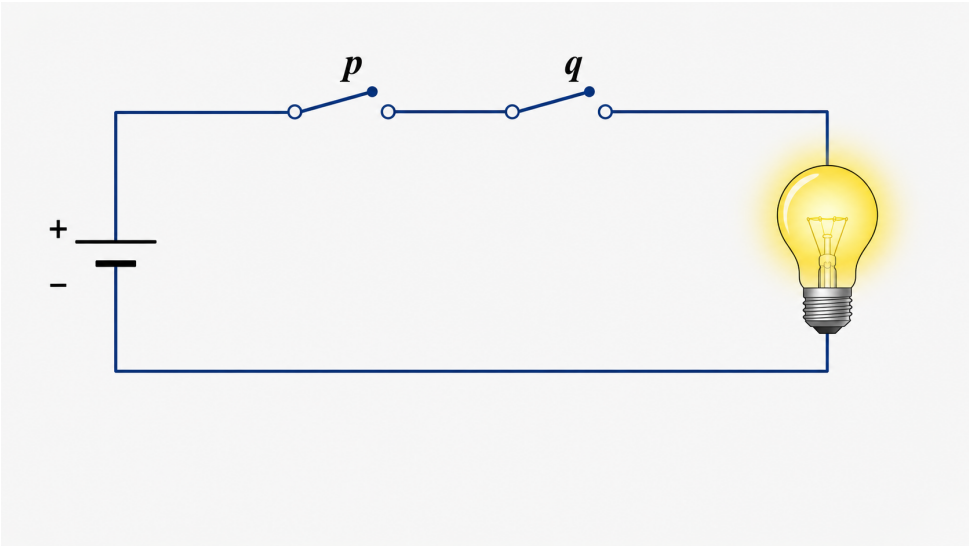
ตารางที่ 1 ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐาน 5 ชนิด

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

1.4.1

ตารางที่ 2 ประพจน์เชื่อม $(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

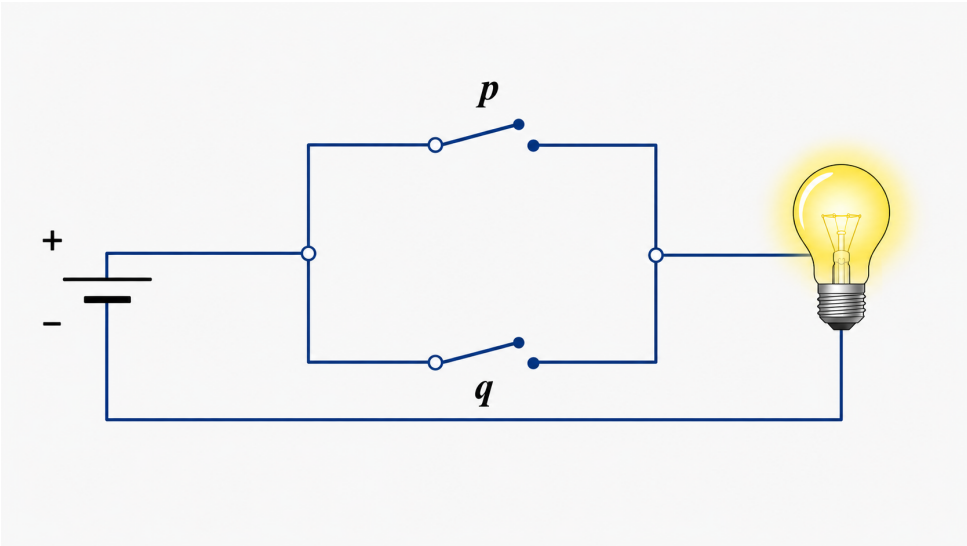


ภาพที่ 1 วงจรสวิตช์ไฟฟ้าแบบอนุกรม แสดงการทำงานของ $p \wedge q$

1.4.2

ตารางที่ 3 ประพจน์เลือก $(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F



ภาพที่ 2 วงจรสวิตซ์ไฟฟ้าแบบขนาน แสดงการทำงานของ $p \vee q$

1.4.3

ตารางที่ 4 นิเสธ ($\neg p$)

p	$\neg p$
T	F
F	T

1.4.4

ตารางที่ 5 ประพจน์มีเงื่อนไข ($p \to q$)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	**F**	**F**
F	T	T
F	F	T

1.4.5

ตารางที่ 6 เงื่อนไขสองทาง ($p \leftrightarrow q$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

บทแทรก 1.1

สำหรับทุกประพจน์ p และ q จะได้ว่า

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \tag{1.1}$$

โดยที่ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ, $\to$ คือตัวเชื่อมแบบถ้า...แล้วที่จะเท็จเพียงกรณีเดียวคือเมื่อเงื่อนไขนำเป็นจริงแต่เงื่อนไขตามเป็นเท็จ และ $\wedge$ คือตัวเชื่อมแบบและที่จะจริงเมื่อทั้งสองประพจน์เป็นจริง

ตารางที่ 7 ตารางพิสูจน์ความสมมูลของ Biconditional

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ตัวอย่างที่ 1.2 (การหาค่าความจริงของประพจน์) พิจารณาประพจน์ $(\neg p \wedge q) \to r$ จงหาค่าความจริงเมื่อ $p =$ F, $q =$ T, และ $r =$ F

วิธีทำ

1.5

1.5.1

บทนิยาม 1.1 สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ (Tautology) คือ ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย

ตารางที่ 8 ตารางแสดงว่า $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

ตารางที่ 9 ตารางแสดงว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	**ผลลัพธ์**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

ตัวอย่างที่ 1.3 (การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง) จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิธีทำ

1.5.2

บทนิยาม 1.2 ข้อขัดแย้ง

ข้อขัดแย้ง (Contradiction) คือ ประพจน์เชิงประกอบที่ไม่มีทางเป็นจริงได้ ไม่ว่าค่าความจริงของตัวแปรย่อยจะถูกกำหนดให้เป็นอะไรก็ตาม ประพจน์ที่เป็นข้อขัดแย้งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ

ตารางที่ 10 ตารางแสดงว่า $p \wedge \neg p$ เป็นข้อขัดแย้ง

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	**ผลลัพธ์**
T	F	F	F
F	T	F	F

1.5.3

ตารางที่ 11 ตารางแสดงว่า $p \wedge q$ เป็นประพจน์กลาง

p	q	$p \wedge q$	**ผลลัพธ์**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

1.6

บทนิยาม 1.3 ความสมมูลเชิงตรรกะ

ประพจน์ P และ Q เรียกว่า สมมูลเชิงตรรกะ (Logically Equivalent) เขียนแทนด้วย

$$P \equiv Q$$

ก็ต่อเมื่อ P และ Q มีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณีของการกำหนดค่าความจริงของตัวแปรย่อย หรือกล่าวอย่างเทียบเท่าว่า ประพจน์ $P \leftrightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์

1.6.1

ตัวอย่างที่ 1.4 (การใช้กฎพีชคณิตในการลดรูป) จงพิสูจน์ว่า $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$ โดยใช้กฎพีชคณิตของประพจน์

ตารางที่ 12 กฎพีชคณิตของประพจน์ (โดยที่ T แทนสัจนิรันดร์ และ F แทนข้อขัดแย้ง)

ชื่อกฎ	**รูปสมมูล**
กฎเอกลักษณ์ (Identity)	$p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p$
กฎครอบงำ (Domination)	$p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F$
กฎนิจพล (Idempotent)	$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$
กฎนิเสธซ้อน (Double Negation)	$\neg(\neg p) \equiv p$
กฎสลับที่ (Commutative)	$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
กฎเปลี่ยนกลุ่ม (Associative)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
กฎแจกแจง (Distributive)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
กฎเดอมอร์แกน (De Morgan)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
กฎดูดกลืน (Absorption)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
กฎนิเสธ (Negation)	$p \vee \neg p \equiv T, \quad p \wedge \neg p \equiv F$
กฎเงื่อนไข (Implication)	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
กฎกระจายเงื่อนไข (Exportation)	$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

วิธีทำ

1.6.2

บทนิยาม 1.4 Converse, Inverse, Contrapositive

กำหนดประพจน์เงื่อนไข $p \to q$

1. ส่วนกลับ (Converse) คือ $q \to p$
2. ผกผัน (Inverse) คือ $\neg p \to \neg q$
3. แย้งสลับที่ (Contrapositive) คือ $\neg q \to \neg p$

ตารางที่ 13 ตารางพิสูจน์ความสมมูลของประพจน์เงื่อนไขและแย้งสลับที่

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ตัวอย่างที่ 1.5 (การเขียน Converse, Inverse, Contrapositive) กำหนดประพจน์ “ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 2 แล้ว n เป็นจำนวนคี่” จงเขียนส่วนกลับ ผกผัน และแย้งสลับที่ของประพจน์นี้

วิธีทำ

1.
2.
3.

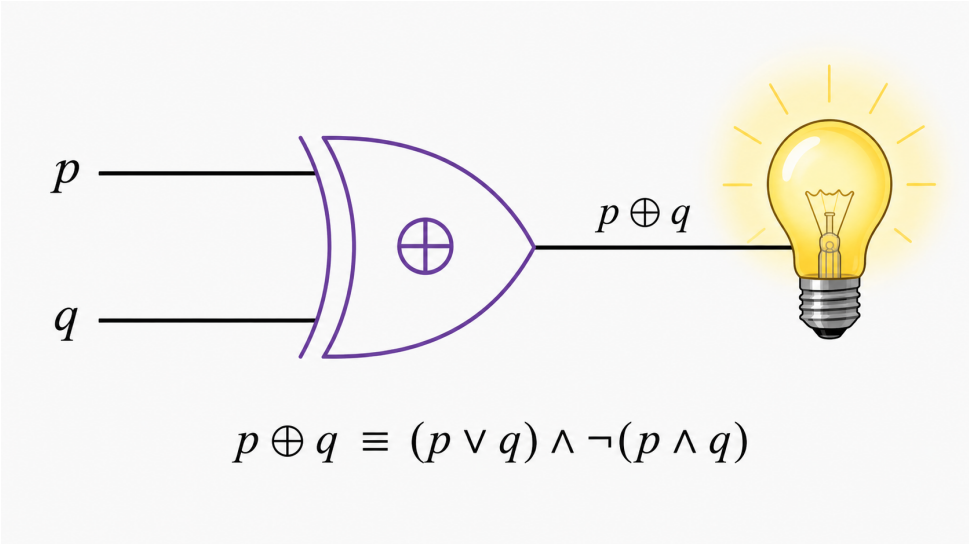
1.7

1.7.1

บทนิยาม 1.5 Exclusive OR

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ ประพจน์ $p \oplus q$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน และเป็นเท็จเมื่อ p กับ q มีค่าความจริงเหมือนกัน หรือเขียนในรูปสมมูลได้ว่า

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \tag{1.2}$$



ภาพที่ 3 ตารางค่าความจริงและสัญลักษณ์ของลอจิกเกต XOR

1.

ตารางที่ 14 ตารางค่าความจริงของ XOR ($p \oplus q$)

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2.

3.

4.

1.7.2

บทนิยาม 1.6 NAND และ NOR

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ

$p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$ (NAND, Sheffer stroke)

$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$ (NOR, Peirce arrow)

ตารางที่ 15 ตารางค่าความจริงของ NAND และ NOR

p	q	$p \uparrow q$ (NAND)	$p \downarrow q$ (NOR)
T	T	F	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	T

1.8

บทนิยาม 1.7 ประพจน์เปิด

ประพจน์เปิด คือประโยคที่มีตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่า เขียนแทนด้วย $P(x), Q(x,y), \ldots$ โดยค่าความจริงขึ้นกับค่าของตัวแปรและเอกภพสัมพัทธ์ที่ตัวแปรนั้นรับค่าได้

บทนิยาม 1.8 ตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณสำหรับทั้งหมด เขียนแทนด้วย $\forall$ อ่านว่า "สำหรับทุก" โดย $\forall x\, P(x)$ หมายความว่า "$P(x)$ เป็นจริงสำหรับสมาชิก x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์"
ตัวบ่งปริมาณสำหรับบางตัว เขียนแทนด้วย $\exists$ อ่านว่า "มีบางตัว" หรือ "มีอย่างน้อยหนึ่งตัว" โดย $\exists x\, P(x)$ หมายความว่า "มีสมาชิก x อย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง"

ตัวอย่างที่ 1.6 (การตีความตัวบ่งปริมาณ) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x\, (x^2 \geq 0)$
2. $\exists x\, (x^2 = 4)$
3. $\forall x\, (x^2 = 4)$

วิธีทำ

1.8.1

หมายเหตุ 1.2

สัญลักษณ์ $\forall$ และ $\exists$ จะถูกนำไปใช้อย่างต่อเนื่องในบทถัดไป เช่น การนิยามสมบัติของความสัมพันธ์ในบทที่ 3 ที่ใช้รูป "$\forall a \in A : (a, a) \in R$" และการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

1.9

1.9.1

1.
2.
3.

ตารางที่ 16 ตารางแสดงกฎการอนุมานแบบ Modus Ponens

รูปสัญลักษณ์	ตัวอย่าง
$p \to q$	เหตุ 1: ถ้าฝนตก แล้วถนนเปียก
p	เหตุ 2: ฝนตก
$\therefore q$	ผลสรุป: $\therefore$ ถนนเปียก

1.

2.
3.

ตารางที่ 17 ตารางค่าความจริงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของกฎการยืนยันเงื่อนไขนำ

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ตัวอย่างที่ 1.7 (การอนุมานแบบยืนยันเงื่อนไขนำในสถานการณ์ฝนตก) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. ถ้าฝนตก แล้วพื้นถนนจะเปียก
2. ฝนตก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.8 (การอนุมานแบบยืนยันเงื่อนไขนำในบริบทความเชื่อถือ) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. ถ้าคนรักษาสัญญา แล้วคนนั้นจะได้รับความเชื่อถือ
2. นาย ก รักษาสัญญา

วิธีทำ

1.

2.

1.9.2

ตารางที่ 18 ตารางแสดงกฎการอนุมานแบบ Modus Tollens

รูปสัญลักษณ์	ตัวอย่าง
$p \to q$	เหตุ 1: ถ้าไฟแดง แล้วรถต้องหยุด
$\neg q$	เหตุ 2: รถไม่ได้หยุด
$\therefore \neg p$	ผลสรุป: $\therefore$ ไฟไม่ได้เป็นสีแดง

1.
2.
3.

ตารางที่ 19 ตารางค่าความจริงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของกฎการปฏิเสธเงื่อนไขตาม

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

ตัวอย่างที่ 1.9 (การอนุมานแบบปฏิเสธเงื่อนไขตามในสถานการณ์ฝนตก) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. ถ้าฝนตก แล้วพื้นถนนจะเปียก
2. พื้นถนนไม่เปียก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.10 (การอนุมานแบบปฏิเสธเงื่อนไขตามในบริบทชีววิทยา) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. ถ้าสัตว์เป็นสุนัข แล้วสัตว์นั้นเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม
2. สัตว์ตัวนี้ไม่เป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม

วิธีทำ

1.

2.

1.9.3

1.
2.
3.

ตัวอย่างที่ 1.11 (การอ้างเหตุผลแบบมีเงื่อนไข) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. ถ้าฝนตก แล้วถนนจะเปียก
2. ถ้าถนนเปียก แล้วรถจะลื่น

วิธีทำ

1.9.4

1.
2.
3.

ตัวอย่างที่ 1.12 (การอ้างเหตุผลแบบแยก) จงหาผลสรุปจากการให้เหตุผลต่อไปนี้ตามหลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์

1. นาย ก อยู่บ้านหรืออยู่ที่ทำงาน
2. นาย ก ไม่ได้อยู่ที่ทำงาน

วิธีทำ

1.10

ตัวอย่างที่ 1.13 (การสร้างระบบการตัดสินใจ) จงใช้ตรรกะประพจน์ในการสร้างระบบการตัดสินใจแบบง่ายสำหรับการอนุมัติสินเชื่อ โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ถ้าผู้สมัครมีรายได้สูงกว่า 50,000 บาทต่อเดือน และไม่มีหนี้ค้างชำระ จะได้รับอนุมัติ
2. ถ้าผู้สมัครมีรายได้สูงกว่า 50,000 บาทต่อเดือน แต่มีหนี้ค้างชำระ จะต้องพิจารณาเพิ่มเติม
3. ถ้าผู้สมัครมีรายได้ต่ำกว่าหรือเท่ากับ 50,000 บาทต่อเดือน จะไม่ได้รับอนุมัติ

จงเขียนประพจน์เชิงประกอบและตารางค่าความจริงสำหรับการตัดสินใจนี้

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.3 ความสมมูลระหว่าง Implication กับ Disjunction

สำหรับทุกประพจน์ p และ q จะได้ว่า

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \tag{1.5}$$

โดยที่ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ, $\neg p$ คือนิเสธของ p ที่กลับค่าความจริงจากจริงเป็นเท็จหรือจากเท็จเป็นจริง และ $\vee$ คือตัวเชื่อมแบบหรือที่จะเป็นจริงเมื่ออย่างน้อยหนึ่งประพจน์เป็นจริง นั่นคือประพจน์เชิงเงื่อนไขสมมูลกับการเชื่อมแบบหรือระหว่างนิเสธของเงื่อนไขนำกับเงื่อนไขตาม

พิสูจน์

พิจารณาตารางค่าความจริงสำหรับ $p \to q$ และ $\neg p \vee q$ ดังแสดงในตารางที่ 20

1. **แถวที่ 1 ($p = T, q = T$):** จะได้ $p \to q = T$ และ $\neg p \vee q = F \vee T = T$ (ค่าความจริงตรงกัน)
2. **แถวที่ 2 ($p = T, q = F$):** จะได้ $p \to q = F$ และ $\neg p \vee q = F \vee F = F$ (ค่าความจริงตรงกัน)
3. **แถวที่ 3 ($p = F, q = T$):** จะได้ $p \to q = T$ และ $\neg p \vee q = T \vee T = T$ (ค่าความจริงตรงกัน)
4. **แถวที่ 4 ($p = F, q = F$):** จะได้ $p \to q = T$ และ $\neg p \vee q = T \vee F = T$ (ค่าความจริงตรงกัน)

เนื่องจากทั้ง 4 กรณีให้ค่าความจริงตรงกันทุกแถว จึงสรุปได้ว่า $p \to q \equiv \neg p \vee q$ ตามที่ต้องการพิสูจน์ ■

ตารางที่ 20 ตารางพิสูจน์ว่า $p \to q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	**การสมมูลกัน**
T	T	T	F	T	✓
T	F	F	F	F	✓
F	T	T	T	T	✓
F	F	T	T	T	✓

แบบฝึกหัด 1.1 จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นให้ระบุค่าความจริง

1. $3 + 5 = 8$
2. $x > 10$
3. กรุณาปิดประตู
4. 7 เป็นจำนวนคู่
5. พรุ่งนี้จะเป็นวันพระ
6. ความรักคือสิ่งสวยงาม
7. $2^2 = 4$

แบบฝึกหัด 1.2 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \wedge \neg q$
2. $\neg p \vee q$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
4. $(p \vee q) \rightarrow r$
5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

แบบฝึกหัด 1.3 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
2. $(p \wedge q) \rightarrow p$
3. $p \vee \neg p$
4. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

แบบฝึกหัด 1.4 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นข้อขัดแย้งหรือไม่

1. $p \wedge \neg p$
2. $\neg(p \vee \neg p)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

แบบฝึกหัด 1.5 จงใช้กฎการยืนยันเงื่อนไขนำ หรือ กฎการปฏิเสธเงื่อนไขตาม เพื่อหาผลสรุป

1. ถ้าวันนี้ฝนตก แล้วฉันจะไม่ออกไปข้างนอก วันนี้ฝนตก $\therefore$?
2. ถ้าข้าพเจ้าสอบผ่าน แล้วข้าพเจ้าจะดีใจ ข้าพเจ้าไม่ดีใจ $\therefore$?
3. ถ้าผู้สมัครมีประสบการณ์ แล้วผู้สมัครจะได้รับการคัดเลือก ผู้สมัครไม่ได้รับการคัดเลือก $\therefore$?

แบบฝึกหัด 1.6 จงตรวจสอบว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

1. $p \rightarrow q$ และ $\neg p \vee q$

2. $\neg(p \wedge q)$ และ $\neg p \vee \neg q$ (กฎของ De Morgan ข้อที่ 1)
3. $\neg(p \vee q)$ และ $\neg p \wedge \neg q$ (กฎของ De Morgan ข้อที่ 2)
4. $p \leftrightarrow q$ และ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

แบบฝึกหัด 1.7 จงเขียนประพจน์ในรูปแบบเชิงสัญลักษณ์ โดยกำหนดให้ p แทนฝนตก, q แทนพื้นเปียก, และ r แทนฉันจะอยู่บ้าน

1. ถ้าฝนตก แล้วฉันจะอยู่บ้าน
2. ฝนตกและพื้นเปียก
3. ถ้าฝนไม่ตก แล้วฉันจะไม่อยู่บ้าน
4. ฉันจะอยู่บ้านก็ต่อเมื่อฝนตกหรือพื้นเปียก

แบบฝึกหัด 1.8 ให้นักศึกษาอธิบายความแตกต่างระหว่างสัจนิรันดร์ ข้อขัดแย้ง และประพจน์กลาง พร้อมยกตัวอย่างประกอบแต่ละประเภทอย่างน้อย 2 ตัวอย่าง

1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.1.4
1.1.5
1.1.6
1.1.7
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4.1
1.4.2
1.4.3
1.5.1
1.5.2
1.5.3
1.6.1
1.6.2
1.6.3
1.6.4
1.7.1
1.7.2
1.7.3
1.7.4

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

1.
2.
3.
4.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

รหัสวิชา

ชื่อวิชา

หน่วยกิต

บทที่

ชื่อบท

จำนวนชั่วโมง

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

1.

2.

3.

2.1

2.1.1

1.

2.

3.

4.

5.

6.

หมายเหตุ 2.1

ในการเขียนโปรแกรม เรามักใช้เซตในความหมายที่ไม่เคร่งครัดนัก เช่น “เซตของตัวเลข” อาจหมายถึง list หรือ array ที่มีข้อมูลซ้ำกันได้ แต่ในทางคณิตศาสตร์ เซตตามนิยามไม่มีสมาชิกซ้ำกันและไม่มีลำดับ ความแตกต่างนี้สำคัญเมื่อต้องการพิสูจน์คุณสมบัติทางคณิตศาสตร์

2.2

2.2.1

บทนิยาม 2.1 เซตและสมาชิก

เซต คือกลุ่มของวัตถุที่มีคุณสมบัติร่วมกันหรือระบุไว้อย่างชัดเจน โดยเรียกวัตถุแต่ละชิ้นว่า สมาชิกของเซต ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \in A$ อ่านว่า “a เป็นสมาชิกของ A” และถ้า a ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $a \notin A$

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งแสดงเซตในบริบทที่แตกต่างกัน

(ก) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — เซตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 5 สมาชิกของ A คือ 1, 2, 3, 4, 5 สังเกตว่าเราสามารถตรวจสอบได้ทันทีว่า $3 \in A$ เป็นจริง แต่ $7 \notin A$ ก็เป็นจริงเช่นกัน

(ข) $B = \{\text{แดง}, \text{เขียว}, \text{น้ำเงิน}\}$ — เซต ของ สี พื้น ฐาน ใน ระบบ สี RGB ลำดับ ไม่ สำคัญ ดัง นั้น $\{\text{แดง}, \text{เขียว}, \text{น้ำเงิน}\} = \{\text{เขียว}, \text{แดง}, \text{น้ำเงิน}\}$

(ค) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — เซตของจำนวนนับ (Natural Numbers) สัญลักษณ์ $\mathbb{N}$ เป็นมาตรฐาน ในตำราเล่มนี้เราจะถือว่า $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ คือเริ่มที่ 0

(ง) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — เซตของจำนวนเต็ม (Integers) สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}$ มาจากภาษาเยอรมัน “Zahlen”

(จ) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ — เซตของจำนวนตรรกยะ (Rational Numbers) สัญลักษณ์ $\mathbb{Q}$ มาจาก “quotient”

(ฉ) $\mathbb{R}$ — เซตของจำนวนจริง (Real Numbers) รวมถึงจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ (irrational numbers) เช่น $\sqrt{2}$, π, e

เมื่อเรากล่าวว่า $a \in A$ เรากำลังยืนยันว่าวัตถุ a มีอยู่ในเซต A ภายใต้การกำหนดเซตอย่างชัดเจน ข้อความนี้มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง (True) หรือเท็จ (False) อย่างใดอย่างหนึ่งเสมอ ไม่มีทางที่ $a \in A$ จะเป็น “ครึ่งหนึ่งจริง” หลักการนี้สัมพันธ์กับกฎทวิภาวะ (principle of bivalence) และสามารถเขียนในรูปกฎกีดกันกลางได้ว่า $(a \in A) \vee (a \notin A)$

หมายเหตุ 2.2

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตของจำนวนต่างๆ มีความสำคัญมาก:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

จำนวนนับ เป็น เซต ย่อย ของ จำนวนเต็ม จำนวนเต็ม เป็น เซต ย่อย ของ จำนวนตรรกยะ และจำนวนตรรกยะเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ตัวอย่างเช่น $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ เป็นจริง และ $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ ก็เป็นจริงด้วย แต่ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ แต่ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1. $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $7 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
4. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
5. $0.75 \in \mathbb{Q}$
6. $0.\overline{3} \in \mathbb{Q}$

วิธีทำ

2.2.2

1.

1.

2.

2.

1.
2.

3.
4.
5.
6.

หมายเหตุ 2.3

คุณสมบัติสำคัญของเซต:

1. ไม่มีลำดับ (Unordered) คือลำดับของสมาชิกไม่สำคัญ $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ หากต้องการลำดับ ต้องใช้ tuple หรือ sequence แทน
2. ไม่มีสมาชิกซ้ำ (No Duplicates) คือ $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ หากต้องซ้ำ ต้องใช้ multiset หรือ list แทน

2.2.3

บทนิยาม 2.2 เซตพิเศษ

เซตพิเศษที่ใช้บ่อย ได้แก่

1. เซตว่าง เขียนแทนด้วย $\emptyset$ หรือ $\{\quad\}$ คือเซตที่ไม่มีสมาชิก
2. เซตที่มีสมาชิกตัวเดียว คือเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว เช่น $\{5\}$, $\{a\}$, $\{\emptyset\}$
3. เอกภพสัมพัทธ์ เขียนแทนด้วย U คือเซตของสมาชิกทั้งหมดที่พิจารณาในบริบทหนึ่ง
4. เซตจำกัด คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด ส่วน เซตอนันต์ คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่สิ้นสุด เช่น $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

หมายเหตุ 2.4 ข้อสังเกตเกี่ยวกับเซตว่าง

ความเข้าใจผิดที่พบบ่อยเกี่ยวกับเซตว่าง:

1. **ความแตกต่างของสัญลักษณ์:** $\emptyset$ คือเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย ($|\emptyset| = 0$) แต่ $\{\emptyset\}$ คือเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ $\emptyset$ ($|\{\emptyset\}| = 1$) ดังนั้น $\emptyset \neq \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$
2. **ความแตกต่างระหว่างสมาชิกกับเซตย่อย:** $\emptyset \in \{\emptyset\}$ เป็นจริง เพราะ $\emptyset$ เป็นสมาชิกของ $\{\emptyset\}$ และ $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ก็เป็นจริงด้วย (เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซต) แสดงว่า $\in$ (เป็นสมาชิก) และ $\subseteq$ (เป็นเซตย่อย) เป็นความสัมพันธ์ที่ต่างกัน แต่สามารถเป็นจริงทั้งคู่พร้อมกันได้

ตัวอย่างที่ 2.3 เพื่อเข้าใจความแตกต่างระหว่าง $\in$ และ $\subseteq$: $1 \in \{1,2,3\}$ ถูกต้อง แต่ $\{1\} \in \{1,2,3\}$ ไม่ถูกต้อง ส่วน $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ ถูกต้องเพราะทุกสมาชิกของ $\{1\}$ (คือ 1) อยู่ใน $\{1,2,3\}$ และ $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$ ถูกต้อง (เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซต) แต่ $\emptyset \in \{1,2,3\}$ ไม่ถูกต้อง สรุปคือ $\in$ และ $\subseteq$ เป็นความสัมพันธ์ที่ต่างกันแต่สามารถเป็นจริงทั้งคู่พร้อมกันได้ และในชีวิตจริง: ฐานข้อมูลนักศึกษา U = นักศึกษาทั้งหมด, A = นักศึกษาคณิตศาสตร์, B = นักศึกษาฟิสิกส์ แล้ว $A \cap B$ = นักศึกษาที่เรียนทั้งสองวิชา

วิธีทำ

2.3

2.3.1

บทนิยาม 2.3 เซตย่อยและเซตย่อยแท้

เซต A เป็น เซตย่อย ของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย กล่าวคือ $\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$ นอกจากนี้ $\emptyset \subseteq A$ และ $A \subseteq A$ สำหรับทุกเซต A (เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซตและเซตทุกเซตเป็นเซตย่อยของตัวเอง) ความสัมพันธ์ระหว่าง $\subseteq$ และ $=$ มีความ

สำคัญมาก นั่นคือ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ ส่วน $A \subseteq B$ และ $B \not\subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ $A \subsetneq B$ (เซตย่อยแท้) ตัวอย่างเช่น $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ เพราะ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ แต่ $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}$

ตัวอย่างที่ 2.4 $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ถูกต้องเพราะ 1 และ 2 ต่างก็อยู่ใน $\{1, 2, 3\}$ และ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ เป็นความจริงพื้นฐานที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตของจำนวน $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$ ถูกต้องเพราะเซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซต ส่วน $\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3\}$ ไม่ถูกต้องเพราะ $1 \in \{1, 2\}$ แต่ $1 \notin \{2, 3\}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.5

ในการพิสูจน์ว่า $A = B$ เราต้องพิสูจน์ทั้ง $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ นั่นคือต้องแสดงว่า: (1) ทุก $x \in A \Rightarrow x \in B$ (แสดง $A \subseteq B$) และ (2) ทุก $x \in B \Rightarrow x \in A$ (แสดง $B \subseteq A$) วิธีนี้เรียกว่า “proof by double inclusion” เป็นเทคนิคมาตรฐานในการพิสูจน์ความเท่ากันของเซต

ตัวอย่างที่ 2.5 พิสูจน์ว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributive Law)

วิธีทำ

2.4

2.4.1

บทนิยาม 2.4 ยูเนียน

ยูเนียน ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B หรืออยู่ทั้งสองเซต นั่นคือ

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

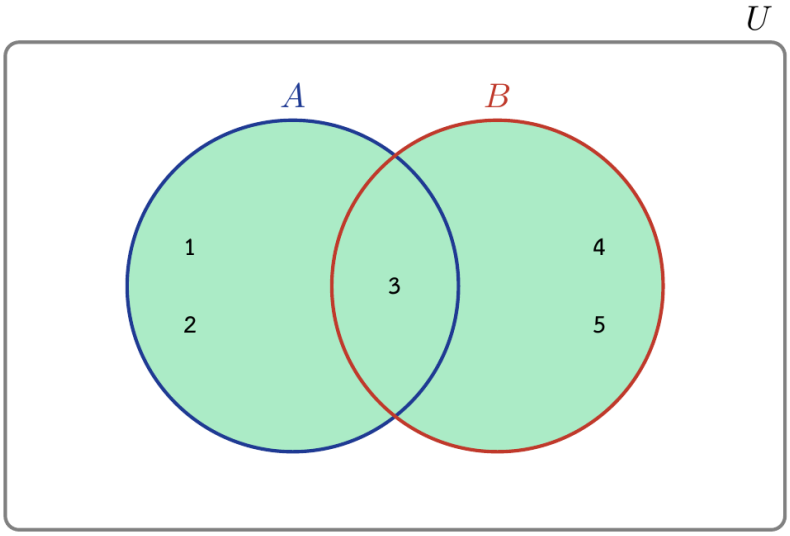
1.
2.
3.
4.
5.

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้เพื่อเข้าใจ union: $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$ — สังเกตว่า 2 อยู่ทั้งสองเซต แต่ในผลลัพธ์ 2 ปรากฏเพียงครั้งเดียว $\{1,2\} \cup \emptyset = \{1,2\}$ — union กับเซตว่างไม่เปลี่ยนเซตเดิม $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่}\} \cup \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่}\} = \mathbb{Z}$ — ทุกจำนวนเต็มเป็นได้ทั้งคู่หรือคี่อย่างใดอย่างหนึ่ง $A \cup A = A$ และ $A \cup B = B \cup A$ แสดงสมบัติ idempotent และ commutative ตามลำดับ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2.7 (การหายูเนียนของเซต) กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ จงหา $A \cup B$

วิธีทำ



$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ภาพที่ 4 แผนภาพเวนน์แสดงการดำเนินการยูเนียน $A \cup B$

2.4.2

บทนิยาม 2.5 อินเตอร์เซกชัน

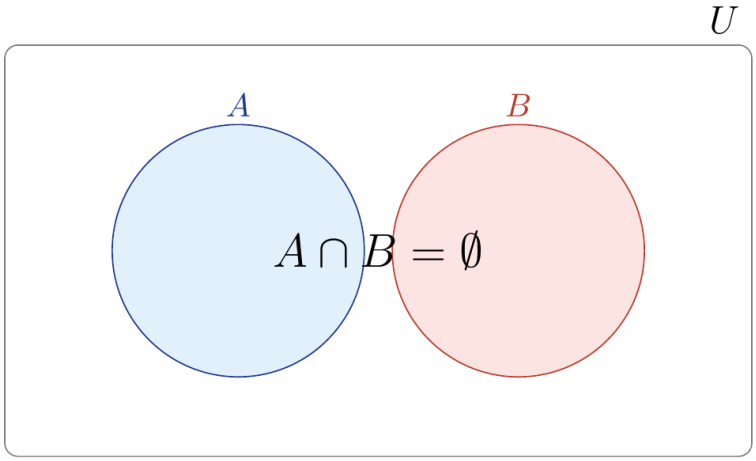
อินเตอร์เซกชัน ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และใน B พร้อมกัน นั่นคือ

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

1.
2.
3.
4.
5.

ตัวอย่างที่ 2.8 $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$ — 2 เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวที่อยู่ทั้งสองเซต $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$ — ไม่มีสมาชิกใดที่อยู่ทั้งสองเซตจึงเป็น disjoint $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ เพราะทุกจำนวนเต็มเป็นจำนวนจริง และ $\{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่$\} \cap \{x \mid x$ เป็นจำนวนคี่$\} = \emptyset$ เพราะไม่มีจำนวนใดเป็นได้ทั้งคู่และคี่พร้อมกัน

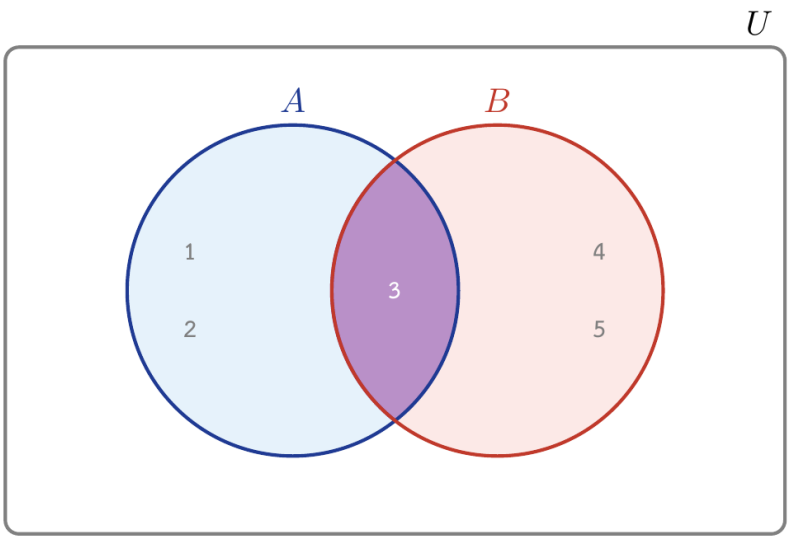
วิธีทำ



ภาพที่ 5 แผนภาพแสดงเซตไม่ทับซ้อน เมื่อ $A \cap B = \emptyset$

ตัวอย่างที่ 2.9 (การหาอินเตอร์เซกชันของเซต) กำหนดให้ $A = \{2,4,6,8,10\}$ และ $B = \{3,6,9,12\}$ จงหา $A \cap B$

วิธีทำ



$$A \cap B = \{3\}$$

ภาพที่ 6 แผนภาพเวนน์แสดงการดำเนินการอินเตอร์เซกชัน $A \cap B$

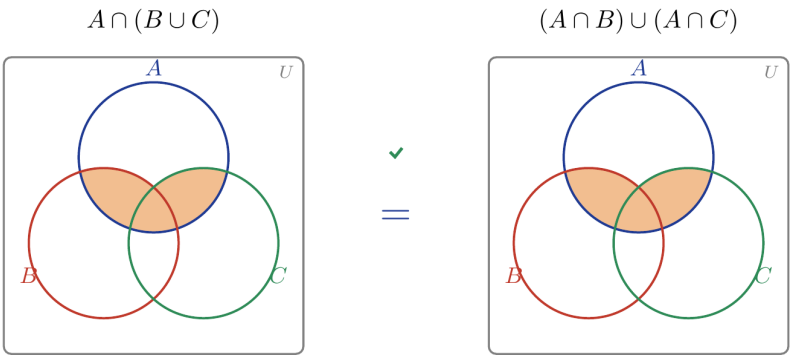
ทฤษฎีบท 2.6 Algebraic Laws for Set Operations

สำหรับเซต A, B, C ใดๆ ใน universal set U การดำเนินการระหว่างเซตมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. Idempotent Laws $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$
2. Identity Laws $A \cup \emptyset = A$ และ $A \cap U = A$
3. Domination Laws $A \cup U = U$ และ $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. Commutative Laws $A \cup B = B \cup A$ และ $A \cap B = B \cap A$
5. Associative Laws $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ และ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. Distributive Laws $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ และ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. Absorption Laws $A \cup (A \cap B) = A$ และ $A \cap (A \cup B) = A$
8. Complement Laws $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$, $\emptyset^c = U$, และ $U^c = \emptyset$

ตัวอย่างที่ 2.10 การพิสูจน์ Absorption Law $A \cup (A \cap B) = A$ โดย double inclusion

วิธีทำ



ภาพที่ 7 แผนภาพเวนน์แสดง Distributive Law $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.4.3

บทนิยาม 2.6 ผลต่างระหว่างเซต

ผลต่าง ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B นั่นคือ

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาผลต่างของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2, 3\} - \{2, 4\}$
2. $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$
3. $\{1, 2\} - \{1, 2\}$
4. $\{1, 2\} - \{3, 4\}$

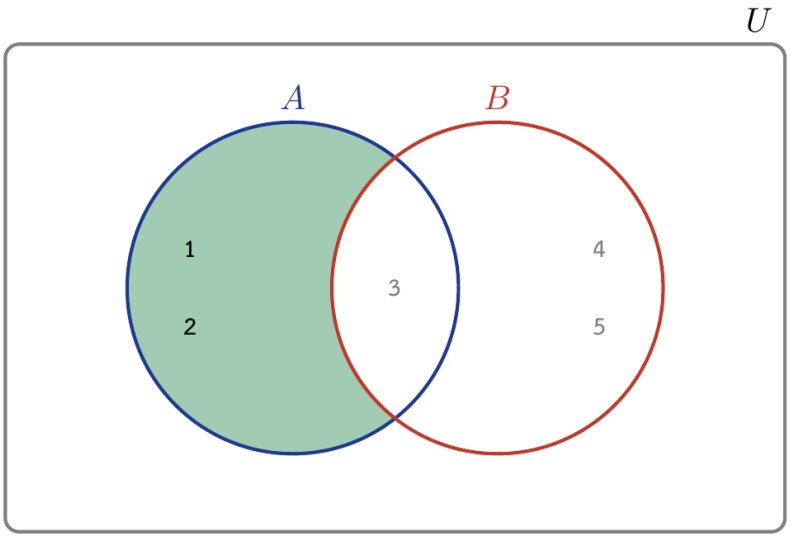
วิธีทำ

หมายเหตุ 2.7

การประยุกต์: ให้ U เป็นเซตของนักศึกษาทั้งหมด และ A เป็นเซตของนักศึกษาที่สอบผ่าน แล้ว $U - A$ คือเซตของนักศึกษาที่สอบตก

ตัวอย่างที่ 2.12 (การหาผลต่างของเซต) กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{b, d, f\}$ จงหา $A - B$

วิธีทำ



$$A - B = \{1, 2\}$$

ภาพที่ 8 แผนภาพเวนน์แสดงผลต่างของเซต $A - B$

2.4.4

บทนิยาม 2.7 คอมพลีเมนต์

คอมพลีเมนต์ ของเซต A เขียนแทนด้วย A^c หรือ $\overline{A}$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่ไม่อยู่ใน A นั่นคือ

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$$

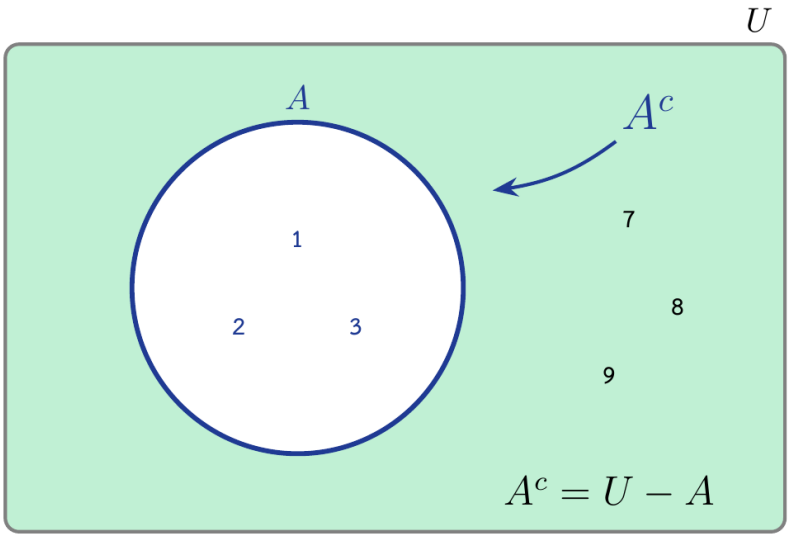
1.
2.
3.
4.

ตัวอย่างที่ 2.13 ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A = \{1, 2\}$ แล้ว $A^c = \{3, 4, 5\}$ เพราะ $3 \in U$ และ $3 \notin A$ ในขณะที่ $1 \notin A^c$ เพราะ $1 \in A$ แต่ถ้าเปลี่ยน Universal Set เป็น $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ แล้ว $A^c = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ — เซตเดียวกัน A มี complement ต่างกันเพราะ Universal Set ต่างกัน

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2.14 (การหาคอมพลีเมนต์ของเซต) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา A^c

วิธีทำ



ภาพที่ 9 แผนภาพเวนน์แสดงส่วนเติมเต็ม (Complement) A^c ของเซต A

2.5

ทฤษฎีบท 2.8 De Morgan's Laws สำหรับเซต

สำหรับทุกเซต A และ B:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Complement ของ Union = Intersection ของ Complements)
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Complement ของ Intersection = Union ของ Complements)

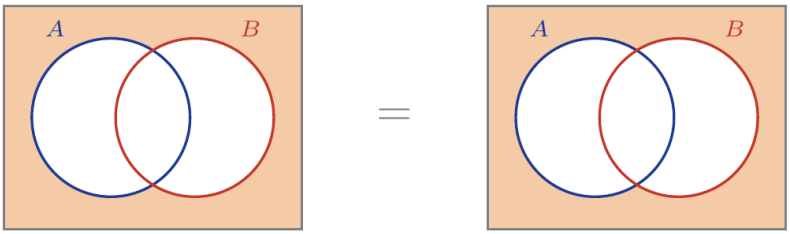
หมายเหตุ 2.9

สังเกตความสอดคล้องกับ De Morgan's Laws ในตรรกศาสตร์

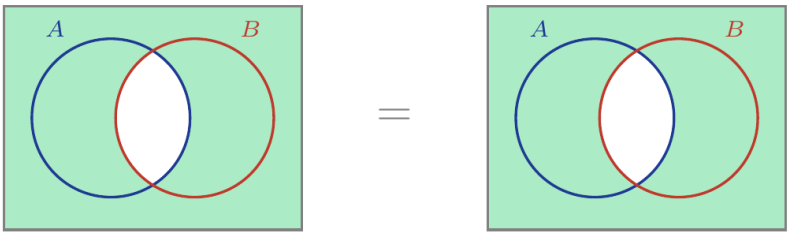
1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ สอดคล้องกับ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ สอดคล้องกับ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

นี่เป็นตัวอย่างที่แสดงความเชื่อมโยงระหว่างตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต ทั้งสองระบบมีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$



ภาพที่ 10 กฎของเดมอร์แกน: แผนภาพเวนน์แสดง $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ และ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ตัวอย่างที่ 2.15 พิสูจน์ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

วิธีทำ

2.5.1

บทนิยาม 2.8 เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซต ของเซต A เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ หรือ 2^A คือเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยทั้งหมดของ A นั่นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาเพาเวอร์เซตของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2\}$
2. $\emptyset$
3. $\{a\}$
4. $\{1, 2, 3\}$

วิธีทำ

2.5.2

บทนิยาม 2.9 ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือเซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ นั่นคือ

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้

1. $\{1, 2\} \times \{a, b\}$
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3. $\emptyset \times A$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.10

ถ้า $|A| = m$ และ $|B| = n$ แล้ว $|A \times B| = m \cdot n$ เพราะทุกสมาชิกใน A สามารถจับคู่กับทุกสมาชิกใน B ได้ จึงมี $m \times n$ คู่ และ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ มี cardinality เท่ากับ $|\mathbb{R}|^2$ ซึ่งเป็น uncountable เช่นเดียวกับ $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.11

สมบัติของ Cartesian Product:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

สังเกตว่า Cartesian Product กระจายเหนือ union และ intersection ในทางที่คล้ายกับการกระจายการคูณเหนือการบวก

2.6

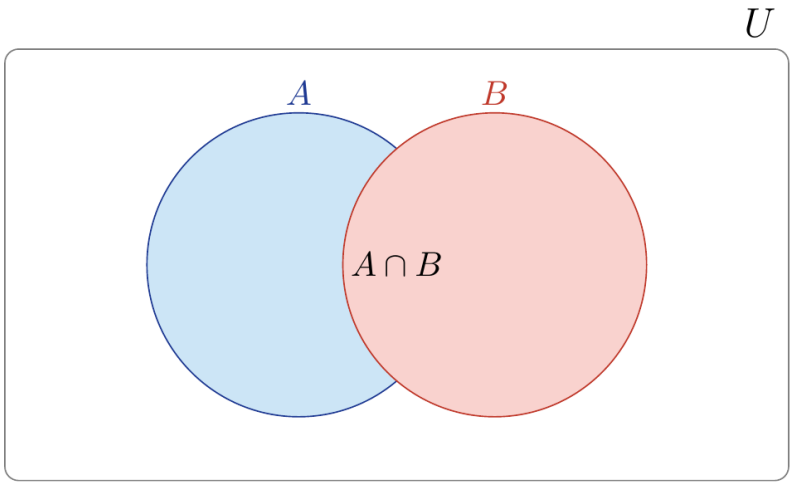
บทนิยาม 2.10 จำนวนสมาชิกของเซต (Cardinality)

จำนวนสมาชิกของเซต หรือ คาร์ดินัลลิตี้ ของเซต A เขียนแทนด้วย $|A|$ คือจำนวนสมาชิกของเซต A

ทฤษฎีบท 2.12 หลักการรวม-การแยก (Inclusion-Exclusion Principle)

สำหรับเซตจำกัด A และ B:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. ถ้า A และ B แยกกัน (disjoint, คือ $A \cap B = \emptyset$) แล้ว $|A \cup B| = |A| + |B|$



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ภาพที่ 11 แผนภาพประกอบหลักการรวม-การแยก แสดงการหักส่วนซ้ำ $A \cap B$ ออกจาก $|A| + |B|$

ตัวอย่างที่ 2.18 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ จงหา $|A \cup B|$

วิธีทำ

1.

ทฤษฎีบท 2.13

สำหรับเซต 3 เซต ดังนี้

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

สูตรนี้ขยายจาก 2 เซต โดยลบ intersection ของทุกคู่ แล้วบวก intersection ของทั้งสามกลับ (เพราะถูกลบเกินไป)

ตัวอย่างที่ 2.19 (ตัวอย่างตรวจพบข้อมูลไม่สอดคล้อง) ในห้องเรียน 20 คน มี 12 คนเรียนคณิตศาสตร์ 15 คนเรียนฟิสิกส์ และ 10 คนเรียนเคมี นอกจากนี้ 6 คนเรียนคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ 5 คนเรียนคณิตศาสตร์และเคมี 4 คนเรียนฟิสิกส์และเคมี และ 2 คนเรียนทั้งสามวิชา มีกี่คนที่เรียนอย่างน้อยหนึ่งวิชา?

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.14 จำนวน สมาชิก ของ คาร์ ที เซียน พร อ แดก ต์ (Cardinality of Cartesian Product)

ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด (finite sets) ใด ๆ จำนวนสมาชิกของคาร์ทีเซียนพรอแดกต์ $A \times B$ จะเท่ากับผลคูณของจำนวนสมาชิกของเซต A และเซต B นั่นคือ

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

แนวคิดการพิสูจน์: คู่อันดับ $(a, b) \in A \times B$ เกิดจากการเลือกสมาชิกตัวแรก a จากเซต A ซึ่งมีทางเลือก $|A|$ วิธี และเลือกสมาชิกตัวที่สอง b จากเซต B ซึ่งมีทางเลือก $|B|$ วิธี โดยการเลือกแต่ละตำแหน่งเป็นอิสระต่อกัน ตามหลักการคูณ (Multiplication Principle) ทางการนับ จะได้จำนวนคู่อันดับทั้งหมดเท่ากับ $|A| \cdot |B|$ ตัว

ทฤษฎีบท 2.15 จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต (Cardinality of Power Set)

ให้ A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว นั่นคือ $|A| = n$ จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต $\mathcal{P}(A)$ (ซึ่งเท่ากับจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A) จะเท่ากับ 2^n นั่นคือ

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

แนวคิดการพิสูจน์: ในการสร้างสับเซต $S \subseteq A$ สมาชิกแต่ละตัวใน A มีทางเลือก 2 ทางเสมอ คือ "เลือกให้อยู่ใน S" หรือ "ไม่เลือกให้อยู่ใน S" เมื่อมีสมาชิกทั้งหมด n ตัว การสร้างสับเซตจึงประกอบด้วยการตัดสินใจ n ครั้งติดต่อกัน ตามหลักการคูณ จะได้จำนวนสับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ ครั้ง}} = 2^n$$

นอกจากนี้ ยังสามารถพิสูจน์ด้วยอนุกรมทวินาม (Binomial Theorem) จากการรวมจำนวนสับเซตที่มีขนาด k (เลือกสมาชิก k ตัวจาก n ตัว) สำหรับ $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

2.7

2.7.1

ตัวอย่างที่ 2.20 (Bit Vector Representation) จงแทนเซต $A = \{2, 5, 7\}$ ใน Universal Set $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ด้วย bit vector

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.16 Set Operations as Boolean Algebra

เซตบน universal set ที่มีขนาด n สามารถแทนด้วย bit vector ความยาว n ซึ่งทำให้การดำเนินการระหว่างเซตสอดคล้องกับ Boolean algebra:

1. $A \cup B \Leftrightarrow$ bitwise OR ของ bit vectors
2. $A \cap B \Leftrightarrow$ bitwise AND ของ bit vectors
3. $A^c \Leftrightarrow$ bitwise NOT ของ bit vector
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B^c) = \emptyset$ หรือ $(A \wedge \neg B) = 0$ ทุก bit

นี่คือความเชื่อมโยงระหว่าง set theory และ Boolean algebra ซึ่งมีพื้นฐานมาจาก propositional logic

2.7.2

ตารางที่ 21 ความสัมพันธ์ระหว่าง Relational Algebra และ Set Theory

Relational Algebra	Set Theory
Union ($\cup$)	การยูเนียน (Union)
Selection (σ)	การกรองด้วยเงื่อนไข / สับเซต (Filtering / Subset)
Projection (π)	การเลือกเฉพาะคอมโพเนนต์ (Domain Restriction)
Cartesian Product ($\times$)	คาร์ทีเซียนพรอแดกต์ (Cartesian Product)
Join ($\bowtie$)	การรวมเซตแบบมีเงื่อนไข (Complex Combination)

ตัวอย่างที่ 2.21 (Database Relations as Mathematical Sets) จงอธิบายว่าเซตและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องอย่างไรกับฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์

วิธีทำ

2.7.3

ทฤษฎีบท 2.17 Hash Function as Mathematical Function

Hash Function $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก universe of keys U ไปยัง set of addresses $\{0, 1, \ldots, m-1\}$
สมบัติที่พึงประสงค์:

1. Deterministic: ถ้า $k_1 = k_2$ แล้ว $h(k_1) = h(k_2)$
2. Uniformly Distributed: สำหรับ keys ที่สุ่มมา $h(k)$ ควรกระจายอย่างสม่ำเสมอใน $\{0, 1, \ldots, m-1\}$
3. Efficiently Computable: คำนวณได้ในเวลา $O(1)$

เมื่อเกิด collision $h(k_1) = h(k_2)$ สำหรับ $k_1 \neq k_2$ มีวิธีการแก้ได้แก่

1. Chaining: $T[i] = \{k \in K \mid h(k) = i\}$ — แต่ละ slot เก็บเซตของ keys ที่ collide
2. Open Addressing: ใช้ probe sequence $h(k, i) = (h'(k) + i) \mod m$ สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots$

ตารางที่ 22 ความซับซ้อนเชิงเวลา (Time Complexity) ของ Hash Set Operations

การดำเนินการ (Operation)	ความซับซ้อนเชิงเวลา (Time Complexity)
การตรวจสอบสมาชิก (Membership Test: $x \in A$)	$O(1)$
การเพิ่มสมาชิก (Add: $A \cup \{x\}$)	$O(1)$
การลบสมาชิก (Remove: $A - \{x\}$)	$O(1)$
การยูเนียน (Union: $A \cup B$)	$O(\|A\| + \|B\|)$
การอินเตอร์เซกชัน (Intersection: $A \cap B$)	$O(\min(\|A\|, \|B\|))$
การทดสอบสับเซต (Subset Test: $A \subseteq B$)	$O(\|A\|)$

2.8

บทนิยาม 2.11 เซตนับได้และเซตนับไม่ได้

เซต A เป็น **เซตนับได้** (countable) ก็ต่อเมื่อ $|A| \leq |\mathbb{N}|$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยังเซตย่อยของ $\mathbb{N}$ ถ้า A ไม่นับได้ เราเรียกว่า A เป็น **เซตนับไม่ได้** (uncountable)

ทฤษฎีบท 2.18 Cantor

ช่วงเปิด $(0, 1)$ ของจำนวนจริงเป็นเซตนับไม่ได้

ตัวอย่างที่ 2.22 จงจำแนกว่าเซตใดนับได้และเซตใดนับไม่ได้:

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 2.1 เขียนเซตต่อไปนี้โดยใช้ทั้ง roster method และ set-builder notation:

1. เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10
2. เซตของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 20
3. เซตของสระในภาษาอังกฤษ
4. เซตของจำนวนเต็ม x ที่ $x^2 - 4 = 0$
5. เซตของจำนวนเต็ม x ที่ $x^2 - 5x + 6 = 0$

แบบฝึกหัด 2.2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{5, 6\}$ จงหา:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A - B$
4. $B - A$
5. $(A \cup B) - C$
6. $A \cap (B \cup C)$
7. $(A - B) \cup (B - A)$
8. $A \cap B \cap C$
9. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

แบบฝึกหัด 2.3 พิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมอธิบายเหตุผล:

1. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
2. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
3. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
4. $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$
5. $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$
6. $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})| = 8$
7. $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$
8. $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{3, 4\} \times \{1, 2\}$

แบบฝึกหัด 2.4 อธิบายความแตกต่างระหว่าง $\in$ และ $\subseteq$ พร้อมยกตัวอย่างที่แสดงความแตกต่างนั้น

แบบฝึกหัด 2.5 พิสูจน์โดยตรง (Direct Proof):

1. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ (Transitivity ของ $\subseteq$)
2. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cup C \subseteq B \cup C$
3. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap C \subseteq B \cap C$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributive Law ข้อ 2)

แบบฝึกหัด 2.6 พิสูจน์โดย contraposition:

1. ถ้า $A \cup B \neq A$ แล้ว $B \not\subseteq A$
2. ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $A \subseteq B^c$
3. ถ้า $A \not\subseteq B \cup C$ แล้ว $A \not\subseteq B$ และ $A \not\subseteq C$

แบบฝึกหัด 2.7 พิสูจน์โดยขัดแย้ง (Proof by Contradiction):

1. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $B^c \subseteq A^c$
2. ถ้า $A \cup B = A \cap B$ แล้ว $A = B$
3. สำหรับเซตจำกัด A จะได้ $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

แบบฝึกหัด 2.8 พิสูจน์ว่าเซตต่อไปนี้เท่ากัน:

1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
2. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (Symmetric Difference)
3. $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

แบบฝึกหัด 2.9 พิสูจน์ De Morgan's Laws:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

แบบฝึกหัด 2.10 ลดรูปเซตต่อไปนี้ (แสดงว่าเท่ากับเซตที่ง่ายกว่า):

1. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$
2. $(A - B) \cup (A \cap B)$
3. $A \cup (B - A)$
4. $(A \cap B) \cup (A - B)$
5. $A \cap (A \cup B)$
6. $(A^c)^c$

แบบฝึกหัด 2.11 กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตย่อยของ universal set U พิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์หรือหักล้าง:

1. $A - B = B - A$
2. $A \cup B = A \cap B$ แก้สมการนี้

3. $(A - B) - C = A - (B - C)$

แบบฝึกหัด 2.12 จงหา:

1. $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$
2. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))|$
3. $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}$
4. $|\{1, 2\} \times \{3, 4\} \times \{5, 6\}|$
5. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) \cap \mathcal{P}(\{2, 3\})$
6. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{2, 3\})$

แบบฝึกหัด 2.13 พิสูจน์:

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
2. พิสูจน์หรือหักล้าง: $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

แบบฝึกหัด 2.14 ถ้า $|A| = 3$ และ $|B| = 4$ จงหา:

1. $|A \times B|$
2. $|\mathcal{P}(A)|$
3. $|\mathcal{P}(A \times B)|$
4. $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$

แบบฝึกหัด 2.15 อธิบายว่าทำไม $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ สำหรับทุกเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่าง (Cantor's Theorem)

แบบฝึกหัด 2.16 กำหนดให้ $A = \{10, 20, 30, 40\}$ และ $B = \{25, 30, 35, 40\}$ ในฐานข้อมูล จงเขียนในรูปแบบคณิตศาสตร์:

1. จงหา $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \Delta B$ (Symmetric Difference)
2. แสดงว่า $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

แบบฝึกหัด 2.17 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ และ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

1. เขียน bit vector ของ A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A^c
2. แสดงว่า bitwise operations บน bit vectors ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องสำหรับ set operations

แบบฝึกหัด 2.18 อธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง:

1. De Morgan's Laws ในทฤษฎีเซต และ De Morgan's Laws ในตรรกศาสตร์ (Propositional Logic)
2. Cartesian Product $A \times B$ และ relations ระหว่างเซต

3. Power Set $\mathcal{P}(A)$ และ cardinality $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

แบบฝึกหัด 2.19 พิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีเซต:

1. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. ถ้า $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \emptyset$ แล้ว $B = C$

2.1.1

2.1.2

2.1.3

2.1.4

2.1.5

2.2.1

2.2.2

2.2.3

2.2.4

2.2.5

2.2.6

2.2.7

2.2.8

2.2.9

2.3.1

2.3.2

2.3.3

2.3.4

2.3.5

2.3.6

2.3.7

2.3.8

2.4.1

2.4.2

2.5.1

2.5.2

2.5.3

2.6.1

2.6.2

2.7.1
2.7.2
2.7.3
2.7.4
2.7.5
2.7.6

2.8.1
2.8.2
2.8.3

2.9.1
2.9.2
2.9.3
2.9.4
2.9.5
2.9.6

2.10.1
2.10.2

2.10.3

2.11.1
2.11.2
2.11.3
2.11.4

2.12.1

2.13.1

2.13.2

2.14.1

2.14.2

2.15.1

2.15.2

2.15.3

2.16.1

2.16.2

1.

2.
3.
4.
5.
6.

7.
8.

1.
2.
3.
4.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

รหัสวิชา

ชื่อวิชา

หน่วยกิต

บทที่

ชื่อบท

จำนวนชั่วโมง

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.

3.

3.1

บทนิยาม 3.1 ความสัมพันธ์

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ความสัมพันธ์ (Relation) จาก A ไปยัง B คือเซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ นั่นคือ $R \subseteq A \times B$
หาก $(a, b) \in R$ จะเขียนแทนด้วย $a\,R\,b$ หมายถึง "a มีความสัมพันธ์กับ b โดย R" หาก $(a, b) \notin R$ จะเขียนแทนด้วย $a \not R\ b$ หมายถึง "a ไม่มีความสัมพันธ์กับ b โดย R"

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y\}$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. จำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $|A \times B|$
2. จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จาก A ไป B
3. จำนวนความสัมพันธ์ทวิภาคทั้งหมดที่เป็นไปได้บนเซต A

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$ โดยมีความสัมพันธ์ $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ และ $R_2 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$ จาก A ไป B จงหาการดำเนินการต่อไปนี้

1. การยูเนียน $R_1 \cup R_2$
2. การอินเตอร์เซกชัน $R_1 \cap R_2$
3. ผลต่าง $R_1 - R_2$
4. คอมพลีเมนต์ $\overline{R_1}$ เทียบกับเอกภพสัมพัทธ์ $A \times B$

วิธีทำ

1.
2.
3.

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และความสัมพันธ์ $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ หาร y ลงตัว$\}$ จงเขียนเซตสมาชิกของความสัมพันธ์ R และสร้างตารางความสัมพันธ์

วิธีทำ

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

3.2

1.

2.

3.

บทนิยาม 3.2 โดเมน เรนจ์ และความสัมพันธ์ผกผัน

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ $R \subseteq A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

1. **โดเมน (Domain)** ของความสัมพันธ์ R เขียนแทนด้วย $\mathcal{D}(R)$ คือเซตของสมาชิกใน A ซึ่งเป็นองค์ประกอบแรก (First Component) ของคู่อันดับใน R นิยามโดย

$$\mathcal{D}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in R\}$$

2. **เรนจ์ (Range)** ของความสัมพันธ์ R เขียนแทนด้วย $\mathcal{R}(R)$ คือเซตของสมาชิกใน B ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สอง (Second Component) ของคู่อันดับใน R นิยามโดย

$$\mathcal{R}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ (a, b) \in R\}$$

3. **ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse Relation)** ของ R เขียนแทนด้วย R^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ที่ได้จากการสลับองค์ประกอบของทุกคู่อันดับใน R นิยามโดย

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

ทฤษฎีบท 3.1 สมบัติทางโครงสร้างของความสัมพันธ์ผกผัน

ให้ $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B จะได้สมบัติทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. $\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{R}(R)$ และ $\mathcal{R}(R^{-1}) = \mathcal{D}(R)$
2. $(R^{-1})^{-1} = R$
3. ถ้า $R_1 \subseteq R_2$ แล้ว $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$
4. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ และ $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ โดยมีความสัมพันธ์ $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (4, a)\} \subseteq A \times B$ จงหาโดเมน $\mathcal{D}(R)$, เรนจ์ $\mathcal{R}(R)$ และความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1}

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ โดยมีความสัมพันธ์ R จาก A ไปยัง B กำหนดด้วยเงื่อนไข $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$ จงหา

1. เซตความสัมพันธ์ R ในรูปแจกแจงสมาชิก
2. โดเมน $\mathcal{D}(R)$ และเรนจ์ $\mathcal{R}(R)$
3. ความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1} พร้อมระบุ $\mathcal{D}(R^{-1})$ และ $\mathcal{R}(R^{-1})$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.6 กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และความสัมพันธ์ทวิภาค $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \leq 4\}$ จงหาเซตสมาชิกของ R, โดเมน $\mathcal{D}(R)$, เรนจ์ $\mathcal{R}(R)$ และพิสูจน์ว่า $(R^{-1})^{-1} = R$

วิธีทำ

3.3

บทนิยาม 3.3 การประกอบความสัมพันธ์

ให้ $R \subseteq A \times B$ และ $S \subseteq B \times C$ การประกอบความสัมพันธ์ (Composition of Relations) ของ R กับ S เขียนแทนด้วย $S \circ R \subseteq A \times C$ นิยามโดย

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

สำหรับความสัมพันธ์ R บนเซต A นิยามกำลังของความสัมพันธ์โดย $R^1 = R$ และ $R^{n+1} = R \circ R^n$ เมื่อ $n \geq 1$

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และความสัมพันธ์ $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ บน A จงหา R^2 และ R^3

วิธีทำ

3.4

1.

2.

3.

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ จงหา $r(R), s(R)$, และ $t(R)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนดความสัมพันธ์ R บนเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ โดย $a\,R\,b \iff a \equiv b \pmod 3$ (นั่นคือ 3 หาร $a - b$ ลงตัว) จงพิสูจน์ว่า R มีคุณสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

วิธีทำ

3.5

1.
2.

3.

บทนิยาม 3.4 ฟังก์ชัน

ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง ฟังก์ชัน (Function) จาก A ไปยัง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \to B$ คือความสัมพันธ์ $f \subseteq A \times B$ ซึ่งสำหรับทุกสมาชิก $a \in A$ จะต้องมีสมาชิก $b \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(a, b) \in f$ โดยเขียนแทนด้วยสมการ $f(a) = b$
องค์ประกอบหลักของฟังก์ชันมีดังนี้

1. โดเมน (Domain) คือเซตต้นทางทั้งเซต นั่นคือ $\mathcal{D}(f) = A$
2. โคโดเมน (Codomain) คือเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ นั่นคือเซต B
3. เรนจ์ (Range) คือเซตของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจริง นั่นคือ $\mathcal{R}(f) = \{f(a) \in B \mid a \in A\} \subseteq B$

ตัวอย่างที่ 3.10 กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ และ $R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

วิธีทำ

3.6

3.6.1

1.

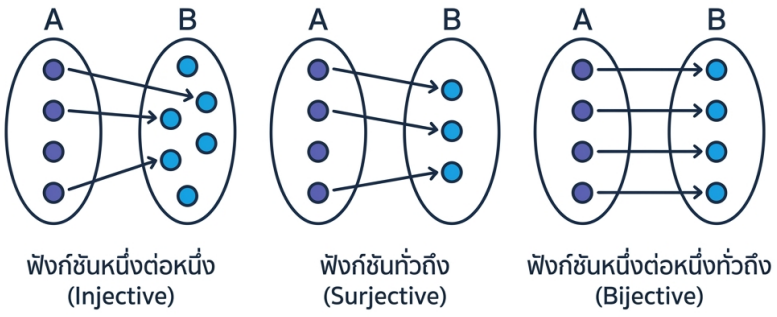
2.

3.

บทนิยาม 3.5 ประเภทของฟังก์ชัน

ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (Injective) คือฟังก์ชันที่ถ้า $f(a_1) = f(a_2)$ แล้ว $a_1 = a_2$
2. ฟังก์ชันทั่วถึง (Surjective) คือฟังก์ชันที่สำหรับทุก $b \in B$ จะมี $a \in A$ ซึ่งทำให้ $f(a) = b$
3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijective) คือฟังก์ชันที่เป็นทั้งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง



ภาพที่ 12 แผนภาพเปรียบเทียบลักษณะการจับคู่ของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

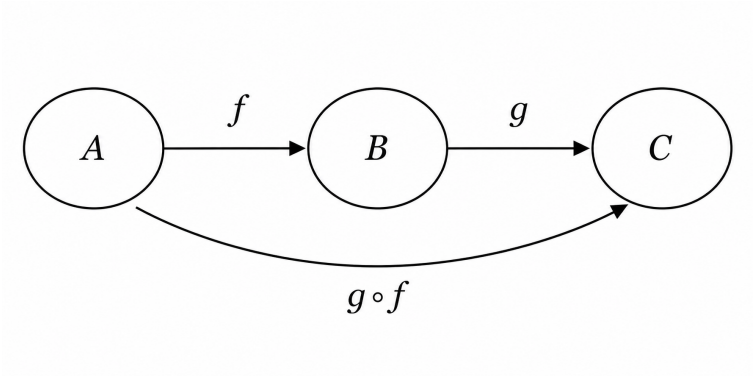
ตัวอย่างที่ 3.11 จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(x) = x^3 + 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijective)

วิธีทำ

3.6.2

บทนิยาม 3.6 การประกอบฟังก์ชันและฟังก์ชันผกผัน

1. การประกอบฟังก์ชัน $g \circ f$ สำหรับ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ นิยามโดย $(g \circ f)(a) = g(f(a))$
2. ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : A \to B$ คือฟังก์ชัน $f^{-1} : B \to A$ ซึ่ง $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$



ภาพที่ 13 แผนภาพแสดงการประกอบฟังก์ชัน $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ ที่ส่งผ่านข้อมูลจากเซต A ผ่าน B ไปยัง C

ตัวอย่างที่ 3.12 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ บนเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ จงหา $(f \circ f)(x)$ และฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.13 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 3x - 4$ และ $g(x) = 2x + 5$ บนเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ จงหา $(g \circ f)(x)$ และ $(g \circ f)^{-1}(x)$

วิธีทำ

3.7

1.

2.

3.

4.

บทนิยาม 3.7 ฟังก์ชันพิเศษ

1. ฟังก์ชันปัดลง (Floor) เขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$ คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x
2. ฟังก์ชันปัดขึ้น (Ceiling) เขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$ คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ x

3. ฟังก์ชันมอดูโล (Modulo) เขียนแทนด้วย x mod m คือเศษเหลือ r ที่ทำให้ $x = qm + r$ โดยที่ $q \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq r < m$ เมื่อ $m > 0$
4. ฟังก์ชันแฮช (Hash Function) คือฟังก์ชัน $h : K \to S$ ที่แปลงคีย์ข้อมูลเป็นดรรชนีตำแหน่งจัดเก็บ เช่น $h(k) = k$ mod m

ตัวอย่างที่ 3.14 จงคำนวณค่าของฟังก์ชันพิเศษต่อไปนี้

1. $\lfloor 3.8 \rfloor$ และ $\lfloor -2.3 \rfloor$
2. $\lceil 3.1 \rceil$ และ $\lceil -2.8 \rceil$
3. 27 mod 6 และ -15 mod 4
4. ค่าแฮช $h(108)$ สำหรับฟังก์ชันแฮช $h(k) = k$ mod 11

วิธีทำ

3.8

1.

2.

3.8.1

บทนิยาม 3.8 ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence) คือลำดับที่ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าคงตัว เรียกว่า ผลต่างร่วม (Common Difference) เขียนแทนด้วย $d = a_{n+1} - a_n$ โดยมีพจน์ทั่วไป (General Term) นิยามโดย

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

เมื่อ a_1 คือพจน์แรก และ n คือลำดับพจน์ที่ต้องการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 3.15 กำหนดลำดับเลขคณิต $3, 7, 11, 15, \ldots$ จงหาผลต่างร่วม d และพจน์ที่ 20 (a_{20})

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.16 กำหนดลำดับเลขคณิต $7, 11, 15, 19, \ldots, 83$ จงหาว่าลำดับนี้มีทั้งหมดกี่พจน์

วิธีทำ

3.8.2

บทนิยาม 3.9 ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) คือลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าคงตัว เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common Ratio) เขียนแทนด้วย $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ โดยมีพจน์ทั่วไปนิยามโดย

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

เมื่อ a_1 คือพจน์แรก และ $r \neq 0$ คืออัตราส่วนร่วม

ตัวอย่างที่ 3.17 กำหนดลำดับเรขาคณิต $2, 6, 18, 54, \ldots$ จงหาอัตราส่วนร่วม r และพจน์ที่ 7 (a_7)

วิธีทำ

3.8.3

บทนิยาม 3.10 อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series) คือผลรวมของพจน์ในลำดับเลขคณิต เขียนแทนด้วย $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ โดยมีสูตรคำนวณผลรวม n พจน์แรกดังนี้

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3.18 จงหาผลรวม 10 พจน์แรก (S_{10}) ของอนุกรมเลขคณิต $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$

วิธีทำ

3.8.4

บทนิยาม 3.11 อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series) คือผลรวมของพจน์ในลำดับเรขาคณิต เขียนแทนด้วย $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$ โดยมีสูตรคำนวณผลรวม n พจน์แรกดังนี้

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (\text{เมื่อ } r \neq 1) \qquad S_n = na_1 \quad (\text{เมื่อ } r = 1)$$

และเมื่อ $|r| < 1$ ผลรวมของพจน์ทั้งหมดอย่างไม่จำกัดจำนวนจะลู่เข้าสู่ค่าจำกัด เรียกว่าผลรวมอนันต์ (Infinite Sum) นิยามโดย

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาผลรวม 6 พจน์แรก (S_6) ของอนุกรมเรขาคณิต $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3.20 จงหาผลรวมอนันต์ (S_∞) ของอนุกรมเรขาคณิต $12 + 6 + 3 + 1.5 + \ldots$

วิธีทำ

3.9

3.9.1

3.9.2

3.9.3

ตัวอย่างที่ 3.21 กำหนดฟังก์ชันแฮช $h(k) = k \bmod 7$ และชุดคีย์ $K = \{12, 19, 26, 33\}$ จงหาดรรชนีแฮช และแสดงการจัดเก็บข้อมูลด้วยการสำรวจเชิงเส้นเมื่อเกิดการชนกัน

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 3.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. $A \times B$ และ $B \times A$
2. จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จาก A ไป B
3. จำนวนความสัมพันธ์ทวิภาคทั้งหมดบนเซต A

แบบฝึกหัด 3.2 กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และความสัมพันธ์ $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \leq 5\}$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. สมาชิกทั้งหมดในความสัมพันธ์ R
2. โดเมน $\mathcal{D}(R)$ และเรนจ์ $\mathcal{R}(R)$
3. ความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1}

แบบฝึกหัด 3.3 พิจารณาความสัมพันธ์ทวิภาคต่อไปนี้บนเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ว่ามีคุณสมบัติ สะท้อน, สมมาตร, ปฏิสมมาตร, หรือถ่ายทอด หรือไม่

1. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
2. $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
3. $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
4. $R_4 = \{(1, 2), (3, 4)\}$

แบบฝึกหัด 3.4 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และความสัมพันธ์ $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. การปิดสะท้อน (Reflexive Closure) $r(R)$
2. การปิดสมมาตร (Symmetric Closure) $s(R)$
3. การปิดถ่ายทอด (Transitive Closure) $t(R)$

แบบฝึกหัด 3.5 พิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A = \{1, 2, 3\}$ ไปยัง $B = \{a, b, c\}$ หรือไม่ พร้อมระบุประเภทของฟังก์ชัน

1. $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$
2. $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
3. $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$
4. $f_4 = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$

แบบฝึกหัด 3.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 3x - 5$ บนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

1. จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (Injective)
2. จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (Surjective)
3. จงหาฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x)$

แบบฝึกหัด 3.7 กำหนด $f(x) = 2x + 3$ และ $g(x) = x^2 - 1$ บน $\mathbb{R}$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. $(g \circ f)(x)$ และ $(g \circ f)(2)$
2. $(f \circ g)(x)$ และ $(f \circ g)(2)$
3. $(f \circ f)(x)$

แบบฝึกหัด 3.8 จงคำนวณค่าของฟังก์ชันพิเศษต่อไปนี้

1. $\lfloor 4.8 \rfloor$ และ $\lfloor -3.2 \rfloor$
2. $\lceil 2.1 \rceil$ และ $\lceil -1.7 \rceil$
3. 37 mod 5 และ -14 mod 4
4. ค่าแฮช $h(k) = k$ mod 11 เมื่อ $k = 125$

แบบฝึกหัด 3.9 กำหนดลำดับเลขคณิต $4, 9, 14, 19, \ldots$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. ผลต่างร่วม d และพจน์ทั่วไป a_n
2. พจน์ที่ 15 (a_{15})
3. ผลรวม 15 พจน์แรก (S_{15})

แบบฝึกหัด 3.10 กำหนดลำดับเรขาคณิต $3, 6, 12, 24, \ldots$ จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. อัตราส่วนร่วม r และพจน์ทั่วไป a_n
2. พจน์ที่ 8 (a_8)
3. ผลรวม 8 พจน์แรก (S_8)

3.1.1

3.1.2

3.1.3

3.2.1

3.2.2

3.2.3

3.3.1

3.3.2

3.3.3

3.3.4

3.4.1

3.4.2

3.4.3

3.5.1

3.5.2

3.5.3

3.5.4

3.6.1

3.6.2

3.6.3

3.7.1

3.7.2

3.7.3

3.8.1

3.8.2

3.8.3

3.8.4

3.9.1

3.9.2

3.9.3

3.10.1

3.10.2

3.10.3

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

1.
2.
3.
4.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

รหัสวิชา

ชื่อวิชา

หน่วยกิต

บทที่

ชื่อบท

จำนวนชั่วโมง

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.

4.1

ภาพที่ 14 แผนภาพแสดงค่าประจำหลักของเลขฐานสิบ

4.1.1

ทฤษฎีบท 4.1 ค่าประจำตำแหน่งของระบบเลขฐานสิบ

จำนวนใดๆ ในระบบเลขฐานสิบสามารถเขียนในรูปผลบวกของค่าประจำตำแหน่งได้

$$d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} d_i \times 10^i$$

โดยที่ d_i คือเลขโดดในแต่ละตำแหน่ง ($0 \leq d_i \leq 9$) และ 10^i คือค่าประจำตำแหน่ง

พิสูจน์

การพิสูจน์ค่าประจำตำแหน่งในระบบเลขตำแหน่ง (Positional Notation) พิจารณาเป็นลำดับขั้นตอนดังนี้:

1. **กำหนดค่าตำแหน่ง:** ให้จำนวนคือ $N = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-m}$ ในฐาน 10 โดยที่ d_i คือเลขโดดในตำแหน่งที่ i
2. **คูณน้ำหนักประจำหลัก:** ตัวเลข d_i แต่ละหลักจะมีค่าน้ำหนักเท่ากับกำลังของฐาน 10 นั่นคือ $d_i \times 10^i$
3. **รวมผลบวกทุกตำแหน่ง:** นำค่าน้ำหนักทุกหลักตั้งแต่นวนเต็มและส่วนทศนิยมมารวมกัน:

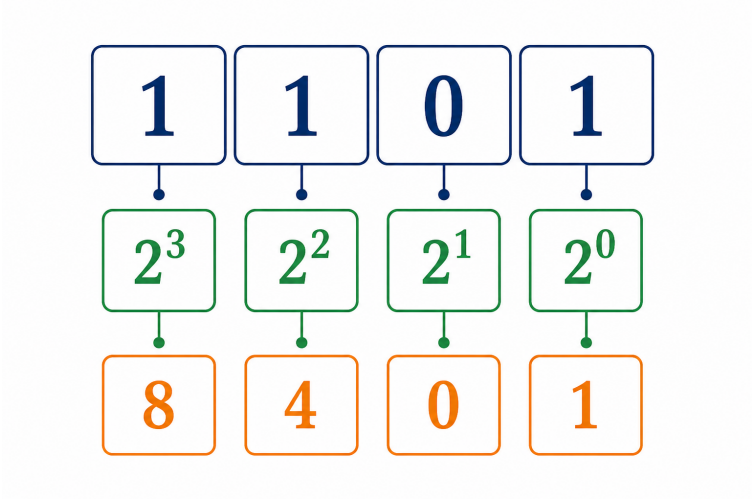
$$N = \sum_{i=-m}^{n} d_i \times 10^i = d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_0 \times 10^0 + d_{-1} \times 10^{-1} + \cdots + d_{-m} \times 10^{-m}$$

ผลรวมที่ได้สอดคล้องตรงตามนิยามการแทนจำนวนในระบบเลขฐานสิบ ■

ตัวอย่างที่ 4.1 (การจำแนกค่าประจำหลักในระบบเลขฐานสิบ) จงแสดงการกระจายค่าประจำหลักของจำนวนเต็ม 4729 และจำนวนทศนิยม 53.847 ในระบบเลขฐานสิบ

วิธีทำ

4.2



ภาพที่ 15 แผนภาพแสดงค่าประจำหลักของเลขฐานสอง

ทฤษฎีบท 4.2

จำนวนในระบบเลขฐานสองสามารถเขียนในรูปผลบวกของ 2^i ได้

$$(b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_2 = \sum_{i=0}^{n} b_i \times 2^i$$

โดยที่ $b_i \in \{0, 1\}$ แทนเลขโดดแต่ละหลักในฐานสอง

หมายเหตุ 4.3

ข้อควรระวังในการอ่าน: เลขฐานสอง $(1101)_2$ ต้องอ่านเรียงตัวว่า “หนึ่ง-หนึ่ง-ศูนย์-หนึ่ง-ฐานสอง” ห้ามอ่านว่า “พันหนึ่งร้อยเอ็ด” เนื่องจากแต่ละหลักไม่ได้มีค่าน้ำหนักเป็น 10^n

ตัวอย่างที่ 4.2 แปลง $(1101)_2$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.3 แปลง $(10110)_2$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.4

ส่วนทศนิยมในฐานสองมีค่าตามสมการ

$$(0.b_1b_2\ldots b_m)_2 = \sum_{i=1}^{m} b_i \times 2^{-i}$$

โดยที่ $b_i \in \{0, 1\}$ แทนเลขโดดในส่วนทศนิยมของฐานสอง $(2^{-1} = 0.5, 2^{-2} = 0.25, 2^{-3} = 0.125)$

ตัวอย่างที่ 4.4 แปลง $(0.101)_2$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.5 แปลง $(10.011)_2$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

4.3

ทฤษฎีบท 4.5

กลุ่มเลขฐานสอง 3 บิต แทนด้วยเลขโดดฐานแปด 1 ตัวได้พอดี เนื่องจาก $2^3 = 8$

ตัวอย่างที่ 4.6 แปลง $(110101)_2$ เป็นฐานแปด

วิธีทำ

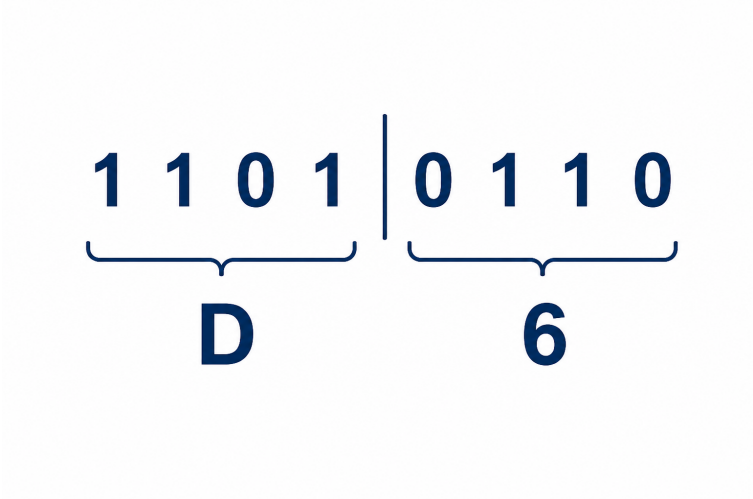
ตัวอย่างที่ 4.7 แปลง $(472)_8$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

หมายเหตุ 4.6

ฐานแปดเคยถูกใช้อย่างแพร่หลายในคอมพิวเตอร์ยุคแรก (เช่น เครื่อง PDP-8 ที่ใช้ขนาดคำ 12 บิต หรือ 36 บิต) ปัจจุบันในระบบคอมพิวเตอร์สมัยใหม่นิยมใช้ระบบเลขฐานสิบหกเป็นหลัก

4.4



ภาพที่ 16 แผนภาพแสดงการจัดกลุ่มเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบหก

ทฤษฎีบท 4.7

ความสัมพันธ์ระหว่างฐานสองและฐานสิบหก: กลุ่มตัวเลขฐานสอง 4 ตัว สามารถแทนด้วยตัวเลขฐานสิบหก 1 ตัว เนื่องจาก $2^4 = 16$ โดยที่แต่ละกลุ่ม 4 bits มีค่าตั้งแต่ $0000_2 = 0$ ถึง $1111_2 = 15 = \mathsf{F}_{16}$

ตารางที่ 23 ตารางเปรียบเทียบฐานสิบ ฐานสอง และฐานสิบหก

ฐานสิบ	ฐานสอง (4 บิต)	ฐานสิบหก
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

ตัวอย่างที่ 4.8 แปลง $(11010110)_2$ เป็นฐานสิบหก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.9 แปลง $(3A.F)_{16}$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

4.5

1.

2.

4.5.1

ทฤษฎีบท 4.8

ถ้า $(d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_b$ เป็นจำนวนในฐาน b จะมีค่าเท่ากับ

$$(d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_b = \sum_{i=0}^{n} d_i \times b^i$$

โดยที่ d_i คือเลขโดดในแต่ละตำแหน่ง และ b คือฐานของระบบเลข

ตัวอย่างที่ 4.10 แปลง $(2B3)_{16}$ เป็นฐานสิบ และ $(57)_8$ เป็นฐานสิบ

วิธีทำ

4.5.2

ทฤษฎีบท 4.9

ขั้นตอนการแปลงจำนวนเต็มจากฐานสิบเป็นฐาน b:

1. หารจำนวนตั้งต้นด้วย b บันทึกผลหารและเศษ
2. นำผลหารในข้อ 1 มาหารด้วย b ต่อไป จดเศษ
3. ทำซ้ำจนกว่าผลหารจะเป็น 0
4. รวบรวมเศษที่ได้อ่านย้อนกลับจากล่างขึ้นบนเป็นผลลัพธ์

ตัวอย่างที่ 4.11 แปลง 45 ฐานสิบเป็นฐานสอง

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.12 แปลง 158 ฐานสิบเป็นฐานแปด

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.13 แปลง 2543 ฐานสิบเป็นฐานสิบหก

วิธีทำ

4.6

4.6.1

ทฤษฎีบท 4.10

ขั้นตอนการแปลงส่วนทศนิยมจากฐานสิบเป็นฐาน b:

1. นำส่วนทศนิยมคูณด้วยฐาน b
2. บันทึกส่วนจำนวนเต็มของผลคูณเป็นเลขโดดทศนิยมหลักถัดไป
3. นำเฉพาะส่วนทศนิยมที่เหลือไปคูณด้วย b ต่อไป
4. ทำซ้ำจนกว่าส่วนทศนิยมจะเป็น 0 หรือได้จำนวนหลักความแม่นยำตามต้องการ
5. อ่านเลขโดดที่บันทึกไว้เรียงจากบนลงล่าง

ตัวอย่างที่ 4.14 แปลง 0.625 ฐานสิบเป็นฐานสอง

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.15 แปลง 0.7 ฐานสิบเป็นฐานสอง (แสดง 8 หลัก)

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.16 แปลง 0.3125 ฐานสิบเป็นฐานแปด

วิธีทำ

4.7

1.

2.

4.7.1

ทฤษฎีบท 4.11

การบวกเลขฐานสอง

1. $0 + 0 = 0$
2. $0 + 1 = 1$
3. $1 + 0 = 1$
4. $1 + 1 = 10_2$ (ใส่ 0 ทด 1 ไปหลักซ้าย)
5. $1 + 1 + 1 = 11_2$ (ใส่ 1 ทด 1 ไปหลักซ้าย)

ตัวอย่างที่ 4.17 บวก $(1011)_2$ กับ $(1101)_2$:

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.18 บวก $(1111)_2$ กับ $(0001)_2$:

วิธีทำ

4.7.2

ทฤษฎีบท 4.12

การลบเลขฐานสอง

1. $0 - 0 = 0$
2. $1 - 0 = 1$
3. $1 - 1 = 0$
4. $0 - 1 = 1$ (ยืม 1 จากหลักซ้าย ซึ่งมีค่าเป็น 2 ในหลักปัจจุบัน)

ตัวอย่างที่ 4.19 ลบ $(1100)_2$ ด้วย $(0101)_2$:

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.20 ลบ $(1000)_2$ ด้วย $(0001)_2$ (แสดงขั้นตอนการยืม)

วิธีทำ

4.8

1.
2.

4.8.1

ทฤษฎีบท 4.13

การคูณเลขฐานสอง

1. $0 \times 0 = 0$
2. $0 \times 1 = 0$
3. $1 \times 0 = 0$
4. $1 \times 1 = 1$

ตัวอย่างที่ 4.21 คูณ $(1011)_2$ ด้วย $(1101)_2$:

วิธีทำ

หมายเหตุ 4.14

การคูณเลขฐานสองด้วยวิธี Shift-and-Add ในหน่วยประมวลผลกลางช่วยลดความซับซ้อนของวงจรคำนวณลงได้อย่างมหาศาล

4.9

4.9.1

ทฤษฎีบท 4.15

ตารางรหัส ASCII แบ่งช่วงการแทนสัญลักษณ์หลักดังนี้:

1. ช่วง 0–31: ตัวอักษรควบคุมระบบ (Control Characters เช่น Line Feed, Enter, Tab)
2. ช่วง 32–47: สัญลักษณ์พิเศษและเครื่องหมายวรรคตอน (!, ", #, ...)
3. ช่วง 48–57: ตัวเลขโดด '0' ถึง '9' (สังเกตว่ารหัสบิตของ '0' คือ $48_{10} = 30_{16}$)
4. ช่วง 65–90: ตัวอักษรภาษาอังกฤษพิมพ์ใหญ่ 'A' ถึง 'Z'
5. ช่วง 97–122: ตัวอักษรภาษาอังกฤษพิมพ์เล็ก 'a' ถึง 'z'

ตารางที่ 24 ตาราง ASCII Code แสดงการเปรียบเทียบรหัสฐานสิบและฐานสิบหก

อักขระ	ASCII (ฐานสิบ)	ASCII (ฐานสิบหก)
'A'	65	41_{16}
'B'	66	42_{16}
'0'	48	30_{16}
'/'	47	$2F_{16}$
'a'	97	61_{16}
'{'	123	$7B_{16}$

ตัวอย่างที่ 4.22 จงแสดงรหัสบิตฐานสิบหกของคำว่า "Hi" ในระบบ ASCII

วิธีทำ

หมายเหตุ 4.16

ข้อจำกัดสำคัญของ ASCII คือสามารถแทนอักขระได้เพียง 128 ตัวอักษรเท่านั้น จึงไม่สามารถรองรับภาษาอื่นๆ ของโลกได้ เช่น ภาษาไทย ภาษาจีน หรือภาษาญี่ปุ่น

4.9.2

บทนิยาม 4.1 การเข้ารหัสยูนิโคด

ระบบยูนิโคดมีรูปแบบการเข้ารหัสหลักดังนี้:

1. **UTF-8:** ใช้ขนาด 1 ถึง 4 ไบต์แบบปรับเปลี่ยนตามประเภทอักขระ (เป็นมาตรฐานหลักบนเว็บและอินเทอร์เน็ต)
2. **UTF-16:** ใช้ขนาด 2 ถึง 4 ไบต์ (ใช้เป็นมาตรฐานภายในของ Windows, Java และ C#)
3. **UTF-32:** ใช้ขนาด 4 ไบต์คงที่ต่อหนึ่งอักขระ

ตัวอย่างที่ 4.23 (การเข้ารหัสอักขระไทยในระบบ UTF-8) จงแสดงการเข้ารหัสอักขระไทย ‘ก’ (U+0E01) และ ‘ข’ (U+0E02) ในระบบ UTF-8 แบบ 3 ไบต์

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 4.1 แปลงต่อไปนี้เป็นฐานสิบ

1. $(1011)_2$
2. $(10010)_2$
3. $(72)_8$
4. $(5F)_{16}$
5. $(1001.101)_2$
6. $(3A.8)_{16}$

แบบฝึกหัด 4.2 แปลงต่อไปนี้เป็นฐานสอง

1. 45_{10}
2. 127_{10}
3. 0.625_{10}
4. 0.8125_{10}
5. 73_{10}
6. 255_{10}

แบบฝึกหัด 4.3 แปลงต่อไปนี้เป็นฐานแปดและฐานสิบหก

1. $(11010110)_2$
2. $(10101010)_2$

แบบฝึกหัด 4.4 แปลงต่อไปนี้เป็นฐานสิบ

1. $(A1B)_{16}$
2. $(777)_8$
3. $(3CD.2A)_{16}$

แบบฝึกหัด 4.5 จงหาผลลัพธ์การดำเนินการฐานสองต่อไปนี้

1. $(1011)_2 + (1101)_2$
2. $(10001)_2 - (111)_2$
3. $(1101)_2 \times (101)_2$
4. $(11000)_2 \div (100)_2$

แบบฝึกหัด 4.6 เขียนคำต่อไปนี้ในรูปเลขฐานสิบหกตามรหัส ASCII

1. “Hi”
2. “OK”

แบบฝึกหัด 4.7 จงอธิบายความแตกต่างระหว่างการเข้ารหัสแบบ ASCII และ Unicode ในการจัดเก็บข้อมูลข้อความบนคอมพิวเตอร์

4.1.1

4.1.2

4.1.3

4.1.4

4.1.5

4.1.6

4.2.1

4.2.2

4.2.3

4.2.4

4.2.5

4.2.6

4.3.1

4.3.2

4.4.1

4.4.2

4.4.3

4.5.1

4.5.2

4.5.3

4.5.4

4.6.1

4.6.2

4.7.1

1.
2.

3.

4.

5.

1.
2.
3.

1.

2.

3.

4.

รหัสวิชา

ชื่อวิชา

หน่วยกิต

บทที่

ชื่อบท

จำนวนชั่วโมง

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.
4.
5.

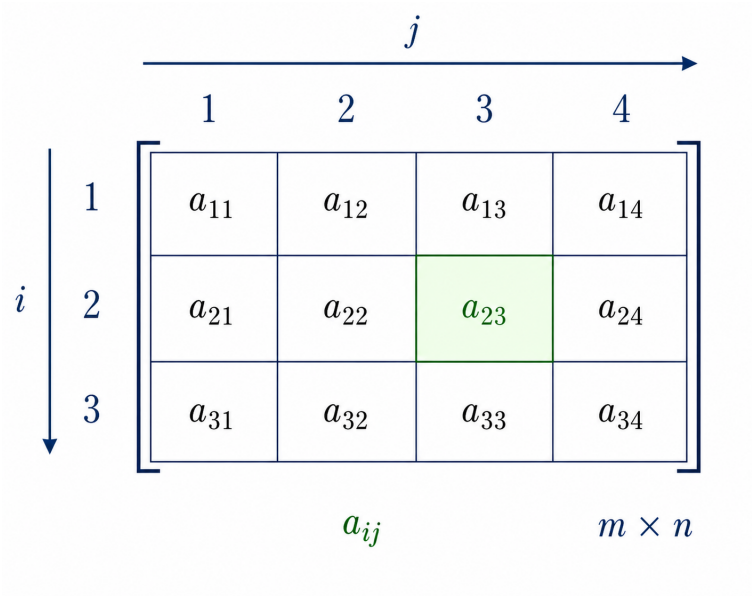
1.
2.
3.

5.1

1.
2.

3.

5.1.1



ภาพที่ 17 แผนภาพแสดงมิติของเมทริกซ์และตำแหน่งสมาชิก

บทนิยาม 5.1 นิยามของเมทริกซ์

เมทริกซ์ คือการจัดเรียงข้อมูลในรูปแบบตารางสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วย m แถว และ n คอลัมน์ เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะมีสมาชิกทั้งหมด $m \cdot n$ ตัว เขียนแทนด้วย

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

โดยที่ a_{ij} คือสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j

ตัวอย่างที่ 5.1 จงระบุขนาดและระบุสมาชิกทุกตำแหน่งของเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงระบุขนาดและระบุสมาชิกของเมทริกซ์ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

5.1.2

$$\mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{I} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{L} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ภาพที่ 18 แผนภาพแสดงประเภทของเมทริกซ์ที่สำคัญ

บทนิยาม 5.2 ประเภทของเมทริกซ์

เมทริกซ์ในทางคณิตศาสตร์จำแนกตามโครงสร้างและสมบัติเฉพาะของสมาชิกออกเป็นประเภทที่สำคัญ ได้แก่:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

ตัวอย่างที่ 5.3 จงอธิบายความสำคัญและการประยุกต์ใช้งานของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง

วิธีทำ

5.2

1.

2.

5.2.1

บทนิยาม 5.3 ความเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$$

ตัวอย่างที่ 5.4 ถ้า $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ จงหาค่า x และ y

วิธีทำ

5.2.2

บทนิยาม 5.4 การบวกและการลบเมทริกซ์

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ การบวกและการลบเมทริกซ์กำหนดโดย

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{และ} \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงคำนวณผลลัพธ์ของการบวกและการลบเมทริกซ์ต่อไปนี้:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.6 (สมบัติของการบวกเมทริกซ์) จงสรุปและพิสูจน์สมบัติพื้นฐานของการบวกเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.7 จงแสดงว่าการลบเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ ($A - B \neq B - A$) โดยทั่วไป

วิธีทำ

5.2.3

บทนิยาม 5.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ และสเกลาร์ c การคูณสเกลาร์ cA คือเมทริกซ์

$$cA = [c \cdot a_{ij}]$$

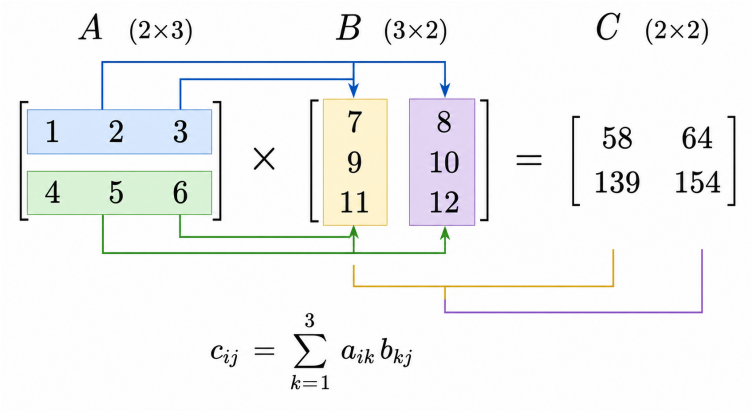
ตัวอย่างที่ 5.8 จงคำนวณผลคูณสเกลาร์ $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.9 (สมบัติของการคูณสเกลาร์) สำหรับเมทริกซ์ A, B และสเกลาร์ c, d จงสรุปสมบัติการคูณสเกลาร์

วิธีทำ

5.2.4



ภาพที่ 19 แผนภาพแสดงการคูณแถวของเมทริกซ์กับหลักของเมทริกซ์

บทนิยาม 5.6 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ และเมทริกซ์ $B = [b_{jk}]$ ขนาด $n \times p$ ผลคูณ AB จะได้เมทริกซ์ $C = [c_{ik}]$ ขนาด $m \times p$ โดยสมาชิกในแถวที่ i คอลัมน์ที่ k คือ

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

ทฤษฎีบท 5.1 สมบัติของการคูณเมทริกซ์

สำหรับเมทริกซ์ A, B, C ที่ขนาดเหมาะสม และสเกลาร์ c การคูณเมทริกซ์มีสมบัติดังต่อไปนี้:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Associative Law)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (Left Distributive Law)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (Right Distributive Law)
4. $AI = IA = A$ (Identity Law, I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์)
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ (Scalar Multiplication)
6. $(AB)^T = B^T A^T$ (Transpose of Product)

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาผลคูณ AB เมื่อ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.11 จงคำนวณผลคูณ AB และ BA เมื่อ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ แล้วสังเกตผลลัพธ์

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.12 จงแสดงว่า $AB = O$ ไม่ได้บังคับว่า $A = O$ หรือ $B = O$

วิธี ทำ

5.2.5

บทนิยาม 5.7 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน ของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ คือเมทริกซ์

$$A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

ตัวอย่างที่ 5.13 จงหา Transpose ของเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.14 (สมบัติของ Transpose) จงพิสูจน์สมบัติ $(AB)^T = B^T A^T$ สำหรับเมทริกซ์ขนาด 2×2

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 5.2

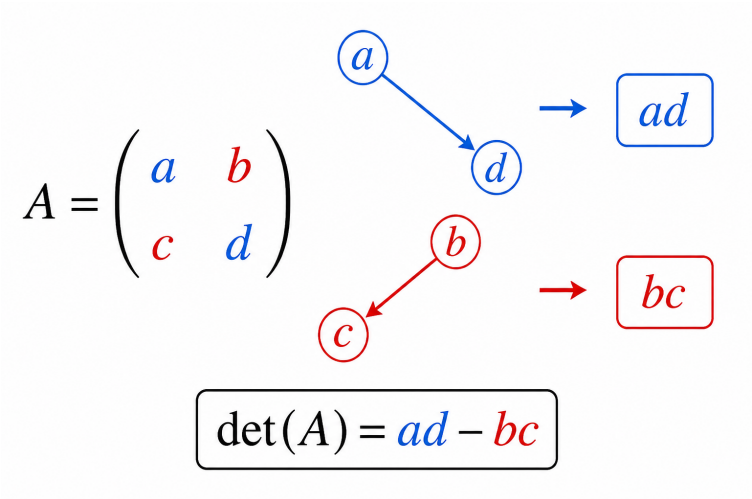
ทุกเมทริกซ์จตุรัส A สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเฉียง ดังนี้:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

5.3

1.
2.
3.

5.3.1



ภาพที่ 20 แผนภาพแสดงดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2

บทนิยาม 5.8 ดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

บทนิยาม 5.9 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาดเล็ก

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จตุรัสนิยามตามขนาดดังต่อไปนี้:

1. สำหรับเมทริกซ์ขนาด 1×1: $\det([a]) = a$
2. สำหรับเมทริกซ์ขนาด 2×2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

โดยที่ ad คือผลคูณเส้นทแยงมุมหลัก และ bc คือผลคูณเส้นทแยงมุมรอง

ตัวอย่างที่ 5.15 จงคำนวณ $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

บทแทรก 5.3 กฎของ Sarrus สำหรับเมทริกซ์ 3×3

สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3 สามารถคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ได้โดยกฎของ Sarrus ดังนี้

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

โดยเทอมบวก (aei, bfg, cdh) คือผลคูณตามเส้นทแยงมุมหลักและเส้นทแยงมุมขนาน และเทอมลบ (ceg, bdi, afh) คือผลคูณตามเส้นทแยงมุมรองและเส้นทแยงมุมขนาน

ตัวอย่างที่ 5.16 จงคำนวณ $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ โดยใช้กฎของ Sarrus

วิธีทำ

หมายเหตุ 5.4

กฎของ Sarrus ใช้ได้เฉพาะกับเมทริกซ์ขนาด 3×3 เท่านั้น สำหรับเมทริกซ์ขนาดใหญ่กว่า ต้องใช้วิธีการอื่น เช่น Cofactor Expansion (กระจายตามแถวหรือคอลัมน์)

5.3.2

บทนิยาม 5.10 Minor, Cofactor และ Cofactor Expansion

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ขนาด $n \times n$

1. Minor ของ a_{ij} คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยที่ได้จากการลบแถว i และคอลัมน์ j เขียนแทนด้วย M_{ij}
2. Cofactor ของ a_{ij} คือ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A สามารถคำนวณได้โดยการกระจายตามแถวที่ i:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

ตัวอย่างที่ 5.17 จงคำนวณ $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ โดยการกระจายตามแถวแรก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.18 จงคำนวณ $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ โดยการกระจายตามคอลัมน์ที่ 3

วิธีทำ

หมายเหตุ 5.5 การใช้งาน Minor และ Cofactor ทางคอมพิวเตอร์

1. **การคำนวณด้วยมือ:** การเลือกแถวหรือคอลัมน์ที่มีศูนย์มากที่สุดจะช่วยลดจำนวน Cofactor ที่ต้องคำนวณลงได้อย่างมาก (ดังตัวอย่างข้างต้นที่ $a_{33} = 0$)
2. **ประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์:** แม้ว่า Cofactor Expansion จะเป็นเครื่องมือวิเคราะห์เชิงทฤษฎี แต่การกระจายโคแฟกเตอร์มี ความซับซ้อนเชิงเวลาระดับ $O(n!)$ ในการคำนวณจริงด้วยระบบคอมพิวเตอร์ จึงนิยมใช้วิธี **การกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian Elimination)** หรือ **LU Decomposition** ซึ่งมีความซับซ้อนเพียง $O(n^3)$ แทน

5.3.3

ทฤษฎีบท 5.6 สมบัติพื้นฐานของดีเทอร์มิแนนต์

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จตุรัสขนาด $n \times n$ ดีเทอร์มิแนนต์มีสมบัติสำคัญดังต่อไปนี้:

1. $\det(I) = 1$ โดยที่ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์
2. ถ้าเมทริกซ์ A มีแถวหรือคอลัมน์ใดเป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ $\det(A) = 0$
3. ถ้า สลับ แถว สอง แถว (หรือ สลับ คอลัมน์ สอง คอลัมน์) ค่า ดี เท อร์ มิ แนนต์ จะ เปลี่ยน เป็นเครื่องหมายตรงข้าม
4. ถ้าคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง) ด้วยสเกลาร์ c ค่าดีเทอร์มิแนนต์ใหม่จะเท่ากับ $c\det(A)$
5. ถ้าคูณเมทริกซ์ทั้งเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ c จะได้ $\det(cA) = c^n \det(A)$ สำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$
6. ถ้าแถวหนึ่งเป็นผลรวมของสองพจน์ สามารถแยกดีเทอร์มิแนนต์ออกเป็นผลบวกของสองดีเทอร์มิแนนต์ได้
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (สมบัติการคูณดีเทอร์มิแนนต์)
8. $\det(A^T) = \det(A)$ (ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน)
9. สำหรับ เม ทริกซ์ สามเหลี่ยม (Upper/Lower Triangular Matrix) หรือ เม ทริกซ์ เฉียง ค่า $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$ (ผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก)

พิสูจน์

พิสูจน์สำหรับเมทริกซ์ 2×2 ให้ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ได้ $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

จากนิยามดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2:

$$\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \tag{5.1}$$

กระจายพจน์ทั้งสองชุดให้ครบ

$$(ae+bg)(cf+dh) = aecf + aedh + bgcf + bgdh \tag{5.2}$$

$$(af+bh)(ce+dg) = afce + afdg + bhce + bhdg \tag{5.3}$$

ดังนั้น

$$\det(AB) = aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg \tag{5.4}$$

โดยสมบัติการสลับที่ของการคูณในจำนวนจริง $aecf = afce$ และ $bgdh = bhdg$ ดังนั้นพจน์

$$aecf - afce = 0, \qquad bgdh - bhdg = 0$$

เหลือพจน์ที่ไม่ตัดกัน 4 พจน์ ได้แก่

$$\det(AB) = aedh - afdg - bhce + bgcf \tag{5.5}$$

$$= adeh - adfg - bceh + bcfg \tag{5.6}$$

$$= ad(eh - fg) - bc(eh - fg) \tag{5.7}$$

$$= (ad - bc)(eh - fg) \tag{5.8}$$

$$= \det(A)\det(B) \tag{5.9}$$

สำหรับกรณีทั่วไป $n \times n$ การพิสูจน์ใช้หลักการของ cofactor expansion และ mathematical induction ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมบัติการคูณของดีเทอร์มิแนนต์เป็นจริงสำหรับทุกขนาดของเมทริกซ์จตุรัส ■

ตัวอย่างที่ 5.19

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.20 พิสูจน์ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ สำหรับเมทริกซ์ 2×2

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.21 (ตัวอย่างค้านสำหรับสมบัติการบวกดีเทอร์มิแนนต์) จง แสดง ตัวอย่าง ค้าน (counter-example) เพื่อพิสูจน์ว่า $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ โดยทั่วไป

วิธีทำ

บทแทรก 5.7 เงื่อนไขการมีตัวผกผัน

เมทริกซ์จตุรัส A จะมีตัวผกผันก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ ในกรณีนี้เรียก A ว่า nonsingular หรือ invertible หากแต่ $\det(A) = 0$ จะเรียก A ว่า singular หรือ noninvertible

5.4

บทนิยาม 5.11 ตัวผกผันของเมทริกซ์

กำหนดเมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ที่ทำให้

$$AB = BA = I_n$$

แล้วจะเรียก B ว่า ตัวผกผัน ของ A เขียนแทนด้วย A^{-1}

บทแทรก 5.8 สูตรตัวผกผันของเมทริกซ์ 2×2

สำหรับเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ที่มี $ad - bc \neq 0$ ตัวผกผันมีสูตรปิดดังนี้:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

หมายเหตุ 5.9 ขั้นตอนการใช้สูตร

1. คำนวณ $\det(A) = ad - bc$ ก่อนเสมอ และตรวจสอบว่า $\det(A) \neq 0$
2. สลับตำแหน่ง a กับ d และเปลี่ยนเครื่องหมาย b, c เป็น $-b, -c$
3. คูณด้วย $\dfrac{1}{\det(A)}$

ตัวอย่างที่ 5.22 จงหาตัวผกผันของ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.23 จงหาตัวผกผันของ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.24 จงหาตัวผกผันของ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.25 (สมบัติของตัวผกผัน) สำหรับเมทริกซ์ invertible A, B สรุปสมบัติที่สำคัญได้ดังนี้

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.26 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ไม่ใช่ $A^{-1}B^{-1}$ ต้องระวังลำดับการคูณ!

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 5.10

สำหรับเมทริกซ์ invertible A และ B ตัวผกผันมีสมบัติดังต่อไปนี้

1.
2.
3.
4.

ทฤษฎีบท 5.11

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ สำหรับเมทริกซ์ invertible A และ B

บทแทรก 5.12

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ไม่ใช่ $A^{-1}B^{-1}$ ต้องระวังลำดับการคูณเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากการคูณเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่

หมายเหตุ 5.13

สำหรับเมทริกซ์จตุรัสขนาด $n \times n$ ที่หาตัวผกผันได้ทุกตัว จะได้ $(A^{-1})^{-1} = A$ และ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5.5

1.

2.

3.

5.5.1

ตัวอย่างที่ 5.27 จงเขียนระบบสมการต่อไปนี้ในรูปสมการเมทริกซ์ $Ax = b$:

$$x + 2y + 3z = 14$$
$$2x + 3y + z = 10$$
$$3x + y + 2z = 14$$

วิธีทำ

5.5.2

ตัวอย่างที่ 5.28 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้ตัวผกผันเมทริกซ์:

$$x + 2y = 5$$
$$3x + 4y = 11$$

วิธีทำ

5.5.3

ตัวอย่างที่ 5.29 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์:

$$x + 2y = 5$$
$$3x + 4y = 11$$

วิธีทำ

5.5.4

ตัวอย่างที่ 5.30 จงแก้ระบบสมการโดยวิธี Gaussian Elimination:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 5y + z &= 23 \\ x + 3z &= 7 \end{aligned}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.31 ระบบสมการ $Ax = b$ มีคำตอบเดียวก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ (เมทริกซ์ A invertible) และไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบไม่จำกัดก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$ (เมทริกซ์ A singular)

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.32 ถ้า $\det(A) = 0$ จะพิจารณาได้ว่า ถ้า b อยู่ใน column space ของ A จะมีคำตอบไม่จำกัด แต่ถ้า b ไม่อยู่ใน column space ของ A จะไม่มีคำตอบ

วิธีทำ

5.6

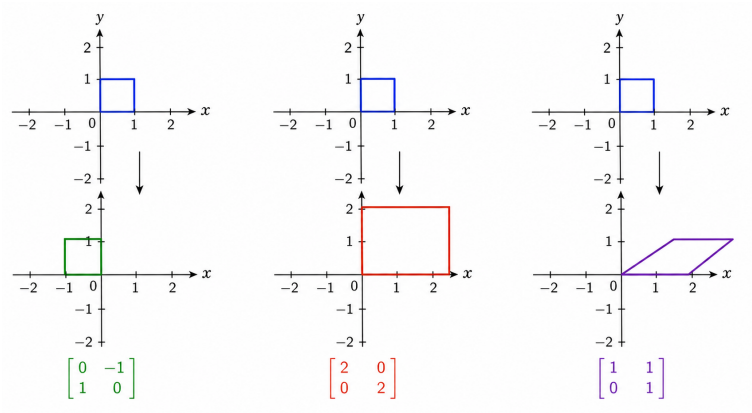
1.

2.

3.

4.

5.6.1



ภาพที่ 21 แผนภาพแสดงการหมุน การขยาย และการเฉือนด้วยเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 5.33 (การหมุนพิกัด 2 มิติ) จงหมุนพิกัดจุด $(1, 0)$ รอบจุดกำเนิดไปเป็นมุม 90° โดยใช้เมทริกซ์การหมุน $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ในระบบพิกัดเอกพันธุ์

วิธีทำ

5.6.2

ตัวอย่างที่ 5.34 กำหนดเมทริกซ์กุญแจ $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ จงเข้ารหัสข้อความ “HI”

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.35 จงถอดรหัสข้อความ “LP” กลับเป็นข้อความเดิมด้วยเมทริกซ์กุญแจ $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

วิธี ทำ

5.6.3

ตัวอย่างที่ 5.36 พิจารณากราฟสามเหลี่ยมที่มีเมทริกซ์ประชิด $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ จงหาจำนวนเส้นทางความยาว 2 ขั้นระหว่างทุกคู่โหนด

วิธีทำ

5.6.4

ตัวอย่างที่ 5.37 (การถดถอยเชิงเส้น - Linear Regression) จง หา เวก เตอร์ สัมประสิทธิ์ $\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$ เมื่อกำหนด $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ และ $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5.38 (โครงข่ายประสาทเทียมหนึ่งชั้น - Single-Layer Neural Network) จงหาผลลัพธ์ของชั้นประสาทเทียม $\mathbf{z} = \mathbf{x}W + \mathbf{b}$ และส่งผ่าน ReLU $f(\mathbf{z}) = \max(0, \mathbf{z})$ เมื่อกำหนด

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 5.1 จงระบุขนาดของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.2 จงระบุว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์ชนิดใด (จตุรัส, สมมาตร, สามเหลี่ยมบน, สามเหลี่ยมล่าง, เส้นทแยงมุม, เอกลักษณ์, ศูนย์)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.3 กำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ จงหา

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $3A$
4. $A \cdot B$
5. $B \cdot A$

แบบฝึกหัด 5.4 จงหา transpose ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.5 จงคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้โดยใช้วิธี cofactor expansion:

1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.6 จงคำนวณดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้กฎของ Sarrus:

1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.7 จงหาตัวผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
3. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.8 จงตรวจสอบว่า $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ สำหรับข้อ 1(a)

แบบฝึกหัด 5.9 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้ตัวผกผันเมทริกซ์

1. $x + 2y = 5,\ 3x + 4y = 6$
2. $2x + y = 3,\ x - y = 1$

แบบฝึกหัด 5.10 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

1. $x + y = 2,\ 2x + 3y = 5$

5.1.1

5.1.2

5.1.3

5.2.1

5.2.2

5.2.3

5.3.1

5.3.2

5.3.3

5.3.4

5.3.5

5.4.1

5.4.2

5.5.1

5.5.2

5.6.1

5.7.1

5.7.2

5.7.3

5.8.1

5.9.1

5.9.2

5.10.1

1.

1.1.

1.2.

1.3.

2.

2.1.

2.2.

2.3.

3.

4.

5.

5.1.

5.2.

6.

7.

8.

1.
2.
3.
4.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

รหัสวิชา

ชื่อวิชา

หน่วยกิต

บทที่

ชื่อบท

จำนวนชั่วโมง

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.
4.
5.

1.
2.
3.

6.1

ตารางที่ 25 ความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตบูลีน ทฤษฎีเซต และตรรกศาสตร์

Boolean Algebra	Set Theory	Propositional Logic
0 (False)	$\emptyset$ (Empty Set)	$\perp$ (False)
1 (True)	U (Universal Set)	$\top$ (True)
OR ($+$)	Union ($\cup$)	OR ($\vee$)
AND ($\cdot$)	Intersection ($\cap$)	AND ($\wedge$)
NOT ($\overline{x}$)	Complement (A^c)	NOT ($\neg$)

6.1.1

บทนิยาม 6.1 พีชคณิตบูลีน

พีชคณิตบูลีน คือ โครงสร้างเชิงพีชคณิต $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ โดยที่ B เป็นเซตที่มีสองสมาชิกคือ $\{0, 1\}$ พร้อมการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ และการดำเนินการเอกภาพ $'$ โดยสอดคล้องกับสัจพจน์ต่อไปนี้

1. Closure สำหรับทุก $a, b \in B$:
   - 1.1. $a + b \in B$
   - 1.2. $a \cdot b \in B$
2. Identity Elements
   - 2.1. $a + 0 = a$ (0 เป็น identity ของ OR)
   - 2.2. $a \cdot 1 = a$ (1 เป็น identity ของ AND)
3. Commutative Laws
   - 3.1. $a + b = b + a$
   - 3.2. $a \cdot b = b \cdot a$
4. Associative Laws
   - 4.1. $(a + b) + c = a + (b + c)$
   - 4.2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
5. Distributive Laws
   - 5.1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   - 5.2. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
6. Complement Laws

6.1. $a + a' = 1$

6.2. $a \cdot a' = 0$

6.1.2

บทนิยาม 6.2 ค่าคงตัวบูลีน

ในพีชคณิตบูลีน มีค่าคงตัวสองค่า ดังนี้

1. 0 แทนค่าความจริงเท็จ หรือแรงดันระดับต่ำ
2. 1 แทนค่าความจริงจริง หรือแรงดันระดับสูง

ตัวอย่างที่ 6.1 ถ้า 0 แทนค่าความจริงว่างเปล่าหรือเท็จ และ 1 แทนค่าความจริงว่าถูกต้องหรือจริง จงอธิบายความหมายของ 0 และ 1 ในบริบทต่างๆ

วิธีทำ

6.2

6.2.1

บทนิยาม 6.3 การดำเนินการ OR

การดำเนินการ OR ของ a และ b เขียนแทนด้วย $a+b$ หรือ $a \vee b$ ให้ผลลัพธ์เป็น 1 ถ้าอย่างน้อยหนึ่งใน a หรือ b เป็น 1 และให้ผลลัพธ์เป็น 0 ก็ต่อเมื่อ $a=b=0$

ตัวอย่างที่ 6.2 Truth table ของการดำเนินการ OR

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 6.1 Properties ของ OR

สำหรับทุก $a, b, c \in \{0, 1\}$ โดยที่ a, b, c แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a + a = a$ (Idempotent Law)
2. $a + 0 = a$ (Identity Law)
3. $a + 1 = 1$ (Domination Law)
4. $a + a' = 1$ (Complement Law)
5. $a + b = b + a$ (Commutative Law)

6. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (Associative Law)

6.2.2

บทนิยาม 6.4 การดำเนินการ AND

การดำเนินการ AND ของ a และ b เขียนแทนด้วย $a \cdot b$ หรือ ab หรือ $a \wedge b$ ให้ผลลัพธ์เป็น 1 ก็ต่อเมื่อ $a = b = 1$ และให้ผลลัพธ์เป็น 0 ถ้าอย่างน้อยหนึ่งใน a หรือ b เป็น 0

ตัวอย่างที่ 6.3 ตารางค่าความจริงของการดำเนินการ AND

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 6.2 Properties ของ AND

สำหรับทุก $a, b, c \in \{0, 1\}$ โดยที่ a, b, c แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a \cdot a = a$ (Idempotent Law)
2. $a \cdot 0 = 0$ (Domination Law)
3. $a \cdot 1 = a$ (Identity Law)

4. $a \cdot a' = 0$ (Complement Law)
5. $a \cdot b = b \cdot a$ (Commutative Law)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Associative Law)

6.2.3

บทนิยาม 6.5 การดำเนินการ NOT

การดำเนินการ NOT ของ a เขียนแทนด้วย a' หรือ $\bar{a}$ หรือ $\neg a$ ให้ผลลัพธ์ตรงข้ามกับ a นั่นคือ ถ้า $a = 0$ แล้ว $a' = 1$ และถ้า $a = 1$ แล้ว $a' = 0$

ตัวอย่างที่ 6.4 Truth table ของการดำเนินการ NOT

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 6.3 Properties ของ NOT

สำหรับทุก $a \in \{0, 1\}$ โดยที่ a แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a + a' = 1$ (Complement Law ข้อ 1)
2. $a \cdot a' = 0$ (Complement Law ข้อ 2)
3. $(a')' = a$ (Double Negation)

4. $0' = 1$ และ $1' = 0$

หมายเหตุ 6.4

อย่าสับสนระหว่างการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ทั่วไปกับพีชคณิตบูลีน ดังนี้

1. ในพีชคณิตบูลีน $1 + 1 = 1$ (ไม่ใช่ 2)
2. ในพีชคณิตบูลีน $1 \cdot 1 = 1$ (เหมือนการคูณปกติ)
3. ในพีชคณิตบูลีน $1 + 0 = 1$ (เหมือนการบวกปกติ)

สัญลักษณ์ $+$ และ $\cdot$ ในบริบทของ Boolean Algebra มีความหมายแตกต่างจากใน ordinary algebra

6.2.4

บทนิยาม 6.6 การดำเนินการ XOR

การดำเนินการ XOR ของ a และ b เขียนแทนด้วย $a \oplus b$ ให้ผลลัพธ์เป็น 1 ก็ต่อเมื่อ a และ b มีค่าต่างกัน และให้ผลลัพธ์เป็น 0 เมื่อ a และ b มีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$a \oplus b = a'b + ab' = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$$

ทฤษฎีบท 6.5 คุณสมบัติของ XOR

สำหรับทุก $a, b, c \in \{0, 1\}$ โดยที่ a, b, c แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a \oplus 0 = a$ (Identity)
2. $a \oplus 1 = a'$ (Complement)
3. $a \oplus a = 0$ (Idempotent / Self-inverse)
4. $a \oplus a' = 1$
5. $a \oplus b = b \oplus a$ (Commutative)

6. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associative)
7. $a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$ (Distributive over AND)
8. $(a \oplus b)' = a \oplus b' = a' \oplus b = a \oplus b \oplus 1$ (เท่ากับ XNOR)

ตัวอย่างที่ 6.5 คำนวณ $1 \oplus 0 \oplus 1$:

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.6 พิสูจน์ $a \oplus b = a \cdot b' + a' \cdot b$ โดยใช้ truth table

วิธีทำ

6.3

6.3.1

ทฤษฎีบท 6.6 กฎการแจกแจง

สำหรับทุก $a, b, c \in \{0, 1\}$ โดยที่ a, b, c แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (AND กระจายเหนือ OR)
2. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ (OR กระจายเหนือ AND)

พิสูจน์

พิสูจน์ข้อ 1: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ โดยใช้ truth table:

a	b	c	$b+c$	$a \cdot (b+c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

เนื่องจากคอลัมน์ $a \cdot (b+c)$ และ $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ มีค่าเท่ากันทุกแถว ดังนั้น $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

พิสูจน์ข้อ 2: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ โดยใช้ truth table:

a	b	c	$b \cdot c$	$a + (b \cdot c)$	$a + b$	$a + c$	$(a + b) \cdot (a + c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

เนื่องจากคอลัมน์ $a+(b\cdot c)$ และ $(a+b)\cdot(a+c)$ มีค่าเท่ากันทุกแถว ดังนั้น $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$■

ตัวอย่างที่ 6.7 พิสูจน์ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ โดยใช้ truth table

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.8 พิสูจน์ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ โดยใช้ truth table

วิธีทำ

6.3.2

ทฤษฎีบท 6.7 Absorption Laws

สำหรับทุก $a, b \in \{0, 1\}$ โดยที่ a และ b แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $a + (a \cdot b) = a$ (Absorption Law ข้อ 1)
2. $a \cdot (a + b) = a$ (Absorption Law ข้อ 2)

ตัวอย่างที่ 6.9 พิสูจน์ $a + (a \cdot b) = a$ โดยใช้ truth table

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.10 พิสูจน์ $a \cdot (a + b) = a$ โดยใช้ truth table

วิธีทำ

6.4

ทฤษฎีบท 6.8 De Morgan's Laws สำหรับพีชคณิตบูลีน

สำหรับทุก $a, b \in \{0, 1\}$ โดยที่ a และ b แทนค่าบูลีนใดๆ ดังนี้

1. $(a + b)' = a' \cdot b'$ (Complement ของ OR = AND ของ Complements)
2. $(a \cdot b)' = a' + b'$ (Complement ของ AND = OR ของ Complements)

พิสูจน์

พิสูจน์โดยใช้ truth table พิจารณาทุกกรณีของ a และ b:
สำหรับข้อ 1: $(a + b)' = a' \cdot b'$

a	b	$a+b$	$(a+b)'$	a'	b'	$a' \cdot b'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

เนื่องจากคอลัมน์ $(a+b)'$ และ $a' \cdot b'$ มีค่าเท่ากันทุกแถว ดังนั้น $(a+b)' = a' \cdot b'$
สำหรับข้อ 2: $(a \cdot b)' = a' + b'$

a	b	$a \cdot b$	$(a \cdot b)'$	a'	b'	$a' + b'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

เนื่องจากคอลัมน์ $(a \cdot b)'$ และ $a' + b'$ มีค่าเท่ากันทุกแถว ดังนั้น $(a \cdot b)' = a' + b'$ ■

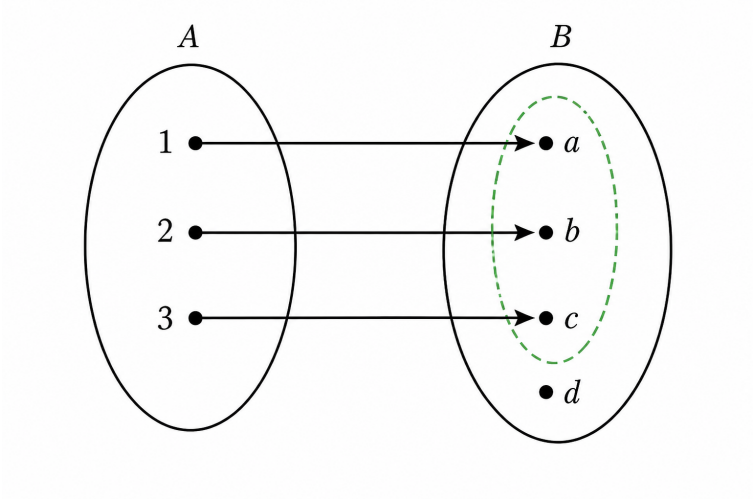
หมายเหตุ 6.9

สังเกตความสอดคล้องกับ De Morgan's Laws ในตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต ดังนี้

1. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ สอดคล้องกับ $(a+b)' = a' \cdot b'$
2. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ สอดคล้องกับ $(a \cdot b)' = a' + b'$

นี่เป็นตัวอย่างที่แสดงความเชื่อมโยงระหว่างตรรกศาสตร์ ทฤษฎีเซต และพีชคณิตบูลีน

6.5



ภาพที่ 22 การแมปแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One) และแบบทั่วถึง (Onto) ของฟังก์ชัน

6.5.1

บทนิยาม 6.7 นิพจน์บูลีน

นิพจน์บูลีน คือการรวมกันขององค์ประกอบต่อไปนี้

1. ตัวแปรบูลีน เช่น x, y, z
2. ค่าคงตัวบูลีน 0 และ 1
3. การดำเนินการบูลีน ($+$, $\cdot$, $'$)
4. วงเล็บ (และ) เพื่อกำหนดลำดับการดำเนินการ

ตัวอย่างที่ 6.11 นิพจน์บูลีนที่ถูกต้อง ดังนี้

1. $x + y$
2. $x \cdot y'$
3. $(x + y) \cdot z$
4. $x' + y \cdot z$
5. $(a + b) \cdot (a' + c) + (a \cdot b \cdot c)'$

วิธีทำ

6.5.2

บทนิยาม 6.8 ฟังก์ชันบูลีน

ฟังก์ชันบูลีน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือ ฟังก์ชันที่รับค่าบูลีน n ตัวแปรและให้ผลลัพธ์เป็นค่าบูลีน

ตัวอย่างที่ 6.12 ฟังก์ชันบูลีน $f(x, y) = x \cdot y + x' \cdot y'$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.13 ฟังก์ชันบูลีน $f(x, y, z) = (x + y') \cdot z + x \cdot y$

วิธีทำ

6.6

6.6.1

บทนิยาม 6.9 มินเทอม

มินเทอม ของตัวแปร n ตัวคือ AND term ที่มีตัวแปรทุกตัวปรากฏเพียงครั้งเดียวในรูปแบบปกติ (ถ้าตัวแปรเป็น 1 ใช้ตัวแปรเดี่ยว ถ้าตัวแปรเป็น 0 ใช้ complement)
สำหรับ 2 ตัวแปร x, y:

1. $m_0 = x' \cdot y'$ (ทั้ง $x = 0, y = 0$)
2. $m_1 = x' \cdot y$ (ทั้ง $x = 0, y = 1$)
3. $m_2 = x \cdot y'$ (ทั้ง $x = 1, y = 0$)
4. $m_3 = x \cdot y$ (ทั้ง $x = 1, y = 1$)

บทนิยาม 6.10 แมกซ์เทอม

แมกซ์เทอม ของตัวแปร n ตัวคือ OR term ที่มีตัวแปรทุกตัวปรากฏเพียงครั้งเดียวในรูปแบบปกติ (ถ้าตัวแปรเป็น 0 ใช้ตัวแปรเดี่ยว ถ้าตัวแปรเป็น 1 ใช้ complement)
สำหรับ 2 ตัวแปร x, y:

1. $M_0 = x + y$ (ทั้ง $x = 0, y = 0$)
2. $M_1 = x + y'$ (ทั้ง $x = 0, y = 1$)
3. $M_2 = x' + y$ (ทั้ง $x = 1, y = 0$)
4. $M_3 = x' + y'$ (ทั้ง $x = 1, y = 1$)

ทฤษฎีบท 6.10

ความสัมพันธ์ระหว่าง Minterm และ Maxterm โดยที่ m_i และ M_i แทน minterm และ maxterm ลำดับที่ i:

1. $m_i = M_i'$
2. $M_i = m_i'$
3. $\sum$ (sigma) ใช้แทน sum ของ minterms
4. $\prod$ (pi) ใช้แทน product ของ maxterms

6.6.2

บทนิยาม 6.11 รูปแบบผลบวกของผลคูณ (SOP)

รูปแบบผลบวกของผลคูณ (Sum of Products: SOP) คือ รูปแบบของนิพจน์บูลีนที่เขียนเป็น OR ของ AND terms โดยฟังก์ชันบูลีนใดๆ สามารถเขียนเป็น SOP ได้โดยใช้ minterm expansion

ตัวอย่างที่ 6.14 เขียนฟังก์ชัน $f(x, y) = x \cdot y + x'$ ในรูปแบบ canonical SOP

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.15 จาก truth table ของ $f(x, y, z)$ ที่ $f = 1$ สำหรับ minterms m_1, m_3, m_5, m_7:

วิธีทำ

6.6.3

บทนิยาม 6.12 รูปแบบผลคูณของผลบวก (POS)

รูปแบบผลคูณของผลบวก (Product of Sums: POS) คือ รูปแบบของนิพจน์บูลีนที่เขียนเป็น AND ของ OR terms โดยฟังก์ชันบูลีนใดๆ สามารถเขียนเป็น POS ได้โดยใช้ maxterm expansion

ตัวอย่างที่ 6.16 เขียนฟังก์ชัน $f(x, y) = (x + y) \cdot (x' + y')$ ในรูปแบบ canonical POS

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 6.11

ความสัมพันธ์ระหว่าง SOP และ POS โดยที่ $\sum$ แทนผลบวกของ minterms และ $\prod$ แทนผลคูณของ maxterms: ถ้า $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots)$ แล้ว $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod(M_{j_1}, M_{j_2}, \ldots)$ โดยที่ $\{j_1, j_2, \ldots\}$ คือ maxterms ที่ไม่อยู่ใน minterm list

6.7

6.7.1

ตัวอย่างที่ 6.17 ลดรูป $f(x, y, z) = xy + x'y + xy'$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.18 ลดรูป $f(a, b, c) = abc + abc' + a'b + ab'c$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.19 ลดรูป $f(x,y) = (x+y)\cdot(x+y')$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.20 ลดรูปนิพจน์บูลีน $f(a,b,c) = (a+b)\cdot(a'+c)+(b+c)$ อย่างละเอียดทีละขั้นตอน

วิธีทำ

6.7.2

ทฤษฎีบท 6.12 Consensus Theorem

1. $ab + a'c + bc = ab + a'c$
2. $(a + b)(a' + c)(b + c) = (a + b)(a' + c)$

พิสูจน์

พิสูจน์ข้อ 1: $ab + a'c + bc = ab + a'c$
โดยการเพิ่ม bc เข้าไปใน abc และใช้ Distributive Law:

$$\begin{aligned} ab + a'c + bc &= ab + a'c + bc \cdot 1 \\ &= ab + a'c + bc(a + a') \quad \text{(Complement: } a + a' = 1\text{)} \\ &= ab + a'c + abc + a'bc \\ &= ab(1 + c) + a'c(1 + b) \\ &= ab + a'c \quad \text{(Domination: } 1 + c = 1\text{)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $ab + a'c + bc = ab + a'c$ พิสูจน์แล้ว
หรือพิสูจน์โดย truth table:

a	b	c	ab	$a'c$	bc	$ab + a'c + bc$	$ab + a'c$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

เนื่องจากคอลัมน์ $ab + a'c + bc$ และ $ab + a'c$ มีค่าเท่ากันทุกแถว ดังนั้น $ab + a'c + bc = ab + a'c$ ■

ตัวอย่างที่ 6.21 ลดรูป $f(x, y, z) = xy + x'z + yz$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.22 จงคำนวณ output ของ Perceptron ที่มี 2 inputs x_1, x_2 โดยมี weights $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ และ bias $b = -0.7$ และใช้ step function เป็น activation:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } z \geq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } z < 0 \end{cases}$$

โดยที่ $z = x_1 w_1 + x_2 w_2 + b$ จงทดสอบกับ input $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$

วิธีทำ

6.8

6.8.1

ทฤษฎีบท 6.13 แผนที่คาร์นอ 2 ตัวแปร

แผนที่คาร์นอสำหรับ 2 ตัวแปร x, y จัดเรียงดังนี้

	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	m_0 $x'y'$	m_1 $x'y$
$x = 1$	m_2 xy'	m_3 xy

เซลล์ที่อยู่ติดกัน (adjacent cells) หมายถึงเซลล์ที่แชร์ edge ร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 6.23 ใช้ K-map ลดรูป $f(x, y) = \sum(1, 2, 3)$

	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0 m_0	1 m_1
$x = 1$	1 m_2	1 m_3

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.24 ใช้ K-map ลดรูป $f(x,y) = xy + xy' + x'y'$

	$y=0$	$y=1$
$x=0$	1 m_0	0 m_1
$x=1$	1 m_2	1 m_3

วิธีทำ

6.8.2

ทฤษฎีบท 6.14 แผนที่คาร์นอ 3 ตัวแปร

แผนที่คาร์นอสำหรับ 3 ตัวแปร x, y, z จัดเรียงดังนี้

	$yz=00$ $y'z'$	$yz=01$ $y'z$	$yz=11$ yz	$yz=10$ yz'
$x=0$	m_0 $x'y'z'$	m_1 $x'y'z$	m_3 $x'yz$	m_2 $x'yz'$
$x=1$	m_4 $xy'z'$	m_5 $xy'z$	m_7 xyz	m_6 xyz'

หมายเหตุ ลำดับของคอลัมน์ใช้ Gray code เพื่อให้เซลล์ข้างเคียงแตกต่างกันเพียง 1 bit

ตัวอย่างที่ 6.25 ใช้ K-map ลดรูป $f(x,y,z) = \sum(0,1,3,4,5,6)$

	$yz = 00$	$yz = 01$	$yz = 11$	$yz = 10$
$x = 0$	1	1	1	0
$x = 1$	1	1	0	1

วิธีทำ

6.8.3

ทฤษฎีบท 6.15 แผนที่คาร์นอ 4 ตัวแปร

แผนที่คาร์นอสำหรับ 4 ตัวแปร w, x, y, z จัดเรียงดังนี้

	$xy = 00$ $y'z'$	$xy = 01$ $y'z$	$xy = 11$ yz	$xy = 10$ yz'
$wx = 00$	m_0	m_1	m_3	m_2
$wx = 01$	m_4	m_5	m_7	m_6
$wx = 11$	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$wx = 10$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

การ wrap สามารถทำได้ทั้งในแนวนอน แนวตั้ง และมุม (เช่น m_0 ติดกับ m_2, m_8, m_{10})

ตัวอย่างที่ 6.26 ใช้ K-map ลดรูป $f(w,x,y,z) = \sum(0,1,2,3,4,6,8,9,12,14)$

	$xy = 00$	$xy = 01$	$xy = 11$	$xy = 10$
$wx = 00$	1	1	1	1
$wx = 01$	1	0	0	1
$wx = 11$	1	0	0	1
$wx = 10$	1	1	0	0

วิธีทำ

หมายเหตุ 6.16 ขั้นตอนการใช้ K-map

1. เขียน K-map ตามจำนวนตัวแปร
2. ใส่ 1 ในเซลล์ที่สอดคล้องกับ minterm ที่อยู่ใน function
3. จัดกลุ่ม (group) เซลล์ที่มี 1 ร่วมกันเป็นกลุ่มขนาด 2^n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$
4. กลุ่มควรมีขนาดใหญ่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้
5. กลุ่มสามารถ overlap ได้และสามารถ wrap around ได้
6. หาตัวแปรที่ไม่เปลี่ยนแปลงในกลุ่ม (คงที่) — ตัวแปรที่เป็น 1 ใช้ตัวแปรเดี่ยว ตัวแปรที่เป็น 0 ใช้ complement
7. OR terms ที่ได้จากแต่ละกลุ่ม

6.9

6.9.1

บทนิยาม 6.13 ประเภทของประตูตรรกะ

ประเภทของประตูตรรกะพื้นฐาน ได้แก่

1. NOT Gate (Inverter) แสดงผล a'
2. AND Gate แสดงผล $a \cdot b$
3. OR Gate แสดงผล $a + b$
4. NAND Gate แสดงผล $(a \cdot b)'$
5. NOR Gate แสดงผล $(a + b)'$
6. XOR Gate แสดงผล $a \oplus b = ab' + a'b$
7. XNOR Gate แสดงผล $(a \oplus b)' = ab + a'b'$

ทฤษฎีบท 6.17 NAND Gate และความสมบูรณ์เชิงฟังก์ชัน (Universal Gate)

NAND Gate เป็นเกตสากล (Universal Gate) เนื่องจากสามารถนำมาต่อเชื่อมเพื่อสร้างเกตตรรกะพื้นฐานอื่นๆ ได้ทั้งหมด โดย NAND Gate ให้ผลลัพธ์การทำงานคือ $Y = (a \cdot b)' = \overline{a \cdot b}$
ค่าผลลัพธ์ของ NAND Gate ในแต่ละกรณีของสัญญาณอินพุต (a, b) มีดังนี้:

1. เมื่อ $a = 0, b = 0$ ได้ผลลัพธ์ $(0 \cdot 0)' = 1$
2. เมื่อ $a = 0, b = 1$ ได้ผลลัพธ์ $(0 \cdot 1)' = 1$
3. เมื่อ $a = 1, b = 0$ ได้ผลลัพธ์ $(1 \cdot 0)' = 1$
4. เมื่อ $a = 1, b = 1$ ได้ผลลัพธ์ $(1 \cdot 1)' = 0$

การสร้างเกตตรรกะพื้นฐานจาก NAND Gate เพียงอย่างเดียว:

1. **การสร้าง NOT Gate จาก NAND:** เมื่อป้อนสัญญาณอินพุตเดียวกันทั้งสองช่อง (a, a) จะได้:
$$a' = (a \cdot a)'$$
2. **การสร้าง AND Gate จาก NAND:** นำผลลัพธ์ของ NAND Gate มาผ่าน NOT Gate (NAND ที่ป้อนอินพุตซ้ำ):
$$a \cdot b = ((a \cdot b)')'$$
3. **การสร้าง OR Gate จาก NAND:** ใช้กฎของเดมอร์แกน (De Morgan's Law) ร่วมกับการนิเสธอินพุตแต่ละตัว:

$$a + b = (a' \cdot b')' = ((a \cdot a)' \cdot (b \cdot b)')'$$

ทฤษฎีบท 6.18 NOR Gate และความสมบูรณ์เชิงฟังก์ชัน (Universal Gate)

NOR Gate เป็นเกตสากล (Universal Gate) เช่นเดียวกับ NAND Gate ที่สามารถนำมาประพฤติตนสร้างเกตตรรกะอื่นๆ ทั้งหมดได้ด้วยตัวมันเอง โดย NOR Gate ให้ผลลัพธ์การทำงานคือ $Y = (a + b)'$ ค่าผลลัพธ์ของ NOR Gate ในแต่ละกรณีของสัญญาณอินพุต (a, b) มีดังนี้:

1. เมื่อ $a = 0, b = 0$ ได้ผลลัพธ์ $(0 + 0)' = 1$
2. เมื่อ $a = 0, b = 1$ ได้ผลลัพธ์ $(0 + 1)' = 0$
3. เมื่อ $a = 1, b = 0$ ได้ผลลัพธ์ $(1 + 0)' = 0$
4. เมื่อ $a = 1, b = 1$ ได้ผลลัพธ์ $(1 + 1)' = 0$

การสร้างเกตตรรกะพื้นฐานจาก NOR Gate เพียงอย่างเดียว:

1. **การสร้าง NOT Gate จาก NOR:** เมื่อป้อนสัญญาณอินพุตเดียวกันทั้งสองช่อง (a, a) จะได้:

$$a' = (a + a)'$$

2. **การสร้าง OR Gate จาก NOR:** นำผลลัพธ์ของ NOR Gate มาผ่าน NOT Gate (NOR ที่ป้อนอินพุตซ้ำ):

$$a + b = ((a + b)')'$$

3. **การสร้าง AND Gate จาก NOR:** ใช้กฎของเดมอร์แกน (De Morgan's Law) ร่วมกับการนิเสธอินพุตแต่ละตัว:

$$a \cdot b = (a' + b')' = ((a + a)' + (b + b)')'$$

ตัวอย่างที่ 6.27 วงจรสำหรับ $f(x, y, z) = xy + x'z$:

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.28 ลดรูปและวาดวงจรสำหรับ $f(a,b,c) = (a+b)\cdot(a+c)$

วิธีทำ

6.9.2

ตัวอย่างที่ 6.29 ออกแบบวงจรที่ตรวจสอบว่าจำนวน 3-bit เป็นเลขคู่ (even)

วิธีทำ

6.9.3

ทฤษฎีบท 6.19

Two-level Realization:

1. SOP (Sum of Products) AND gates ระดับแรก แล้ว OR gate ระดับที่สอง
2. POS (Product of Sums) OR gates ระดับแรก แล้ว AND gate ระดับที่สอง

ตัวอย่างที่ 6.30 realization SOP สำหรับ $f(x, y, z) = y' + xy + x'y'z$

วิธีทำ

6.9.4

ตัวอย่างที่ 6.31 ออกแบบวงจรบวกครึ่ง (Half Adder)

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6.32 ออกแบบ Full Adder

วิธีทำ

6.9.5

หมายเหตุ 6.20

ตารางสรุป Boolean Identities:

Basic Operations:

Operation	Symbol	Result = 1 when	Result = 0 when
OR	$+$	At least one input = 1	All inputs = 0
AND	$\cdot$	All inputs = 1	At least one input = 0
NOT	$'$	Input = 0	Input = 1

Laws:

Law	OR Form	AND Form
Identity	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Domination	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotent	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Inverse	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$
Commutative	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Associative	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Distributive	$x + yz = (x + y)(x + z)$	$x(y + z) = xy + xz$
Absorption	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
De Morgan	$(x + y)' = x'y'$	$(xy)' = x' + y'$

6.10

6.10.1

ตัวอย่างที่ 6.33 ลดรูปฟังก์ชันบูลีน $F(x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 3, 5, 7)$ โดยใช้ K-map
K-map สำหรับ 3 ตัวแปร ดังนี้

	$yz = 00$	$yz = 01$	$yz = 11$	$yz = 10$
$x = 0$	1	1	1	1
$x = 1$	0	1	1	0

วิธีทำ

6.10.2

บทนิยาม 6.14 ประตูตรรกะพื้นฐาน (Basic Logic Gates)

ประตูตรรกะพื้นฐานประเภทต่างๆ สามารถเขียนแทนด้วยนิพจน์บูลีน (Boolean Expression) ได้ดังนี้:

1. **NOT Gate (นิเสธ):** ทำหน้าที่กลับค่าสัญญาณทางตรรกะ เขียนแทนด้วย $Y = A'$

2. **AND Gate (และการ):** ให้ผลลัพธ์เป็น 1 เมื่อสัญญาณอินพุตทุกตัวเป็น 1 เขียนแทนด้วย $Y = A \cdot B$
3. **OR Gate (หรือ):** ให้ผลลัพธ์เป็น 1 เมื่อสัญญาณอินพุตอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็น 1 เขียนแทนด้วย $Y = A + B$
4. **XOR Gate (Exclusive OR):** ให้ผลลัพธ์เป็น 1 เมื่อสัญญาณอินพุตมีค่าต่างกัน เขียนแทนด้วย $Y = A \oplus B = A'B + AB'$
5. **NAND Gate (Not AND):** เป็นการนิเสธผลลัพธ์ของ AND Gate เขียนแทนด้วย $Y = (AB)'$
6. **NOR Gate (Not OR):** เป็นการนิเสธผลลัพธ์ของ OR Gate เขียนแทนด้วย $Y = (A + B)'$

ตัวอย่างที่ 6.34 (การสร้าง AND จาก NAND gates)

$$Y = ((AB)')' = AB$$

นำ output ของ NAND gate มาเข้า NOT gate (ซึ่งก็คือ NAND gate ที่ input ทั้งสองเท่ากัน)

วิธีทำ

6.10.3

ทฤษฎีบท 6.21 วงจรบวกครึ่ง

วงจรบวกครึ่งรับข้อมูลเข้า 2 บิต คือ A และ B แล้วให้ผลลัพธ์ดังนี้

1. Sum: $S = A \oplus B$
2. Carry: $C = A \cdot B$

ทฤษฎีบท 6.22 Full Adder

Full Adder รับ input 3 bits (A, B, Cin) และให้ output:

1. Sum: $S = A \oplus B \oplus C_{in}$
2. Carry: $C_{out} = AB + C_{in}(A \oplus B)$

ตัวอย่างที่ 6.35 Full Adder จาก Half Adders:
$S = A \oplus B \oplus C_{in}$
$C_{out} = AB + C_{in}(A \oplus B)$
สามารถสร้างได้จาก 2 Half Adders + 1 OR gate

วิธีทำ

6.10.4

บทนิยาม 6.15 ตัวเลือกข้อมูล (Multiplexer)

มัลติเพล็กเซอร์ (Multiplexer: MUX) เป็นวงจรที่เลือก 1 จาก n inputs ไปยัง 1 output โดยใช้ select lines
สำหรับ 4-to-1 MUX:

$$Y = I_0 \cdot S_1' \cdot S_0' + I_1 \cdot S_1' \cdot S_0 + I_2 \cdot S_1 \cdot S_0' + I_3 \cdot S_1 \cdot S_0$$

S_1	S_0	Output
0	0	I_0
0	1	I_1
1	0	I_2
1	1	I_3

บทนิยาม 6.16 ตัวกระจายข้อมูล (Demultiplexer)

ดีมัลติเพล็กเซอร์ (Demultiplexer: DEMUX) ทำงานตรงข้ามกับ MUX คือรับ 1 input และส่งไปยัง 1 จาก n outputs

6.10.5

ตัวอย่างที่ 6.36 พิจารณา Moore FSM ที่ตรวจสอบลำดับบิต “10” โดย output เป็น 1 หลังจากอ่านบิต 0 ที่ต่อจากบิต 1 แล้ว ดังนี้

State	Input=0	Input=1	Output
S0 (initial)	S0	S1	0
S1 (saw 1)	S0	S1	0
S2 (saw 10)	S0	S1	1

กำหนด state encoding: S0=00, S1=01, S2=10
State transitions และ outputs สามารถเขียนเป็น Boolean expressions ได้
ตัวอย่างเช่น input 11010 จะเดินสถานะเป็น $S0 \to S1 \to S1 \to S2 \to S1 \to S2$ ดังนั้น output หลังอ่านแต่ละบิตคือ $0, 0, 1, 0, 1$ โดยค่า 1 เกิดเมื่อเครื่องเข้าสู่ state $S2$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 6.1 จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

1. $1 + 0$
2. $1 \cdot 1$
3. $0'$
4. $1' + 0$
5. $1 \cdot 0 + 1$
6. $(1 + 0) \cdot 1$
7. $(1')'$
8. $1 \cdot 1 + 0 \cdot 1$

แบบฝึกหัด 6.2 เขียน truth table สำหรับ ดังนี้

1. $f(x, y) = x + y'$
2. $f(x, y) = (x + y)'$
3. $f(x, y) = x \cdot y + x' \cdot y'$
4. $f(x, y) = (x \oplus y)'$

แบบฝึกหัด 6.3 พิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1. $1 + 1 = 2$
2. $1 \cdot 1 = 1$
3. $0' = 0$
4. $(1')' = 1$
5. $x + 1 = 1$ สำหรับทุก x
6. $x \cdot 0 = x$ สำหรับทุก x

แบบฝึกหัด 6.4 พิสูจน์โดยใช้ truth table:

1. $x \cdot (x + y) = x$
2. $x + x'y = x + y$
3. $(x + y)' = x'y'$

แบบฝึกหัด 6.5 ลดรูปนิพจน์ต่อไปนี้โดยใช้ Boolean identities:

1. $x + xy$

2. $x \cdot (x' + y)$
3. $(x + y)(x + y')$
4. $xy + xy'$
5. $(x + y)' + x$
6. $x'y + xy' + xy$

แบบฝึกหัด 6.6 พิสูจน์ Consensus Laws:

1. $(a \cdot b) + (a' \cdot c) + (b \cdot c) = (a \cdot b) + (a' \cdot c)$
2. $(a + b)(a' + c)(b + c) = (a + b)(a' + c)$

แบบฝึกหัด 6.7 พิสูจน์ De Morgan's Laws:

1. $(x + y)' = x'y'$
2. $(xy)' = x' + y'$

แบบฝึกหัด 6.8 ใช้ De Morgan's Laws เพื่อเขียน complement ของ ดังนี้

1. $xy + x'z$
2. $(x + y + z)(x'y'z')'$
3. $(a + b)(c + d)$
4. $a + bc'$

แบบฝึกหัด 6.9 เขียน truth table สำหรับ ดังนี้

1. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
2. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)(x + z)$
3. $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$

แบบฝึกหัด 6.10 เขียนในรูปแบบ canonical SOP ($\sum$ notation) ดังนี้

1. $f(x, y) = x + y'$
2. $f(x, y, z) = xy + x'z$

แบบฝึกหัด 6.11 เขียนในรูปแบบ canonical POS ($\prod$ notation) ดังนี้

1. $f(x, y) = x \cdot y$
2. $f(x, y, z) = (x + y')(x' + z)$

แบบฝึกหัด 6.12 ใช้ K-map ลดรูป ดังนี้

1. $f(x, y) = \sum(1, 2, 3)$
2. $f(x, y) = \sum(0, 1, 2)$
3. $f(x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 6)$
4. $f(x, y, z) = \sum(1, 3, 5, 7)$
5. $f(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)$

แบบฝึกหัด 6.13 ออกแบบวงจรสำหรับ

1. Half Adder (Sum และ Carry)
2. 2-to-1 Multiplexer: $f = s' \cdot d_0 + s \cdot d_1$
3. วงจรที่ตรวจสอบว่า input 3 bits มีเพียง 2 bits ที่เป็น 1

6.1.1

6.1.2

6.1.3

6.1.4

6.1.5

6.1.6

6.1.7

6.1.8

6.2.1

6.2.2

6.3.1

6.3.2

6.3.3

6.3.4

6.3.5

6.3.6

6.4.1

6.4.2

6.4.3

6.4.4

6.5.1

6.5.2

6.5.3

6.6.1

6.6.2

6.7.1

6.7.2

6.7.3

6.7.4

6.8.1

6.8.2

6.8.3

6.9.1

6.9.2

6.10.1

6.10.2

6.11.1

6.11.2

6.11.3

6.11.4

6.11.5

6.12.1

6.12.2

6.12.3

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

1.
2.

3.
4.
5.

1.

2.

3.

4.

5.

6.