

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа № 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Климова Екатерина
Группа Б01-108

Долгопрудный, 2022 г.

Цель работы: изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

В работе используются: персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП4107; функциональный генератор WaveStation 2012; соединительные кабели.

1 Аннотация

В работе изучаются спектры периодических электрических сигналов различной формы (последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазо-модулированных гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа, и сравниваются с рассчитанными теоретически.

2 Теоретические сведения

Сколько угодно сложный электрический сигнал $f(t)$ может быть разложен на более простые сигналы. Широко используется разложение сигнала $f(t)$ на совокупность гармонических сигналов различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется амплитудной спектральной характеристикой $f(t)$. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье.

Зная спектральный состав $F(\omega)$ периодической последовательности некоторого импульса $f(t)$, мы можем осуществить обратное преобразование Фурье: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с $f(t)$ определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

2.1 Спектральный анализ электрических сигналов

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T – период повторения. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь $a_0/2 = A_0/2$ – постоянная составляющая (среднее значение) функции $f(t)$; a_n и b_n – амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал четен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, так как все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечетной относительно $t = 0$ функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n n -й гармоники выражаются через a_n и b_n следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \dots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ($0 \cdot \Omega_1$).

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой Эйлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Введём комплексные амплитуды \tilde{A}_n и \tilde{A}_{-n}

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа $-n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n умножим левую и правую части на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

2.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T – период повторения импульсов.

Среднее значение: $\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Амплитуду n -й гармоники можно найти по формуле

$$A_n = \frac{2}{\pi n} V_0 \sin(Sn\pi),$$

где S – скважность – отношение длительности импульса к его периоду:

$$S = \frac{\tau}{T}$$

Спектр $F(\nu)$ последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (на рис. 1 представлена сама последовательность). Амплитуды гармоник A_n меняются по закону $(\sin x)/x$. На рис. 2 изображён спектр для случая, когда T кратно τ . Назовём шириной спектра $\Delta\nu$ (или $\Delta\omega$) расстояние от главного максимума ($\nu = 0$) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при $\Omega_1 = 2\pi/\tau$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем *соотношения неопределенностей* в квантовой механике.

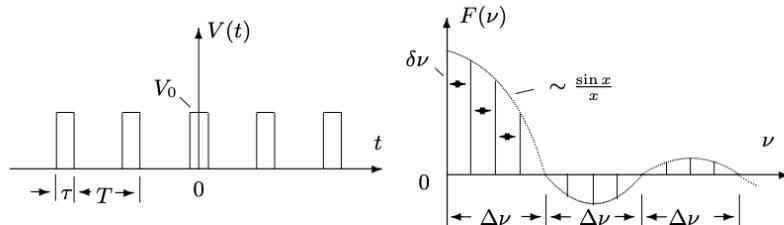


Рис. 1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Рис. 2 Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

2.3 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Амплитуда n -й гармоники равна

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Такое спектральное распределение $F(\omega)$ для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлено на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. 2 и 4), мы видим, что они практически аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

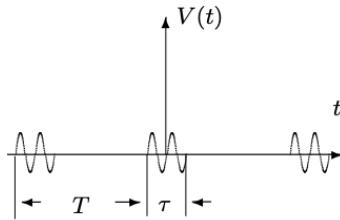


Рис. 3 Периодическая последовательность цугов

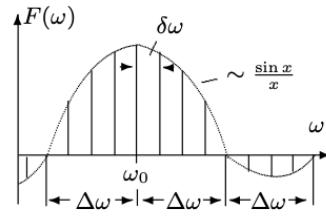


Рис. 4 Спектр периодической последовательности цугов

2.4 Амплитудно-модулированные колебания.

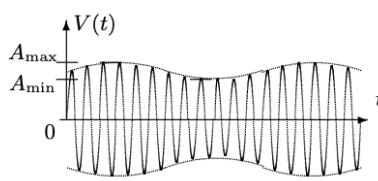


Рис. 5 Гармонические колебания, моделированные по амплитуде

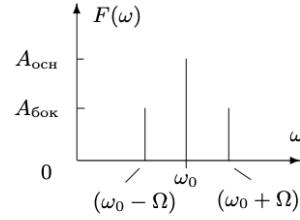


Рис. 6 Спектр колебаний, моделюемых по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой циклической частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

Коэффициент m называют *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющие (рис. 6). Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{\text{осн}} = A_0$ – первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ – второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$

3 Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рисунке:

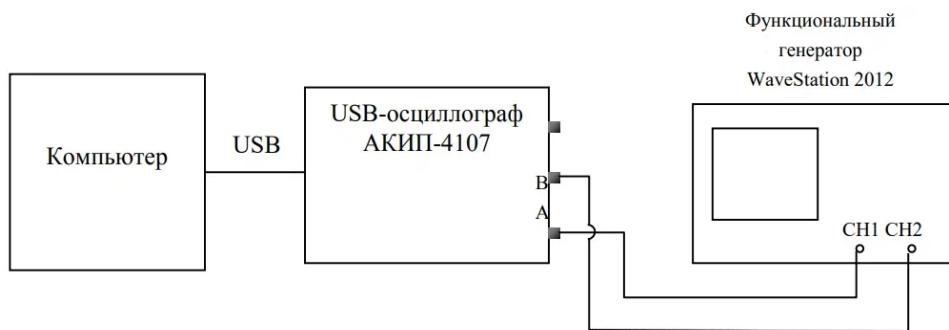


Рис. 7 Схема экспериментальной установки

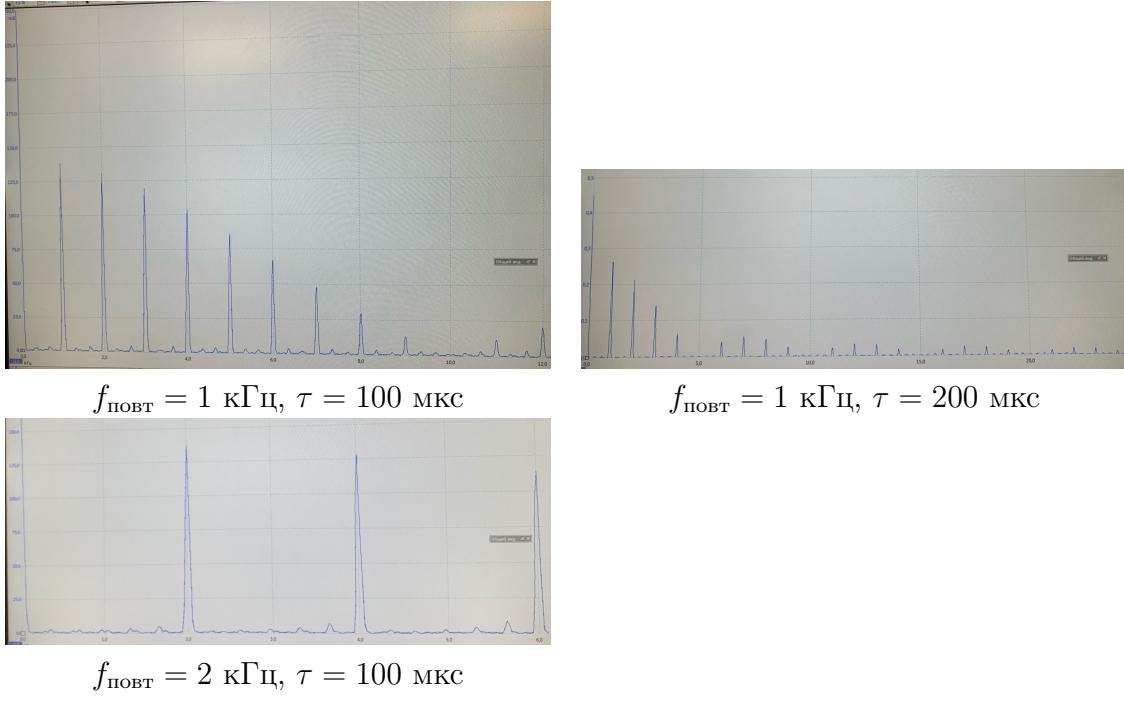
Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – CH1 и CH2. Сигнал с канала CH1 подается на вход A, а сигнал с канала CH2 – на вход B USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов.

4 Ход работы

Соберем схему и подготовим приборы к работе, следя за техническому описанию.

4.1 А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

На генераторе установим частоту повторения импульсов $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и длительность импульса $\tau = 100 \text{ мкс}$. Проанализируем, как изменится наблюдаемый спектр при увеличении τ до 200 мкс и неизменной частоте повторения $f_{\text{повт}}$; при увеличении частоты повторения до 2 кГц и неизменной длительности импульса τ :



Из полученных изображений видно, что при увеличении τ вдвое $\Delta\nu$ уменьшается в два раза, а при увеличении $f_{\text{повт}}$ увеличивается расстояние между пиками $\delta\nu$. Проведем измерения зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от длительности импульса τ при увеличении τ от 40 до 200 мкс и на основе полученных данных построим график зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$.

$\tau, \text{мкс}$	$1/\tau, \text{мкс}^{-1} \cdot 10^2$	$\Delta\nu, \text{кГц} \cdot 10^{-1}$
200	0.50	0.50
180	0.56	0.55
160	0.63	0.65
140	0.71	0.70
120	0.83	0.80
100	1.00	1.00
80	1.25	1.20
60	1.67	1.70
40	2.50	2.50

Таблица 1. Исследование зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

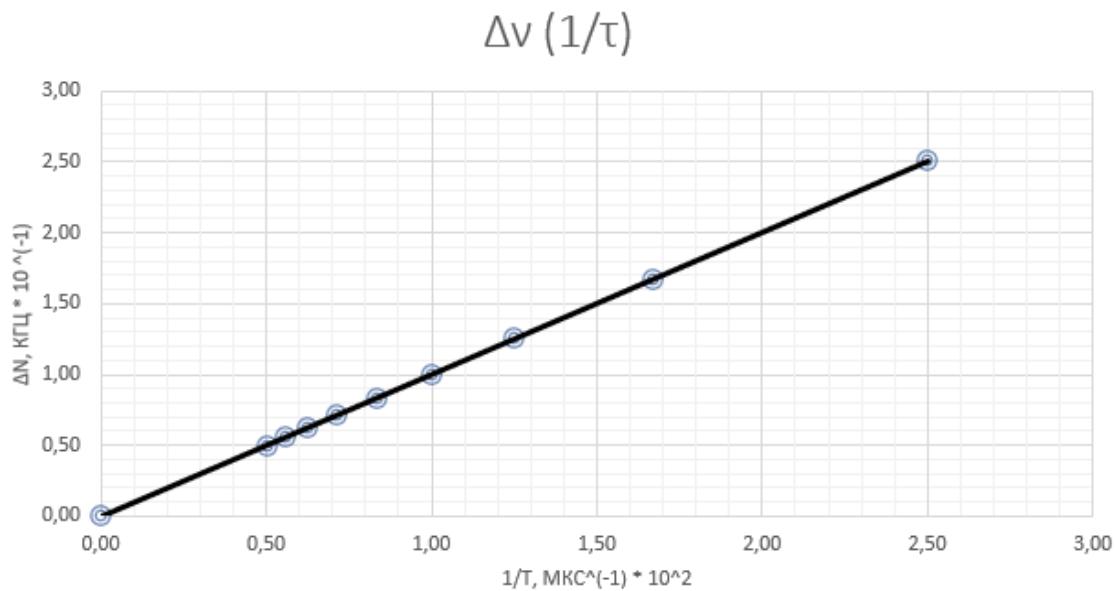


График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

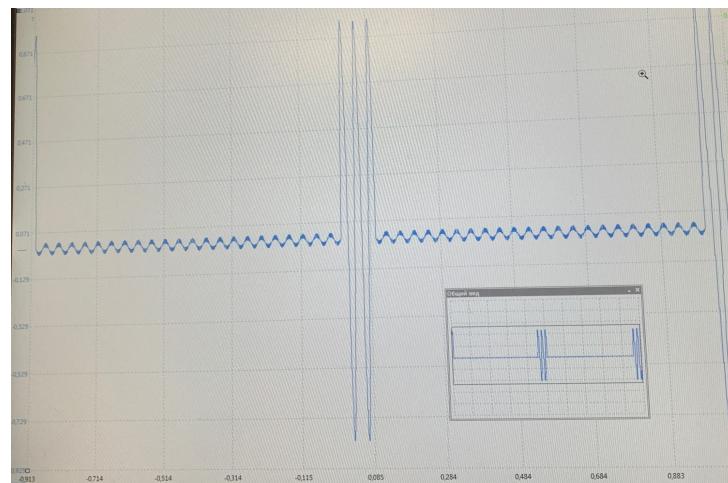
Коэффициент наклона полученного графика $k = 1.0046 = \Delta\nu \cdot \tau$, что подтверждает соотношение неопределенностей. Теперь зафиксируем $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и $\tau = 50 \text{ мкс}$. Для этих параметров посмотрим амплитуду n -й гармоники a_n и частоту f_n . Амплитуды сравним с рассчитанными теоретически.

n гармоники	1	2	3	4	5
$f, \text{кГц}$	29,4	49,4	69,6	89,8	110
$a_n, \text{мВ}$	13,9	8,9	7,5	5,2	4,4
$a_{n,\text{теория}}, \text{мВ}$	11,6	10,3	8,4	6,1	3,6

Таблица 2. Исследование амплитуд и частот гармоник.

Видим, что амплитуды довольно неплохо сходятся с теорией, что подтверждает приведенную выше формулу.

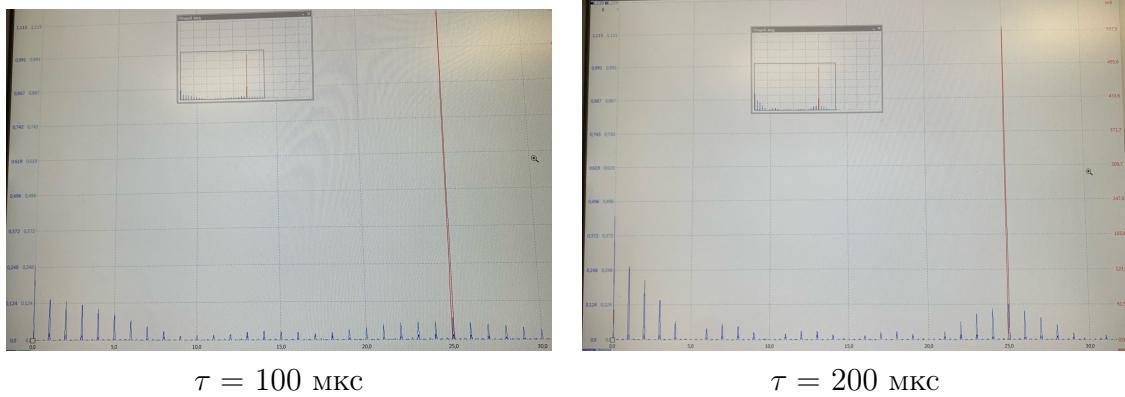
4.2 Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний



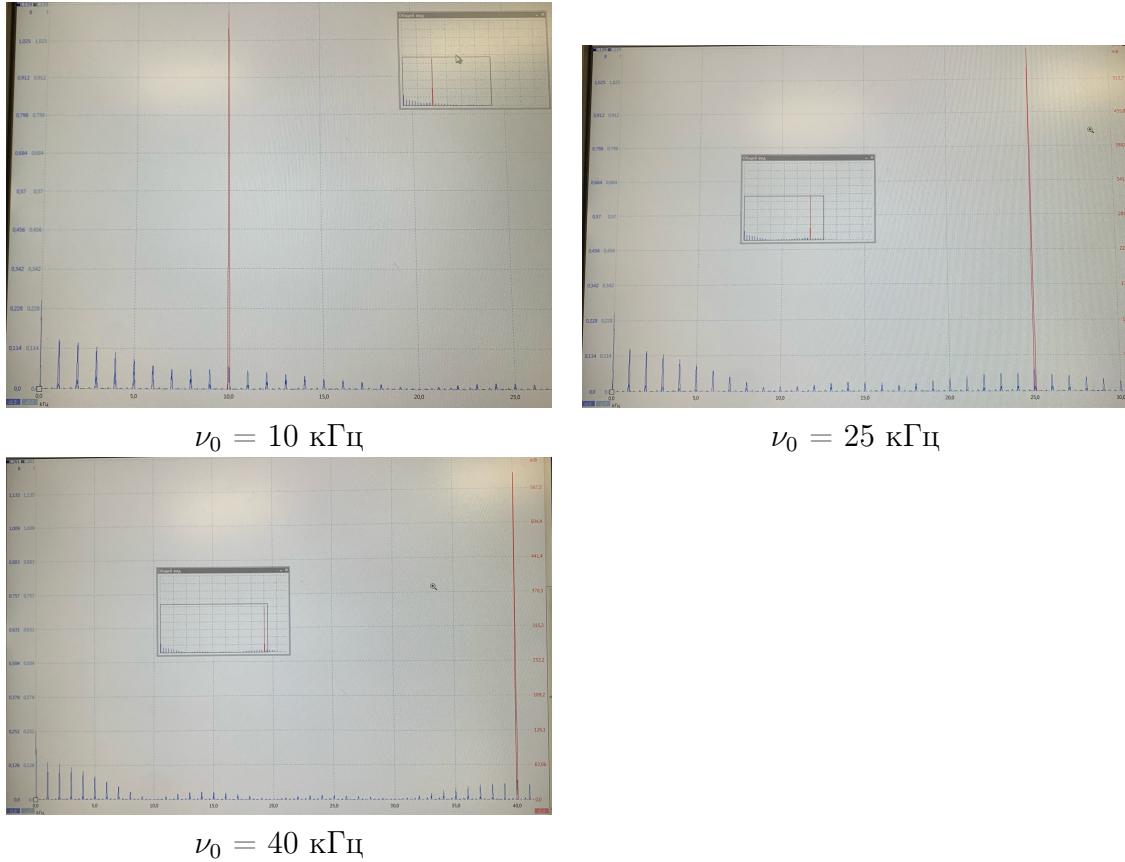
Периодическая последовательность цугов

В этой части исследуется зависимость расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов. Установим частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц и проанализируем, как изменяется вид спектра цугов:

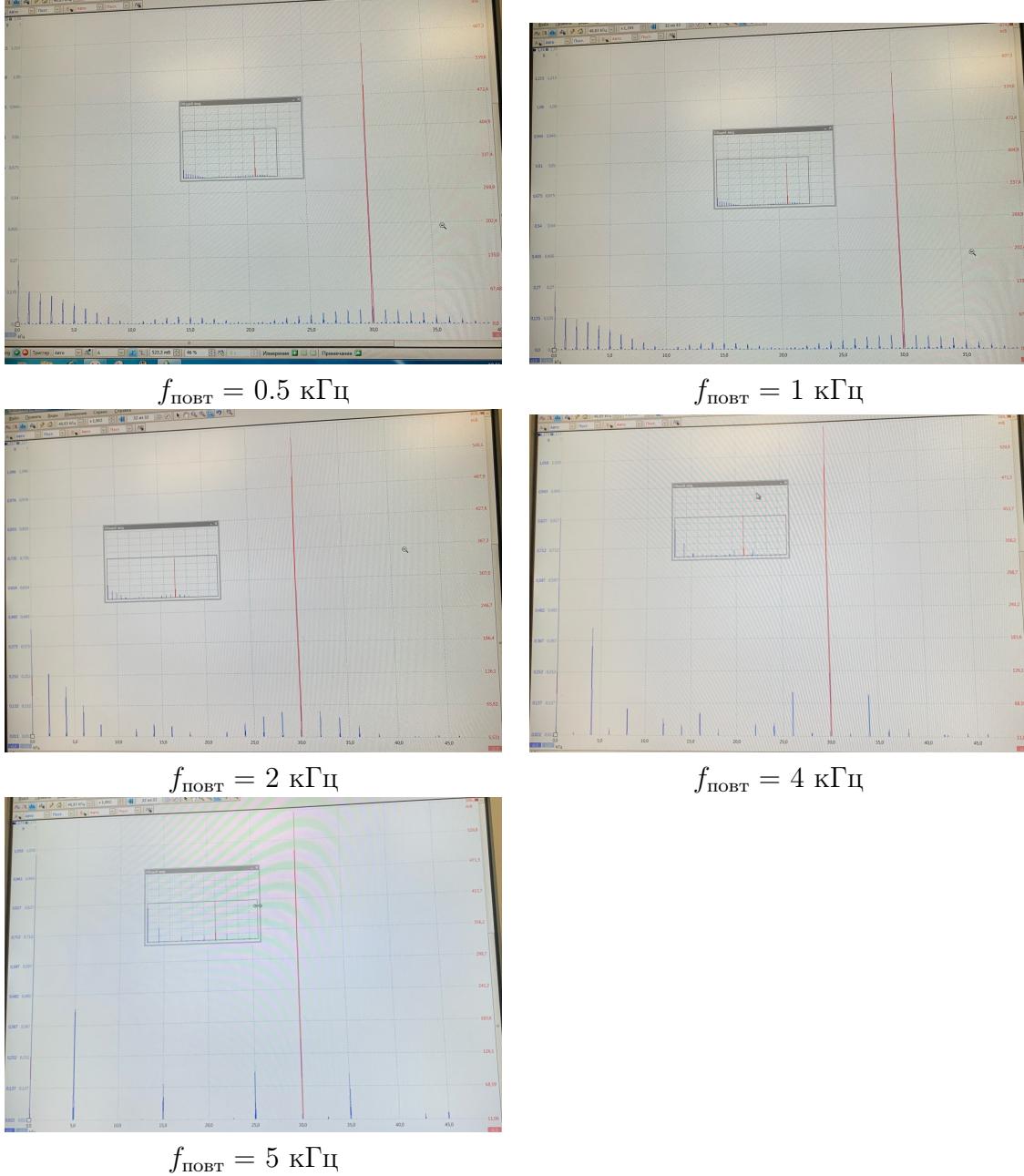
- а) при частоте повторения импульсов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и длительности импульса τ , изменяющейся от 100 мкс до 200 мкс, видно, что увеличивается амплитуда и ширина пиков становится меньше в два раза:



- б) при длительности импульса $\tau = 100$ мкс и изменении частоты несущей $\nu_0 = 10, 25, 40$ кГц смещается пик без изменения расстояния между спектральными компонентами:



Теперь зафиксируем частоту несущей $\nu_0 = 30$ кГц и длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Для разных частот повторения импульсов ($f_{\text{повт}} = 0.5, 1, 2, 4, 5$ кГц) будем определять расстояние между соседними спектральными компонентами $\delta\nu$:



Занесем результаты в таблицу, а также построим график полученной зависимости:

$f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$	$\delta\nu, \text{ кГц}$
0.5	0.5
1.0	1.0
2.0	2.0
4.0	4.0
5.0	5.0

Таблица 3. Исследование зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

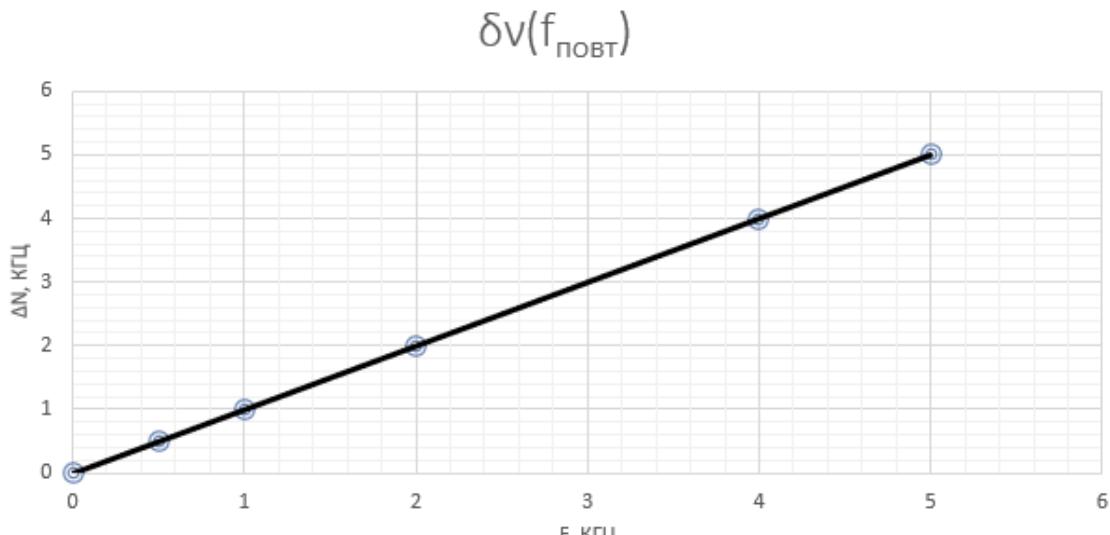


График зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Погрешность результатов определяется погрешностью генератора – 0.5 Гц. Таким образом, получаем

$$\frac{\delta\nu, \text{кГц}}{f_{\text{повт}}} = 1 \pm 0.1\%,$$

что согласуется с теорией.

Сравнивая спектры прямоугольных импульсов и цугов при $\tau = 100$ мкс и $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, можно заметить существенную разницу в положении пиков и величине амплитуды.

4.3 В. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

В этой части исследуем зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции, который определяется с помощью осциллографа. Для этого выведем на экран картину амплитудно-модулированного сигнала со следующими параметрами: частота несущей $\nu_0 = 25$ кГц, частота модуляции $f_{\text{mod}} = 1$ кГц. Меняя двойную амплитуду сигнала от 0.2 до 2 В, измерим для каждого значения максимальную A_{max} и минимальную A_{min} амплитуды сигнала на экране осциллографа и рассчитаем соответствующие значения коэффициента модуляции t :

$2A, \text{ В}$	$A_{max}, \text{ мВ}$	$A_{min}, \text{ мВ}$	t
0.2	548.6	450.2	0.099
0.5	617.5	396.1	0.218
0.8	681.4	287.8	0.406
1.1	754.4	223.9	0.542
1.5	858.5	125.5	0.745

Таблица 4. Исследование зависимости t от A_{max} и A_{min}

Построим график отношения $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ в зависимости от m и определим его угловой коэффициент наклона.

$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	$k = a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	m
16	322	0.05	0.10
47	322	0.15	0.30
75	322	0.23	0.50
107	322	0.33	0.70
139	322	0.43	0.90

Таблица 5. Исследование зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

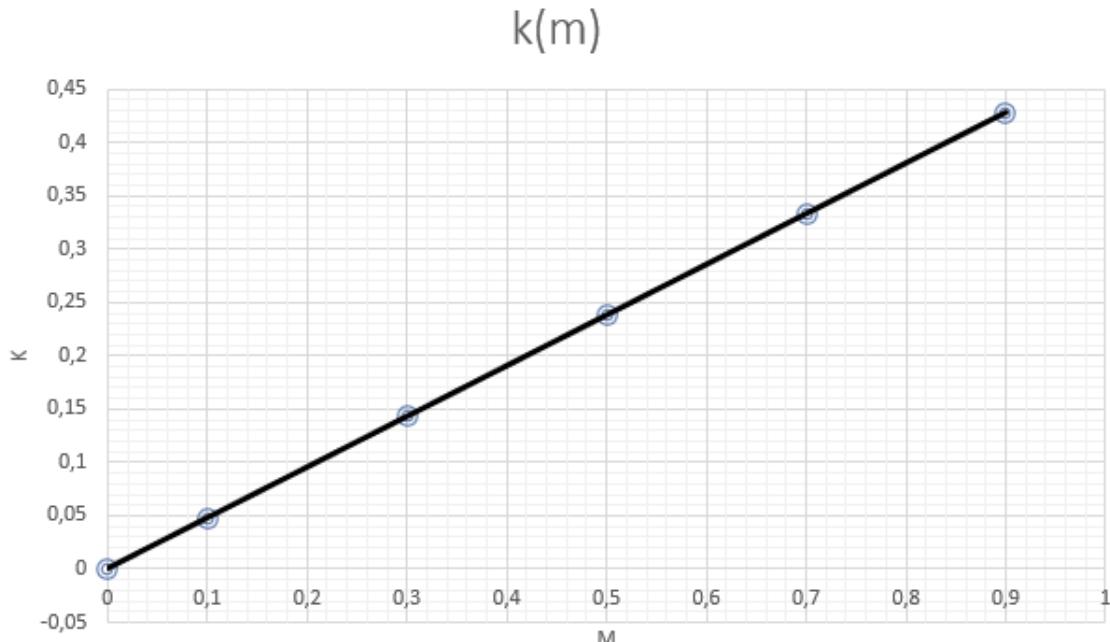


График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} (m)$

Из графика получаем коэффициент наклона, равный 0.476 ± 0.015 . По формуле $a_{\text{бок}} = a_{\text{осн}}m/2$, откуда $k_{\text{теор}} = 0.5$, что согласуется с экспериментальным значением, полученным в данной работе.

5 Вывод

В данной работе мы провели исследование нескольких типов периодических сигналов: исследовали их разложение в гармонический спектр, получили картины спектров, а также проверили справедливость нескольких соотношений. Так, мы убедились в верности соотношения неопределенностей, исследовали зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повторения цугов. В заключительной части работы коэффициенты, полученные в результате исследования зависимости отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции в пределах погрешности совпали с рассчитанными теоретически.