

## 12

Dados:

```
data Polinomio a = X
                | Cte a
                | Suma (Polinomio a) (Polinomio a)
                | Prod (Polinomio a) (Polinomio a)

evaluar :: Num a => a -> Polinomio a -> a
{E0}    evaluar e X = e
{E1}    evaluar e (Cte x) = x
{E2}    evaluar e (Suma p q) = evaluar e p + evaluar e q
{E3}    evaluar e (Prod p q) = evaluar e p * evaluar e q

derivado :: Num a => Polinomio a -> Polinomio a
{PL0}    derivado poli = case poli of
                        X      -> Cte 1
                        Cte _  -> Cte 0
                        Suma p q -> Suma (derivado p) (derivado q)
                        Prod p q -> Suma (Prod (derivado p) q) (Prod (derivado q) p)

sinConstantesNegativas :: Num a => Polinomio a -> Polinomio a
{SCN}    sinConstantesNegativas = foldPoli True (==0) (&&) (&&)

esRaiz :: Num a => a -> Polinomio a -> Bool
{ER0}    esRaiz n p = evaluar n p == 0
```

Queremos probar:

I.

```
Num a => ∀ p::Polinomio a . ∀ q::Polinomio a . ∀ r::a .
P(p): (esRaiz r p ⇒ esRaiz r (Prod p q))
```

-- Por inducción en P(p):

-- Caso base P(X):

```
esRaiz r X ⇒ esRaiz r (Prod X q)
2*{ER0} = (evaluar r X) == 0 ⇒ (evaluar r (Prod X q)) == 0
{E0}    = r == 0 ⇒ (evaluar r (Prod X q)) == 0
{E3}    = r == 0 ⇒ (evaluar r X * evaluar r q) == 0
{E0}    = r == 0 ⇒ (r * evaluar r q) == 0
```

-- Caso (r==0) = True:

```
True ⇒ (0 * evaluar 0 q) == 0
{E0}    True ⇒ 0 == 0
{Bool}   True ⇒ True
{Bool}   True
```

-- Caso (r==0) = False:

```
False ⇒ r * evaluar r q
{Bool} = True
```

-- Caso base P(Cte a):

```

-- Queremos ver que para cualquier x::a vale

    (esRaiz r (Cte x)  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod (Cte x) q))
{ER0} = (evaluar r (Cte x)) == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Prod (Cte x) q)) == 0
{E1}  = x == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Prod (Cte x) q)) == 0
{E3}  = x == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Cte x) * evaluar r q) == 0
{E1}  = x == 0  $\Rightarrow$  (x * evaluar r q) == 0

-- Caso (x==0) = True:

    True  $\Rightarrow$  (0 * evaluar r q) == 0
{INT}   True  $\Rightarrow$  0 == 0
{Bool}  True  $\Rightarrow$  True
{Bool}  True

-- Caso (x==0) = False:

    False  $\Rightarrow$  (0 * evaluar r q) == 0
{Bool} = True

{-
Paso inductivo:
Nuestra HI será P(p): (esRaiz r p  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod p q))

Por el tipo de dato, tenemos que ver 2 cosas:
Caso recursivo P(Suma n m):
    Vn::a. Vm::a.
    P(Suma n m): (esRaiz r (Suma n m)  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod (Suma n m) q))
Caso recursivo P(Prod n m):
    Vn::a. Vm::a.
    P(Prod n m): (esRaiz r (Prod n m)  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod (Prod n m) q))
-}

-- Caso P(Suma n m):

    (esRaiz r (Suma n m)  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod (Suma n m) q))
{ER0} = (evaluar r (Suma n m)) == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Prod (Suma n m) q)) == 0
{E2}  = (evaluar r n + evaluar r m) == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Prod (Suma n m) q)) == 0
{E3}  = (evaluar r n + evaluar r m) == 0  $\Rightarrow$  (evaluar r (Suma n m) * evaluar r q) == 0
{E2}  = (evaluar r n + evaluar r m) == 0  $\Rightarrow$  ((evaluar r n + evaluar r m) * evaluar r q) == 0

-- Caso ((evaluar r n + evaluar r m) == 0):
    0 == 0  $\Rightarrow$  (0 * evaluar r q) == 0
INT    = 0 == 0  $\Rightarrow$  0 == 0
2*Bool = True  $\Rightarrow$  True
Bool   = True

-- Caso ((evaluar r n + evaluar r m) != 0), llamamos
-- (evaluar r n + evaluar r m) = k, k!=0, luego:
    k == 0  $\Rightarrow$  (k * evaluar r q) == 0
Bool = False  $\Rightarrow$  (k * evaluar r q) == 0
Bool = True

-- Caso P(Prod n m):

    (esRaiz r (Prod n m)  $\Rightarrow$  esRaiz r (Prod (Prod n m) q))

```

```
{ER0} = (evaluar r (Prod n m)) == 0 ⇒ (evaluar r (Prod (Prod n m) q)) == 0  
{E3}  = (evaluar r (Prod n m)) == 0 ⇒ ((evaluar r (Prod n m)) * (evaluar r q)) == 0
```

```
-- Caso (evaluar r (Prod n m)) == 0:
```

```
    0 == 0 ⇒ (0 * (evaluar r q)) == 0  
INT  = 0 == 0 ⇒ 0 == 0  
Bool = True ⇒ True  
Bool = True
```

```
-- Caso (evaluar r (Prod n m)) != 0,  
-- Decimos que (evaluar r (Prod n m)) == k, k != 0
```

```
    k == 0 ⇒ (k * (evaluar r q)) == 0  
Bool = False ⇒ (k * (evaluar r q)) == 0  
Bool = True
```

QED