ParejasdeBaile

1. Tenemos dos conjuntos de personas y para cada persona sabemos su habilidad de baile. Queremos armar la máxima cantidad de parejas de baile, sabiendo que para cada pareja debemos elegir exactamente una persona de cada conjunto de modo que la diferencia de habilidad sea menor o igual a 1 (en módulo). Además, cada persona puede pertenecer a lo sumo a una pareja de baile. Por ejemplo, si tenemos un multiconjunto con habilidades $\{1, 2, 4, 6\}$ y otro con $\{1, 5, 5, 7, 9\}$, la máxima cantidad de parejas es 3. Si los multiconjuntos de habilidades son $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ y $\{1, 2, 3\}$, la máxima cantidad es 2.

a) Considerando que ambos multiconjuntos de habilidades estan ordenados en forma creciente, observar que la solución se puede obtener recorriendo los multiconjuntos en orden para realizar los emparejamientos.

```java
public static int ParejasDeBaile(List<Integer> S, List<Integer> R) {
    int n = S.size();
    int res = 0;
    int j = 0;

    for (int k = 0; k < n && j < R.size(); k++) {
        if (Math.abs(S.get(k)-R.get(j)) <= 1) {
            j++;
            res++;
        }
    }
    return res;
}
```

```
ParejasDeBaile(S,R):
  res = 0
  j = 0

  para cada s ∈ S:
    si |s - R_j| ≤ 1:
      res= res+1
      j = j+1
```

$\{1, 2, 4, 6\}$

$\{1, 5, 5, 7, 9\}$

$(1, 1), (4, 5), (6, 7)$ la cantidad máxima de parejas validas. $G = \{g_1, g_2 ... g_{k-1}\}$

$g_1 = (1, 1)$

$g_2 = (1, 1), (4, 5)$

$g_3 = (1, 1), (4, 5), (6, 5)$

$O = \{o_1, o_2 ... o_{k-1}\}$

$o_3 = (1, 1), (4, 5), (6, 7)$

$0 \leq |s - r| \leq 1, \forall s \in S, r \in R$

S, R ordenados

$$S = \{s_1, ..., s_n\}$$

$$R = \{r_1, ..., r_m\}$$

$$(s, r) \iff 0 \leq |s - r| \leq 1$$

Probar por inducción sobre la cantidad de parejas válidas hasta la k-1 esima iteración que mi solución G es igual de óptima que una solución óptima cualquiera O.

$O' = \{g_1, g_2 ... g_{k-1}, o_k ... o_n\}$

$o_k = g_k$

Si vale esto, vale $\forall k, 1 \leq k \leq n$

Caso base

$k = 0$

$|O| = |O'| = 0$

Paso inductivo

$k - 1 \Longrightarrow k$ entonces $G_k = (s_k, r_k)$

$O_k = G_k$ listo, ya es optima, ya que $O_k = (s_k, r_k)$

$O_k \neq G_k$

Tenemos 3 chances

$G_k = (s_k, r_k)$ y tenemos $r' \neq r_k \in R, s' \neq s_k \in S$

$(s_k, r_k) \equiv (r_k, s_k)$

- (s', r')
- (s_k, r') con $r' > r_k$
- (s', r_k) con $s' > s_k$

$s_k + 1 \leq s'$

$s_k \leq r_k \Rightarrow s_k \leq s_k + 1 = s'$

$r_k \leq s_k \Rightarrow r_k \leq r_k + 1 = r'$

Queremos ver que pasa si intercambiamos

Hasta G_{k-1}, sabemos que G_i es igual de optima que O_i con $i \leq k - 1$

Invariante $(s, r) \iff 0 \leq |s - r| \leq 1$

Caso 1

$(s', r_k) \in O'$ por $(s_k, r_k) \in G$

Hipotesis

Invariante: G empareja (s_k, r_k) si vale $|s_k - r_k| \leq 1$

Y tenemos $(s', r_k) \in O'$

entonces sabemos que $s' > s_k$ y también sabemos que S está ordenado $|s' - r_k| > |s_k - r_k|$

La unica chance de que G no haya emparejado s_k con r_k es si $|s_k - r_k| > 1$ esto no puede pasar

$S = \{....s_k, s'...\}$

Caso 2

$(s_k, r') \in O'$ por $(s_k, r_k) \in G$

$G_k = (s_k, r_k)$ es pareja valida y queremos ver que como $r' > r_k$ entonces r' queda sin elegir

$\{...r_k, ..., r'...\}$

Podría ser elegida por un $s'' > s_k$ en un paso siguiente.

Por lo tanto $\forall O :: \exists O'$ optima $\mid G = O' \Rightarrow G$ es optima