Tipos y términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \sigma \to \sigma$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{aligned} M ::=\ & x \\ \mid\ & \lambda x : \sigma . M \\ \mid\ & M\ M \\ \mid\ & \mathsf{true} \\ \mid\ & \mathsf{false} \\ \mid\ & \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M \\ \mid\ & \mathsf{zero} \\ \mid\ & \mathsf{succ}(M) \\ \mid\ & \mathsf{pred}(M) \\ \mid\ & \mathsf{isZero}(M) \end{aligned}$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{Bool}}\ \textit{T-True} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathsf{Bool}}\ \textit{T-False}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ \textit{T-Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ P\ \mathsf{else}\ Q : \sigma}\ \textit{T-If}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau}\ \textit{T-Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\ \textit{T-App}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{zero} : \mathsf{Nat}}\ \textit{T-Zero}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{succ}(M) : \mathsf{Nat}}\ \textit{T-Succ} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{pred}(M) : \mathsf{Nat}}\ \textit{T-Pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{isZero}(M) : \mathsf{Bool}}\ \textit{T-IsZero}$$

Semántica operacional

$$V ::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid \lambda x : \sigma.M \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(V)$$

(Los valores de tipo Nat pueden escribirse como $\underline{n}$, lo cual abrevia $\mathsf{succ}^n(\mathsf{zero})$).

Reglas de evaluacion en un paso

Si $M_1 \to M_1'$, **entonces** $M_1 M_2 \to M_1' M_2$ ($E\text{-}App_1$ o μ)

Si $M_2 \to M_2'$, **entonces** $V M_2 \to V M_2'$ ($E\text{-}App_2$ o ν)

$(\lambda x : \sigma.M)V \to M\{x := V\}$ ($E\text{-}AppAbs$ o β)

$\mathsf{if\ true\ then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 \to M_2$ ($E\text{-}IfTrue$)

$\mathsf{if\ false\ then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 \to M_3$ ($E\text{-}IfFalse$)

Si $M_1 \to M_1'$, **entonces**
$\mathsf{if}\ M_1\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 \to \mathsf{if}\ M_1'\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3$ ($E\text{-}If$)

$\mathsf{pred}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \underline{n}$ ($E\text{-}PredSucc$)

Opcional*: $\mathsf{pred}(\mathsf{zero}) \to \mathsf{zero}$ ($E\text{-}Pred_0$)

$\mathsf{isZero}(\mathsf{zero}) \to \mathsf{true}$ ($E\text{-}IsZero_0$)

$\mathsf{isZero}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \mathsf{false}$ ($E\text{-}IsZero_n$)

Si $M \to N$, **entonces** $\mathsf{succ}(M) \to \mathsf{succ}(N)$ ($E\text{-}Succ$)

Si $M \to N$, **entonces** $\mathsf{pred}(M) \to \mathsf{pred}(N)$ ($E\text{-}Pred$)

Si $M \to N$, **entonces** $\mathsf{isZero}(M) \to \mathsf{isZero}(N)$ ($E\text{-}IsZero$)