Enunciado

Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar en forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q. Ayuda: denotar $P = v_0, ..., v_p$ y $Q = w_0, ..., w_q$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_q = w$. Definir explícitamente cuáles son los subcaminos de P y Q cuya unión forman un ciclo.

Solución

Hipótesis:

- $P = v_0, ..., v_p$
- $Q = w_0, ..., w_q$
- $v_0 = w_0 = v$
- $v_p = w_q = w$

Vamos a obviar todos los demás caminos de v a w distintos de P y Q, luego, tenemos 2 opciones, o bien P y Q solo comparten v y w, o bien comparten uno o más nodos diferentes a v, w.

Nota: Dado que $P \neq Q$ luego no pueden compartir todos sus nodos, entonces descartamos esa opción

Caso 1

Hipótesis: $\nexists u \in V(G), u \neq v \neq w$ tal que $u \in P \land u \in Q$

Hay de hecho un único ciclo y es trivialmente

$$P \cup Q = v, v_1, ..., v_{p-1}, w, w_{p-1}, ..., w_1, v$$

Luego el ciclo formado tiene todas las aristas de P y Q, y es trivialmente el único en este caso.

Caso 2

Hipótesis: $\exists u \in V(G), u \neq v \neq w$ tal que $u \in P \land u \in Q$

Tenemos:

$$P = v, v_1, ..., u, ..., v_{p-1}, w$$

$$Q = v, w_1, ..., u, ..., w_{p-1}, w$$

En este caso, notamos que tenemos 4 subcaminos tal que

$$P' = v, v_1, ..., u \land Q' = v, w_1, ..., u$$

$$P'' = u, ..., v_{p-1}, w \land Q'' = u, ..., w_{p-1}, w$$

Luego

$$P' \cup Q' = v, v_1, ..., u, ..., w_1, v$$

$$P'' \cup Q'' = w, v_{p-1}, ..., u, ..., w_{p-1}, w$$

Tenemos 2 ciclos! Y esto vale para cualquier u que cumpla la hipótesis.