

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа № 3.1.3  
**Измерение магнитного поля Земли**

Климова Екатерина  
Группа Б01-108

Долгопрудный, 2022 г.

**Цель работы:** исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

**В работе используются:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

## 1 Аннотация

В работе определяются вертикальная и горизонтальная составляющие магнитного поля Земли, а также магнитное наклонение. Сделать это предлагается при помощи совершающих крутильные колебания маятников, составленных из нескольких неодимовых магнитных шариков.

## 2 Теоретические сведения

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент  $\mathbf{m}$  тонкого витка площадью  $S$  с током  $I$  равен (в системе СИ)

$$\mathbf{m} = IS,$$

где  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  — вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к площадке. Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь называют *элементарным*, или *точечным*.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right).$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил

$$\mathfrak{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}].$$

При этом потенциальная энергия, которой обладает диполь с постоянным  $\mathbf{m}$ , равна

$$W = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

Когда диполь ориентирован вдоль внешнего поля, то есть вектор его магнитного момента параллелен вектору магнитной индукции, он находится в состоянии *равновесия* ( $\mathbf{M} = 0$ ). При этом *устойчивым* будет только состояние, в котором диполь сонаправлен с полем, поскольку так его потенциальная энергия достигает минимума.

В неоднородном магнитном поле на диполь, помимо момента сил, действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Таким образом, *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведет к уменьшению энергии диполя.

Можно рассчитать силу взаимодействия двух магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  в рамках модели точечных диполей. В частном случае, когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой:  $\mathbf{m}_{1,2} \parallel \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор между ними, магниты взаимодействуют с силой

$$F_{12} = -\frac{6\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4}.$$

Здесь магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены, и отталкиваются, если направлены противоположно.

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой (радиус-вектору), то сила их взаимодействия окажется в два раза меньше и будет иметь противоположный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4}$$

(диполи отталкиваются, если их магнитные моменты сонаправлены, и притягиваются, если направлены противоположно).

### 3 Экспериментальная установка

Для проведения эксперимента важно, что а) вещество, из которого изготовлены магниты, является *магнитожестким* материалом; б) шары намагничены однородно.

Магнитное поле однородного намагниченного шара радиусом  $R$  может быть вычислено точно. На расстояниях  $r \geq R$  от центра шара оно совпадает с полем *точечного* магнитного диполя, расположенного в центре, магнитный момент  $\mathbf{m}$  которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно. Нетрудно получить, что при  $r < R$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi R^3}$$

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную *намагниченность*  $\mathbf{M}$ . По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородного намагниченного шара

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}V,$$

где  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  — объём магнита. Величину  $B_r = \mu_0 M$  называют остаточной индукцией материала.

Из сказанного выше нетрудно видеть, что индукция  $B_p$  на полюсах однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара  $B_p = B_0$ . Величина  $B_p$  связана с остаточной индукцией  $B_r$  соотношением

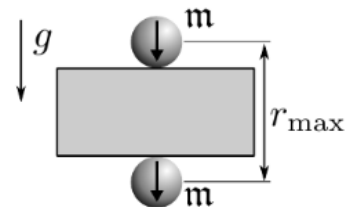
$$B_p = B_0 = \frac{2}{3}B_r$$

### 3.1 Определение магнитного момента магнитных шариков

**Метод А.** Величину магнитного момента  $m$  двух одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу  $m$  и определив максимальное расстояние  $r_{max}$ , на котором они еще удерживают друг друга в поле тяжести. При максимальном расстоянии сила тяжести шариков  $mg$  равна силе их магнитного притяжения.

Когда векторы двух магнитных моментов ориентированы вертикально, имеем

$$m = \sqrt{\frac{2\pi m g r_{max}^4}{3\mu_0}}$$



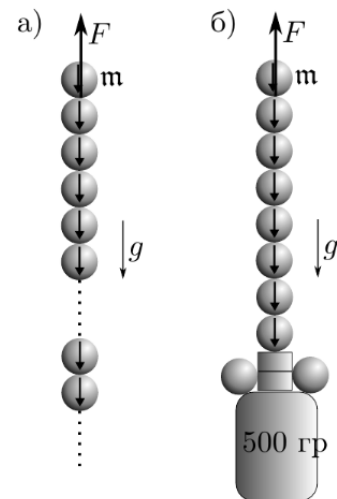
По величине  $m$  можно рассчитать величину индукции  $B$  вблизи любой точки на поверхности шара радиуса  $R$ . Максимальная величина индукции наблюдается на полюсах.

**Метод Б.** Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Сила сцепления максимальна, если шары соединяются своими противоположными полюсами (магнитные моменты сонаправлены).

Максимальную силу сцепления можно определить по весу магнитной цепочки, которую способен удержать самый верхний магнитный шарик. Если цепь состоит из одинаковых магнитных шариков, то при определенной длине она отрывается от верхнего шарика. При этом, учитывая, что сила притяжения убывает как  $F \propto 1/r^4$ , где  $r$  — расстояние между центрами шаров, для расчета прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия верхнего шара с 3–4 ближайшими соседями.

Сила сцепления двух одинаковых шаров с радиусами  $R$  с магнитными моментами  $m$  равна

$$F_0 = \frac{3\mu_0 m^2}{32\pi R^4}$$



Тогда минимальный вес цепочки, при котором она оторвётся от верхнего шарика,

равен

$$F = F_0 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \approx 1,08 F_0.$$

Отметим, что не обязательно составлять цепочку только из одинаковых шариков: на расстояниях, превышающих 20–30 диаметров шариков, можно подцепить любой груз, притягиваемый магнитом, на результат это не повлияет, в чем несложно убедиться экспериментально.

### 3.2 Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитная стрелка образована сцепленными друг с другом  $n$  намагниченными шариками. С помощью  $\Lambda$ -образного подвеса стрелка подвешена в горизонтальном положении. Магнитные моменты всех шариков направлены в одну сторону вдоль оси стрелки. Под действием механического момента сил, действующего на стрелку со стороны поля Земли, стрелка стремится повернуться по горизонтальной составляющей магнитного поля Земли в направлении Юг–Север.

При отклонении стрелки на малый угол  $\theta$  ( $\sin \theta \approx \theta$ ) от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стрелки. Тогда уравнение крутильных колебаний:

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{m}_n B_{||} \sin \theta$$

$$J_n \ddot{\theta} + \mathfrak{m}_n B_{||} \theta = 0$$

Отсюда находим период малых колебаний:

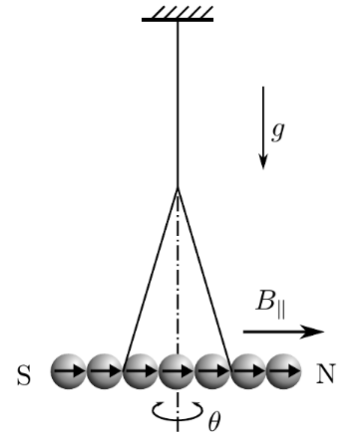
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_n}{\mathfrak{m}_n B_{||}}}.$$

Момент инерции  $J_n$  стрелки из  $n$  шариков:

$$J_n = \frac{1}{3} n^3 m R^2.$$

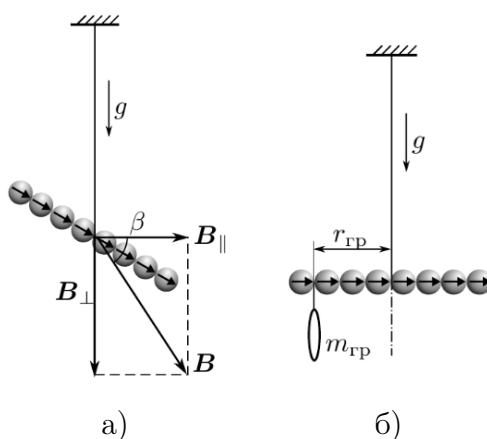
Тогда период колебаний маятника пропорционален числу шаров  $n$ , составляющих стрелку:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m R^2}{3 \mathfrak{m} B_{||}}} \cdot n.$$



### 3.3 Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение

В этом случае стрелка, составленная из четного числа одинаковых шаров и подвешенная за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым углом к горизонту. Это связано с тем, что вектор индукции магнитного поля Земли не горизонтален, а образует с горизонтом некоторый угол  $\beta$ , зависящий от географической широты  $\phi$  места, где проводится опыт. Величина угла  $\beta$  называется *магнитным наклонением*.



Избавиться от наклона можно, если выровнять стрелку горизонтально с помощью небольшого дополнительного грузика. В этом случае момент силы тяжести грузика относительно точки подвеса будет равен моменту сил, действующих на стрелку со стороны вертикальной составляющей магнитного поля Земли. Если масса груза равна  $m_{\text{гр}}$ , плечо силы тяжести  $r_{\text{гр}}$ , а полный магнитный момент стрелки  $\mathfrak{m}_n = nm$ , то в равновесии

$$\mathfrak{M} = m_{\text{гр}}gr_{\text{гр}} = nmB_{\perp}.$$

## 4 Ход работы

### 4.1 Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

Для начала определим диаметр шарика при помощи штангенциркуля:  $d = 0.6 \pm 0.001$  см, взвесим шарик:  $m = 0.842 \pm 0.001$  г, с помощью магнетометра измерим индукцию поля на полюсах шарика:  $B_{p1} = 231 \pm 0.5$  мТл. Для удобства занесем результаты подготовительных измерений в таблицу:

$d$ , см	$m$ , г	$B_{p1}$ , мТл
$0.6 \pm 0.001$	$0.842 \pm 0.001$	$231 \pm 0.5$

**Таблица 1.** Подготовительные измерения

Прокладывая бруски и листы бумаги между двумя шариками, определим максимальное расстояние  $r_{max} = 1.78 \pm 0.05$  см, на котором шарики могут удерживать друг друга в поле тяжести Земли. Рассчитаем величину магнитного момента шарика:  $\mathbf{m}_1 = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} = (3.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}$  Дж/Тл. Погрешность можно рассчитать по формуле:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{m}_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma r_{max}}{r_{max}}\right)^2} \approx 6\%.$$

Теперь рассчитаем магнитный момент вторым способом – при помощи цепочки из шариков. Минимальная масса составленной системы, при которой она отрывается от верхнего шарика, получилась равна  $m_{min} = 212.4 \pm 1$  г. Тогда вес  $F = m_{min}g = 1.08F_0 = 1.08 \cdot \frac{3\mathbf{m}_2^2}{8r^4}$ , откуда  $\mathbf{m}_2 = \sqrt{\frac{8F_0r^4}{3}} = \sqrt{\frac{8m_{min}gr^4}{1.08 \cdot 3}} = (6.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}$  Дж/Тл. Погрешность рассчитывается по формуле:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{m}_2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma m_{min}}{m_{min}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \approx 2\%.$$

Для определения наиболее точного метода измерения магнитного момента рассчитаем для каждого из них остаточную индукцию магнитного поля. Перед этим рассчитаем намагниченность (в единицах СГС):

$$M_1 = \frac{3\mathbf{m}_1}{4\pi r^3} \approx 336 \pm 17;$$

$$\mathcal{E}_{M_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma \mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \approx 5\%;$$

$$M_2 = \frac{3\mathbf{m}_2}{4\pi r^3} \approx 574 \pm 11;$$

$$\mathcal{E}_{M_2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma \mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \approx 2\%.$$

Теперь рассчитаем остаточную индукцию (в единицах СГС):

$$B_{r1} = 4\pi M_1 = 4222 \pm 211;$$

$$\mathcal{E}_{B_{r1}} = \mathcal{E}_{M_1} \approx 5\%;$$

$$B_{r2} = 4\pi M_2 = 7213 \pm 144;$$

$$\mathcal{E}_{B_{r2}} = \mathcal{E}_{M_2} \approx 2\%.$$

Табличное значение остаточной индукции для материала NdFeB  $B_r = 10 - 12$  ед. СГС, из чего можно сделать вывод, что второй способ измерения величины магнитного момента был более точным. Тем не менее, полученное в ходе эксперимента значение остаточной индукции достаточно сильно отличается от теоретического, что можно объяснить высокой неточностью измерений.

## 4.2 Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Соберем крутильный маятник из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя  $\Lambda$ -образный подвес, установим получившуюся магнитную стрелку в горизонтальное положение, а затем возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и оценим их период. Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества магнитных шариков, составляющих стрелку. Результаты занесем в таблицу и построим график зависимости  $T(n)$ :

$n_{\text{шар}}$	$n_{\text{колеб}}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$\varepsilon_T, \%$
11	6	23.6	3.93	2
9	6	19.7	3.28	2
8	8	23.3	2.91	2
7	9	22.7	2.52	2
6	8	17.1	2.13	2
5	8	14.2	1.78	2
4	10	14.4	1.44	2

Таблица 2. Зависимость периода от количества шариков

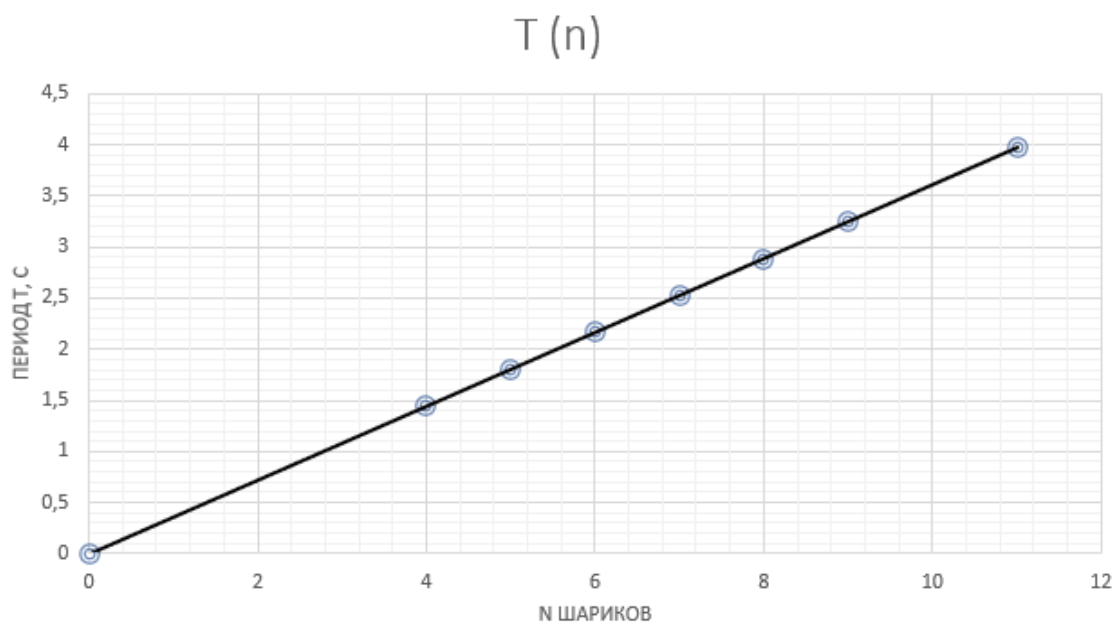


График зависимости  $T(n)$

По углу наклона графика можно определить значение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли  $B_{||} = \frac{4\pi^2 m r^2}{3mk^2} = (1.18 \pm 0.02) \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ .

## 4.3 Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

Изготовим магнитную стрелку из  $n$  шариков и подвесим ее за середину с помощью нити на штативе. Определим момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную стрелку, для чего с помощью



кусочков проволоки и грузов уравновесим стрелку в соответствующем положении. Проведем измерения момента сил для различных количеств шариков:

$n_{\text{шар}}$	$\mathfrak{M}$ , мкН·м	$\varepsilon_M$ , %
12	418	5
10	314	5
8	209	5
6	191	5
4	150	5

**Таблица 3.** Зависимость момента сил от количества шариков

По полученным данным построим график зависимости  $\mathfrak{M}(n)$ :

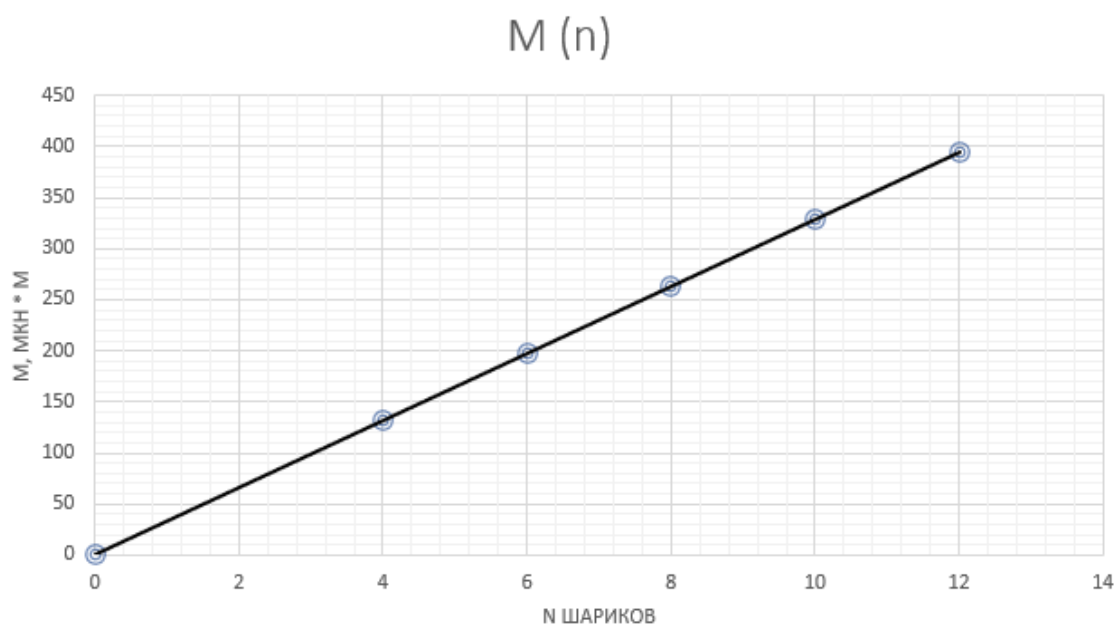


График зависимости  $\mathfrak{M}(n)$

Данные плохо легли на график, что может быть обусловлено тем, что набор возможных грузов дискретен, следовательно, момент сил не может быть подобран точно. По наклону прямой можно вычислить значение вертикальной составляющей магнитного поля Земли:  $B_{\perp} = \frac{k}{m} = (3.30 \pm 0.44) \cdot 10^{-5}$  Тл. Теперь мы можем вычислить значение магнитного наклона ( $\operatorname{tg} \beta = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}}$ , откуда  $\beta \approx 70.32^\circ$ , в то время как теоретическое значение — примерно  $72^\circ$ ) и суммарное магнитное поле Земли:  $B = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2} = (3.5 \pm 0.44) \cdot 10^{-5}$  Тл. При этом табличное значение магнитного поля Земли в Московском регионе — примерно  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

## 5 Вывод

В данной работе были экспериментально определены значения магнитного поля Земли и магнитного наклона при помощи магнитных шариков, составлявших магнитную стрелку. Итоговые значения получились достаточно близки к табличным.