1. Para cada una de las siguientes sentencias sobre el problema de flujo máximo en una red N: demostrar que es verdadera o dar un contraejemplo.

    a) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces el valor del flujo máximo es par.

    b) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par.

    c) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces el valor del flujo máximo es impar.

    d) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar.

    e) Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales, entonces el flujo máximo es racional.

Sea $N = (V, E)$ un flujo, dos nodos distinguidos s fuente, t sumidero, c una función de capacidad.

a.

Queremos probar que $\forall (u, v) \in E \underset{L}{\rightarrow} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \Longrightarrow F_{\max} \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$

Sea S un corte, $T = V \setminus S$

Con $ST = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

Por definición, la capacidad de un corte S es tal que

$$c(S) = \sum_{e \in ST} c(e)$$

Y por hipótesis sabemos que $\forall (u, v) \in E \underset{L}{\rightarrow} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ por lo que para cualquier corte S:

$$c(S) = \sum_{(u,v) \in ST} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$$

En particular, un corte mínimo $c(S') \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$

Y por teorema de flujo máximo/ corte mínimo sabemos que el flujo máximo es igual al corte mínimo.

$F_{\max} = c(S') \land c(S') \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \Longrightarrow F_{\max} \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$

$\square$

b.

Queremos probar que $\forall (u, v) \in E \underset{L}{\rightarrow} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \Longrightarrow \exists F_{\max} \mid e \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \forall e \in E$

Usando el inciso (a) sabemos que $\forall (u, v) \in E \underset{L}{\rightarrow} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \Longrightarrow F_{\max} \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$

$F_{\max} = \max\{F \mid f \text{ es un flujo factible}\}$.

Queda ver que $\exists F_{\max} \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \mid \forall f(u, v) \equiv 0 \operatorname{mod} 2, \forall (u, v) \in E$

Veamoslo por inducción en las iteraciones de Ford Furkerson:

Hipótesis 1: $\forall (u, v) \in E \underset{L}{\rightarrow} c(u, v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$

Caso base:

$\forall (u \rightarrow w) \in E : f(u \rightarrow w) = 0 \equiv 0 \operatorname{mod} 2$

Paso inductivo:

HI En la k-ésima iteración, $f_k(v, w) \equiv 0 \operatorname{mod} 2, \forall (v, w)$

Veamos la iteración $k + 1$-ésima

En cada iteración, el algoritmo encuentra $\Delta(P) = \min_{e \in P}\{\Delta(e)\}$

$$\Delta(v \to w) = \begin{cases} c(v \to w) - f(v \to w) & \text{si } (v \to w) \in E \\ f(v \to w) & \text{si } (w \to v) \in E \end{cases}$$

Por hipótesis 1 e hipótesis inductiva, $c(v \to w) \equiv 0 \bmod 2 \land f(v \to w) \equiv 0 \bmod 2$

Por lo que $\Delta(P) \equiv 0 \bmod 2$

Y cada actualización de flujo cae en uno de estos 3 casos:

- $f_{k+1}(v \to w) \underset{\text{HI}}{\equiv} 0 \bmod 2$
- $f_{k+1}(v \to w) + \Delta(P) \underset{\text{HI}}{\equiv} \Delta(P) \bmod 2 \equiv 0 \bmod 2$
- $f_{k+1}(v \to w) - \Delta(P) \underset{\text{HI}}{\equiv} \Delta(P) \bmod 2 \equiv 0 \bmod 2$

Como queriamos probar, el flujo de toda arista se mantiene impar.

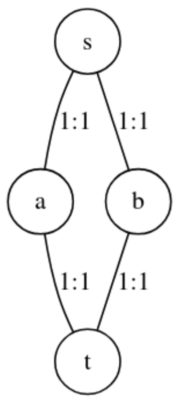
$\therefore \forall (u, v) \in E, f(u, v) \equiv 0 \bmod 2$ y en particular, $F_{\text{max}} = |f^*| \equiv 0 \bmod 2$

$\square$

Nota: esta demostración es mucho más sencilla trabajando sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c.

Contraejemplo:



$F_{\text{max}} = 2$