Enunciado

Demostrar, usando la técnica de reducción al absurdo, que todo grafo no trivial tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Ayuda: prestar atención a la secuencia ordenada de los grados de los vértices.

Solución

Hipótesis:

Dado $G = (V, E)$ con $|V| = n \geq 2$

Queremos ver que $\forall G :: \exists u, v \in G \mid d(u) = d(v)$

Demostración por absurdo

Supongamos que $\exists G :: \nexists u, v \in G \mid d(u) = d(v)$, luego:

$\forall u, v \in V :: 0 \leq d(v), d(u) \leq n - 1$ ya que es G es grafo, y un nodo no puede estar conectado a si mismo.

Intentemos **construir** un grafo con todos los vértices de grado distinto con n nodos

$d(v_1) = 1$

$d(v_2) = 2$

$d(v_3) = 3,$

...

$d(v_{n-2}) = n - 2$

Pero tenemos n nodos, nos quedan v_n y v_{n-1} al que por comodidad llamaré u

Quiero ver que es imposible que $d(u) = 0 \wedge d(v) = n - 1$ (o viceversa):

Si $d(v) = n - 1 \Rightarrow v$ está conectado a todos los nodos del grafo (excepto si mismo), por lo tanto, $d(u) \neq 0$

Si $d(u) = 0 \Rightarrow$ ningún nodo está conectado a $n - 1$ nodos, luego $d(v) \neq n - 1$

Pero entonces $d(u) = d(v) = n - 1 \vee d(u) = d(v) = 0$ y esto es **absurdo**!

Por lo tanto, queda demostrado por reducción al absurdo que $\forall G :: \exists u, v \in G \mid d(u) = d(v)$