9. Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t. Para una arista $e \notin E(G)$ con peso positivo, definimos $G + e$ como el digrafo que se obtiene de agregar e a G. Decimos que e mejora el camino de s a t cuando $d_G(s,t) > d_{G+e}(s,t)$. Diseñar un algoritmo eficiente que, dado un grafo G y un conjunto de aristas $E \notin E(G)$ con pesos positivos, determine cuáles aristas de E mejoran el camino de s a t en G. **Demostrar** que el algoritmo es correcto.

Algoritmo

```
Algoritmo(G,E):
  ds <- Dijkstra(G,s) //O(E(G)+V log V)
  G' <- G con las aristas invertidas
  dt <- Dijkstra(G',t) //O(E(G)+V log V)

  res <- conjunto vacio

  Para cada (v->w) en E: //O(E)
    Si ds[v]+costo(v->w)+dt[w] < ds[t]:
      res <- res union v->w

  return res

Complejidad final: O(E + E(G) + V log V)
```

Correctitud

Defino $P = \{s...t\}$, el camino de s hasta t en G

`ds` y `dt` por Dijkstra sabemos que son correctos y devuelven los caminos mínimos de *s* a todo *v* en $V(G)$, y de *t* a todo nodo *v* en un camino $v \to ... \to t$ respectivamente.

Ciclo

Vemos para cada arista $v \to w \in E \notin E(G)$

Invariante de ciclo: $d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t) < d(s,t) \underset{L}{\Longrightarrow} \text{res} = \text{res} \cup v \to w$

En palabras, si existe arista $v \to w$ que mejora el camino mínimo de *s* a *t* entonces la arista existe en el output `res` (además será *st*-eficiente).

Inducción en la cantidad de iteraciones k

Caso base $k = 0$:

`res` = $\emptyset$, todavía no encontramos ninguna arista que mejore el camino $s \to ... \to t$ por lo que se preserva el invariante.

Paso inductivo$k \Rightarrow k + 1$:

En la k-ésima iteración, `res` representa el conjunto de todas las aristas de E que mejoran P.

Queremos ver en la iteración k+1, la arista $v \to w \in E$.

Si $d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t) < d(s,t)$ entonces $v \to w$ mejora P, por lo que agregamos $v \to w$ a `res`. Caso contrario, no agregamos nada a `res`. Vale el invariante.

Esto vale porque por propiedad de camino más corto, $d(s,v) + d(v,w) + d(w,t) = d(s,t)$ en G, y si mejora el camino entonces en particular $c(v \to w)_{G+e} < d(v,w)_G$