

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа № 3.2.2  
**Резонанс напряжений в последовательном контуре**

Климова Екатерина  
Группа Б01-108

Долгопрудный, 2022 г.

**Цель работы:** исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой емкостью, получение амплитудно- и фазово-частотных характеристик, определение основных параметров контура.

**В работе используются:** генератор сигналов; источник напряжения, нагрузкой которого является последовательный колебательный контур с переменной емкостью; двухканальный осциллограф; цифровые вольтметры.

## 1 Аннотация

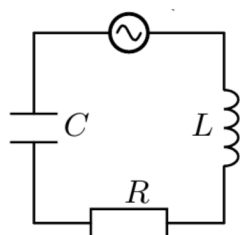
В данной работе проводится исследование колебаний напряжения в последовательном колебательном контуре под воздействием внешней синусоидальной ЭДС. Проводится получение АЧХ и ФЧХ контура, при помощи которых определяются добротность и другие характеристики колебательного контура.

## 2 Теоретические сведения

### 2.1 Вынужденные колебания

Рассмотрим процессы, протекающие в  $RLC$ -контуре, подключенном к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Тогда для напряжения в конденсаторе получим уравнение:

$$\ddot{U}_c + 2\gamma\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = \omega_0^2 \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$



**Рис. 1.** Последовательный контур с внешней ЭДС

решение которого будет состоять из общего решения однородного дифференциального уравнения и какого-либо частного решения данного уравнения с правой частью. Для нахождения этого частного решения воспользуемся **методом комплексных амплитуд**. То есть пусть некоторая комплексная функция  $f(t)$  является решением линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции  $\operatorname{Re} f(t)$  является решением того же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть  $\operatorname{Im} f(t)$  — решением уравнения с мнимой правой частью. Тогда уравнение (1) станет выглядеть так:

$$\ddot{U}_c + 2\gamma\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = \omega_0^2 \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 e^{i\varphi}$  называется **комплексной амплитудой**.

Решив уравнение (2), получим комплексное выражение для напряжения на конденсаторе, вещественная часть которого и является решением исходного уравнения. Комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на сопротивлении и индуктивности:

$$U_{C0} = \frac{\varepsilon_0}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}), \quad (3)$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \quad U_{R0} = \frac{R\varepsilon_0}{Z}, \quad U_{L0} = i\omega L \frac{\varepsilon_0}{Z}. \quad (4)$$

Определим величину  $Z$  — **импеданс**, или комплексное сопротивление, — характеристику колебательного контура на заданной частоте:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

*Активным* сопротивлением называется действительная часть  $Z$ , *реактивным* — мнимая:  $Im Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ . Импедансы реальных конденсаторов и катушек содержат, кроме мнимой части, также и действительную часть. Действительная часть импеданса определяется необратимыми потерями энергии, которые могут быть связаны как с омическим сопротивлением проводников, так и с другими причинами: с утечками и диэлектрическими потерями в конденсаторах, с токами перемагничивания в катушках. Потери в катушках самоиндукции и конденсаторах зависят как от частоты, так и от амплитуды проходящего через них тока. Импедансы контура и его отдельных элементов могут быть представлены в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi}, \quad (5)$$

где  $Z_0$  — модуль комплексного числа,  $\psi = \arg Z$  — его аргумент. Для импеданса рассматриваемого последовательного контура находим:

$$Z_0 = \sqrt{(Re Z)^2 + (Im Z)^2} = \frac{R}{\cos \psi_I}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \psi_I = \frac{Im Z}{Re Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7)$$

Так, действительная часть тока в контуре:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \psi_I \cos(\omega t + \varphi_0 - \psi_I). \quad (8)$$

Как видно из (8), угол  $\psi_I$ , определяемый отношением мнимой и действительной частей импеданса, представляет собой сдвиг фаз между напряжением на последовательном контуре и током в нем, причем положительные значения этого угла соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные — опережению. В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка, сдвиг фазы тока лежит в пределах  $-\pi/2 < \psi_I < \pi/2$ . От этого угла также зависит амплитуда силы тока.

## 2.2 Векторные диаграммы

Решения, полученные методом комплексных амплитуд, допускают простую геометрическую интерпретацию. Комплексное число, например, напряжение  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ ,

представляется на комплексной плоскости вектором, длина которого равна  $\varepsilon_0$ , а угол, составляемый этим вектором с вещественной осью, равен  $(\omega t + \varphi_0)$  — фазе напряжения. Вектор напряжения вращается со скоростью  $\omega$  против часовой стрелки. Удобно перейти к системе координат, которая сама вращается с такой угловой скоростью. В этой системе вектор  $\varepsilon$  будет представлен покоящимся вектором  $\varepsilon_0 e^{i\varphi}$ , а векторы  $\mathbf{I}_0$ ,  $\mathbf{U}_{C0}$ ,  $\mathbf{U}_{L0}$ ,  $\mathbf{U}_{R0}$  тоже будут неподвижны, но окажутся сдвинутыми по углу относительно вектора  $\varphi_0$ . Вектор  $\mathbf{I}_0$ , как показано выше, сдвинут от вектора  $\varphi_0$  на угол  $\psi_I$ . Построенная таким образом диаграмма называется *векторной*.

## 2.3 Резонанс напряжений в последовательном контуре

Запишем вещественные части решений уравнений (3)-(4):

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = I_\omega \cos(\omega t - \psi_I), \quad I_\omega = \frac{\varepsilon_0}{Z_0}, \quad (9)$$

$$Z_0 = R \sqrt{1 + \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}, \quad \psi_I = \arctg \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right], \quad (10)$$

$$U_C(t) = U_{C\omega} \cos(\omega t - \psi_C), \quad U_{C\omega} = \varepsilon_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \psi_C = \psi_I + \pi/2, \quad (11)$$

$$U_L(t) = U_{L\omega} \cos(\omega t - \psi_L), \quad U_{L\omega} = \varepsilon_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \psi_L = \psi_I - \pi/2. \quad (12)$$

Анализ полученных формул (9)-(12) позволяет сделать следующие выводы:

1. При заданных параметрах  $\varepsilon_0$  и  $\omega_0$  внешнего источника напряжения зависимости амплитуд и фаз тока и напряжений в системе от частоты — амплитудные и частотные характеристики — определяются двумя безразмерными величинами  $\rho/R$  и  $\omega/\omega_0$ . Для контура со слабым затуханием ( $Q \gg 1$ ) имеет место соотношение  $Q \approx \frac{\rho}{R}$ .
2. Поведение системы носит резонансный характер: при  $\omega = \omega_0$ , когда мнимая часть импеданса равна нулю и  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho$ ,  $\text{Im}Z = 0$ ,  $Z_0 = R$ ,  $\psi_I = 0$  амплитуды тока и напряжения на сопротивлении достигают максимальных значений ( $I_{\omega_0} = \varepsilon_0/R$ ,  $U_{R\omega_0} = \varepsilon_0$ ) и совпадают по фазе с ЭДС. Таким образом, последовательный контур на собственной частоте  $\omega_0$  представляет для внешней ЭДС чисто активную нагрузку, на которой выделяется мощность  $P_{\max} = \varepsilon_0^2/2R$ .
3. Наиболее ярко резонансный характер проявляется в напряжениях на конденсаторе и индуктивности, которые при  $\omega = \omega_0$  в  $\rho/R$  раз превышают напряжение  $\varepsilon_0$  по амплитуде и сдвинуты по фазе от него каждый на  $\pi/2$ , то есть находятся в противофазе друг с другом. При высокой добротности их амплитуды значительно превышают амплитуду напряжения на контуре. По этой причине резонанс в последовательном контуре называется *резонансом напряжений*.

$$U_{C\omega}^{\text{рез}} = U_{L\omega}^{\text{рез}} = \frac{\rho}{R} \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\rho^2}{4R^2} \right)^{-1/2}. \quad (13)$$

Частоты, на которых достигаются максимальные значения величин, характеризующих вынужденные колебания в различных колебательных системах, принято называть резонансными. Для напряжения на конденсаторе резонансной является частота

$$\omega_C^{\text{рез}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right)^{+1/2}, \quad (14)$$

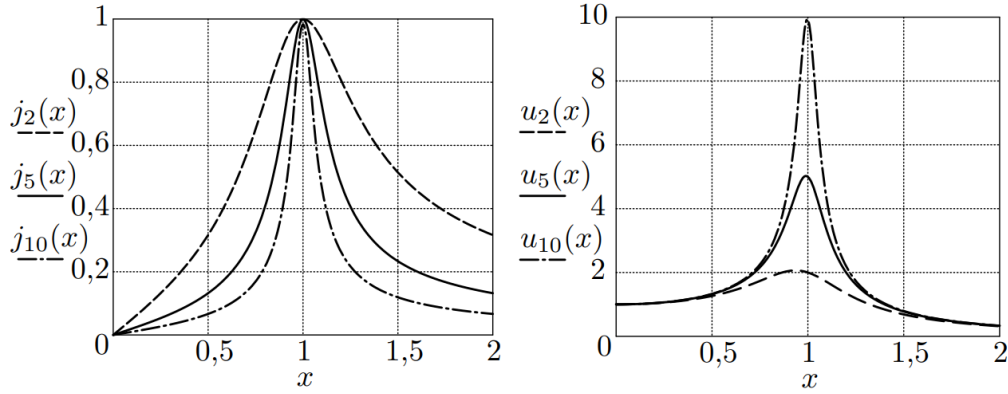
для напряжения на индуктивности –

$$\omega_L^{\text{рез}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right)^{-1/2}, \quad (15)$$

причем  $\omega_C^{\text{рез}} \cdot \omega_L^{\text{рез}} = \omega_0^2$ .

На рис. 2 приведены в безразмерном виде кривые зависимостей от  $x = \omega/\omega_0$  амплитуды тока (а)  $j(x) = RI_\omega/\varepsilon_0$  и амплитуды напряжения на конденсаторе (б)  $u(x) = U_{C\omega}/\varepsilon_0$ . Эти кривые называются амплитудными резонансными кривыми последовательного колебательного контура. Важными характеристиками резонансных кривых являются максимальное значение амплитуды соответствующей величины и *ширина резонансной кривой*, при которой амплитуда уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению со своим максимальным значением (мощность сигнала уменьшается в два раза). В частности, по этим кривым можно определить добротность колебательного контура:

$$Q = \frac{U_C^{\text{рез}}}{\varepsilon_0}. \quad (16)$$



**Рис. 2.** Амплитудные резонансные кривые а) тока и б) напряжения последовательного колебательного контура в безразмерных переменных ( $x = \omega/\omega_0$ ) при  $\rho/R = 2, 5$  и  $10$

Наибольший практический интерес представляет случай, когда отклонение  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  частоты внешней ЭДС от собственной частоты контура с добротностью  $Q = \rho/R \gg 1$  удовлетворяет сильному неравенству  $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ . При этом в первом порядке малости по относительной расстройке частоты  $\Delta\omega/\omega_0$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

откуда

$$Z_0 = R\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}, \quad \psi_I = \arctg \tau\Delta\omega,$$

где  $\tau = 1/\gamma$  — время затухания колебательного контура. В резонансе, когда для высокодобротного контура  $\omega = \omega_0$ ,  $\Delta\omega = 0$ , выражения для амплитуд тока и напряжений на емкости и индуктивности, фазовых сдвигов принимают вид:

$$I_\omega(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{R}, \quad \psi_I(\omega_0) = 0, \quad (17)$$

$$U_{C\omega}(\omega_0) = Q\varepsilon_0, \quad \psi_C(\omega_0) = \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

$$U_{L\omega}(\omega_0) = Q\varepsilon_0, \quad \psi_L(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Величина  $\delta\omega = 2|\Delta\omega_\gamma| = 2\gamma = 2/\tau$  представляет собой *ширину резонансной кривой*  $U_C(\omega)$ , по которой с учетом соотношений  $Q = \omega_0/2\gamma = \tau\omega_0/2$ , зная  $\omega_0$ , можно найти добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}. \quad (20)$$

### 3 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки показана на рис. 3. Синусоидальный сигнал от генератора поступает на вход управляемого напряжением источника напряжения, собранного на операционном усилителе, питание которого осуществляется встроенным блоком-выпрямителем от сети. Источник напряжения (источник с нулевым внутренним сопротивлением) обеспечивает с высокой точностью постоянство амплитуды сигнала  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  на меняющейся по величине нагрузке — последовательном колебательном контуре, изображенном на рис. 3 в виде эквивалентной схемы.

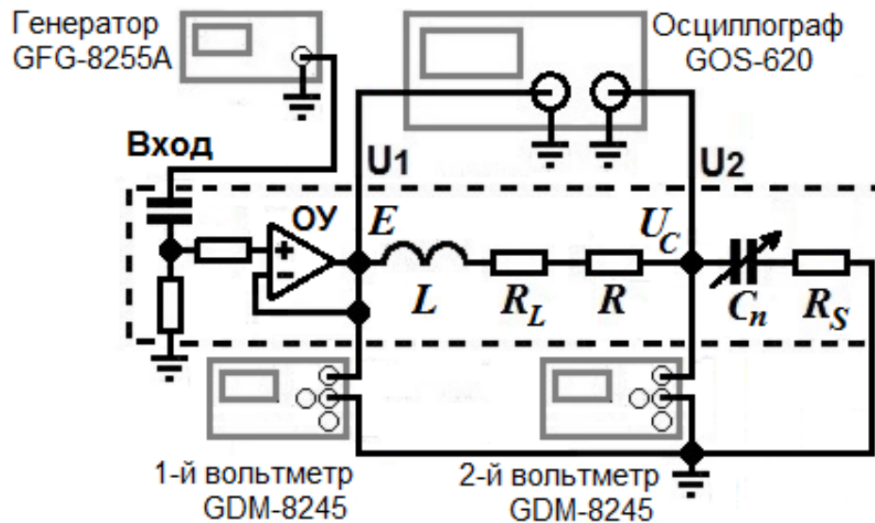


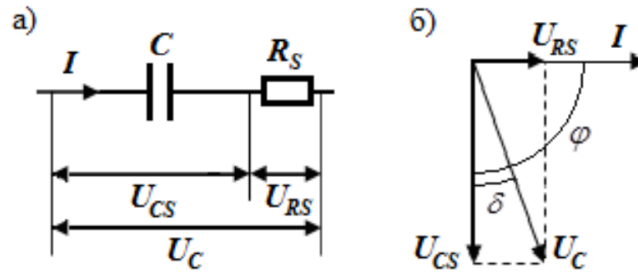
Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Источник напряжения, колебательный контур и блок питания заключены в отдельный корпус, отмеченный на рисунке штриховой линией. На корпусе имеются коаксиальные разъемы «Вход», «U<sub>1</sub>», «U<sub>2</sub>», а также переключатель магазина емкостей  $C_n$  с указателем номера  $n$ . Напряжение  $E$  на контуре через разъем «U<sub>1</sub>» попадает

одновременно на канал 1 осциллографа и вход 1-го цифрового вольтметра. Напряжение на конденсаторе  $U_C$  подается через разъем « $U_2$ » одновременно на канал 2 осциллографа и вход 2-го цифрового вольтметра.

В нашем контуре катушка индуктивности обладает малым сопротивлением по постоянному току и высокой собственной резонансной частотой  $f_r > 1.3$  МГц. В общем случае каждая катушка, помимо индуктивности, характеризуется также собственной (межвитковой) емкостью  $C_L$  и активным сопротивлением потерь  $R_L$ . Считается, что эти величины сосредоточены в отдельных элементах схемы, образующих с  $L$  замкнутую колебательную цепь с собственной резонансной частотой  $f_r = 1/2\pi\sqrt{LC_L}$ . Вследствие влияния емкости  $C_L$  при измерении на частоте  $f$  определяется не истинная индуктивность  $L$ , а ее эффективное значение  $L_{\text{эфф}} = L/(1 - f^2/f_r^2)$ , однако в нашей работе  $f \ll f_r$ , так что индуктивность представлена своим истинным значением.

Для оценки возможного вклада активных потерь в конденсаторах в общий импеданс контура воспользуемся представлением конденсатора с емкостью  $C$  последовательной эквивалентной схемой на рис. 4:



**Рис. 4.** Последовательная эквивалентная схема для конденсатора с потерями

На этой схеме  $R_s$  — это так называемое эквивалентное последовательное сопротивление (ЭПС), обусловленное электрическим сопротивлением материала обкладок и выводов конденсатора и контактов между ними, а также потерями в диэлектрике. Из векторной диаграммы (рис. 4б) видно, что активные потери в конденсаторе, пропорциональные косинусу угла  $\psi$  сдвига фаз между током и напряжением на емкости, убывают с ростом  $\psi$  и уменьшением угла  $\delta = \pi/2 - \psi$ . Потери в конденсаторе принято характеризовать величиной  $\tan \delta$ .

$$R_s = \frac{U_{Rs}}{I} = \frac{U_{Rs}}{\omega C U_{Rs}} = \frac{1}{\omega C} \tan \delta. \quad (21)$$

В нашей установке  $\tan \delta < 10^{-3}$ . Суммарное реактивное сопротивление контура:

$$R_{\Sigma} = R + R_L + R_s. \quad (22)$$

Импедансы:

$$Z_L = R_L + i\omega L, \quad Z_C = R_s - i\frac{1}{\omega C}, \quad Z = R_{\Sigma} + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (23)$$

Тогда получаем добротность контура:

$$Q = \rho/R_\Sigma = \omega_0 L/R_\Sigma = 1/\omega_0 C R_\Sigma \gg 1. \quad (24)$$

Отсюда видно, что потерями в конденсаторах  $\operatorname{tg} \delta$  можно пренебречь. В то же время вклад потерь в конденсаторах в суммарное активное сопротивление контура вблизи резонанса, примерно равный  $\rho \operatorname{tg} \delta$ , можно оценить только по результатам эксперимента.

При резонансе:

$$I(\omega_0) = \frac{\varepsilon}{R_\Sigma}, \quad \psi_I = 0, \quad (25)$$

$$U_L(\omega_0) = Q\varepsilon, \quad \psi_L = \frac{\pi}{2} - \frac{R_L}{\rho}, \quad (26)$$

$$U_C(\omega_0) = Q\varepsilon, \quad \psi_C = -\frac{\pi}{2} + \delta. \quad (27)$$

Из формул (25)-(27) следует, что на резонансной частоте импеданс контура становится чисто активным и равным суммарному сопротивлению, амплитуда тока достигает максимального значения  $I_{\max} = \varepsilon/R_\Sigma$ . Напряжения на конденсаторе и индуктивности находятся почти в противофазе и в  $Q$  раз превышают по амплитуде значение внешней ЭДС.

При отклонении  $\Delta\omega$  частоты внешней ЭДС от  $\omega_0$  таким, что

$$\tau\Delta\omega = \pm 1, \quad (28)$$

амплитуда тока уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз относительно своей резонансной величины, а фаза  $\psi_I$  изменяется на угол  $\mp\pi/4$ . Аналогично для остальных величин из уравнений (25)-(27). Схожесть поведения вблизи резонанса частотных характеристик тока и напряжений на реактивных элементах последовательного контура с добротностью  $Q \gg 1$  упрощает эксперимент, позволяя производить измерения именно напряжений. В нашей работе это напряжение на контуре  $\varepsilon$  и напряжение на конденсаторе  $U_C$ .

Величина  $\delta\omega = 2/\tau$  (ширина резонансной кривой, введенная выше) позволяет определить время релаксации  $\tau = 2/\delta\omega$  и найти добротность контура  $Q = \omega_0/\delta\omega$ .

Те же самые величины можно найти и по фазово-частотным характеристикам контура. Расстояние по оси  $\omega$  между точками, в которых фаза  $\psi_C$  меняется от  $-\pi/4$  до  $-3\pi/4$  равно  $2/\tau$ , а тангенс угла наклона функции  $\psi_C(\omega)$  определяет время релаксации  $\tau$ .

## 4 Ход работы

### 4.1 Амплитудно-частотные характеристики

Проверим правильность сборки электрической цепи, настроим приборы и подготовим



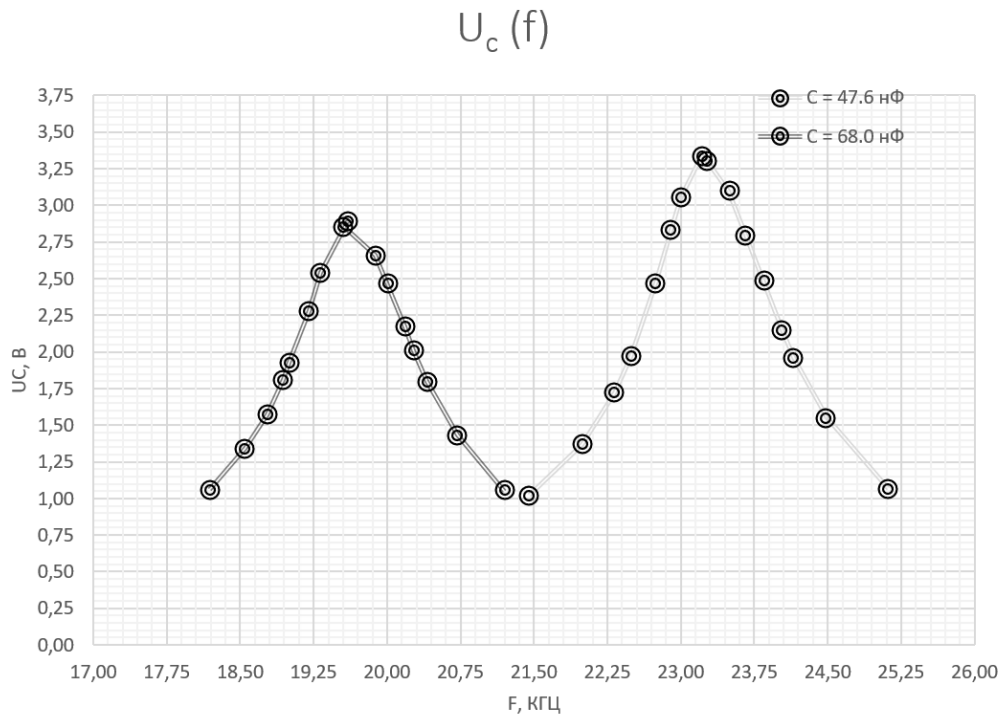
их к работе. На входе контура выставим напряжение  $E = 175.5$  мВ и будем поддерживать его постоянным на протяжении всей работы. Для контуров с различными емкостями, которые можно менять при помощи переключателя, будем измерять резонансные частоты  $f_{0n}$  и напряжения  $U_C(f_{0n})$ .

Так, для двух контуров с емкостями  $C_3 = 47.6$  нФ и  $C_5 = 68.0$  нФ снимем амплитудно-частотные характеристики  $U_C(f)$  (по 16-17 точек в сумме по обе стороны от резонанса, наблюдаемого на частоте, близкой к 23.27 кГц для  $C_3$  и 19.42 кГц для  $C_5$ ) при почти постоянном напряжении  $E$  на входе контуров. Результаты занесем в таблицу 1:

$C_3 = 47.6$ нФ					$C_5 = 68.0$ нФ				
$n$	$f$ , кГц	$\sigma_f$ , кГц	$U_C$ , В	$\sigma_{U_C}$ , В	$n$	$f$ , кГц	$\sigma_f$ , кГц	$U_C$ , В	$\sigma_{U_C}$ , В
1	25.12	0.1	1.07	0.01	1	21.20	0.1	1.05	0.01
2	24.49	0.1	1.55	0.01	2	20.72	0.1	1.43	0.01
3	24.15	0.1	1.96	0.01	3	20.41	0.1	1.80	0.01
4	24.03	0.1	2.15	0.01	4	20.27	0.1	2.01	0.01
5	23.84	0.1	2.49	0.01	5	20.18	0.1	2.17	0.01
6	23.66	0.1	2.80	0.01	6	20.00	0.1	2.47	0.01
7	23.49	0.1	3.10	0.01	7	19.88	0.1	2.66	0.01
8	23.27	0.1	3.30	0.01	8	19.55	0.1	2.86	0.01
9	23.21	0.1	3.34	0.01	9	19.60	0.1	2.89	0.01
10	23.00	0.1	3.05	0.01	10	19.32	0.1	2.54	0.01
11	22.90	0.1	2.83	0.01	11	19.20	0.1	2.28	0.01
12	22.74	0.1	2.47	0.01	12	19.00	0.1	1.93	0.01
13	22.49	0.1	1.97	0.01	13	18.94	0.1	1.81	0.01
14	22.32	0.1	1.72	0.01	14	18.77	0.1	1.57	0.01
15	21.99	0.1	1.37	0.01	15	18.55	0.1	1.34	0.01
16	21.45	0.1	1.02	0.01	16	18.19	0.1	1.06	0.01

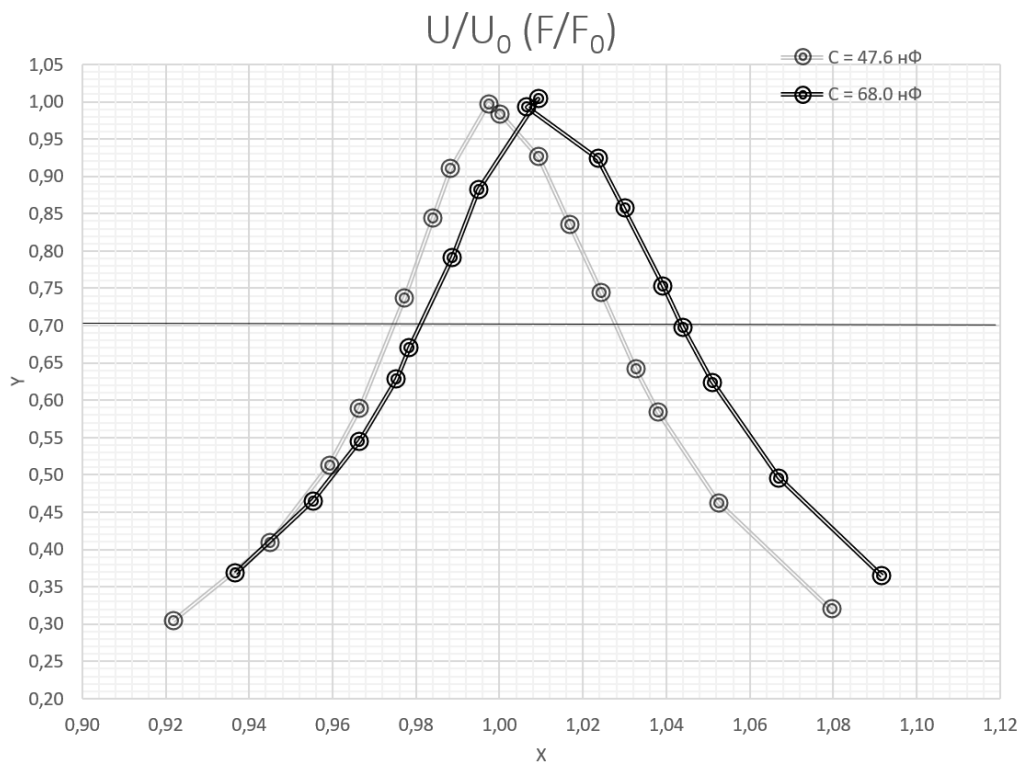
**Таблица 1.** Результаты измерений для АЧХ

По данным, представленным в таблице 1, построим амплитудно-частотные характеристики контуров в координатах  $f$ ,  $U_C(f)$ :



**Рис. 5.** Графики зависимости напряжения на конденсаторе от частоты (АЧХ) для двух контуров

По тем же данным построим также графики в безразмерных координатах:  $x = f/f_{0n}$ ,  $y = U_C(x)/U_C(1)$ , где  $f_{0n}$  — резонансная частота для соответствующего контура:



**Рис. 6.** Графики АЧХ в безразмерных координатах, где  $x = f/f_{0n}$ ,  $y = U_C(x)/U_C(1)$

Из графиков 5 и 6 хорошо видно, что резонансная частота и добротность для  $C_3 =$

47.6 нФ выше. По ширине резонансных кривых (рис. 6) на уровне 0.707 определим добротности контуров как обратное к разности частот на этом уровне:

$$Q_{C_3} = 20.6 \pm 0.1;$$

$$Q_{C_5} = 17.2 \pm 0.1.$$

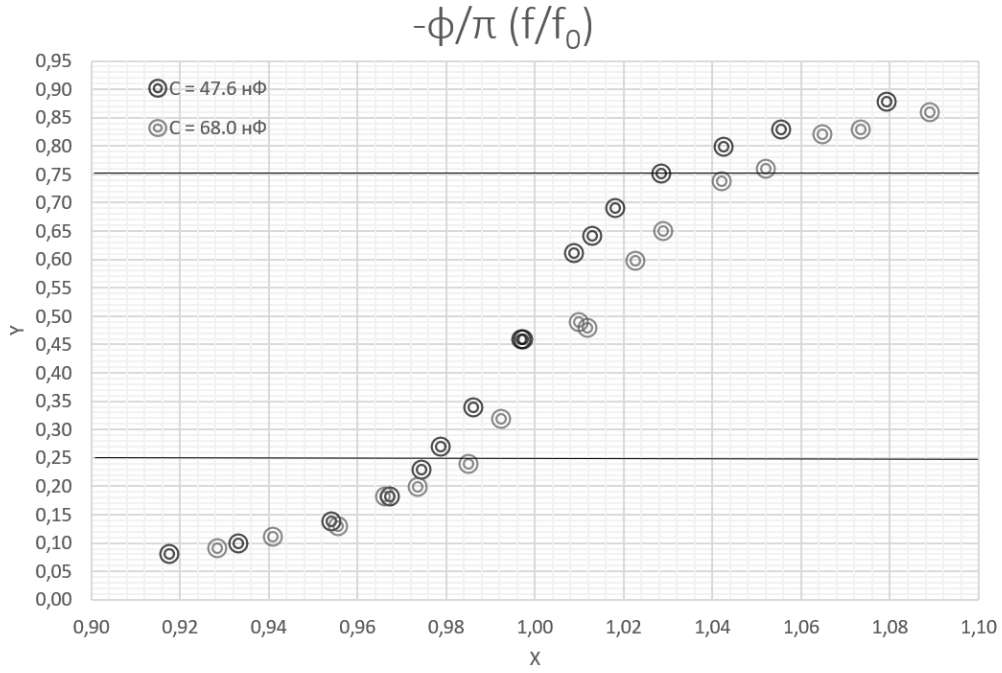
## 4.2 Фазово-частотные характеристики

Для тех же двух контуров получим фазово-частотные характеристики  $\varphi_C(f)$  при том же значении напряжения  $E$ . Результаты измерений занесем в таблицу 2:

$C_3 = 47.6$ нФ			$C_5 = 68.0$ нФ		
$n$	$f$ , кГц	$-\varphi/\pi$	$n$	$f$ , кГц	$-\varphi/\pi$
1	23.21	0.46	1	19.65	0.48
2	23.47	0.61	2	19.27	0.32
3	23.57	0.64	3	19.13	0.24
4	23.69	0.69	4	18.91	0.20
5	23.93	0.75	5	18.76	0.18
6	24.26	0.80	6	18.56	0.13
7	24.56	0.83	7	18.27	0.11
8	25.11	0.88	8	18.03	0.09
9	23.20	0.46	9	19.61	0.49
10	22.95	0.34	10	19.86	0.60
11	22.77	0.27	11	19.98	0.65
12	22.67	0.23	12	20.24	0.74
13	22.51	0.18	13	20.43	0.76
14	22.20	0.14	14	20.68	0.82
15	21.71	0.10	15	20.84	0.83
16	21.35	0.08	16	21.15	0.86

**Таблица 2.** Результаты измерений для ФЧХ

На основе данных из таблицы 2 построим на одном графике фазово-частотные характеристики в безразмерных координатах:  $x = f/f_{0n}$ ,  $y = -\varphi/\pi$ :



**Рис. 7.** Графики ФЧХ в безразмерных координатах, где  $x = f/f_{0n}$ ,  $y = -\varphi/\pi$

По полученным характеристикам (рис. 7) определим добротности контуров. По расстоянию между точками по оси  $x$ , в которых  $y$  меняется от  $1/4$  до  $3/4$ , равному  $1/Q$ , определим  $Q$ :

$$Q_{C_3} = 20 \pm 1;$$

$$Q_{C_5} = 16 \pm 1.$$

Как видно, полученные значения добротности неплохо согласуются с определенными при помощи АЧХ.

### 4.3 Характеристики контура

При все том же значении  $E = 175.5$  мВ для контуров с семью различными емкостями  $C_n$  измерим резонансные частоты  $f_{0n}$  и напряжения  $U_C(f_{0n})$ . По результатам измерений для каждого контура определим значение индуктивности катушки  $L$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , суммарное сопротивление контура  $R_\Sigma$ , значение ЭПС  $R_{S\max}$ , омическое сопротивление катушки  $R_L$  и ток  $I$ . Результаты измерений и вычислений занесем в таблицу 3.

Зная резонансную частоту, можно найти индуктивность катушки по формуле:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C f_0^2},$$

а погрешность можно определить как

$$\sigma_L = L \sqrt{\left(\frac{\sigma_C}{C}\right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma_{f_0}}{f_0}\right)^2}.$$

Характеристическое сопротивление контура ищется как

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

причем погрешность

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_C}{2C}\right)^2}.$$

Зная суммарное активное сопротивление и  $R_S = 10^{-3}\rho$ , можно найти активное сопротивление катушки  $R_L$ . Для определения добротности контура применяется формула  $U_C(f_0) = QE$ . При этом  $R_\Sigma = \frac{1}{f_0 C Q}$ . Все погрешности также занесены в таблицу 3.

$n$	$C_n$ , нФ	$f_{0n}$ , кГц	$U_C$ , В	$E$ , мВ	$L$ , мкГн	$Q$	$\rho$ , Ом	$R_\Sigma$ , Ом	$R_{S_{\max}}$ , Ом	$R_L$ , Ом	$I$ , мА
1	24.8	32.20	4.38	175.5	986.1	25.0	199.4	7.99	0.20	4.34	21.97
2	33.2	27.78	3.88	175.5	989.6	22.1	172.7	7.81	0.17	4.19	22.47
3	47.6	23.27	3.35	175.5	983.7	19.1	143.8	7.53	0.14	3.94	23.30
4	57.5	21.17	3.10	175.5	983.9	17.7	130.8	7.41	0.13	3.82	23.70
5	68.0	19.42	2.88	175.5	988.7	16.4	120.6	7.35	0.12	3.78	23.88
6	81.6	17.73	2.90	175.5	988.5	16.5	110.1	6.66	0.11	3.63	26.35
7	102.8	15.82	2.42	175.5	985.5	13.8	97.9	7.10	0.10	3.55	24.72
Среднее значение					986.6	18.7	139.3	7.41	0.14	3.89	23.77
Коэффициент Стьюдента					2.2	—				2.26	—
Среднеквадратичная погрешность					0.1	—				0.02	—
Случайная погрешность					0.3	—				0.10	—

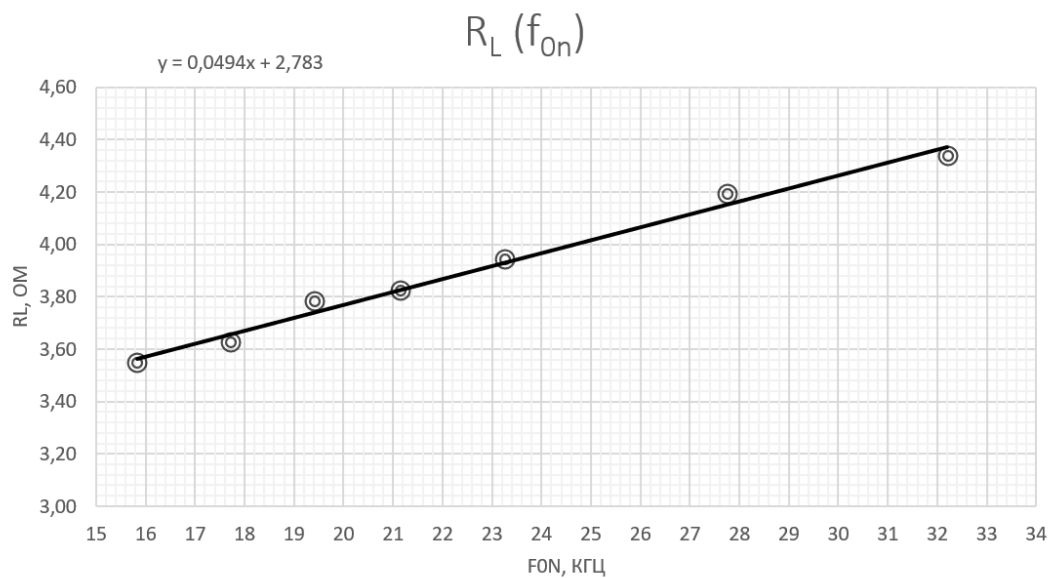
**Таблица 3.** Характеристики контуров

Таким образом, мы определили добротности контуров с  $C_3$  и  $C_5$  тремя разными способами: по АЧХ, ФЧХ и теоретически. Сравним полученные значения:

	$Q$ , АЧХ	$Q$ , ФЧХ	$Q$ , теория
$C_3 = 47.6$ нФ	$20.6 \pm 0.1$	$20 \pm 1$	19.1
$C_5 = 68.0$ нФ	$17.1 \pm 0.1$	$16 \pm 1$	16.4

**Таблица 4.** Добротности контуров, вычисленные тремя способами

По данным таблицы 3 построим график зависимости сопротивления катушки индуктивности от резонансной частоты  $R_L(f_{0n})$ :

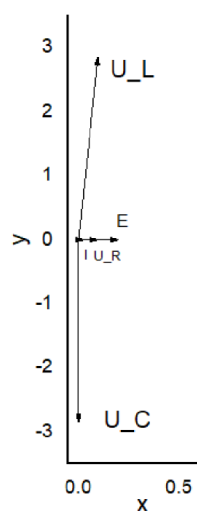


**Рис. 8.** График зависимости сопротивления катушки индуктивности от резонансной частоты

Уравнение полученной зависимости указано на графике (рис. 8). Видим, что с увеличением частоты резонанса (то есть с увеличением емкости в цепи) растет и сопротивление потерь катушки. Можно предположить, что изменения связаны с потерями на перемагничивание сердечника катушки.

#### 4.4 Векторная диаграмма

Построим векторную диаграмму напряжений для контура с наименьшей добротностью в резонансном состоянии, ось абсцисс направим по вектору  $\mathbf{E}$ , а масштаб оси сделаем в 2 раза более крупным, чем оси ординат. Так как, по закону Кирхгофа,  $E = U_R + U_C + U_L$ , на графике вектор  $\mathbf{E}$  должен быть равен сумме остальных векторов напряжений.



**Рис. 9.** Векторная диаграмма

## 5 Вывод

Было проведено исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре, по результатам которого были определены некоторые его характеристики: индуктивность, сопротивление катушки индуктивности, характеристическое сопротивление. Также тремя разными способами были рассчитаны добротности двух контуров.