hem hier in de omstandigheid dat we, hoewel we weten dat de geldigheid van een geldige redenering in eindig veel stappen aan het licht zal komen, niet van tevoren kunnen zeggen *hoeveel* stappen dat zijn. Zolang de computer niet stopt weten we niets.

6.7 Axiomatiek

Eerder hebben we gezien hoe we redeneringen in de predikatenlogica *semantisch* kunnen benaderen: we hebben het begrip ***logisch geldig*** uitgelegd in termen van *waarheid* in predikatenlogische modellen. Net als in de propositielogica bestaat er daarnaast ook een syntactisch-axiomatische kijk, waarbij redeneringen te lijf worden gegaan met behulp van de begrippen *afleidbaarheid* en *bewijsbaarheid.*

Het recept is weer: wijs eerst een aantal bona fide predikatenlogische formules aan als *axioma's*, geef vervolgens een of meer *redeneerregels*, en spreek af: alles wat in een eindig aantal stappen met behulp van de redeneerregels uit de axioma's kan worden afgeleid is een *stelling* van de predikatenlogica.

We definiëren dus weer een axioma-verzameling. Eerst nemen we de axioma-schema's van de propositielogica over:

Axioma 6.1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

Axioma 6.2 $(\varphi \to (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

Axioma 6.3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

Er is echter meer, want ook de kwantoren doen nu mee. We geven eerst een voorlopige formulering van een vierde axioma-schema:

Axioma 6.4 (voorlopige versie:)
$\forall v\varphi \to [t/v]\varphi$ *voor elke individuele variabele* v *en elke term* t.

Dit schema drukt uit dat een universele bewering elk van zijn 'toepassingen op een of ander bijzonder geval' impliceert. Dus: $\forall x Px \to Pa$ is een axioma van deze vorm. Er is echter een moeilijkheid verbonden aan de voorlopige versie van dit laatste axioma-schema.

Opdracht 6.37 *Waarom kan de formule*

$$\forall y \neg\forall x\ x = y \to [x/y]\neg\forall x\ x = y,$$

die voldoet aan de voorlopige versie van axioma-schema 4, geen axioma zijn? Met andere woorden: wat gaat er mis wanneer we in dit geval x *voor* y *substitueren in de deelformule* $\neg\forall x\ x = y$*?*

Uit het probleem in opdracht 6.37 blijkt dat de voorlopige versie van 4. te ruim is geformuleerd. We moeten een beperking opleggen aan het soort termen t dat voor v mag worden gesubstitueerd in φ. In wat nu volgt gaan we voor het gemak uit van een predikatenlogische taal die geen functiesymbolen bevat. Met *term* bedoelen we dus: constante of variabele. Hoe de functiesymbolen zouden moeten worden verdisconteerd gelieve u zelf te bedenken. We voeren het volgende begrip in teneinde de beperking die we aan 4. willen opleggen te formuleren.

Definitie 6.12 *De term t is* **vrij substitueerbaar** *voor de variabele v in de formule φ wanneer t ofwel een constante is, ofwel een variabele die vrij voorkomt in $[t/v]\varphi$ op elke plaats waar v vrij voorkwam in φ.*

Gauw een paar voorbeelden. a is vrij substitueerbaar voor y in $\forall xRxy$, want a is een constante. z is vrij substitueerbaar voor y in $\forall xRxy$, want $[z/y]\forall xRxy$ is gelijk aan $\forall xRxz$, en hierin is z vrij. x is *niet* vrij substitueerbaar voor y in $\forall xRxy$, want $[x/y]\forall xRxy$ is gelijk aan $\forall xRxx$, en hierin is x *niet* vrij op de plaats waar y eerst *wel* vrij was: de variabele wordt als het ware 'ingevangen' door de universele kwantor. z is *niet* vrij substitueerbaar voor y in $\forall z(Pz \rightarrow \exists xRxy)$; u gelieve zelf te bedenken waarom. Nog wat jargon: in plaats van *vrij substitueerbaar voor* zegt men ook wel *vrij voor* of *substitueerbaar voor*.

Opdracht 6.38 *Ga na of x vrij substitueerbaar is voor y in de volgende formules:*

1. $Py \wedge \exists xRxy$
2. $Px \wedge \exists zRzy$
3. $\forall y(Pz \rightarrow \exists xRxy)$
4. $\forall x(Py \rightarrow \exists yRxy)$
5. $\exists x(Px \wedge \exists yRxy)$
6. $Py \wedge \forall x\exists yRxy$.

Nu we de beschikking hebben over het begrip *vrij substitueerbaar zijn voor* kunnen we de correcte versie van axioma-schema 4. formuleren:

Axioma 6.4 $\forall v\varphi \rightarrow [t/v]\varphi$ *voor elke individuele variabele v en elke term t die vrij substitueerbaar is voor v in φ.*

Het nu volgende axioma-schema 5. is een beetje flauw. Het is nodig omdat we nu eenmaal hebben besloten om loze kwantificatie toe te staan.

Axioma 6.5 $\varphi \rightarrow \forall v \varphi$ *mits v niet vrij voorkomt in φ.*

Tenslotte hebben we:

Axioma 6.6 $\forall v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall v \varphi \rightarrow \forall v \psi)$.

Dat waren de axioma-schema's. De verhouding van de echte axioma's tot de schema's is hier iets ingewikkelder dan in het geval van de propositielogica. Om de verzameling van predikatenlogische axioma's te kunnen definiëren moeten we eerst definiëren wat een generalizering van een formule is:

Definitie 6.13 *Een* **generalizering** *van een formule φ is een formule die ontstaat door 0 of meer universele kwantoren (met bijbehorende variabelen) te schrijven voor φ.*

Dus: Px, $\forall x Px$, $\forall x \forall z Px$,... zijn generalizeringen van Px. De verzameling predikatenlogische axioma's is nu als volgt gedefinieerd:

Definitie 6.14 *Een* **predikatenlogisch axioma** *is een generalizering van een formule volgens een van de schema's 1. tot en met 6.*

Voorbeelden van axioma's zijn:

- $\forall x(Px \rightarrow (Qx \rightarrow Px))$ [een generalizering van 1];
- $\forall x Px \rightarrow Pa$ [een generalizering van 4];
- $\forall x(\forall y Py \rightarrow Px)$ [een generalizering van 4];
- $\forall x(Px \rightarrow \forall y Px)$ [een generalizering van 5];
- $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$ [een generalizering van 6];
- $\forall z \forall y(\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx))$ [een generalizering van 6].

Wanneer we een axiomaverzameling willen definiëren voor een predikatenlogische taal waarin ook het identiteitsteken wordt gebruikt hebben we nog twee extra axioma's nodig:

Axioma 6.7 $v = v$ *voor elke variabele v.*

Axioma 6.8 $(v_1 = w_1 \rightarrow (\ldots(v_n = w_n \rightarrow (Av_1 \ldots v_n \rightarrow Aw_1 \ldots w_n))\ldots))$
voor elke n-plaatsige predikaatletter A
en voor alle variabelen $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_n$.

Axioma-schema 8. ziet er misschien een beetje ingewikkeld uit, maar het idee is gewoon: in atomaire formules moet je variabelen die naar hetzelfde ding verwijzen voor elkaar kunnen substitueren. Een andere formulering van 8. is deze:

Axioma 6.8 (herformulering:)
$(v_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge v_n = w_n \wedge Av_1 \ldots v_n) \rightarrow Aw_1 \ldots w_n$.

De 'implicatie-versie' die wij hebben gekozen verdient echter de voorkeur omdat de afleidingsregel Modus Ponens er mooier bij aansluit.

Wanneer we een calculus willen geven voor een taal die behalve het identiteitsteken ook functiesymbolen bevat hebben we nog een negende axioma nodig, om te garanderen dat we in termen die van de vorm $gt_1 \ldots t_n$ zijn, termen voor $t_1, \ldots, t_n$ mogen substitueren mits ze naar hetzelfde individu verwijzen. We laten dat axioma hier nu maar voor het gemak achterwege.

Hier volgen enkele voorbeelden van generalizeringen van 7. en 8.

- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (Px \rightarrow Py))$
- $(x = y \rightarrow (Px \rightarrow Py))$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u (x = y \rightarrow (z = u \rightarrow (Rxz \rightarrow Ryu)))$.

De definitie van de verzameling axioma's van een predikatenlogische taal met identiteit wordt nu:

Definitie 6.15 *Een* **predikatenlogisch axioma** *voor een predikatenlogische taal T met identiteit is een generalizering van een formule volgens een van de axioma-schema's 1. tot en met 8.*

De afleidingsregel is weer *Modus Ponens*: concludeer uit φ en $\varphi \rightarrow \psi$ tot ψ.

Tenslotte voeren we $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ and $\exists$ als afkortingen in. Naast de definities uit § 5.8 hebben we nog nodig:

- $\exists v \varphi$ is een afkorting voor $\neg \forall v \neg \varphi$.

Hiermee hebben we een deductief systeem (of: een axiomatiek, of: een calculus) voor de predikatenlogica gegeven. Er bestaan vele andere deductieve systemen voor de predikatenlogica die *equivalent* zijn in de zin dat ze dezelfde verzameling formules als stellingen opleveren. De definities van *afleiding* (of: *bewijs*), en *stelling* zijn als bij de propositielogica.

Net als bij de propositie-logische calculus die we in § 5.7 gepresenteerd hebben, moeten we weer onderscheid maken tussen bewijzen *in* de calculus en bewijzen *over* de calculus. Hier is een voorbeeld van een bewijs *in* de calculus.

Stelling 6.1 *Voor elke constante a is de formule $a = a$ een stelling.*

Bewijs:

1	$\forall x\ x = x$	[axioma volgens schema 7]
2	$\forall x\ x = x \rightarrow a = a$	[axioma volgens schema 4]
3	$a = a$	[MP uit 1 en 2].

■

De notatie voor "$a = a$ is een stelling" is weer: $\vdash a = a$. We roepen de notatie in herinnering voor "φ is afleidbaar uit formuleverzameling Γ":

$$\Gamma \vdash \varphi.$$

Voorbeeld: laat Γ de verzameling $\{\forall x Rxx\}$ zijn. Dan kunnen we een afleiding geven van Raa:

Stelling 6.2 $\forall x Rxx \vdash Raa$.

Bewijs:

1	$\forall x Rxx$	[volgens aanname]
2	$\forall x Rxx \rightarrow Raa$	[axioma volgens schema 4]
3	Raa	[MP uit 1 en 2].

■

Een andere notatie die ook wel wordt gebruikt voor het resultaat uit de stelling is:

$$\forall x Rxx \vdash Raa.$$

Opdracht 6.39 *Laat zien:*

$$\forall x(Ax \rightarrow Bx), Aa \vdash Ba.$$

Opdracht 6.40 *Laat zien:*

$$\forall x(\neg Ax \rightarrow \neg Bx), \forall x(Ax \rightarrow Cx), Ba \vdash Ca.$$

Hier is nog een voorbeeld van een bewijs van een stelling van de calculus.

Stelling 6.3 $\vdash x = y \rightarrow y = x$.

Bewijs:

1	$x = y \to (x = x \to (x = x \to y = x))$	[ax 8]
	NB $=$ is een tweeplaatsig predikaat	
2	$(x = y \to (x = x \to (x = x \to y = x))) \to$ $((x = y \to x = x) \to$ $(x = y \to (x = x \to y = x)))$	[ax 2]
3	$(x = y \to x = x) \to (x = y \to (x = x \to y = x))$	[MP uit 1,2]
4	$x = x$	[ax 7]
5	$x = x \to (x = y \to x = x)$	[ax 1]
6	$x = y \to x = x$	[MP uit 4,5]
7	$x = y \to (x = x \to y = x)$	[MP uit 3,6]
8	$(x = y \to (x = x \to y = x)) \to$ $((x = y \to x = x) \to (x = y \to y = x))$	[ax 2]
9	$(x = y \to x = x) \to (x = y \to y = x)$	[MP uit 7,8]
10	$x = y \to y = x$	[MP uit 6,9].

■

U ziet het: een simpel principe als $x = y \to y = x$ vereist al het een en ander aan formule-manipulatie. Overigens zijn, afgezien van het gebruik van de axioma's 7 en 8, alle stappen in het bewijs puur propositielogische stappen; kwantormanipulatie speelt in het bewijs geen rol.

Het is niet de bedoeling dat u zich over het vinden van dit soort bewijzen het hoofd breekt. Wel is het nuttig dat u een idee heeft van wat een *bewijs in de predikaatlogische calculus* is. Vandaar de bovenstaande voorbeelden.

Weer is—net als in het propositielogische geval—het onderscheid tussen een bewijs *in* en een bewijs *over* de calculus van groot belang. Hier is een voorbeeld van een metastelling voor de predikatenlogische calculus:

Stelling 6.4 *De predikatenlogische calculus voldoet aan het principe van Universele Generalisatie: Als* $\vdash \varphi$ *dan ook* $\vdash \forall v\varphi$.

Bewijs: We gebruiken weer inductie naar de lengte van een bewijs in de calculus.

- *Basisstap*: het bewijs van φ bestaat uit het rijtje $\langle\varphi\rangle$ dat alleen de formule φ bevat. In dit geval moet φ een axioma zijn. Maar dan is ook $\forall v\varphi$ een axioma, want: $\forall v\varphi$ is een *generalisering* van φ. Daarmee is $\langle\forall v\varphi\rangle$ een bewijs voor $\forall v\varphi$. We hebben dus: $\vdash \forall v\varphi$, en het basisgeval is afgewerkt.

- *Inductiestap*: De inductiehypothese is: als φ een bewijs heeft van lengte n (of kleiner), dan geldt $\vdash \forall v\varphi$. Merk op dat de inductiehypothese *niets* zegt over de lengte van het bewijs van $\forall v\varphi$. We moeten laten zien dat nu uit $\vdash \varphi$ en "φ heeft een afleiding van lengte $n + 1$" ook volgt: $\vdash \forall v\varphi$. Dat gaat zo: of φ is een axioma, en we redeneren als in het basisgeval en klaar, of φ volgt via Modus Ponens uit ψ en $\psi \to \varphi$, waarbij op ψ en $\psi \to \varphi$ de inductiehypothese van toepassing is (ga na waarom). We hebben dus: $\vdash \forall v\psi$ en $\vdash \forall v(\psi \to \varphi)$. Hieruit leiden we $\forall v\varphi$ als volgt af:

1	$\forall v(\psi \to \varphi) \to (\forall v\psi \to \forall v\varphi)$	[ax 6]
2	$\forall v(\psi \to \varphi)$	[gegeven]
3	$\forall v\psi \to \forall v\varphi$	[MP uit 1,2]
4	$\forall v\psi$	[gegeven]
5	$\forall v\varphi$	[MP uit 3,4].

We hebben laten zien dat $\vdash \forall v\varphi$. Hiermee is de inductiestap compleet, en dus is het bewijs van het principe van Universele Generalisatie rond.

■

Het principe van Universele Generalisatie staat ons nu toe om uit

$$\vdash x = y \to y = x$$

(stelling 6.3) het volgende af te leiden:

$$\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x).$$

Met andere woorden: we hebben in de predikatenlogische calculus bewezen dat de identiteits-relatie *symmetrisch* is.

Een tweede voorbeeld van een metastelling voor de predikatenlogische calculus is de deductiestelling. Alle principes die we hebben gebruikt in het bewijs van de deductiestelling voor de propositielogica (vergelijk § 5.7) gaan ook op voor de predikatenlogische calculus, dus het eerder gegeven bewijs geldt ook hier.

Metastellingen als het principe van universele generalisatie en de deductiestelling geven ons in feite extra redeneerregels in handen. Op het feit dat de deductiestelling buitengewoon nuttig is als extra redeneerregel hebben we in § 5.7 al gewezen. Voor de algemene variant,

als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \vdash \psi$ dan $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash (\varphi_{n+1} \to \psi)$,

geldt dit in nog sterkere mate (zie opdracht 5.42 aan het eind van § 5.7). Stel dat we willen laten zien:

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)),$$

dan is het volgens de deductiestelling genoeg om te laten zien:

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi).$$

Om dat te laten zien is het, weer volgens de deductiestelling (maar nu in de algemene variant), genoeg om te bewijzen:

$$\varphi \to (\psi \to \chi), \psi \vdash \varphi \to \chi$$

en daarvoor is een bewijs van

$$\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi \vdash \chi$$

weer genoeg. Dat bewijs gaat als volgt:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	[gegeven]
2	φ	[gegeven]
3	$\psi \to \chi$	[MP uit 1,2]
4	ψ	[gegeven]
5	χ	[MP uit 3,4].

U ziet het: heel wat gemakkelijker dan direct een bewijs leveren voor de formule waar we mee begonnen.

We zijn geïnteresseerd in de verzameling van alle formules die afleidbaar zijn uit een bepaalde aannamen-verzameling T in de predikatenlogische calculus. Wat dit betekent is dat we door het kiezen van geschikte uitgangspunten een specifiek *soort* van predikatenlogische modellen kunnen beschrijven. Om gemakkelijk over dit soort zaken te kunnen praten voeren we nieuw jargon in.

Definitie 6.16 *Een* **predikatenlogische theorie** T *is een verzameling van predikatenlogische formules.*

We noemen de formules uit T de *niet-logische axioma's* van de theorie. In feite leggen de niet-logische axioma's samen met de predikatenlogische axioma's (waarvoor we het recept hierboven hebben gegeven) en de afleidingsregel Modus Ponens de theorie vast.

Definitie 6.17 *De* **deductieve afsluiting** *van een theorie* T, *notatie* $\overline{T}$, *is de verzameling* $\{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$.

De deductieve afsluiting van T is de verzameling van alle formules die met behulp van Modus Ponens kunnen worden afgeleid uit formules in T en logische axioma's.

Niet alle formuleverzamelingen T zijn even interessant. We zijn met name geïnteresseerd in theorieën T die *consistent* zijn (zie definitie 5.15 in § 5.8).

Opdracht 6.41 *Laat zien dat als T consistent is, dan $\overline{T}$ ook.*

Opdracht 6.42 *Laat zien dat als $\overline{T}$ consistent is, dan T ook.*

Een heel simpel voorbeeld van een predikatenlogische theorie is de theorie T die alleen de ene formule $\exists x\ x = x$ bevat, dus: $T = \{\exists x\ x = x\}$. Deze theorie is waar in alle predikaatlogische modellen met een niet-leeg domein: de formule $\exists x\ x = x$ is waar precies wanneer er minstens één ding bestaat. Dit sluit alleen het model met het lege domein uit. Merk op dat het model met het lege domein *niet* wordt uitgesloten door de definitie van 'model voor een predikatenlogische taal'.

Hier is een wat serieuzer voorbeeld van een predikatenlogische theorie, de zogenaamde theorie van de *partiële ordes*:

$$\begin{array}{l}\{\forall x Rxx,\\ \forall x\forall y((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y),\\ \forall x\forall y\forall z(Rxy \rightarrow (Ryz \rightarrow Rxz))\}.\end{array}$$

De drie formules die de theorie uitmaken drukken respectievelijk uit dat de relatie die door R wordt benoemd reflexief, antisymmetrisch en transitief is. Elk model voor deze theorie moet een partieel geordende verzameling zijn, dat wil zeggen een verzameling waarop een partiële orde is gedefinieerd (vergelijk § 2.7).

Een ander voorbeeld van een predikatenlogische theorie is de zogenaamde theorie van de *dichte onbegrensde lineaire ordes*. We laten de niet-logische axioma's die de theorie uitmaken een voor een de revue passeren:

1. $\forall x\forall y\forall z(Rxy \rightarrow (Ryz \rightarrow Rxz))$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd *transitief* is.

2. $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd *asymmetrisch* is.

3. $\forall x\forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y)$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd de eigenschap van *samenhang* heeft (of: samenhangend is).

4. $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd de eigenschap van *dichtheid* heeft (of: dicht is).

5. $\forall x \exists y Rxy$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd *voortzetting naar rechts* kent.

6. $\forall x \exists y Ryx$.

   Deze formule drukt uit dat de relatie die door R wordt benoemd *voortzetting naar links* kent.

We kunnen nu gaan kijken naar *modellen* voor deze theorie. Een voorbeeld van zo'n model is de verzameling van alle *tijdstippen*, met R geïnterpreteerd als de relatie *eerder dan*. De formules van de theorie worden nu uitspraken over de tijd. Die uitspraken zijn als zodanig voor discussie vatbaar, maar dat is een andere kwestie. 1. wordt nu: als tijdstip 1 eerder valt dan tijdstip 2, en tijdstip 2 valt eerder dan tijdstip 3, dan valt tijdstip 1 eerder dan tijdstip 3. Net zo voor de andere formules. Het model voor de tijd dat hier beschreven wordt ziet er dus zo uit:

$\longleftarrow$ *vroeger* *later* $\longrightarrow$

Vergelijk § 5.10, waar een dergelijke tijdsas figureert in de modellen voor de propositionele tijdslogica. Merk op dat in dit model de tijd zich onbegrensd uitstrekt naar verleden en toekomst, en dat er zich tussen elk tweetal tijdstippen, hoe dicht ze ook bij elkaar liggen, een derde bevindt. Op de filosofische implicaties van deze visie op tijd gaan we hier niet in.

Een ander model voor de theorie van de dichte onbegrensde lineaire ordes is het domein van alle positieve en negatieve breuken en het getal 0, met R geïnterpreteerd als de relatie *kleiner dan*. Dit model wordt vaak aangeduid als $\mathbf{Q}$. U gelieve zelf na te gaan dat formules 1. tot en met 6. waar zijn in $\mathbf{Q}$.

Andere voorbeelden van predikatenlogische theorieën zijn er te over. In de meeste gevallen hebben ze, in tegenstelling tot de bovengenoemde voorbeelden, niet een eindig maar een *oneindig* stel niet-logische axioma's. Het feit dat een theorie een oneindige verzameling niet-logische axioma's heeft is niet zo bezwaarlijk als op het eerste gezicht lijkt: we zijn met name geïnteresseerd in theorieën waarvan de axioma's *recursief* gedefinieerd kunnen worden. Als dat kan is de axioma-verzameling mogelijkerwijs wel oneindig, maar toch met eindige middelen weer te geven (net als de verzameling predikatenlogische axioma's). We zeggen dan dat zo'n oneindige theorie *oneindig recursief is geaxiomatiseerd*. Een beroemd voorbeeld is de theorie van de rekenkunde zoals geaxiomatiseerd in de axioma's van Peano (de zogenaamde Peano-rekenkunde). Deze theorie wordt vaak afgekort als PA.

Ook de verzamelingenleer kan in axiomatische vorm worden gepresenteerd. Dit axiomatiseren van de verzamelingenleer is ter hand genomen nadat Bertrand Russell een tegenspraak had afgeleid uit Georg Cantor's oorspronkelijke verzamelingenleer (de zogenaamde naïeve verzamelingenleer; vergelijk de titel van hoofdstuk 2 van dit boek). Het separatie-axioma, vermeld in § 3.5, ziet er nu bij voorbeeld als volgt uit:

$$\forall x \exists y \forall z (Rzy \leftrightarrow (Rzx \land \varphi(z))).$$

In deze formule is R een tweeplaatsige predikaatletter die wordt geïnterpreteerd als *is element van* (dat wil zeggen: de $\in$ relatie); $\varphi(z)$ is een formule waarin alleen de variabele z vrij voorkomt. In het axioma wordt $\varphi(z)$ gebruikt om de verzamelingen die voldoen aan φ te karakteriseren. Door een verstandige keuze van de overige axioma's kan nu worden bewerkstelligd dat de Russell paradox en verwante problemen niet meer optreden. Verschillende systemen zijn voorgesteld; het bekendste axiomastelsel is de zogenaamde Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer (ingewijden korten dit af als ZF). Zie voor meer informatie het al eerder genoemde leerboek [Van Dalen e.a. 1975].

6.8 Correctheid, volledigheid, onbeslisbaarheid

Net als bij de propositielogica moeten we de brandende vraag beantwoorden naar de verhouding tussen de begrippen *afleidbaar* en *logisch gevolg*. Dus ten eerste: is de predikatenlogische calculus correct? Met andere woorden, geldt het volgende: als $\Gamma \vdash \varphi$, dan $\Gamma \models \varphi$ (waarbij Γ een willekeurige formuleverzameling is, en φ een willekeurige formule)? Om dit te laten zien moet eerst het feit uit de volgende opdracht worden aangetoond.

Opdracht 6.43 *Laat zien: als $b(v) = b'(v)$ voor elke vrije variable v in φ, dan $V_b(\varphi) = V_{b'}(\varphi)$.*

Het bewijs van de correctheid van de predikatenlogische calculus heeft nogal wat voeten in de aarde.[1]

Stelling 6.5 (Correctheid van de predikatenlogica)
Voor elke predikatenlogische formuleverzameling Γ en elke predikatenlogische formule φ: als $\Gamma \vdash \varphi$, dan $\Gamma \models \varphi$.

Bewijs: We plegen inductie naar de lengte van de afleiding van φ uit Γ, en maken daarbij gebruik van het resultaat uit opdracht 6.43. Één-stapsafleidingen zijn er in twee soorten:

[1] Als u wilt mag u het nu volgende bewijs bij eerste lezing overslaan.

- $\varphi \in \Gamma$. In dat geval geldt voor elk model $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ met bijbehorende valuatie V en iedere bedeling b dat $V_b(\varphi) = 1$ als voor elke $\gamma \in \Gamma$ geldt $V_b(\gamma) = 1$. Dus is in dit geval $\Gamma \models \varphi$.

- φ is een predikatenlogisch axioma. Zo'n axioma is een generalisering van één van de schema's 1–6. De geldigheid hiervan kunnen we wederom bewijzen met inductie (naar het aantal universele kwantoren dat bij generalisering voorop geplaatst wordt):

  - De schema's 1–3 gelden nog steeds; weliswaar mogen de formules nu variabelen, kwantoren, predikaten, enzovoort bevatten, de geldigheid van deze schema's berust uitsluitend op de predikatenlogische valuatie van $\rightarrow$ en $\neg$ en die is in essentie hetzelfde als in de propositielogica.
  - De geldigheid van axiomaschema 4 is zeker niet triviaal. Stel voor willekeurige valuatie V en bedeling b met domein D dat $V_b(\forall v\varphi) = 1$, dan is voor ieder object $d \in D$: $V_{b(v|d)}(\varphi) = 1$. We moeten nu laten zien dat $V_b([t/v]\varphi) = 1$ mits t substitueerbaar is voor v in φ. Merk op dat als $d = W_b(t)$ dan

    $$V_b([t/v]\varphi) = V_{b(v|d)}(\varphi) \text{ mits } t \text{ substitueerbaar voor } v \text{ in } \varphi.$$

    Deelbewijs: opnieuw met inductie, ditmaal naar de opbouw van φ (het totale bewijs heeft dus de vorm van een 3-traps-inductie). Zowel de basisstap(pen) voor atomaire formules als de inductiestappen voor de connectieven zijn eenvoudig. De kwantorstap is echter wel complex:
    Neem voor φ de formule $\forall u\varphi$. We onderscheiden twee gevallen:

    $v = u$. Dan $V_b([t/v]\forall u\varphi) = V_b(\forall u\varphi) = V_{b(u|d)}(\forall u\varphi) = V_{b(v|d)}(\forall u\varphi)$ (de voorlaatste stap gebruikt het resultaat uit opdracht 6.43);

    $v \neq u$. Dan $V_b([t/v]\forall u\varphi) = V_b(\forall u[t/v]\varphi) = 1$ desda voor elke $e \in D$: $V_{b(u|e)}([t/v]\varphi) = 1$. De inductiehypothese (toegepast op bedeling $b(u|e)$) voor dit deelbewijs levert dat voor elke $e \in D$ $V_{b'}(\varphi) = 1$, waarbij $b' = b(u|e)(v|d)$ en substitueerbaar-zijn met zich meebrengt dat $t \neq u$, en derhalve $W_{b(u|e)}(t) = W_b(t) = d$. Omdat $v \neq u$ geldt echter ook dat $b' = b(v|d)(u|e)$ en daarom volgt de equivalentie met $V_{b(v|d)}(\forall u\varphi) = 1$, hetgeen te bewijzen was.
  - Axiomaschema 5 laat zich eenvoudig verifiëren: stel maar voor willekeurige D,V en b: $V_b(\varphi) = 1$ en v niet vrij in φ. Voor willekeurige $d \in D$ geldt dan volgens het resultaat uit opdracht 6.43

(immers b en $b(v|d)$ zijn dan identiek voor de vrije variabelen in φ): $V_{b(v|d)}(\varphi) = 1$, ergo $V_b(\forall v\varphi) = 1$.

- De geldigheid van schema 6 bewijzen we indirect: stel dat 6 niet geldt. Dan is er een dus een model met valuatie V, domein D en bedeling b zodat (a) $V_b(\forall v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ en (b) $V_b(\forall v\varphi \rightarrow \forall v\psi) = 0$. Uit (b) volgt dat (c) $V_b(\forall v\varphi) = 1$ en (d) $V_b(\forall v\psi) = 0$. (d) impliceert dat er een $e \in D$ zou bestaan waarvoor $V_{b(v|e)}(\psi) = 0$. Uit (a) en (c) volgen echter respectievelijk dat $V_{b(v|e)}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ en $V_{b(v|e)}(\varphi) = 1$, en samen levert dit $V_{b(v|e)}(\psi) = 1$, wat in tegenspraak is met het gevolg van (d).
- We bewijzen de semantische geldigheid van het principe van Universele Generalisatie: laat $\models \varphi$. Dan geldt voor elke valuatie V en bedeling b dat $V_b(\varphi) = 1$ en dus ook elke V en b: $V_{b(v|d)}(\varphi) = 1$ voor elk object d uit het domein. Dus geldt per definitie voor elke V en B: $V_b(\forall v\varphi) = 1$, kortom $\models \forall v\varphi$.

De geldigheid van Universele Generalisatie en de schema's 1–6 heeft de geldigheid van alle predikatenlogische axioma's tot gevolg.

- De enige afleidingsregel van het formele systeem is Modus Ponens. Stel nu dat $\Gamma \models \varphi$ en $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$. Kies een valuatie V en een bedeling b zodat $V_b(\gamma) = 1$ voor elke $\gamma \in \Gamma$. Uit de veronderstellingen volgt nu $V_b(\varphi) = 1$ en $V_b(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, en dus $V_b(\psi) = 1$. Maar dan $\Gamma \models \psi$. ∎

Dat was het bewijs van de predikatenlogische correctheid. Ten tweede: is de predikatenlogische calculus volledig, in de zin dat het volgende geldt: als $\Gamma \models \varphi$, dan $\Gamma \vdash \varphi$ (weer met Γ een willekeurige formuleverzameling en φ een willekeurige formule) ? De logicus Kurt Gödel bewees in 1930 dat dit inderdaad het geval is. Deze stelling heet: de volledigheidsstelling van Gödel.

Wellicht vraagt de lezer zich af hoe Gödel in 1930 een eigenschap van een systeem kon bewijzen die Tarski eerst in 1933 voorstelde. De verklaring van dit schijnbare anachronisme is dat de ideeën over modeltheoretische semantiek al geruime tijd circuleerden in werk van bij voorbeeld Hilbert, Bernays en Ackermann. Tarski heeft aan die gedachten een precieze en algemene vorm gegeven, maar voor Gödel waren de eerdere voorstellen al voldoende. Zijn bewijs maakte geen gebruik van de methode van Henkin, maar wel van de in § 6.3 genoemde stelling van Löwenheim en Skolem. Wij laten een bewijs van de volledigheid van de predikatenlogica hier overigens achterwege.

Een alternatieve formulering voor de volledigheidsstelling van Gödel is de volgende: elke (syntactisch) consistente verzameling formules is vervulbaar (in enig model). We laten zien dat dit volgt uit de gebruikelijke formulering van de volledigheidsstelling. Consistentie van een formuleverzameling Γ komt—zoals we in stelling 5.8 bewezen hebben—neer op:

Er is een formule φ zo dat $\Gamma \nvdash \varphi$.

Met behulp van de volledigheidsstelling volgt hieruit, door toepassen van contrapositie:

$\Gamma \not\models \varphi$.

Wat wil dit zeggen? Niets anders dan: er is minstens één model $\mathcal{M}$ en een bedeling b waarin elke formule uit Γ vervulbaar is, maar φ niet. Met andere woorden: Γ is vervulbaar.

Deze herformulering van Gödels volledigheidsstelling maakt duidelijk hoe de syntactische definitie van *consistentie* uit 6.7 kan leiden tot de semantische karakterisering van *inconsistente verzameling formules* als: verzameling formules die niet vervulbaar is.

Een ander punt is de *beslisbaarheid* van de predikatenlogica. Een theorie T is *beslisbaar* wanneer er een mechanische procedure bestaat om, bij een gegeven formule φ van de taal, uit te maken of $T \vdash \varphi$ dan wel $T \nvdash \varphi$. De vraag naar de beslisbaarheid van de predikatenlogica is een bijzonder geval: het geval waar T leeg is. Dus: is er een mechanische procedure om bij een gegeven formule φ van de taal uit te maken of φ een stelling is? In 6.6 hebben we gezien dat de methode van de semantische tableaus voor de predikatenlogica geen beslissingsprocedure is. Dat zat hem in het feit dat de tableau-regels voor de kwantoren herhaald moeten worden toegepast, zodat er geen garantie meer is dat een tableau in eindig veel stappen kan worden voltooid. We kunnen nu direct het volgende inzien.

Stelling 6.6 *De verzameling van alle* **kwantorvrije stellingen** *van de predikatenlogica is beslisbaar.*

Bewijs: Wanneer φ een kwantorvrije predikatenlogische formule is, dan komen er aan het tableau alleen propositielogische tableauregels te pas, regels die variabelen en constanten vervangen door 'standaardnamen' uit het rijtje $d_1, d_2, \ldots$ plus eventueel de regels voor identititeit. De regel voor =-links moet herhaald worden toegepast, maar het aantal malen is eindig, want het aantal voorkomens van standaard-namen uit $d_1, d_2, \ldots$ in het tableau is beperkt tot namen die zijn ingevoerd voor variabelen en constanten in de oorspronkelijke formule φ, en dat zijn er eindig veel. Hieruit zien we dat het tableau voor φ in eindig veel stappen is voltooid. Vanwege het feit dat de predikatenlogica volledig is mogen we deze beslissingsprocedure voor $\models$ beschouwen als een beslissingsprocedure voor $\vdash$. ∎

Aantonen dat de predikatenlogica als geheel niet beslisbaar is heeft veel meer voeten in de aarde: uit het feit dat de tableau-methode geen beslissingsmethode is volgt uiteraard nog niet dat er niet een andere testmethode zou kunnen zijn die *wel* een beslissingsmethode is.

Hoewel de predikatenlogica als geheel niet beslisbaar is het heel wel mogelijk om in de predikatenlogica beslisbare *theorieën* te formuleren: de extra niet-logische axioma's van de theorie perken de klasse van modellen dusdanig in dat de notie $\models$ (en dus $\vdash$) wat hanteerbaarder wordt, zou je kunnen zeggen. Een voorbeeld van een beslisbare predikatenlogische theorie is de theorie van de dichte onbegrensde lineaire ordes (vergelijk § 6.7). Bij de theorie van de Peano-rekenkunde (PA) en de Zermelo-Fraenkel axiomatisering van de verzamelingenleer (ZF) ligt het anders. Deze theorieën zijn *niet* beslisbaar. Een **Pascal** programma dat uitmaakt of een willekeurige bewering φ afleidbaar is uit PA of uit ZF valt niet te schrijven.

De welgevormde formules van een predikatenlogische taal kunnen worden opgesomd. Het zijn immers eindige rijtjes tekens in een eindig alfabet, en zodra er een volgorde voor dat alfabet is vastgelegd kunnen alle formules van de taal in de in hoofdstuk 3 besproken telefoonboek-volgorde achter elkaar worden gezet. Dit levert een gigantisch maar aftelbaar telefoonboek op. Neem aan dat de formules genummerd zijn als 0, 1, 2, 3 enzovoort: met iedere formule correspondeert dus een natuurlijk getal. Het volgende is nu vrij eenvoudig in te zien.

Stelling 6.7 *De verzameling van de natuurlijke getallen die corresponderen met de stellingen van de predikatenlogica is opsombaar.*

Bewijs: We mogen de bewering uit de stelling wel parafraseren als: "Er bestaat een computerprogramma dat de verzameling *stellingen* van de predikatenlogica opsomt". Het gezochte programma moet dus elke formule die een stelling is, of het nummer van die formule in het formules-telefoonboek, vroeg of laat afdrukken.

Dat er zo'n programma bestaat blijkt als volgt. Een stelling van de predikatenlogica is de laatste formule in een *bewijs*, en een bewijs is een eindig rijtje formules dat aan zekere eisen voldoet. De verzameling van alle eindige rijtjes formules is weer *aftelbaar* (gebruik het telefoonboek dat alle formules opsomt om een nieuw telefoonboek te maken dat alle eindige *rijtjes* van formules opsomt). Ons computerprogramma werkt nu als volgt (commentaar staat tussen { }):

BEGIN

maak n gelijk aan 0;
(1) controleer of het formulerijtje dat positie n inneemt een bewijs is;
{deze controle kan mechanisch worden verricht:
er hoeft alleen maar te worden gecontroleerd of de formules
in het rijtje axioma's zijn, dan wel resultaten
van het toepassen van MP op twee voorafgaande formules}
ALS formulerijtje met nummer n een bewijs is DAN
druk de laatste formule in het rijtje af; {want dat is een stelling}
maak n gelijk aan n + 1;
GA NAAR (1)
EINDE.

Het is duidelijk dat alle stellingen zo vroeg of laat te voorschijn komen. ∎

Merk op dat het programma dat in de stelling beschreven wordt nooit stopt: het blijft tot in lengte van dagen formules uitbraken.

U ziet het: de opsombaarheid van de verzameling stellingen van de predikatenlogica hangt samen met de mogelijkheid om *mechanisch te controleren* of een gegeven rijtje formules een bewijs is voor een 'kandidaat-stelling'. Als we vragen of de verzameling stellingen van de predikatenlogica beslisbaar is vragen we (veel) meer: we vragen dan of er ook een mechanische methode is om bewijzen te *vinden*. Alonzo Church heeft in 1936 bewezen dat het antwoord op deze vraag *nee* is.

Stelling 6.8 (Stelling van Church) *Er bestaat geen recursieve procedure die de verzameling stellingen van de predikatenlogica herkent.*

Bewijs: Zie [Van Dalen 1983] of [Enderton 1972]. ∎

Met behulp van de these van Church volgt uit deze stelling: de predikatenlogica is *niet beslisbaar*. De stelling van Church leidt meteen tot de volgende stelling.

Stelling 6.9 *De verzameling van niet-stellingen van de predikatenlogica is* **niet** *opsombaar.*

Bewijs: Stel dat de verzameling van niet-stellingen van de predikatenlogica wel opsombaar zou zijn. Dan zouden we een computerprogramma hebben dat de verzameling formules opsomt die *geen* stellingen zijn van de predikatenlogica. Noem dit het niet-stellingen-programma. We hadden ook al een programma dat de stellingen van de predikatenlogica opsomde (zie stelling 6.7). Noem dit programma het stellingen-programma. Deze twee programma's kunnen nu worden gecombineerd tot een beslissingsprogramma dat voor willekeurige formules nagaat of het stellingen zijn of niet. In het beslissingsprogramma hieronder is φ een variabele die de formule bevat die we onderzoeken. We maken gebruik van de notatie := voor het toekennen van een waarde aan een variabele; $n := 0$ staat dus voor "maak de waarde van n gelijk aan 0". *WelEenStelling* en *GeenStelling* zijn twee boolese variabelen, dat wil zeggen: variabelen die een waarheidswaarde bevatten.

```
BEGIN
  n := 0;
  WelEenStelling := onwaar;
  GeenStelling := onwaar;
  HERHAAL
      ALS φ gelijk is aan formule n in
      de uitvoer van het stellingen-programma DAN
          WelEenStelling := waar
      ANDERS ALS φ gelijk is aan formule n in
      de uitvoer van het niet-stellingen-programma DAN
          GeenStelling := waar;
      n := n + 1
  TOTDAT WelEenStelling of GeenStelling;
  ALS WelEenStelling DAN schrijf (φ, ' is een stelling.')
  ANDERS schrijf (φ, ' is geen stelling.')
EINDE.
```

Het bestaan van zo'n beslissingsprogramma is in strijd met de stelling van Church, dus de aanname dat de verzameling niet-stellingen van de predikatenlogica kan worden opgesomd moet worden verworpen. ■

6.9 Volledige en onvolledige theorieën

Om nog iets naders te kunnen zeggen over de eisen waaraan een predikatenlogische theorie moet voldoen om beslisbaar te zijn voeren we nu een nieuw begrip in.

Definitie 6.18 *Een theorie T heet* **volledig** *wanneer voor elke zin φ van de taal geldt: $T \vdash \varphi$ of $T \vdash \neg\varphi$.*

Merk op dat deze definitie betrekking heeft op de *zinnen* (dat wil zeggen: de gesloten formules) van een theorie. Het is niet redelijk om van een theorie te verwachten dat ook voor open formules (zoals Rxy) geldt dat ofwel de formule zelf ofwel zijn negatie afleidbaar is. We hoeven niet bang te zijn dat er door deze beperking interessante formules uit de boot vallen, want (zoals u gemakkelijk kunt nagaan): als een of andere open formule φ afleidbaar is uit een theorie T, dan is zijn *universele afsluiting* (dat wil zeggen:

het resultaat van universeel kwantificeren over alle variabelen die vrij in φ voorkomen) ook afleidbaar uit T.

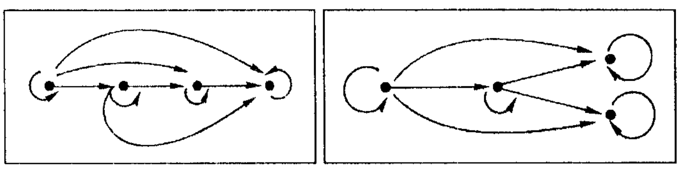
Was de eis van consistentie een soort minimum-eis die aan theorieën kan worden gesteld, *volledigheid* is een maximum-eis, en er is slechts een select gezelschap van theorieën dat eraan voldoet.

Opdracht 6.44 *Bewijs dat voor wat betreft gesloten formules:*

T is consistent en volledig $\iff$ $\overline{T}$ is maximaal consistent.

Let op: het begrip *volledigheid* dat hier wordt geïntroduceerd is een *ander* begrip dan de notie die we in de paragrafen 5.8 en 6.8 hebben gebruikt. Het is ook verschillend van het begrip *functionele volledigheid* uit § 5.9. De predikatenlogica is *volledig* in de zin dat predikatenlogische geldigheid predikatenlogische bewijsbaarheid impliceert, maar de predikatenlogische theorie $\emptyset$ is niet volledig in de zin van de zojuist gegeven definitie van volledigheid voor theorieën.

De theorie van de partiële ordes is ook niet volledig. Hier zijn twee voorbeelden van structuren die aan de niet-logische axioma's van de theorie voldoen; in de ene is de zin $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$ waar, in de andere niet. Beide structuren zijn partiële ordes.



Kennelijk zit noch $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$ noch $\neg\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$ in de deductieve afsluiting van de theorie van de partiële ordes. U gelieve zelf na te gaan waar deze conclusie op berust.

We stellen hier zonder bewijs dat de theorie van de dichte onbegrensde lineaire ordes volledig is. Voor het bewijs is een modeltheoretische exercitie nodig die buiten het bestek van dit boek valt. Hieruit, in combinatie met het feit dat de theorie in kwestie een eindige verzameling axioma's heeft, volgt de beslisbaarheid van de theorie, met behulp van de volgende stelling.

Stelling 6.10 *Als theorie T eindig geaxiomatiseerd is en volledig, dan is T beslisbaar.*

Bewijs: Omdat T eindig geaxiomatiseerd is mogen we aannemen dat de verzameling

$$\{\varphi \mid \varphi \text{ is een gesloten formule en } T \vdash \varphi\}$$

opsombaar is. Er is dus een programma dat de gesloten formules in de deductieve afsluiting van T opsomt. Uit de volledigheid van T volgt nu dat het volgende programma een beslissingsprogramma is voor de gesloten formules die uit T afleidbaar zijn. Neem weer aan dat φ een variabele is die een ingelezen formule bevat; *WelAfleidbaar* en *NietAfleidbaar* zijn boolese variabelen):

```
BEGIN
  n := 0;
  WelAfleidbaar := onwaar;
  NietAfleidbaar := onwaar;
  HERHAAL
      ALS φ gelijk is aan formule n in de uitvoer van
      het opsom-programma DAN
          WelAfleidbaar := waar;
      ANDERS
          BEGIN
              {in de nu volgende opdracht slaat 'concatenatie'
              op het aan-elkaar-plakken van schrijftekens: }
              ALS concatenatie('¬', φ) gelijk is
              aan formule n in de uitvoer
              van het opsom-programma DAN NietAfleidbaar := waar
          EINDE;
      n := n + 1
  TOTDAT WelAfleidbaar of NietAfleidbaar;
  ALS WelAfleidbaar DAN schrijf ( φ, ' is afleidbaar.')
  ANDERS schrijf (φ, ' is niet afleidbaar.')
EINDE.
```

Hiermee is het bewijs van de stelling geleverd. ∎

Deze stelling laat zien dat volledige theorieën, mits ze overzichtelijk zijn geaxiomatiseerd (in feite hoeft de verzameling axioma's niet eindig te zijn, als ze maar beslisbaar is), 'geknipt zijn voor de computer'. Echter, zulke theorieën zijn schaars. Voor logici en wiskundigen is dat trouwens maar gelukkig ook, want anders zou er, als we de computers eenmaal geprogrammeerd hebben voor de beslisprocedures van de wiskundige theorieën die ons interesseren, voor hen weinig meer te doen zijn.

Zoals Kurt Gödel in 1931 bewees: PA en ZF zijn *niet* volledig (mits ze consistent zijn). Dit zijn de beroemde *onvolledigheidsresultaten* van Gödel. De precieze gedachtengang vindt u weer in [Enderton 1972]. Meer populaire versies zijn te vinden in [Nagel & Newman 1975] en [Hofstadter 1979]. We geven een zeer beknopte samenvatting.

PA, de Peano-axiomatisering van de rekenkunde, is een verzameling axioma's die bedoeld is om de structuur bestaande uit de verzameling **N**, met daarop de rekenkundige operaties, te beschrijven. Deze structuur duiden we voor het gemak aan met **N**. Om aan te tonen dat PA onvolledig is, aangenomen dat deze theorie consistent is, construeert Gödel een zin ψ zo dat PA $\nvdash \psi$, en zo dat ψ *waar* is voor de natuurlijke getallen (dat wil zeggen: $\mathbf{N} \models \psi$). Waarom impliceert het bestaan van deze ψ dat PA onvolledig is? Dat zit zo. Uit de volledigheid van de predikatenlogica volgt: als PA $\vdash \neg\psi$, dan PA $\models \neg\psi$. Maar vanwege het feit dat $\mathbf{N} \models$ PA (alle Peano-axioma's zijn waar op de natuurlijke getallen) hebben we: $\mathbf{N} \models \neg\psi$, en dit is in strijd met het gegeven dat ψ waar was voor de natuurlijke getallen. Dus kan $\neg\psi$ niet afleidbaar zijn uit PA.

Een voor de hand liggende opmerking is nu: blijkbaar was PA te 'zuinig' als axiomatisering van de rekenkunde; laten we gewoon ψ aan de verzameling niet-logische axioma's toevoegen, en klaar. Dit lukt echter niet. Gödels constructievoorschrift is zo universeel dat voor PA $\cup \{\psi\}$, de nieuwe theorie, weer een nieuwe voortvluchtige formule ψ' te construeren valt zodanig dat PA $\cup \{\psi\} \nvdash \psi'$ en $\mathbf{N} \models \psi'$, enzovoorts.

Het basisidee achter de constructie van Gödels zin ψ stamt uit de filosofie van de Oudheid. Gödels zin houdt verband met de zogenaamde 'Leugenaar-paradox' van de stoïcijnen (± 300 voor Christus). Epimenides de Cretenzer zegt: "Alle Cretenzers liegen (altijd)". Deze bewering kan niet waar zijn. Immers, als Epimenides de waarheid spreekt, dan kunnen we uit de inhoud van zijn uitspraak afleiden dat Epimenides—zelf een Cretenzer—altijd liegt, dus dan is zijn uitspraak niet waar, en hebben we een tegenspraak. De uitspraak van Epimenides weerlegt dus zichzelf. Dit is een voorbeeld van wat we een 'halve' paradox zouden kunnen noemen, in tegenstelling tot een 'volkomen' paradox als de Russell-paradox die we in § 6.7 zijn tegengekomen. Bij een 'volkomen' paradox leidt zowel de aanname dat zekere bewering waar is als de aanname dat ze onwaar is tot een tegenspraak. Gödel had voor zijn onvolledigheids-redenering een halve paradox nodig omdat hij één vluchtweg wilde afsluiten: de halve paradox dient om de mogelijkheid uit te sluiten dat de formule ψ waar het verhaal om draait afleidbaar is in PA.

Opdracht 6.45 *Laat zien dat "Dit boek bevat fouten" een voorbeeld is van een halve paradox.*

Het is overigens niet moeilijk de leugenaar-paradox zo te herformuleren dat het een volkomen paradox wordt. "Ik lieg nu", en "Deze zin is onwaar" zijn voorbeelden van volkomen paradoxen.

Opdracht 6.46 *Laat zien dat de bewering "Deze zin is onwaar" een volkomen paradox is.*

Liefhebbers van paradoxen moeten [Hughes & Becht 1978] lezen; fraaie puzzelvariaties op de leugenaarparadox zijn te vinden in [Smullyan 1978] en [Smullyan 1982]. Dit laatste boek biedt een smeuïge en informele inleiding in de achtergronden van Gödel's onvolledigheids-resultaten.

Gödels bewering ψ maakt gebruik van het feit dat de theorie van de rekenkunde rijk genoeg is om—door middel van een geschikte *codering*—met behulp van rekenkundige zinnen te kunnen praten over de *bewijsbaarheid* van andere rekenkundige zinnen. De leugenaarparadox krijgt nu de volgende vorm: ψ drukt uit dat *hijzelf* niet in PA afleidbaar is. Met andere woorden:

$$\psi = \text{“PA} \nvdash \psi\text{”}.$$

Als PA $\vdash \psi$, dan is ψ waar (dat wil zeggen $\mathbf{N} \models \psi$), want de stellingen van PA zijn ware beweringen over de natuurlijke getallen, en dus weten we, op grond van wat ψ uitdrukt, dat PA $\nvdash \psi$, en we hebben een tegenspraak. Dus moet gelden:

$$\text{PA} \nvdash \psi.$$

Maar dit is nu juist wat ψ zelf uitdrukte. Vanwege de volledigheid van de predikatenlogica volgt hieruit: ψ is waar. Als ψ waar is, dan kan $\neg\psi$ niet waar zijn, en wat niet waar is, is niet bewijsbaar (anders zouden de PA-axioma's niet *correct* zijn). Dus hebben we ook:

$$\text{PA} \nvdash \neg\psi.$$

Zo, een grovere schets is haast niet denkbaar, maar toch laten we het hierbij. U heeft nu de grote lijn van de onvolledigheidsstelling van Gödel gezien, en als u nieuwsgierig bent geworden naar de technische details kunt u de genoemde literatuur raadplegen. We besluiten met een opdracht die een variant is op een raadsel uit [Smullyan 1982]:

Opdracht 6.47 *Een* Gödel-schrijfmachine *is een schrijfmachine die door middel van het afdrukken van symbolen beweringen doet over zijn eigen afdruk-mogelijkheden. We nemen aan dat de machine correcte uitspraken doet over wat hij kan afdrukken. Met andere woorden: wanneer de machine zegt dat hij een rijtje symbolen wel of niet kan afdrukken, dan is dat ook zo.*

De machine gebruikt alleen de tekens `A`, `N` *en* `V`. *Om te kunnen omschrijven wat de betekenis is hebben we een metavariabele X nodig voor rijtjes symbolen uit* $\{\mathtt{A}, \mathtt{N}, \mathtt{V}\}$. *Als X een rijtje is, dan noemen we XX de verdubbeling van X. De betekenis van de rijtjes die de machine afdrukt wordt gegeven door de volgende clausules:*

- $\mathtt{A}X$ *is waar desda het rijtje X afdrukbaar is.*
- $\mathtt{NA}X$ *is waar desda het rijtje X niet afdrukbaar is.*

- $\mathtt{VA}X$ *is waar desda de verdubbeling van* X *afdrukbaar is.*
- $\mathtt{VNA}X$ *is waar desda de verdubbeling van* X *niet afdrukbaar is.*

Wat is nu de simpelste ware bewering, uitgedrukt als een rijtje van tekens uit $\{\mathtt{A}, \mathtt{N}, \mathtt{V}\}$, *die de machine* niet *kan afdrukken?*