

(not) grad thesis

Takayasu Oono

January 27, 2016

概要

- 現実の市場がもつ性質を備えていることが先行研究によって検証されている既存の人工市場モデルを Python 上で再現する.
- 上記モデルに二種類の異なる性質をもった高頻度取引のモデルを追加し, それらのモデルが存在することで取引にどのような影響が生じるかを分析する.
- 同一の人工市場モデルについて, 与える初期状態の違いにより取引価格の推移や, 高頻度取引のモデルが関与する割合などが変化することを示すとともに, その原因について考察する.

目次

- ① 基礎事項の説明
- ② モデルの説明
- ③ シミュレーション結果
- ④ シミュレーションを通して得られたこと

連続時間ダブルオークション

現在の多くの株式・債券市場ではザラバ方式と呼ばれる連続時間ダブルオークションによって価格決定がなされている。その概要は以下。

- 注文には具体的な (限度) 価格を提示し、その時点で約定する相手がなければその注文が場に残り続ける「指値注文」と、価格に関係なく即座に約定させる「成行注文」がある
- 2 種類の注文が同時に場に出た場合、成行注文が優先して処理される
- 場に残っている指値注文に関しては以下の 2 つのルールによって優先順位が定められている。
 - 価格 (買い注文に関しては低いもの、売り注文に関しては高いものが優先)
 - 注文時間 (提示価格が同じ場合は古くに出された注文が優先される)

連続時間ダブルオークション（実例）

売数量	価格	買数量
95	OVER	
8	105	
6	104	
8	103	
10	102	
5	101	
	100	5
	99	5
	98	10
	97	10
	96	5
	95	5
	UNDER	100

- 価格 100 で 1 単位の買い注文→約定せず、板に残る価格 100 の買い注文が 6 単位になる
- 価格 101 で 1 単位の買い注文→価格 101 の売り注文とマッチするので約定、価格 101 の売り注文は 4 単位になる
- 価格 103 で 1 単位の買い注文→売り注文の中で優先順位の最も高い価格 101 の売り注文とマッチして約定（この場合、支払う価格は 101）

板寄せ方式

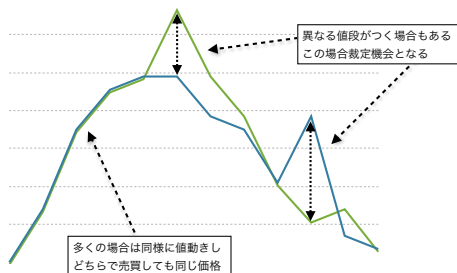
証券取引所における価格決定に際し，取引時間の直前および直後においては連続時間ダブルオークションが適用されない．この場合は「板寄せ方式」と呼ばれる価格決定メカニズムが使用されている．

板寄せ前			板寄せ後		
売数量	価格	買数量	売数量	価格	買数量
200	OVER		200	OVER	
40	105		40	105	
30	104		30	104	
30	103	10	30	103	
20	102	10	20	102	
15	101	10	15	101	
20	100	15		100	10
10	99	5		99	5
5	98	15		98	15
	97	30		97	30
	96	40		96	40
	95	30		95	30
	UNDER	180		UNDER	180



同一証券の2市場間での裁定機会

ある証券が複数の市場で取引されている場合、理論上その値動きは同一になるはず。しかし、実際には各市場での取引価格には差異が生じること（裁定機会）があると知られている。この時、低い価格がついた市場で証券を買い、高い価格がついた市場で売ることによりリスクなしで収益を得ることができる（裁定取引）。この売買により、買われた市場での価格は上昇し、売られた市場での価格は下落するので、裁定取引には裁定機会を失わせる働きがある。



同一証券の 2 市場間での裁定機会（詳細）

市場 1			市場 2		
売数量	価格	買数量	売数量	価格	買数量
95	OVER		92	OVER	
3	105		3	105	
6	104		6	104	
8	103		8	103	
10	102		10	102	
5	101		5	101	
	100	2	7	100	
	99	5	3	99	
	98	10		98	
	97	10		97	5
	96	5		96	15
	95	5		95	3
	UNDER	100		UNDER	100

上図のように同一証券について、ある市場での最良売り気配を別の市場での最良買い気配が上回っている場合、前者の市場で買い、後者の市場で売りの成行注文を出すことで裁定取引が可能になる。（上図においては市場 1 で買い、市場 2 で売りをそれぞれ出すことで差額の 1 を得ることができる）逆の場合も同様。

流動性

流動性の高い市場

売数量	価格	買数量
2500	OVER	
200	105	
800	104	
1000	103	
1200	102	
1400	101	
1000	100	
700	99	
	98	500
	97	1200
	96	1000
	95	900
	UNDER	3100

流動性の低い市場

売数量	価格	買数量
20	OVER	
5	105	
2	104	
	103	
	102	
	101	
	100	
	99	
	98	
	97	3
	96	4
	95	3
	UNDER	15

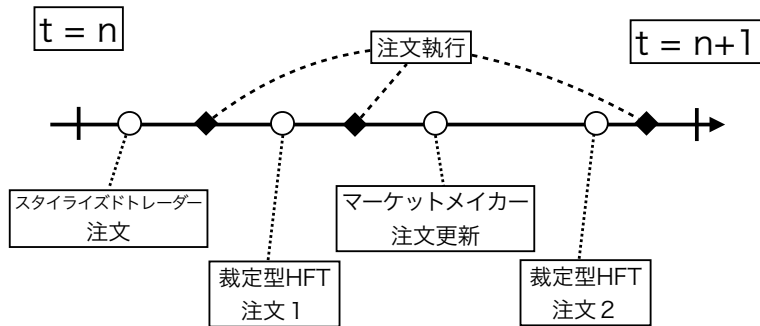
流動性が高い市場ではスプレッドが狭く板に厚みがあるため、この証券を適正価格で売買することができる。一方、流動性が低い市場では一度に複数単位の注文を行うと、自らの注文が自らに不利な方向の値動きを産んでしまう。また、さらに流動性が低くなると市場に買い・売りどちらの注文も存在しないためどの価格でも売買できない、という場合もある

マーケットメイカーの役割

前記したような流動性の低い銘柄・市場は投資家から好まれない。そこで、証券会社に代表されるマーケットメイカーは売買両方に注文を出して気配を提示することで投資家に対し自由な売買を担保している

- ただし、これは東証などのオークション方式を採用している取引所における記述である
- マーケットメイク方式を採用している取引所では、投資家が直接的に証券を売買する相手は常にマーケットメイカーであり、マーケットメイカーは証券の流動性の高低に関わらず、常に気配を提示することが義務付けられている

時系列



- $t = n$ において
- まずスタイライズドトレーダー一団が注文を行う
- 次に裁定型 HFT が注文を行う
- その次にマーケットメイカーが注文を更新する
- 再び裁定型 HFT が注文を行う

モデルの概要

今回使用したモデルは3種類のトレーダーとそれらから注文を受け、執行するマーケットからなる。トレーダーの種類は以下の通り。

- スタイライズドトレーダー
 - 人間のトレーダーを仮定したもの
 - 各人ごとに注文の詳細を決定するためのパラメータを持ち、それに基づいて注文を行う
- マーケットメイカー
 - マーケットメイク業務を行っている証券会社や、マーケットメイカー型の HFT を仮定したもの
 - 一定のスプレッドをとって常に売買両方の注文を場に出し、頻繁に更新する
- 裁定取引型 HFT
 - 2 市場間での裁定取引を行う HFT を仮定したもの
 - 常に市場をチェックし、裁定取引が可能になると即座に 2 市場に成行注文を出して利益を得る

マーケット環境 (1)

今回は同一証券に関して最大で2つの市場が存在すると仮定した。また、2つの市場が存在する場合、それらに参加者数やティックサイズ、約定の方式などの差異は存在しないものとする。

あらゆる市場参加者は各市場について、過去の価格の推移および現在場に出ている注文のうち最も優先される買い・売りそれぞれの注文価格（最良気配）を知ることができる。

マーケット環境 (2)

$t > 0$ における価格決定は先述した連続時間ダブルオークションによって行われる。ただし、 $t = 1$ で連続時間ダブルオークションが開始される以前に関しては以下の二通りの状況を仮定した。

- $t < 0$ で一定数の注文を受け付け、 $t = 0$ において板寄せ方式で執行し、残った注文を板の初期状態として扱う
 - 多くの証券取引所において始値を決定する際に板寄せ方式が用いられており、その環境を再現できる
 - オークション開始以前に注文が一切存在しない場合に、初期において注文のスプレッドが過度に広がり、現実にはありえない値動きが起こるのを防げる
- $t < 0$ において $t > 0$ と同様の連続時間ダブルオークションを行い、十分な量の注文を蓄積させた上で板の初期状態として扱う
 - 板のスプレッドや厚みが実験中に大きく変化しないため、実験を行う期間に依存しない結果が得られる
 - 上記に伴い、上昇・下降といった一定のトレンドを持った値動きを再現しやすい

スタイライズドトレーダー (1)

各スタイライズドトレーダーは番号 j を保有しており, $j = 1$ から順番に $j = 2, 3, \dots, n$ と発注を行う. 時刻 t は 1 体のスタイライズドトレーダーが発注を行うごとに 1 増加する (発注だけが行われ, 取引が成立しない場合も時刻が進む). 最後の ($j = n$ の) スタイライズドトレーダーが発注を行った後, 次の時刻以降には, また $j = 1$ から順番に発注が繰り返される. また, スタイライズドトレーダー j は注文の売り/買いおよびその注文価格を以下のようにして決定する.

まず, 時刻 t におけるスタイライズドトレーダー j の期待リターン $r_{e,j}^t$ を

$$r_{e,j}^t = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 w_{i,j}} \left(w_{1,j} \log \frac{P_f}{P_{t-1}} + w_{2,j} r_{h,j}^{t-1} + w_{3,j} \epsilon_j^t \right)$$

とする.

スタイライズドトレーダー (2)

$$r_{e,j}^t = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 w_{i,j}} (w_{1,j} \log \frac{P_f}{P_{t-1}} + w_{2,j} r_{h,j}^{t-1} + w_{3,j} \epsilon_j^t)$$

ここで $w_{i,j}$ はスタイライズドトレーダー j 固有の i 項目に関する重み付けであり、シミュレーション開始時に各スタイライズドトレーダーについてそれぞれ 0 から $w_{i,\max}$ までの一様乱数で定める。

P_f は時刻によらず一定のファンダメンタル価格、 P^t は時刻 t での取引価格 (当該時刻に取引が成立しなかった場合には、時刻を遡って最後に取引が成立した価格とし、時刻 $t = 0$ では $P^t = P_f$ とする)、 ϵ_j^t は時刻 t 、スタイライズドトレーダー j に固有の乱数項であり、平均 0、標準偏差 σ_ϵ の正規分布乱数である。 $r_{h,j}^t$ は時刻 t にスタイライズドトレーダー j が計測した過去リターンであり、 $r_{h,j}^t = \log(P^{t-1}/P^{t-\tau_j})$ である。ただし、 $t < \tau_j$ のときは $r_{h,j}^t = \log(P^{t-1}/P_f)$ とする。ここで τ_j はスタイライズドトレーダー j に固有の値で、シミュレーション開始時に 1 から τ_{\max} までの一様乱数で定める。

スタイライズドトレーダー (3)

$$r_{e,j}^t = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 w_{i,j}} (w_{1,j} \log \frac{P_f}{P_{t-1}} + w_{2,j} r_{h,j}^{t-1} + w_{3,j} \epsilon_j^t)$$

上式の第1項目はファンダメンタル価格と比較して安ければプラスの期待リターンを、高ければマイナスの期待リターンを示す、ファンダメンタルな投資家の成分である。第2項目は過去のリターンがプラスならプラスの、マイナスならマイナスの期待リターンを示すテクニカルな投資家の成分であり、第3項目はランダムに決まるノイズ成分を表している。以上により計算した期待リターン $r_{e,j}^t$ により、スタイライズドトレーダー j が考える時刻 t での期待価格 $P_{e,j}^t$ は

$$P_{e,j}^t = P^{t-1} \exp(r_{e,j}^t)$$

で求まる。

スタイライズドトレーダー (4)

$$P_{e,j}^t = P^{t-1} \exp(r_{e,j}^t)$$

また、注文価格 $P_{o,j}^t$ は平均 $P_{e,j}^t$ 、標準偏差 P_σ の正規分布乱数で定める。ここで、 P_σ は全スタイライズドトレーダーに共通の定数である。注文の売り・買いの別は

$P_{e,j}^t > P_{o,j}^t$ なら 1 単位の売り、 $P_{e,j}^t < P_{o,j}^t$ なら 1 単位の買い

として定め、注文数量は常に 1 単位に固定する。なお、実際に注文を行う際、取引市場の最小ティックサイズ ΔP より小さい端数は、買い注文の場合は切り捨て、売り注文の場合は切り上げる。

スタイライズドトレーダー (5)

また、2市場下での実験においては、各スタイライズドトレーダーはどちらの市場に注文を行うかを決定しなくてはならない。この際の決定ルールは以下ようになる。

- 2つの市場の両方で自らの注文が成行注文となり、自らの注文に対応する最良価格(自らが買いなら売り、売りなら買い)が異なる場合には、より良い市場に注文を出す
- 片方の市場でのみ自らの注文が成行注文となる場合には、そちらの市場に注文を出す
- 両者ともに指値注文となる場合か、両者ともに成行注文でかつ最良価格も同じである場合には確率 $1/2$ で各市場を選択する
- 参考にした論文では各市場の出来高に応じて市場を選択していたが、今回は2市場に差異がないために $1/2$ とした

マーケットメイカー(1)

モデル中のマーケットメイカーは、現実のマーケットメイカーがスタイルズドトレーダーに比して高速・高頻度の売買を行っていることを考慮し、注文方法として各スタイルズドトレーダーが注文を行う合間、すなわち時刻 t と時刻 $t+1$ の間、時刻 $t+1$ と時刻 $t+2$ の間といったタイミングで買い・売りそれぞれに 1 単位ずつ指値注文を行うものとする。また、マーケットメイカーが注文を出す際に約定しなかった前回の買い・売り注文が残っていた場合には、それをキャンセルして新たな注文を出し直す。

マーケットメイカー(2)

マーケットメイカーは注文を行う際に、その時点で取引市場に出されている買い注文のうち最も高いもの（最良買い気配）と最も安いもの（最良売り気配）を参照し、それとマーケットメイカーに固有のスプレッド θ を用いて実際の注文価格を定める。時刻 t における最良買い気配を $P^{t,buy}$ 、最良売り気配を $P^{t,sell}$ と表すと、時刻 t と時刻 $t+1$ の間に出すマーケットメイカーの買い注文価格 $P_{o,m}^{t,buy}$ と売り注文価格 $P_{o,m}^{t,sell}$ は

$$P_{o,m}^{t,buy} = \frac{P^{t,buy} + P^{t,sell}}{2} - \frac{P_f \times \theta}{2}$$

$$P_{o,m}^{t,sell} = \frac{P^{t,buy} + P^{t,sell}}{2} + \frac{P_f \times \theta}{2}$$

のように決定される。また、スタライズドトレーダーと同様、注文時には取引市場の最小ティックサイズ ΔP より小さい端数は買い注文の場合は切り捨て、売り注文の場合は切り上げる。

マーケットメイカー (3)

また、市場 A・B が存在している場合、時刻 t における市場 A の最良気配を $P_A^{t,buy}$, $P_A^{t,sell}$, 市場 B の最良気配を $P_B^{t,buy}$, $P_B^{t,sell}$ とおくと、時刻 t と時刻 $t+1$ の間に出すマーケットメイカーの買い注文価格 $P_{o,m}^{t,buy}$ と売り注文価格 $P_{o,m}^{t,sell}$ は両市場で同一であり、

$$P_{o,m}^{t,buy} = \frac{P_A^{t,buy} + P_A^{t,sell} + P_B^{t,buy} + P_B^{t,sell}}{4} - \frac{P_f \times \theta}{2}$$

$$P_{o,m}^{t,buy} = \frac{P_A^{t,buy} + P_A^{t,sell} + P_B^{t,buy} + P_B^{t,sell}}{4} - + \frac{P_f \times \theta}{2}$$

のように表される.

裁定取引型 HFT

- 先に述べたような明確な裁定機会がある場合に即座に裁定取引を行うモデル
- 現実の HFT がマーケットメイカー以上の速度によって利益を得ていることを考慮し、時刻 t と時刻 $t+1$ の間に 2 回注文を出す。
- 具体的な注文のタイミングは、スタイライズドトレーダーが注文を行った直後およびマーケットメイカーが指値注文を行った直後。
- 成行注文による裁定取引以外は行わないので、注文が板に残ることはない

概要 (1)

実験は以下のモデルを 4 回ずつ行った.

- 1 市場, スタイライズドトレーダー (以下 ST とする) のみ
- 2 市場, ST のみ
- 1 市場, ST とマーケットメイカー (以下 MM とする)
- 2 市場, ST と MM
- 2 市場, ST, MM, 裁定型 HFT

ただし, 各々の実験 4 回のうち 2 回は板寄せ方式でスタイライズドトレーダーから 20000 期分の注文を集めることで最初の注文板を作成し, 2 回は注文板が存在しないところからはじめ, 最初の 20000 期経過した時点をも $t = 0$ とみなしている.

概要 (2)

シミュレーションを行い保存したデータは以下.

- 各市場の値動き
- 各市場の約定数に占める MM による注文の割合
- 各市場の約定数に占める裁定型 HFT による注文の割合
- 市場間での価格差の推移

なお、値動きに関しては 1000 期、2 市場間の価格差については 100 期の移動平均線を表示している。これは本実験における純粋な価格や価格差は変動が激しいために、折れ線グラフとして情報を得る上で不適當な形状になってしまっていることが多いためである。

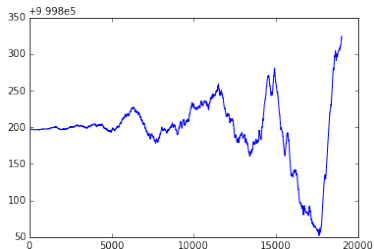
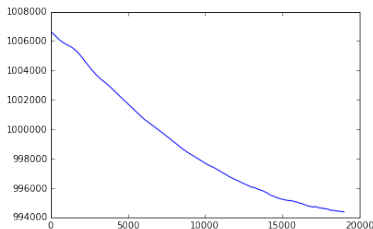
保存したデータ

CSV 形式で保存したがそこから Python 上に適切に復元できない。
もう一度シミュレーションを行う必要がありそう
平均 $25 \text{ 分} \times 5 \times 4 = 500 \text{ 分}$

全体として

- 参考にした同種のモデルを使用している論文の多くでは記されていないが、この人工市場モデルにおける価格変動の様子は注文板の初期状態によって大きく異なってくる。
- 初期状態での注文がまったく存在しない場合、継続した価格変化が生じやすくなる。
- 板寄せ直後を初期状態とした場合、価格はファンダメンタル価格を中心に振動し、徐々に振幅が増加してゆく。
- MM の存在は大幅な価格変動を防ぐ役割があるので、初期状態で注文が存在しない場合には MM が関わる約定の割合が高くなる。
- 一方、十分な量の注文を集めて板寄せを行った場合には実験期間中においてスプレッドは十分小さく、MM が最良気配を提示することはほとんどない。

初期状態による違い



上記の値動きはどちらも「1 市場, ST のみ」でのシミュレーションの実行結果である。

左がオークション方式のまま注文を蓄積しているのに対し、右は板寄せ方式で注文を貯めている。

板のスプレッドが大きく異なっている（板寄せ方式の方が狭い）点や、テクニカル分析に用いる n 期前の価格が存在しているかどうか（オークションによる蓄積の場合 $t = 0$ 時点で既に価格変化のトレンドが存在しているが、板寄せ方式ではそれが無い）という違いによりこうした値動きの違いが生じていると考えられる。

1 市場と 2 市場での違い

- 1 市場の場合に比べ、2 市場のモデルでは価格変動が小さかった。2 市場のうち成行注文になる方を選択する、というメカニズムが急激な価格変動（を引き起こす可能性のある指値注文）を抑えているのかもしれない。
- 価格変動の大きさと連動して、2 市場の場合ではマーケットメイカーが関わった取引の割合が小さくなった。
- 今回のモデルでは 2 種の初期状態に関わらず裁定取引型 HFT が関わる取引の割合が非常に少なく、2 市場の場合でも裁定機会はほとんど生じていなかったことがわかる。