Enunciado

Sea G un grafo conexo. Demostrar por el contrarrecíproco que todo par de caminos simples de longitud máxima de G tienen un vértice en común.

Ayuda: suponer que hay dos caminos disjuntos en vértices de igual longitud y definir explícitamente un camino que sea más largo que ellos.

Solución

Proposición: Sean P, Q caminos simples en G,

$$G \text{ conexo} \Rightarrow \forall P, Q \text{ de longitud máxima} :: \exists v \in V \mid v \in P \land v \in Q$$

Contrarrecíproco:

$$\exists P, Q \text{ de longitud máxima} \mid \forall v \in V, v \notin P \lor v \notin Q \Rightarrow G \text{ no es conexo}$$

Hipótesis: Asumimos que existen P, Q ambos de longitud máxima donde no existe ningún nodo $v \in V$ en común entre P y Q.

Queremos ver que G no es conexo.

Tenemos $|P| = |Q| = n$ donde n es la cantidad de nodos de P, Q.

Vamos a notar $P = v_1, ..., v_n$, $Q = w_1, ..., w_n$

G es conexo, por lo que se puede llegar desde cualquier nodo v a cualquier nodo w y viceversa.

Esto también nos dice en particular que hay algún camino $R = v_i, ..., w_i$ donde R no pasa por ningún otro nodo de P o Q distintos de v_i, w_i.

Por hipótesis, P, Q son disjuntos, entonces $v_i \neq w_i$ por lo que existe al menos un nodo u tal que $R = v_i, ..., u, ..., w_i$, y habíamos dicho que puedo llegar de cualquier nodo a cualquier nodo dado que G conexo!

Tenemos por ahora: $P = v_1, ..., v_i, ..., v_n \land Q = w_1, ..., w_i, ..., w_n$

Tomamos $P' = v_1, ..., v_i \land Q' = w_i, ..., w_n$ como los subcaminos más largos de P, Q. (Análogo para casos contrarios)

Ahora tenemos un camino $R' = v_1, ..., v_i, ..., u, ..., w_i, ..., w_n$ y esto es de longitud al menos $n + 1$, **contradicción**, por lo que la hipótesis es falsa P, Q no son de longitud máxima! luego la proposición es verdadera.