Enunciado

Un vértice v de un grafo G es un punto de articulación si $G \setminus v$ tiene más componentes conexas que G. Por otro lado, un grafo es biconexo si es conexo y no tiene puntos de articulación.

Demostrar, usando inducción en la cantidad de vértices, que todo grafo de n vértices que tiene más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo. Opcionalmente, puede demostrar la misma propiedad usando otras técnicas de demostración.

Solución por inducción en la cantidad de nodos

Sea $G = (V, E)$ quiero ver que $|V| = n \wedge |E| = m > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Rightarrow G$ conexo.

Por inducción en la cantidad de nodos:

Hipótesis inductiva:

$$P(n-1) : m' > \frac{(n-2)(n-3)}{2} \Rightarrow G' \text{ conexo.}$$

Caso base:

$$P(2) : m > \frac{(2-1)(2-2)}{2} \Rightarrow m > 0 \Rightarrow n = 2 \wedge m = 1 \quad \text{por lo que es conexo.}$$

Paso inductivo: $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Tenemos $P(n) : m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Y $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2} < m$, y $\binom{n-1}{2}$ es la cantidad de aristas máxima de K_{n-1}, y tenemos n nodos y al menos una arista más, por lo que la única chance es que el nodo restante esté conectado por una o más aristas a K_{n-1} tal que sea conexo.

Luego consideremos G' tal que sacamos un nodo $v \in V$ cualquiera a G, nos queda que $m' = m - d(v)$

Por H.I: $m' = m - d(v) > \frac{(n-2)(n-3)}{2} \Rightarrow G'$ conexo

Entonces si agregamos v de nuevo, G' sigue siendo conexo ya que agregarle las aristas que conectaban v no reduce m

Por lo tanto, cualquier grafo con n vértices y más de $\binom{n-1}{2}$ aristas es conexo.