Enunciado

Demostrar, usando inducción en la cantidad de aristas, que todo digrafo D satisface

$$\sum_{v \in V(D)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{\text{out}(v)} = |E(D)|$$

Solución

Tenemos:

- $d_{\text{in}}(v)$ es la cantidad de aristas $u \to v \in E$.
- $d_{\text{out}}(v)$ es la cantidad de aristas $v \to u \in E$.

Por comodidad, llamo $|E(D)| = m$

Por inducción en m:

Hipótesis Inductiva:
$\forall D'$ con $m - 1$ aristas:

$$P(m-1) : \sum_{v in V(D')} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v in V(D')} d_{\text{out}}(v) = m - 1$$

Caso Base: $m = 0$

$$P(0) : E = \emptyset \Rightarrow \forall v \in V(D),$$
$$d_{\text{in}}(v) = d_{\text{out}}(v) = 0$$

Luego:

$$\sum_{v \in V(D)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{\text{out}}(v) = 0$$

Paso Inductivo: $P(m-1) \Rightarrow P(m)$
Sea $D' = (V, E')$ con $E' = E \setminus (u \to w)$ con $u, w \in V$

Por H.I.:

$$\sum_{v \in V(D')} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V(D')} d_{\text{out}}(v) = |E'| = m - 1$$

Luego agregamos $(u \to w)$ a D' y vemos:

- $d_{\text{out}}(u)$ aumenta en 1 tal que $\sum d_{\text{out}} = (m-1) + 1 = m$
- $d_{\text{in}}(w)$ aumenta en 1 tal que $\sum d_{\text{in}} = (m-1) + 1 = m$

Por lo tanto:

$$\sum_{v \in V(D)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v in V(D)} d_{\text{out}}(v) = m = |E(D)|$$

Entonces, por inducción, vale $\forall m$ 😎