Flujos

Una red de flujos $G = (V, E)$ es un digrafo donde para todo $(u, v) \in E$, $c(u, v) \geq 0$ y no existe $(v, u) \in E$ con dos nodos distinguidos, s (fuente) y t (sumidero) donde $\forall v \in V$, existe camino $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ en G

Más formalmente, un flujo es una función $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Donde por definición cumple:
- **Capacidad**: $\forall (u, v) \in E :: 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
- **Conservación**: $\forall v \in V \setminus \{s, t\} ::$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{(v,w) \in E} f(v, w)$$

Nota: nos referimos a que la suma del flujo de entrada es igual a la del flujo de salida.

Y el valor (neto) del **flujo** es, $\forall u, v \in V \setminus \{s, t\} ::$

$$F = |f| = \sum_{v \in E} f(s, v) = \sum_{u \in E} f(u, t) =$$

Propiedades

- Simetría: $f(u, v) = -f(v, u)$
- $f(X, X) = 0 \; X \subset V$
- $f(X, Y) = -f(Y, X) \; X, Y \subset V$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ si $X \cap Y = \emptyset$
- $F = f(s, V) = f(V, t)$

Corte

- Un **corte** en le digrafo $G = (V, E)$ es una partición (S, T) tal que $S \subseteq V \setminus \{s \in S, t \notin S\} \mathrm{y} T = (V - S) \subseteq V \setminus \{t \in T, s \notin T\}$
- Dados $S, T \subseteq V$ podemos definir $ST = \{(u, v) \setminus u \in S, v \in T\}$
- Sea f un flujo definido en un digrafo $G = (V, E) \mathrm{y} (S, T)$ un corte. Entonces el flujo a través del corte $f(S, T)$ es igual al flujo $F = f(s, V)$

Capacidad de un corte

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

Corte mínimo

El **corte mínimo** de una red de flujos es un corte de capacidad mínima entre todos los cortes de la red.

Teorema de corte mínimo / flujo máximo

Sea f un flujo en una red de flujos $G = (V, E)$ con un vértice fuente s y un sumidero t, es equivalente decir:

- f es el flujo máximo de G
- La red residual de G_f no tiene caminos aumentantes.
- $|f| = c(S, T)$ para algún corte (S, T) en G

Algoritmo de Ford - Fulkerson para flujo máximo

```
F-F(G,c,s,t):
  Inicializar el flujo

  while existe un camino de aumento (P) en R:
    for ij en P:
      if ij ∈ E:
        xij = xij + Δ(P)
      if not:
        xij = xij - Δ(P)
```

Edmond-Karp

Lema 1:
Si se ejecuta **E-K** sobre una red de flujos $G = (V, E)$ con un nodo fuente s y un nodo sumidero t, luego $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ :: la distancia del camino mínimo $\delta_{f(s,v)}$ en la red residual G_f incrementa de forma monótona con cada flujo aumentante.

Lema 2:
El total de flujos aumentantes está acotada por $O(VE)$

Nota
E-K es $O(VE^2)$ (BFS con FF)

Matching bipartito

Lema 3:
Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con $V = L \cup R$ y sea $G' = (V', E')$ es la red de flujos de G.

Si M es un matcheo en G, entonces existe un flujo f en G' tal que $|f| = |M|$. Intuitivamente, f es un flujo en G', entonces hay un matching M en G con cardinalidad $|M| = |f|$