# 1

**a.**
$x \leftarrow$ válido, término

**b.**
$x\ x \leftarrow$ válido, término

**c.**
$M \leftarrow$ inválido

**d.**
$M\ M \leftarrow$ inválido

**e.**
true false $\leftarrow$ válido, término

**f.**
true succ(false true) $\leftarrow$ válido, término

**g.**
$\lambda x.\text{isZero}(x) \leftarrow$ inválido

**h.**
$\lambda x : \sigma.\text{succ}(x) \leftarrow$ inválido

**i.**
$\lambda x : \text{Bool. succ}(x) \leftarrow$ válido, término

**j.**
$\lambda x :$ if true then Bool else Nat.$x \leftarrow$ inválido

**k.**
$\sigma \leftarrow$ inválido

**l.**
Bool $\leftarrow$ válido, tipo

**m.**
Bool $\rightarrow$ Bool $\leftarrow$ válido, tipo

**n.**
Bool $\rightarrow$ Bool $\rightarrow$ Nat $\leftarrow$ válido, tipo

**ñ.**
(Bool $\rightarrow$ Bool) $\rightarrow$ Nat $\leftarrow$ válido, tipo

**o.**
succ true $\leftarrow$ inválido

**p.**
$\lambda x :$ Bool. if zero then true else zero succ(true) $\leftarrow$ válido, término

# 3

## a.

Marcar las ocurrencias del término $x$ como subtérmino en $\lambda x : \text{Nat. succ}((\lambda x : \text{Nat. } x)\, x)$.

Podemos plantear una $\alpha$ equivalencia tal que:

$\lambda x : \text{Nat. succ}((\lambda x : \text{Nat. } x)\, x) \underset{\alpha}{=} \lambda z : \text{Nat. succ}((\lambda y : \text{Nat. } y)\, z)$

Por lo que hay 0 ocurrencias.

## b.

¿Ocurre $x_1$ como subtérmino en $\lambda x_1 : \text{Nat. succ}(x_2)$?

No

## c.

¿Ocurre $x\,(y\,z)$ como subtérmino en $u\,x\,(y\,z)$?

$u\,x\,(y\,z) = (u\,x)\,(y\,z)$, entonces no.

# 4

## a.

$u\,x\,(y\,z)\,(\lambda v : \text{Bool. } v\,y)$
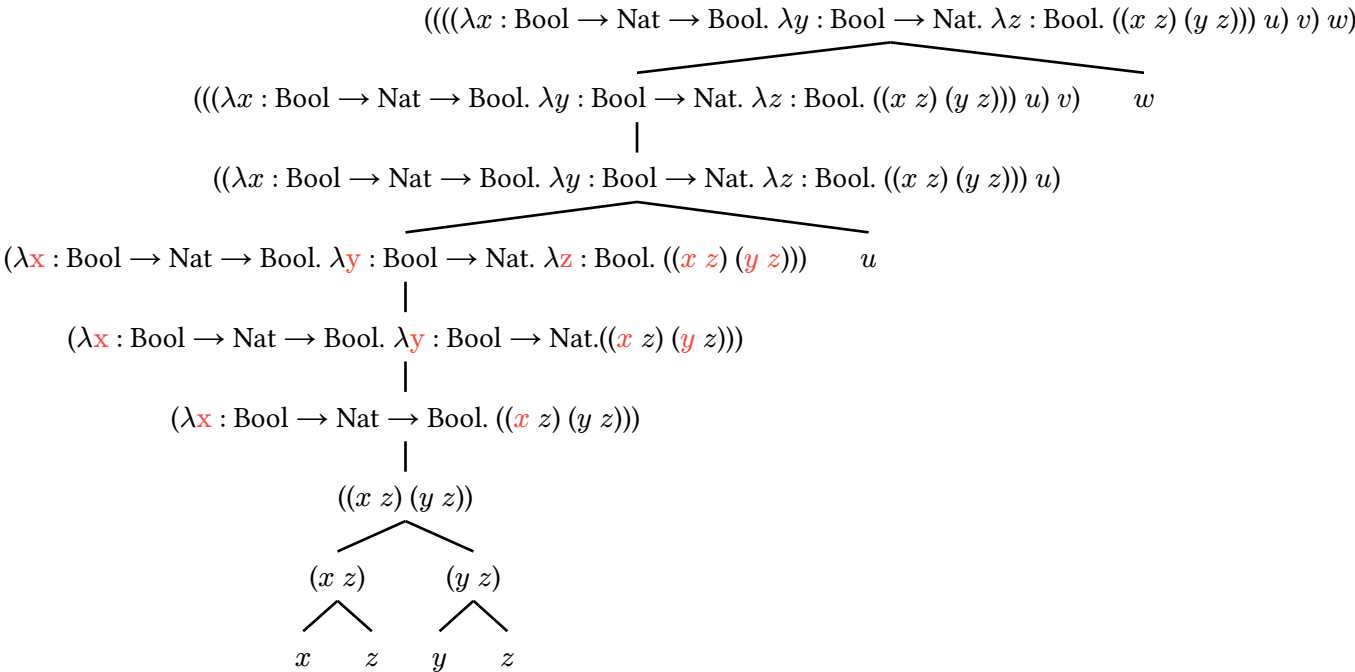
$= (((u\,x)\,(y\,z))\,(\lambda v : \text{Bool. } (v\,y)))$

**Árbol**
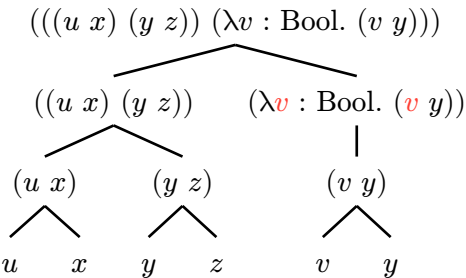


## b.

$(\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } x\,z\,(y\,z))\,u\,v\,w$

$= ((((\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } ((x\,z)\,(y\,z)))\,u)\,v)\,w)$

**Árbol**



## c.
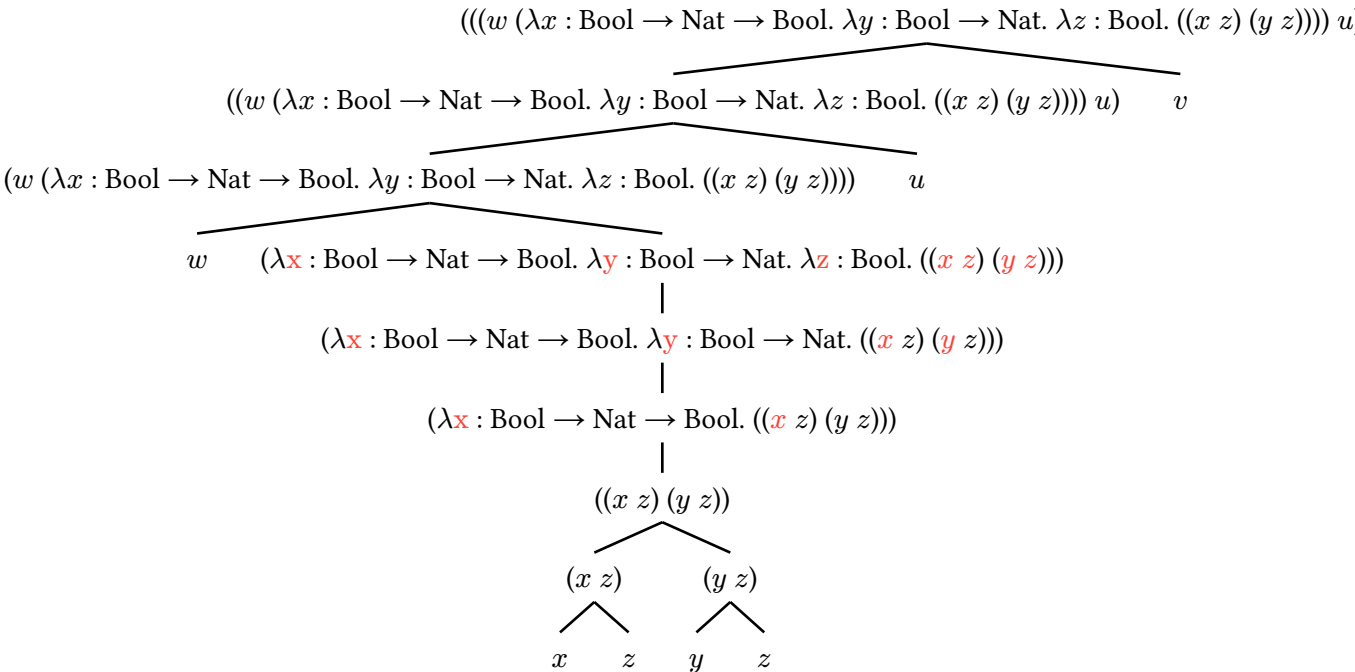
$w\,(\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } x\,z\,(y\,z))\,u\,v$

$= (((w\,(\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat} \to \text{Bool. } \lambda y : \text{Bool} \to \text{Nat. } \lambda z : \text{Bool. } ((x\,z)\,(y\,z))))\,u)\,v)$

**Árbol**



**LAS VARIABLES ROJAS SON LIGADAS**

**El término buscado aparece en el punto (b) al tercer nivel**

# 6

**a.**

$$\cfrac{\cfrac{}{\vdash \text{true} : \text{Bool}}\text{T-True} \qquad \cfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\text{T-Zero} \qquad \cfrac{\cfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\text{T-Zero}}{\vdash \text{succ(zero)} : \text{Nat}}\text{T-Succ}}{\vdash \text{if true then zero else succ(zero)} : \text{Nat}}\text{T-If}$$

**b.**

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\text{T-True} \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}\text{T-False} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, z : \text{Bool} \vdash z : \text{Bool}}\text{T-Var}}{\Gamma \vdash (\lambda z : \text{Bool}.z) : \text{Bool} \to \text{Bool}}\text{T-Abs} \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\text{T}}{\Gamma \vdash (\lambda z : \text{Bool}.z) \ \text{true} : \text{Bool}}\text{T-If}}{\Gamma = x : \text{Nat}, y : \text{Bool} \vdash \text{if true then false else} \ (\lambda z : \text{Bool}.z) \ \text{true} : \text{Bool}}$$

**c.**

$$\cfrac{\cfrac{\textcolor{red}{\textbf{INVALIDO}}}{\vdash (\lambda x : \text{Bool}.x) : \text{Bool}} \qquad \cfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\text{T-Zero} \qquad \cfrac{\cfrac{}{\vdash \text{zero} : \text{Nat}}\text{T-Zero}}{\vdash \text{succ(zero)} : \text{Nat}}\text{T-Succ}}{\vdash \text{if} \ \lambda x : \text{Bool}.x \ \text{then zero else succ(zero)} : \text{Nat}}\text{T-If}$$

**Es inválido porque** $(\lambda x : \text{Bool}.x)$ **es** $\text{Bool} \to \text{Bool}$

**d.**

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash x : \text{Bool} \to \text{Nat}}\text{T-Var} \qquad \cfrac{}{\Gamma \vdash y : \text{Bool}}\text{T-Var}}{\Gamma = x : \text{Bool} \to \text{Nat}, y : \text{Bool} \vdash (x \ y) : \text{Nat}}\text{T-App}$$

## 7

Comparamos:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \leftarrow \text{INVALIDOOOO}}{\Gamma \vdash \lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.M : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}} \to_{i2}$$

y el original:

$$\frac{\Gamma, x : \text{Bool} \to \text{Bool} \vdash M : \text{Bool}}{\Gamma \vdash \lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.M : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}} \to_{i}$$

**9**

**a.** $\sigma \to \tau \to \sigma$

$$\frac{\dfrac{}{x:\sigma, y:\tau \vdash x:\sigma}\text{ T-Var}}{\dfrac{x:\sigma \vdash \lambda y:\tau.x : \tau \to \sigma}{\vdash \lambda x:\sigma.\lambda y:\tau.x : \sigma \to \tau \to \sigma}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}$$

**b.** $(\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\sigma \to \tau \to \rho}\text{ T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z:\sigma}\text{ T-Var}}{\Gamma \vdash x\ z : \tau \to \rho}\text{ T-App} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y:\sigma \to \tau}\text{ T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z:\sigma}\text{ T-Var}}{\Gamma \vdash y\ z : \tau}\text{ T-App}}{\Gamma = \{x:\sigma \to \tau \to \rho, y:\sigma \to \tau, z:\sigma\} \vdash (x\ z)\ (y\ z) : \rho}\text{ T-App}}{\dfrac{x:\sigma \to \tau \to \rho, y:\sigma \to \tau \vdash \lambda z:\sigma.x\ z\ (y\ z) : \sigma \to \rho}{\dfrac{x:\sigma \to \tau \to \rho \vdash \lambda y:\sigma \to \tau.\lambda z:\sigma.x\ z\ (y\ z) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}{\lambda x:\sigma \to \tau \to \rho.\lambda y:\sigma \to \tau.\lambda z:\sigma.x\ z\ (y\ z) : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}$$

**c.** $(\sigma \to \tau \to \rho) \to \tau \to \sigma \to \rho$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\sigma \to \tau \to \rho}\text{ T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z:\sigma}\text{ T-Var}}{\Gamma \vdash x\ z : \tau \to \rho}\text{ T-App} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash y:\tau}\text{ T-Var}}{\Gamma = \{x:(\sigma \to \tau \to \rho), y:\tau, z:\sigma\} \vdash x\ z\ y : \rho}\text{ T-App}}{\dfrac{x:(\sigma \to \tau \to \rho), y:\tau \vdash \lambda z:\sigma.x\ z\ y : \sigma \to \rho}{\dfrac{x:(\sigma \to \tau \to \rho) \vdash \lambda y:\tau.\lambda z:\sigma.x\ z\ y : \tau \to \sigma \to \rho}{\vdash \lambda x:\sigma \to \tau \to \rho.\lambda y:\tau.\lambda z:\sigma.x\ z\ y : (\sigma \to \tau \to \rho) \to \tau \to \sigma \to \rho}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}$$

**d.** $(\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\tau \to \rho}\text{ T-Var} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y:\sigma \to \tau}\text{ T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma z:\sigma}\text{ T-Var}}{\Gamma \vdash y\ z : \tau}\text{ T-App}}{\Gamma = \{x:(\tau \to \rho), y:(\sigma \to \tau), z:\sigma\} \vdash x\ (y\ z) : \rho}\text{ T-App}}{\dfrac{x:(\tau \to \rho), y:(\sigma \to \tau) \vdash \lambda z:\sigma.x\ (y\ z) : \sigma \to \rho}{\dfrac{x:\tau \to \rho \vdash \lambda y:\sigma \to \tau.\lambda z:\sigma.x\ (y\ z) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}{\vdash \lambda x:\tau \to \rho.\lambda y:\sigma \to \tau.\lambda z:\sigma.x\ (y\ z) : (\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}}\text{ T-Abs}$$

## 10

**a.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma = \text{Nat}} \text{ T-Var}}{\cfrac{x : \sigma \vdash \text{succ}(x) : \text{Nat}}{x : \sigma \vdash \text{isZero}(\text{succ}(x)) : \tau = \text{Bool}} \text{ T-IsZero}} \text{ T-Succ}$$

$\sigma = \text{Nat}, \tau = \text{Bool}$

**b.**

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ T-Var}}{\vdash (\lambda x : \sigma.x) : \sigma \to \sigma} \text{ T-Abs} \qquad \cfrac{\cfrac{}{y : \text{Bool} \vdash \text{zero} : \tau = \text{Nat}} \text{ T-Zero}}{\vdash (\lambda y : \text{Bool.zero}) : \sigma = \text{Bool} \to \tau} \text{ T-Abs}}{\vdash (\lambda x : \sigma.x)(\lambda y : \text{Bool.zero}) : \sigma} \text{ T-App}$$

$\sigma = \text{Bool} \to \text{Nat}$

**c.**

$y : \tau \vdash \text{if } (\lambda x : \sigma.x) \text{ then } y \text{ else succ(zero)} : \sigma$

Se nota a simple vista que no tipa, $(\lambda x : \sigma.x)$ es de $\sigma \to \sigma$

**d.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho \to \tau = \sigma} \text{ T-Var} \qquad \cfrac{}{x : \sigma \vdash y : \rho}}{x : \sigma \vdash x \; y : \tau} \text{ T-App}$$

Queda trabado ahí, $y : \rho$ no está en el contexto.

**e.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \tau \to \tau = \sigma} \text{ T-Var} \qquad \cfrac{}{x : \sigma, y : \tau \vdash y : \tau} \text{ T-Var}}{x : \sigma, y : \tau \vdash x \; y : \tau} \text{ T-App}$$

$\sigma = \tau \to \tau$

**f.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \text{Bool} \to \tau} \text{ T-Var} \qquad \cfrac{}{x : \sigma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{ T-True}}{x : \sigma \vdash x \text{ true} : \tau} \text{ T-App}$$

$\sigma = \text{Bool} \to \tau$

**g.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \text{Bool} \to \sigma} \qquad \cfrac{}{x : \sigma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{ T-True}}{x : \sigma \vdash x \text{ true} : \sigma} \text{ T-App}$$

Pero $\sigma \neq \text{Bool} \to \sigma$, no tipa.

**h.**

$$\cfrac{\cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho \to \tau} \qquad \cfrac{}{x : \sigma \vdash x : \rho}}{x : \sigma \vdash x \; x : \tau} \text{ T-App}$$

Pero $\tau \neq \rho \to \tau$, no tipa.

## 13

**a.**

$(\lambda y : \sigma.x \ (\lambda x : \tau.x))\{x := (\lambda y : \rho.x \ y)\}$

$\overset{=}{\alpha} (\lambda z : \sigma.x \ (\lambda w : \tau.w))\{x := (\lambda y : \rho.x \ y)\}$

$\overset{\text{def}}{=} (\lambda z : \sigma.(\lambda y : \rho.x \ y) \ (\lambda w : \tau.w))$

**b.**

$(y \ (\lambda v : \sigma. \ x \ v))\{x := (\lambda y : \tau. \ v \ y)\}$

$\overset{=}{\alpha} (y \ (\lambda w : \sigma. \ x \ w))\{x := (\lambda z : \tau. \ v \ z)\}$

$\overset{\text{def}}{=} (y \ (\lambda w : \sigma. \ (\lambda z : \tau. \ v \ z) \ w))$

# 15

**a.**

$(\lambda x : \text{Bool}.x) \text{ true} \underset{\beta}{\rightarrow} x\{x := \text{true}\} \overset{\text{def}}{=} \text{true} = V$

**b.**

$\lambda x : \text{Bool}.2 \overset{\text{def}}{=} \lambda x : \text{Bool}.\text{succ}^2(\text{zero}) = \lambda x : \text{Bool}. \text{ succ}(\text{succ}(\text{zero}))$

$= \lambda x : \text{Bool}. \text{ succ}(\text{succ}(V)) = \lambda x : \text{Bool}. \text{ succ}(V) = \lambda x : \text{Bool}.V = V$

**c.**

$\lambda x : \text{Bool} .\text{pred}(2) = \lambda x : \text{Bool} .\text{succ}(\text{zero})$

$= \lambda x : \text{Bool} .V = V$

**d.**

$\lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{pred}(2)) \text{ true} = \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{pred}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})))) \text{ true}$

$= \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.\text{succ}(\text{zero})) \text{ true}$

$= \lambda y : \text{Nat}.(\lambda x : \text{Bool}.V)V \underset{\beta}{\rightarrow} \lambda y : \text{Nat}.V\{x := V\}$

$= \lambda y : \text{Nat}.V = V$

**e.**

$x$ no es un valor

**f.**

succ(succ(zero)) = succ(succ(V)) = succ(V) = V

# 16

### I.

$(\lambda x : \text{Bool}.x) \text{ true} \underset{\beta}{\rightarrow} x\{x := \text{true}\} = \text{true}$

Es un programa, forma normal, valor

### II.

$\lambda x : \text{Nat}.\text{pred}(\text{succ}(x))$

Es un programa, forma normal, valor

### III.

$\lambda x : \text{Nat}.\text{pred}(\text{succ}(y))$

No es un programa

### IV.

$(\lambda x : \text{Bool. pred}(\text{isZero}((x)))) \text{ true} \underset{\beta}{\rightarrow} \text{pred}(\text{isZero}((x)))\{x := \text{true}\} = \text{pred}(\text{isZero}((\text{true})))$

No es un programa

### V.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.f \text{ zero}) \ (\lambda x : \text{Nat. isZero}(x))$

Es un programa, no hay variables libres, el 2do lambda suelta algo de tipo Nat, y la 1era recibe algo de tipo Nat, por lo que tipa

Forma normal, valor

### VI.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.x) \ (\lambda x : \text{Nat. isZero}(x))$

No es un programa

### VII.

$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.f \text{ pred}(\text{zero})) \ (\lambda x : \text{Nat. isZero}(x))$

Es un programa, mismo argumento que en el **V**, forma normal, error

### VIII.

$\text{fix } \lambda y : \text{Nat. succ}(y)$

Es un programa, forma normal, pero nunca termina... ¿runtime error?

22

23

24

27