

11. En muchas aplicaciones se necesita encontrar caminos de *peso multiplicativo* mínimo en un digrafo  $D$  pesado con una función positiva  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>1}$ . Formalmente, el peso multiplicativo de un camino  $v_1, \dots, v_k$  es la multiplicatoria de los pesos de sus aristas. Este tipo de caminos se buscan, por ejemplo, cuando los pesos de las aristas representan probabilidades de eventos independientes y se quiere encontrar una sucesión de eventos con probabilidad máxima/mínima. Modelar el problema de camino de peso multiplicativo mínimo como un problema de camino mínimo. **Demostrar** que el algoritmo es correcto. **Ayuda:** transformar el peso de cada arista usando una operación conocida que sea creciente y transforme cualquier multiplicatoria en una sumatoria.

## Cosas útiles

Lo que queremos minimizar es para cada camino  $v_1 \dots v_k$

$$\prod_{i=1}^{k-1} c(v_i \rightarrow v_{i+1})$$

Y sabemos que  $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ ,

como el codominio es  $\mathbb{R}_{>1}$  entonces  $x < y \iff \log x < \log y$

Por lo que para todo par de caminos  $A, B \in G$  vale que:

$$\log\left(\prod_{a \in A} a\right) = \sum_{a \in A} \log a$$

$$\prod_{a \in A} a < \prod_{b \in B} b \iff \sum_{a \in A} \log a < \sum_{b \in B} \log b$$

## Algoritmo

Armamos  $D'$  tal que para cada  $e \in E(D)$  corresponde un  $e' = e, e' \in E(D')$ , y  $c(e') = \log_b c(e)$ , con  $b > 1$  cualquiera.

Luego podemos usar  $\text{Dijkstra}(D', s) \rightarrow \delta$  (vector de distancias) para cualquier nodo  $s \in V(D)$  y “recuperar” el peso multiplicativo de  $s$  a cualquier  $t \in V(D)$  haciendo

$$b^{\delta(s,t)}$$

## Correctitud

La equivalencia de caminos mínimos está justificada en “Cosas útiles”

La solución es correcta porque

$$e^{\log(\prod_{a \in A} a)} = \prod_{a \in A} a$$

done en nuestro caso,  $a = c(v \rightarrow w)$  con  $v \rightarrow w$  en un camino  $A = s \rightarrow \dots \rightarrow t$ .

En otras palabras, nos devuelve  $(s, v_1) \times (v_1, v_2) \times \dots \times (v_k, t)$ , donde  $s, v_1, v_2, \dots, v_k, t$  es el camino que minimiza la suma de los logaritmos del peso de cada arista, que es equivalente al logaritmo del mínimo producto, que es lo que queríamos buscar.