14. $\star$En este ejercicio diseñamos un algoritmo para encontrar ciclos en un digrafo. Decimos que un digrafo es *acíclico* cuando no tiene ciclos dirigidos. Recordar que un (di)grafo es *trivial* cuando tiene un sólo vértice.

---

a) Demostrar con un argumento constructivo que si todos los vértices de un digrafo D tienen grado de salida mayor a 0, entonces D tiene un ciclo.

Si todos v tiene grado mayor a 0, entonces puedo construir un camino hasta algún v_k $p = \{v_1 ... v_k\}, k \leq n$ donde no tengo ciclos, pero en el caso v_n o antes tendré algún $v_{k+1} = v_i \in \{v_1 ... v_{k-1}\}$ ya que $d(v_{k+1}) > 0$

---

b) Diseñar un algoritmo que permita encontrar un ciclo en un digrafo D cuyos vértices tengan todos grado de salida mayor a 0.

```
f solve(G,v):
  armo E(G) lista de aristas //O(m)
  armo vector visitado de tamaño n iniciado todo en False //O(n)

  para cada (u,w) in E(G): //O(m)
    if not visitado[u]:
      visitado[u] = True
    if not visitado[w]:
      visitado[w] = True
    if visitado[u] or visitado[w]:
      return "hay ciclo"

  return "no hay ciclo"
```

---

c) Explicar detalladamente (sin usar código) cómo se implementa el algoritmo del inciso anterior. El algoritmo resultante tiene que tener complejidad temporal $O(n + m)$.

hecho item anterior, es $O(m + n + m) \in O(n + m)$

---

d) Demostrar que un digrafo D es acíclico si y solo si D es trivial o D tiene un vértice con $d_{out}(v) = 0$ tal que $D \setminus \{v\}$ es acíclico.

Si D es trivial luego es aciclico.

Caso interesante:

$(\Longrightarrow)$

Hipótesis: D no tiene ciclos.

Quiero ver que D tiene un $d_{\text{out}}(v) = 0$ tal que $D - \{v\}$ no tiene ciclos.

Por hipótesis, D no tiene ciclos, si elimino v de V luego también cada arista $u \to w \in E$, entonces el grafo no suma aristas, por lo que sigue siendo aciclico.

$(\Longleftarrow)$

D tiene un $d_{\text{out}}(v) = 0$ tal que $D - \{v\}$ no tiene ciclos.

Tengo $D - \{v\}$ sin ciclos, si agrego v luego independientemente de $d_{\text{in}}(v), d_{\text{out}}(v) = 0$ entonces D es aciclico también.

Q.E.D.