1

a.

$x \leftarrow$ válido, término

b.

$x\ x \leftarrow$ válido, término

c.

$M \leftarrow$ inválido

d.

$M\ M \leftarrow$ inválido

e.

true false $\leftarrow$ válido, término

f.

true succ(false true) $\leftarrow$ válido, término

g.

$\lambda x.\text{isZero}(x) \leftarrow$ inválido

h.

$\lambda x : \sigma.\text{succ}(x) \leftarrow$ inválido

i.

$\lambda x : \text{Bool. succ}(x) \leftarrow$ válido, término

j.

$\lambda x : \text{if true then Bool else Nat}.x \leftarrow$ inválido

k.

$\sigma \leftarrow$ inválido

l.

Bool $\leftarrow$ válido, tipo

m.

Bool $\rightarrow$ Bool $\leftarrow$ válido, tipo

n.

Bool $\rightarrow$ Bool $\rightarrow$ Nat $\leftarrow$ válido, tipo

ñ.

(Bool $\rightarrow$ Bool) $\rightarrow$ Nat $\leftarrow$ válido, tipo

o.

succ true $\leftarrow$ inválido

p.

λx : Bool. if zero then true else zero succ(true) $\leftarrow$ válido, término

3

a.

Marcar las ocurrencias del término x como subtérmino en $\lambda x : \text{Nat. succ}((\lambda x : \text{Nat. } x)\ x)$.

Podemos plantear una α equivalencia tal que:

$\lambda x : \text{Nat. succ}((\lambda x : \text{Nat. } x)\ x) \underset{\alpha}{=} \lambda z : \text{Nat. succ}((\lambda y : \text{Nat. } y)\ z)$

Por lo que hay 0 ocurrencias.

b.

¿Ocurre x_1 como subtérmino en $\lambda x_1 : \text{Nat. succ}(x_2)$?

No

c.

¿Ocurre $x\ (y\ z)$ como subtérmino en $u\ x\ (y\ z)$?

$u\ x\ (y\ z) = (u\ x)\ (y\ z)$, entonces no.

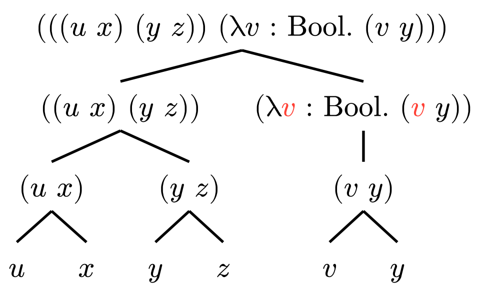
4

a.

$u\ x\ (y\ z)\ (\lambda v : \text{Bool. } v\ y)$

$= (((u\ x)\ (y\ z))\ (\lambda v : \text{Bool. } (v\ y)))$

Árbol

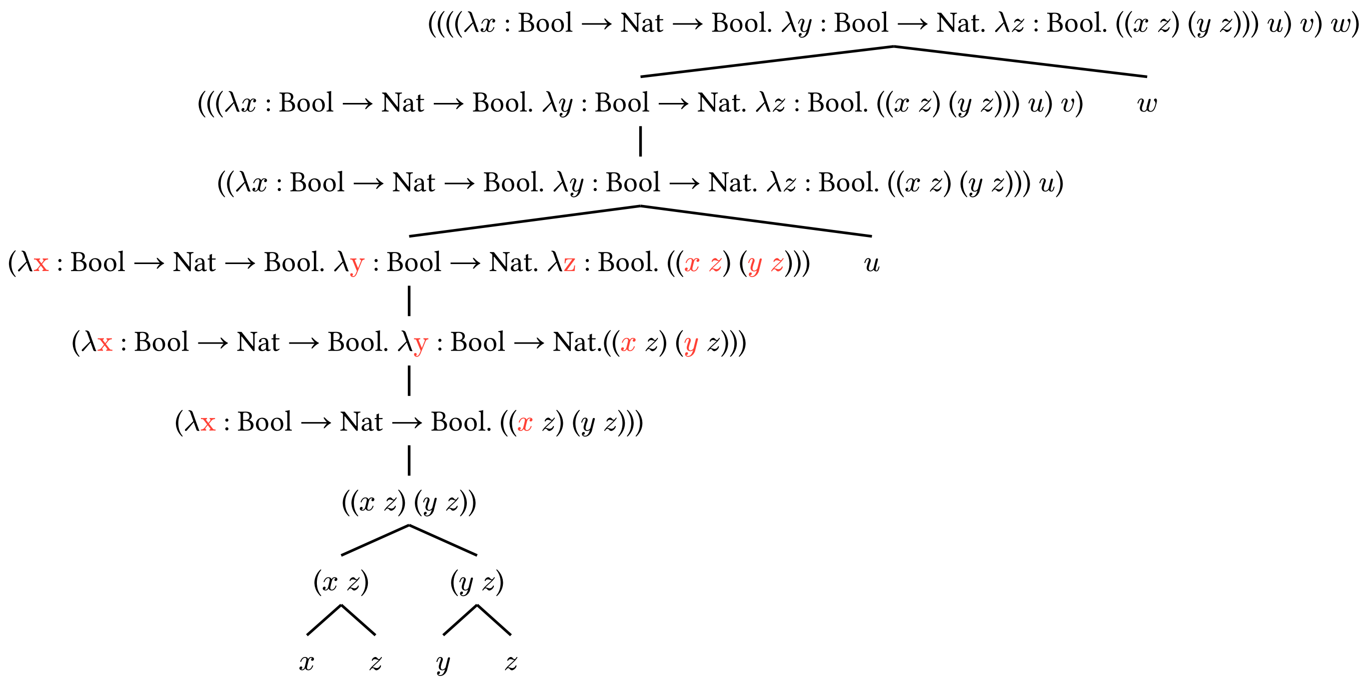


b.

$(\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } x\ z\ (y\ z))\ u\ v\ w$

$= ((((\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } ((x\ z)\ (y\ z)))\ u)\ v)\ w)$

Árbol

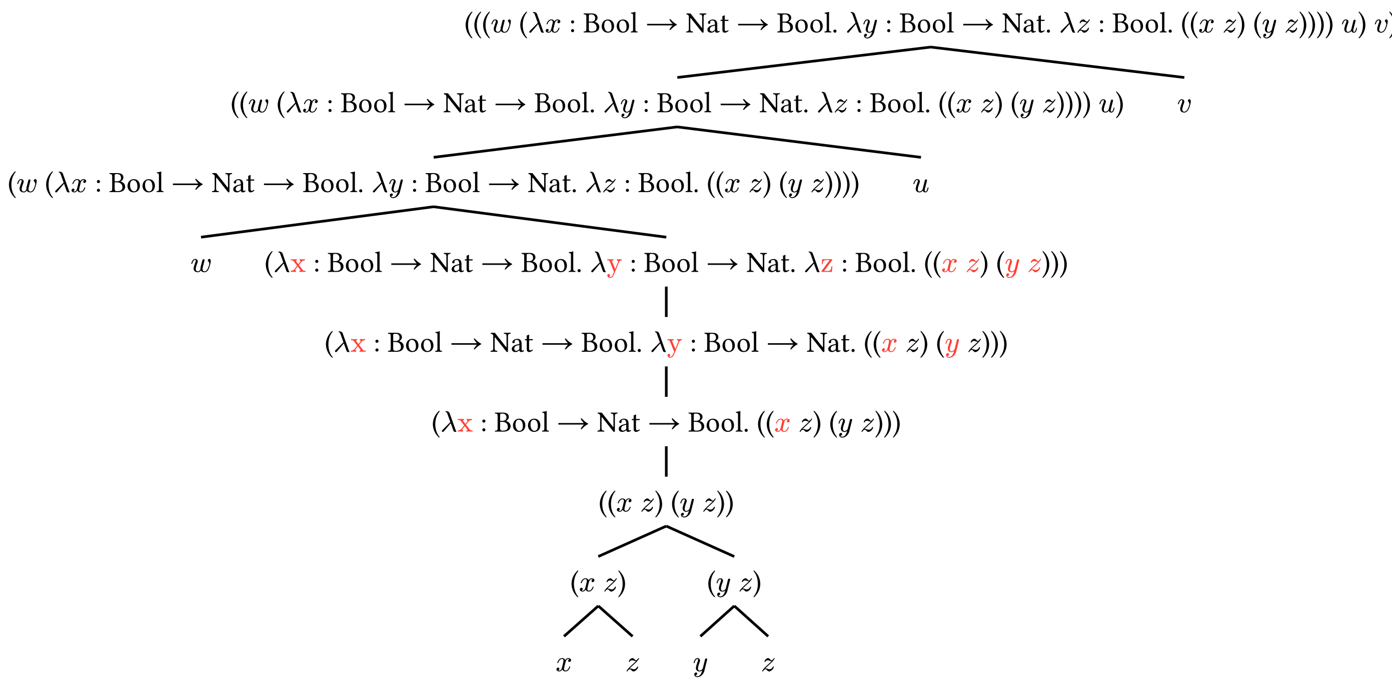


c.

$w\ (\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } x\ z\ (y\ z))\ u\ v$

$= (((w\ (\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } ((x\ z)\ (y\ z))))\ u)\ v)$

Árbol



LAS VARIABLES ROJAS SON LIGADAS

El término buscado aparece en el punto (b) al tercer nivel

6

a.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T-True} \qquad \dfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\,\text{T-Zero} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\,\text{T-Zero}}{\vdash \text{succ}(\text{zero}) : \text{Nat}}\,\text{T-Succ}}{\vdash \text{if true then zero else succ}(\text{zero}) : \text{Nat}}\,\text{T-If}$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T-True} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}\,\text{T-False} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, z : \text{Bool} \vdash z : \text{Bool}}\,\text{T-Var}}{\Gamma \vdash (\lambda z : \text{Bool}.z) : \text{Bool} \to \text{Bool}}\,\text{T-Abs} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T}}{\Gamma \vdash (\lambda z : \text{Bool}.z)\ \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T}}{\Gamma = x : \text{Nat}, y : \text{Bool} \vdash \text{if true then false else}\ \ (\lambda z : \text{Bool}.z)\ \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T-If}$$

c.

$$\dfrac{\dfrac{\textbf{INVALIDO}}{\vdash (\lambda x : \text{Bool}.x) : \text{Bool}} \qquad \dfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\,\text{T-Zero} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\,\text{T-Zero}}{\vdash \text{succ}(\text{zero}) : \text{Nat}}\,\text{T-Succ}}{\vdash \text{if}\ \ \lambda x : \text{Bool}.x\ \text{then zero else succ}(\text{zero}) : \text{Nat}}\,\text{T-If}$$

Es inválido porque $(\lambda x : \text{Bool}.x)$ es $\text{Bool} \to \text{Bool}$

d.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \text{Bool} \to \text{Nat}}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash y : \text{Bool}}\,\text{T-Var}}{\Gamma = x : \text{Bool} \to \text{Nat}, y : \text{Bool} \vdash (x\ y) : \text{Nat}}\,\text{T-App}$$

7

Comparamos:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \leftarrow \text{INVALIDOOOO}}{\Gamma \vdash \lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.M : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}} \underset{i2}{\to}$$

y el original:

$$\frac{\Gamma, x : \text{Bool} \to \text{Bool} \vdash M : \text{Bool}}{\Gamma \vdash \lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.M : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}} \underset{i}{\to}$$

9

a. $\sigma \to \tau \to \sigma$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}\,\text{T-Var}}{x : \sigma \vdash \lambda y : \tau . x : \tau \to \sigma}\,\text{T-Abs}}{\vdash \lambda x : \sigma . \lambda y : \tau . x : \sigma \to \tau \to \sigma}\,\text{T-Abs}$$

b. $(\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma \to \tau \to \rho}\,\text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : \sigma}\,\text{T-Var}}{\Gamma \vdash x\ z : \tau \to \rho}\,\text{T-App} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \sigma \to \tau}\,\text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : \sigma}\,\text{T-Var}}{\Gamma \vdash y\ z : \tau}\,\text{T-App}}{\Gamma = \{x : \sigma \to \tau \to \rho, y : \sigma \to \tau, z : \sigma\} \vdash (x\ z)\ (y\ z) : \rho}\,\text{T-App}}{\dfrac{x : \sigma \to \tau \to \rho, y : \sigma \to \tau \vdash \lambda z : \sigma . x\ z\ (y\ z) : \sigma \to \rho}{x : \sigma \to \tau \to \rho \vdash \lambda y : \sigma \to \tau . \lambda z : \sigma . x\ z\ (y\ z) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}}\,\text{T-Abs}}{\lambda x : \sigma \to \tau \to \rho . \lambda y : \sigma \to \tau . \lambda z : \sigma . x\ z\ (y\ z) : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}$$

c. $(\sigma \to \tau \to \rho) \to \tau \to \sigma \to \rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma \to \tau \to \rho}\,\text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : \sigma}\,\text{T-Var}}{\Gamma \vdash x\ z : \tau \to \rho}\,\text{T-App} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash y : \tau}\,\text{T-Var}}{\Gamma = \{x : (\sigma \to \tau \to \rho), y : \tau, z : \sigma\} \vdash x\ z\ y : \rho}\,\text{T-App}}{x : (\sigma \to \tau \to \rho), y : \tau \vdash \lambda z : \sigma . x\ z\ y : \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}}{x : (\sigma \to \tau \to \rho) \vdash \lambda y : \tau . \lambda z : \sigma . x\ z\ y : \tau \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}}{\vdash \lambda x : \sigma \to \tau \to \rho . \lambda y : \tau . \lambda z : \sigma . x\ z\ y : (\sigma \to \tau \to \rho) \to \tau \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}$$

d. $(\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \tau \to \rho}\,\text{T-Var} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \sigma \to \tau}\,\text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma z : \sigma}\,\text{T-Var}}{\Gamma \vdash y\ z : \tau}\,\text{T-App}}{\Gamma = \{x : (\tau \to \rho), y : (\sigma \to \tau), z : \sigma\} \vdash x\ (y\ z) : \rho}\,\text{T-App}}{x : (\tau \to \rho), y : (\sigma \to \tau) \vdash \lambda z : \sigma . x\ (y\ z) : \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}}{x : \tau \to \rho \vdash \lambda y : \sigma \to \tau . \lambda z : \sigma . x\ (y\ z) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}}{\vdash \lambda x : \tau \to \rho . \lambda y : \sigma \to \tau . \lambda z : \sigma . x\ (y\ z) : (\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\text{T-Abs}$$

10

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma = \text{Nat}}\,\text{T-Var}}{x : \sigma \vdash \text{succ}(x) : \text{Nat}}\,\text{T-Succ}}{x : \sigma \vdash \text{isZero}(\text{succ}(x)) : \tau = \text{Bool}}\,\text{T-IsZero}$$

$\sigma = \text{Nat}, \tau = \text{Bool}$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-Var}}{\vdash (\lambda x : \sigma.x) : \sigma \to \sigma}\,\text{T-Abs} \qquad \dfrac{\dfrac{}{y : \text{Bool} \vdash \text{zero} : \tau = \text{Nat}}\,\text{T-Zero}}{\vdash (\lambda y : \text{Bool.zero}) : \sigma = \text{Bool} \to \tau}\,\text{T-Abs}}{\vdash (\lambda x : \sigma.x)(\lambda y : \text{Bool.zero}) : \sigma}\,\text{T-App}$$

$\sigma = \text{Bool} \to \text{Nat}$

c.

$y : \tau \vdash \text{if } (\lambda x : \sigma.x) \text{ then } y \text{ else succ(zero)} : \sigma$

Se nota a simple vista que no tipa, $(\lambda x : \sigma.x)$ es de $\sigma \to \sigma$

d.

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho \to \tau = \sigma}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{x : \sigma \vdash y : \rho}}{x : \sigma \vdash x\ y : \tau}\,\text{T-App}$$

Queda trabado ahí, $y : \rho$ no está en el contexto.

e.

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \tau \to \tau = \sigma}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{x : \sigma, y : \tau \vdash y : \tau}\,\text{T-Var}}{x : \sigma, y : \tau \vdash x\ y : \tau}\,\text{T-App}$$

$\sigma = \tau \to \tau$

f.

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \text{Bool} \to \tau}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{x : \sigma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T-True}}{x : \sigma \vdash x\ \text{true} : \tau}\,\text{T-App}$$

$\sigma = \text{Bool} \to \tau$

g.

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \text{Bool} \to \sigma} \qquad \dfrac{}{x : \sigma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\,\text{T-True}}{x : \sigma \vdash x\ \text{true} : \sigma}\,\text{T-App}$$

Pero $\sigma \neq \text{Bool} \to \sigma$, no tipa.

h.

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho \to \tau} \qquad \dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho}}{x : \sigma \vdash x\ x : \tau}\,\text{T-App}$$

Pero $\tau \neq \rho \to \tau$, no tipa.

13

a.

$$(\lambda y : \sigma . x \ (\lambda x : \tau . x))\{x := (\lambda y : \rho . x \ y)\}$$

$$\underset{\alpha}{=} (\lambda z : \sigma . x \ (\lambda w : \tau . w))\{x := (\lambda y : \rho . x \ y)\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} (\lambda z : \sigma . (\lambda y : \rho . x \ y) \ (\lambda w : \tau . w))$$

b.

$$(y \ (\lambda v : \sigma . \ x \ v))\{x := (\lambda y : \tau . \ v \ y)\}$$

$$\underset{\alpha}{=} (y \ (\lambda w : \sigma . \ x \ w))\{x := (\lambda z : \tau . \ v \ z)\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} (y \ (\lambda w : \sigma . \ (\lambda z : \tau . \ v \ z) \ w))$$

15

a.

$(\lambda x : \text{Bool}.x)\ \text{true} \underset{\beta}{\rightarrow} x\{x := \text{true}\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{true} = V$

b.

$\lambda x : \text{Bool}.2 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x : \text{Bool}.\text{succ}^2(\text{zero}) = \lambda x : \text{Bool}.\ \text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$

$= \lambda x : \text{Bool}.\ \text{succ}(\text{succ}(V)) = \lambda x : \text{Bool}.\ \text{succ}(V) = \lambda x : \text{Bool}.V = V$

c.

$\lambda x : \text{Bool}\ .\text{pred}(2) = \lambda x : \text{Bool}\ .\text{succ}(\text{zero})$

$= \lambda x : \text{Bool}\ .V = V$

d.

$\lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{pred}(2))\ \text{true} = \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{pred}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))))\ \text{true}$

$= \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{succ}(\text{zero}))\ \text{true}$

$= \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.V)V \underset{\beta}{\rightarrow} \lambda y : \text{Nat}.V\{x := V\}$

$= \lambda y : \text{Nat}.V = V$

e.

x no es un valor

f.

succ(succ(zero)) = succ(succ(V)) = succ(V) = V

16

I.

$(\lambda x : \text{Bool}.x) \text{ true} \underset{\beta}{\rightarrow} x\{x := \text{true}\} = \text{true}$

Es un programa y es un valor (true)

II.

$\lambda x : \text{Nat}.\text{pred}(\text{succ}(x))$

Es un programa, y es un valor (la función λ)

III.

$\lambda x : \text{Nat}.\text{pred}(\text{succ}(y))$

No es un programa

IV.

$(\lambda x : \text{Bool}.\ \text{pred}(\text{isZero}((x))) \text{ true} \underset{\beta}{\rightarrow} \text{pred}(\text{isZero}((x)))\{x := \text{true}\} = \text{pred}(\text{isZero}((\text{true})))$

No es un programa, no tipa

V.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.f \text{ zero}) \ (\lambda x : \text{Nat}.\ \text{isZero}(x))$

Es un programa, no hay variables libres, el 2do lambda suelta algo de tipo Nat, y la 1era recibe algo de tipo Nat, por lo que tipa

VI.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.x) \ (\lambda x : \text{Nat}.\ \text{isZero}(x))$

No es un programa

VII.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.f \ \ \text{pred}(\text{zero})) \ (\lambda x : \text{Nat}.\ \text{isZero}(x))$

Es un programa, mismo argumento que en el **V**, aunque devuelve error

VIII.

$\text{fix } \lambda y : \text{Nat}.\ \text{succ}(y)$

Es un programa, pero nunca termina

23