บทที่ 1 : ตรรกศาสตร์ (Logic)

สัปดาห์ที่ 2 : สัจนิรันดร์ และความสมมูล
รายวิชา 4091606 คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์

สาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์

ทบทวนสัปดาห์ที่ 1

- **ประพจน์** = ข้อความที่ระบุค่าความจริง (T/F) ได้แน่นอน
- **ตัวเชื่อม 5 ตัว**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

สัปดาห์นี้: นำตารางค่าความจริงไป **จำแนกประเภทประพจน์ และตรวจสอบความสมมูล**

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ (สัปดาห์ที่ 2)

เมื่อเรียนจบสัปดาห์นี้ นักศึกษาจะสามารถ

1. จำแนก **สัจนิรันดร์ ข้อขัดแย้ง และประพจน์กลาง** ได้
2. ตรวจสอบ **สมมูลทางตรรกศาสตร์** และใช้ **กฎพีชคณิตของประพจน์** ได้

หัวข้อที่จะศึกษาในสัปดาห์นี้

สัจนิรันดร์ ข้อขัดแย้ง และประพจน์กลาง

ความสมมูลและกฎพีชคณิตของประพจน์

กิจกรรมในชั้นเรียน (แบบฝึกหัดทำในห้อง)

สัจนิรันดร์ ข้อขัดแย้ง และประพจน์กลาง

จำแนกประพจน์เชิงประกอบ 3 ประเภท

สัจนิรันดร์ (Tautology)	จริงทุกกรณี
ข้อขัดแย้ง (Contradiction)	เท็จทุกกรณี
ประพจน์กลาง (Contingency)	จริงบ้างเท็จบ้าง ขึ้นกับค่าตัวแปร

- ความสัมพันธ์: นิเสธของสัจนิรันดร์ = ข้อขัดแย้ง และในทางกลับกัน
- ประพจน์ส่วนใหญ่ในชีวิตจริงเป็น **ประพจน์กลาง**

สัจนิรันดร์ (Tautology)

นิยาม

ประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็น **จริงในทุกกรณี**

ตัวอย่างคลาสสิก $p \vee \neg p$ (กฎกีดกันกลาง, Law of Excluded Middle)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

คอลัมน์ผลลัพธ์เป็น T ทุกแถว $\Rightarrow$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างสัจนิรันดร์อื่น ๆ

- $p \to p$
- $p \leftrightarrow p$
- $(p \wedge q) \to p$

$(p \wedge q) \to p$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

คอลัมน์สุดท้ายเป็น T ทุกแถว จึงเป็นสัจนิรันดร์

การประยุกต์

หากต้องการพิสูจน์ว่า P จริง อาจแสดงว่า $\neg P$ นำไปสู่ข้อขัดแย้ง $\Rightarrow \neg P$ เท็จ $\Rightarrow P$ จริง (**Proof by Contradiction**)

ตัวอย่าง: พิสูจน์ว่าไม่มีจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด

วิธีพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

1. สมมติในทางตรงกันข้ามให้ **มีจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดจริง** สมมติให้เป็น N
2. สร้างจำนวนใหม่ขึ้นมา: $M = N + 1$
3. เนื่องจาก N เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น M ก็ต้องเป็นจำนวนเต็มด้วย
4. เนื่องจาก $1 > 0$ ทำให้เราได้ว่า $M > N$
5. จะเห็นว่า M เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า N
6. เกิดข้อขัดแย้ง: มีจำนวนเต็ม M ที่ใหญ่กว่า N ซึ่ง ขัดแย้งกับที่สมมติว่า N ใหญ่ที่สุด

สรุป

เกิดข้อขัดแย้ง $\Rightarrow$ ข้อสมมติที่ว่ามีจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดเป็นเท็จ $\Rightarrow$ **ไม่มีจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด**

ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

นิยาม

ประพจน์เชิงประกอบที่ **เป็นเท็จทุกกรณี** ไม่ว่าตัวแปรจะมีค่าใด

ตัวอย่างคลาสสิก $p \wedge \neg p$ (กฎแห่งการไม่ขัดแย้ง)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

ตัวอย่างอื่น: $\neg(p \vee \neg p)$ และ $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$

ประพจน์เดียวกันเป็นทั้งจริงและเท็จพร้อมกันไม่ได้

ประพจน์กลาง (Contingency)

นิยาม

ประพจน์เชิงประกอบที่ **จริงบ้าง เท็จบ้าง** ขึ้นกับค่าของตัวแปรย่อย
(ไม่เป็นทั้งสัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง)

ตัวอย่าง $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

มีทั้ง T และ F $\Rightarrow$ เป็นประพจน์กลาง (เช่น “วันนี้ฝนตก”)

ความสมมูลและกฎพีชคณิตของประพจน์

ความสมมูลเชิงตรรกะ (Logical Equivalence)

นิยาม

ประพจน์ P และ Q **สมมูลกัน** เขียนแทนด้วย $P \equiv Q$ ก็ต่อเมื่อ มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี (หรือกล่าวคือ $P \leftrightarrow Q$เป็นสัจนิรันดร์)

วิธีตรวจสอบความสมมูลมี 2 วิธีหลัก

1. สร้าง **ตารางค่าความจริง** เปรียบเทียบทีละแถว
2. ใช้ **กฎพีชคณิตของประพจน์** แปลงรูปจากด้านหนึ่งให้เป็นอีกด้าน

กฎพีชคณิตของประพจน์ (1/2)

ชื่อกฎ	รูปสมมูล
เอกลักษณ์ (Identity)	$p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p$
ครอบงำ (Domination)	$p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F$
นิจพล (Idempotent)	$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$
นิเสธซ้อน (Double Negation)	$\neg(\neg p) \equiv p$
สลับที่ (Commutative)	$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
เปลี่ยนกลุ่ม (Associative)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
แจกแจง (Distributive)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

กฎพีชคณิตของประพจน์ (2/2)

ชื่อกฎ	รูปสมมูล
เดอมอร์แกน (De Morgan)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
ดูดกลืน (Absorption)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
นิเสธ (Negation)	$p \vee \neg p \equiv T, \quad p \wedge \neg p \equiv F$
เงื่อนไข (Implication)	$p \to q \equiv \neg p \vee q$
กระจายเงื่อนไข (Exportation)	$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

สำคัญ

กฎเหล่านี้คือ “กรณีรูปธรรม” ของกฎพีชคณิตบูลีน ที่จะใช้ออกแบบและลดรูปวงจรดิจิทัล

ตัวอย่าง: การลดรูปด้วยกฎพีชคณิต

โจทย์

จงพิสูจน์ว่า $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) && \text{(เดอมอร์แกน)} \\
&\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) && \text{(แจกแจง)} \\
&\equiv \neg p \wedge T && \text{(นิเสธ)} \\
&\equiv \neg p && \text{(เอกลักษณ์)}
\end{aligned}
$$

คำตอบ

$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

กิจกรรมในชั้นเรียน (แบบฝึกหัดทำในห้อง)

วิธีทำกิจกรรม

คำชี้แจง

ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้ **ในชั้นเรียน** ลงในสมุด/กระดาษ ภายในเวลาที่กำหนด แล้วร่วมเฉลยและอภิปรายพร้อมกัน

- ทำเดี่ยวหรือจับคู่ก็ได้ (ตามที่อาจารย์กำหนด)
- เมื่อหมดเวลา อาจารย์จะคลิกเพื่อ **เฉลย** ทีละข้อ
- อาสาสมัครออกมาอธิบายวิธีคิดหน้าชั้น

เกณฑ์

เน้นกระบวนการคิดและการให้เหตุผล ไม่ใช่แค่คำตอบสุดท้าย

กิจกรรมที่ 1: จำแนกประเภทประพจน์ (6 นาที)

จงจำแนกว่าแต่ละประพจน์เป็น **สัจนิรันดร์ / ข้อขัดแย้ง / ประพจน์กลาง**

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
4. $p \to q$

เฉลย

1) สัจนิรันดร์ 2) ข้อขัดแย้ง 3) สัจนิรันดร์ (เพราะ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ จึงเป็น $X \to X$) 4) ประพจน์กลาง

กิจกรรมที่ 2: กฎเดอมอร์แกน (6 นาที)

จงเขียนนิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ "นิเสธอยู่ติดตัวแปร" โดยใช้กฎเดอมอร์แกน

1. $\neg(p \wedge \neg q)$
2. $\neg(\neg p \vee q)$
3. $\neg(p \vee (q \wedge r))$

เฉลย

1) $\neg p \vee q$ 2) $p \wedge \neg q$ 3) $\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

กิจกรรมที่ 3: ตรวจสอบความสมมูล (8 นาที)

จงสร้างตารางค่าความจริงเพื่อตรวจว่า $p \to (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \to q) \wedge (p \to r)$ หรือไม่

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

สองคอลัมน์สุดท้ายเท่ากันทุกแถว $\Rightarrow$ **สมมูลกัน**

สรุปสัปดาห์ที่ 2

- **สัจนิรันดร์ (Tautology)**: จริงทุกกรณี (เช่น $p \vee \neg p$, $(p \wedge q) \to p$)
- **ข้อขัดแย้ง (Contradiction)**: เท็จทุกกรณี (เช่น $p \wedge \neg p$)
- **ประพจน์กลาง (Contingency)**: จริงบ้างเท็จบ้าง (เช่น $p \to q$)
- **ความสมมูล ($P \equiv Q$)**: ค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี
- **กฎพีชคณิตของประพจน์**: กฎสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม แจกแจง ดูดกลืน และเดอมอร์แกน

สัปดาห์ถัดไป: ตัวเชื่อมพิเศษ (XOR, NAND, NOR) ตัวบ่งปริมาณ และกฎการอนุมาน

แบบฝึกหัดมอบหมาย (สัปดาห์ที่ 2)

1. จำแนกประพจน์เป็นสัจนิรันดร์/ข้อขัดแย้ง/ประพจน์กลาง:
   - $(p \to q) \vee (q \to p)$
   - $\neg(p \vee \neg p)$
   - $(p \wedge q) \to p$
2. ตรวจสอบความสมมูลเชิงตรรกะด้วยกฎพีชคณิตประพจน์:
   - $\neg(p \wedge q)$ กับ $\neg p \vee \neg q$

จบสัปดาห์ที่ 2

สัปดาห์ถัดไป: สัปดาห์ที่ 3 · ตัวเชื่อมเสริม ตัวบ่งปริมาณ และการอนุมาน