Enunciado

Un grafo orientado es un digrafo D tal que al menos uno de $v \to w$ y $w \to v$ no es una arista de D, para todo $v, w \in V(D)$. En otras palabras, un grafo orientado se obtiene a partir de un grafo no orientado dando una dirección a cada arista. Demostrar en forma constructiva que para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos.

Ayuda: aprovechar el ejercicio anterior y observar que el absurdo no se produce para un único grafo orientado.

Solución

Definimos grafo orientado como $D \mid v \to w \in E(D) \oplus w \to v \in E(D)$

Y quiero probar que $\forall G = (V, E), |V| = n, |E| = m : \exists! D = \vec{G} :: \nexists u, v \in V \mid d_{\text{out}}(u) = d_{\text{out}}(v)$

Esto se puede demostrar por construcción.

Queremos armar $\vec{G}$ a partir de G tal que todos sus nodos tengan grado de salida distinto y ver que solo esa solución es posible.

Entonces tenemos $V = \{v_1, ... v_n\}$ y le damos orientación tal que no hay aristas bidireccionales

$$
\begin{gathered}
d_{\text{out}}(v_1) = 0, \\
d_{\text{out}}(v_2) = 1, \\
..., \\
d_{\text{out}}(v_{n-1}) = n - 2, \\
d_{\text{out}}(v_n) = n - 1
\end{gathered}
$$

Ver que no existe otra asignación es trivial, cada nodo puede estar conectado a $n - 1$ nodos máximo y 0 nodos mínimo.

Nota: este etiquetado es arbitrario, esto vale para cualquier G' isomorfo a G

Del proceso anterior tenemos también que:

$$
\sum_{i=1}^{n} d_{\text{out}}(v_i) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}
$$

Esto nos indica que es un **grafo completo**, o sea, de $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas (en este caso dirigidas, pero vale ya que no hay bidireccionales).

Esto nos dice que existe un único $D = \vec{G}$ tal que todos los vértices tienen grado de salida distintos, y en particular, es K_n. 😀