

2. Dado un conjunto  $X$  con  $|X| = n$  y un entero  $k \leq n$  queremos encontrar el máximo valor que pueden sumar los elementos de un subconjunto  $S$  de  $X$  de tamaño  $k$ . Más formalmente, queremos calcular  $\max_{S \subseteq X, |S|=k} \sum_{s \in S} s$ .

$X = \{x_1 \dots x_n\}$ , y tenemos un  $k \leq n$

máximo subconjunto  $S$  de  $X$  de tamaño  $k$

$X = \{1, 23, 3, 56, 2, 6\}$ ,  $k = 4$

$S = \{56, 23, 6, 3\}$

- a) Proponer un algoritmo *greedy* que resuelva el problema, demostrando su correctitud. Extender el algoritmo para que también devuelva uno de los subconjuntos  $S$  que maximiza la suma.

Algoritmo( $X, k$ ):

$X' \leftarrow \text{sort}(X)$  tal que ordena de mayor a menor

$\text{res} = 0$

para todo  $i: 1 \dots k$ :

$\text{res} += X'[i]$

return  $\text{res}$

**Invariante:** la suma de los  $k$  elementos más grandes hasta la  $k$ -ésima iteración

Tenemos un conjunto  $X'$  que es el conjunto  $X$ , ordenado de forma decreciente.  $\forall i < j :: X'_i > X'_j$

Entonces los  $k$  primeros elementos son los más grandes por el invariante. y la solución greedy  $G$  nos dice que:  $G = \sum_{i=1}^k X'_i$

Tenemos una solución óptima  $O$  y sabemos que  $O \leq G$  porque por invariante,  $G$  tiene los  $k$  elementos más grandes.

Pero  $O$  no puede ser peor que  $G$  porque  $O$  es óptima, luego  $O$  no es menor a  $G$ , por lo que  $O$  es igual de óptima que  $G$