

Definiciones y lemas elementales

Definición 1.

- Una **red de flujos** es un grafo $G = (V, E)$ orientado y conexo que tiene dos nodos distinguidos s *fuentes* con $d_{\text{out}}(s) \geq 0$ y t *sumidero* con $d_{\text{in}}(t) \geq 0$
- Una función de capacidad $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Definición 2.

Dada una red $G = (V, E)$ con una función de capacidad c , fuente s , sumidero t :

- Un **flujo factible** es una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica:
 - **Capacidad:** $\forall (u, v) \in E :: 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
 - **Conservación de flujo:** $\forall v \in V \setminus \{s, t\} :$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{(v,w) \in E} f(v, w)$$

$$\forall (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E \text{ ó } c(v, u) = 0$$

- El **valor del flujo** es $\forall u, v \in V \setminus \{s, t\} :$

$$F = |f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{u \in V} f(u, t)$$

Lema 1.

Sea $G = (V, E)$ una red con función de capacidad c , fuente s , sumidero t .

$$F = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Problema de flujo máximo

Definición 3.

El **problema de flujo máximo** consiste en, dada una red $G = (V, E)$ con capacidades en las aristas, una *fuentes* s , y un *sumidero* t , determinar el flujo factible de valor máximo F que se puede enviar de s a t .

Definición 4.

Un **corte** en la red $G = (V, E)$ es un subconjunto $S \subseteq V \setminus \{t\}$ tal que $s \in S$.

Notación: Dados $S, T \subseteq V$, llamamos $ST = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

Proposición 1.

Sea f un flujo factible definido en una red G con un valor F y sea S un corte, luego:

$$F = \sum_{(u,v) \in S\bar{S}} f(u, v) = \sum_{(u,v) \in \bar{S}S} f(u, v)$$

Donde $\bar{S} = V \setminus S$

Definición 5.

Dada una red $G = (V, E)$ con función de capacidad c , la capacidad de un corte S se define como

$$c(S) = \sum_{e \in S\bar{S}} c(e)$$

Definición 6.

El **problema del corte mínimo** consiste en, dada una red $G = (V, E)$ con función de capacidades en las aristas c , determinar un corte de capacidad mínima. Es decir, encontrar S corte de G tal que:

$$c(S) = \min \{ c(\bar{S}) \mid \bar{S} \text{ es un corte de } N \}$$

Lema 2.

Dados una red $G = (V, E)$ con una función de capacidad c , una función de flujo factible con valor F y un corte S , vale que:

$$F \leq c(S)$$

Corolario 1.

Si F es el valor de un flujo factible f , y S un corte de una red G tal que $F = c(S)$

- f se define como flujo máximo
- S es un corte mínimo

Camino de aumento

Definición 7.

Dada una red $G = (V, E)$ con una función de capacidad c y un flujo factible f

- Definimos la **red residual**, $R(G, f) = (V, E_R)$ donde $\forall (v \rightarrow w) \in E$
- $(v, w) \in E_R$ si $f(v, w) < c(v, w)$
- $(w, v) \in E_R$ si $f(v, w) > 0$

Algoritmo 1.

Dada una red $G = (V, E)$, una función de flujo f , una red residual $R = (G, f) = (V, E_R)$, **CaminoDeAumento** devuelve P camino de aumento ó S corte (que será mínimo).

```
1: procedure CAMINODEAUMENTO( $G, f, R$ )
2:    $S \leftarrow \{s\}$ 
3:   while  $t \notin S$  y  $\exists (v \rightarrow w) \in E_R$  y  $v \in S$  y  $w \notin S$  do
4:      $\text{pred}[w] \leftarrow v$ 
5:   end
6:   if  $t \notin S$  then
7:     return  $S$  corte de  $G$ 
8:   end
9:   else
10:    reconstruir  $P$  entre  $s$  y  $t$  usando  $\text{pred}$  a partir de  $t$ 
11:    return  $P$  camino de aumento
12:  end
13: end
```

Proposición 2.

Dada una red $G = (V, E)$, un flujo factible f y su red residual $R(G, f) = (V, E_R)$, el algoritmo de camino de aumento determina un camino de aumento en $R(G, f)$, P , si existe y, caso contrario, determina un corte S de G .

Definición 8.

Dada una red $G = (V, E)$ con una función de capacidad c , un flujo factible f y un camino de aumento P en $R(G, f)$:

- Para cada arista $(v \rightarrow w)$ de P , definimos:

$$\Delta(v \rightarrow w) = \begin{cases} c(v \rightarrow w) - f(v \rightarrow w) & \text{si } (v \rightarrow w) \in E \\ f(v \rightarrow w) & \text{si } (w \rightarrow v) \in E \end{cases}$$

- $\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$

Proposición 3.

Sea f un flujo factible definido sobre una red G con un valor F y sea P un camino de aumento en $R(G, f)$. Entonces el flujo \bar{f} , definido por

$$\bar{f}(v \rightarrow w) = \begin{cases} f(v \rightarrow w) & \text{si } (v \rightarrow w) \notin P \\ f(v \rightarrow w) + \Delta(P) & \text{si } (v \rightarrow w) \in P \\ f(v \rightarrow w) - \Delta(P) & \text{si } (w \rightarrow v) \in P \end{cases}$$

es un flujo factible sobre G con valor $\bar{F} = F + \Delta(P)$.

Teorema 1.

Sea f un flujo factible definido sobre una red $G = (V, E)$. f es un flujo factible de valor máximo \iff no existe camino de aumento en $R(G, f)$.

Teorema 2.

Dada una red $G = (V, E)$, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

El algoritmo toma $G = (V, E)$ una red, c una función de capacidad y devuelve f flujo máximo.

```
1: procedure FORD&FULKERSON( $G$ )
2:   ▷ definir un flujo inicial en  $G$  (ejemplo,  $f(e) \leftarrow 0, \forall e \in E$ )
3:   while existe  $P$  camino de aumento en  $R(G, f)$  do
4:     for cada arista  $(v \rightarrow w)$  de  $P$  do
5:       if  $(v \rightarrow w) \in E$  then
6:          $f(v \rightarrow w) \leftarrow f(v \rightarrow w) + \Delta(P)$ 
7:       end
8:       else
9:          $f(w \rightarrow v) \leftarrow f(w \rightarrow v) - \Delta(P)$ 
10:      end
11:    end
12:  end
13: end
```

Proposición 4.

Si las capacidades de las aristas de $G = (V, E)$ son enteras, el problema de flujo máximo tiene una función de flujo máximo f entera, $f(e) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall e \in E$.

Proposición 5.

Si los valores del flujo inicial y las capacidades de las aristas de la red son enteras, el método de F&F realiza a lo sumo F iteraciones, siendo F el valor del flujo máximo.

Proposición 6.

Si los valores del flujo inicial y las capacidades de las aristas de la red son enteras, F&F es $O(nmU)$, con U una cota superior finita para el valor de las capacidades.

Edmond-Karp

La implementación del paradigma planteado por Ford y Fulkerson usa BFS en el algoritmo de camino de aumento para marcar los nodos. Su complejidad es $O(m^2n)$

Teorema 3.

Dada una red $G = (V, E)$ con n nodos y m aristas, el algoritmo de E&K realiza a lo sumo nm iteraciones.

Lema 3.

Sea f_i el flujo máximo de la iteración i del algoritmo E&K. Entonces, para todo $v \in V$, $d_{R(G, f_i)}(s, v) \leq d_{R(G, f_{i+1})}(s, v)$ para toda iteración i del algoritmo.