Hints 1.8

Logica v. I.

Opg 1. Steeds toepassen van: $A = B$ ddan als $A \subseteq B$ ($x \in A \Rightarrow x \in B$ voor alle x) en $B \subseteq A$ ($x \in B \Rightarrow x \in A$ voor alle x).

Vb. Voor $R, S \subseteq A \times B$: $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

Bewijs $(a,b) \in (R-S)^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R-S$

$\Rightarrow (b,a) \in R$ maar $(b,a) \notin S$

$\Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$ maar $(a,b) \notin S^{-1}$

$\Rightarrow (a,b) \in R^{-1} - S^{-1}$

en omgekeerd

Opg 2. $Q \circ (R \circ S) = (Q \circ R) \circ S$ als boven.

$Q \circ R$ mogelijk $\neq R \circ Q$ met bijv $Q = \{(1,2)\}$ en $R = \{(2,3)\}$

term 'commutative' lijkt niet gedefinieerd in tekst dus zal gevraagd worden

Opg 3. Ala opg 1

Opg 4. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ als opg 1.

$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$ voor $R \subseteq A \times B$, $S, T \subseteq B \times C$

stel $(a,c) \in R \circ (S \cap T)$. Dan aRb en $b(S \cap T)c$, dus aRb en bSc en bTc, dus $(a,c) \in R \circ S$ en $\in R \circ T$.

$\subsetneq$ bijv met $R = \{(1,2),(1,3)\}$, $S = \{(2,3),(2,4)\}$ en $T = \{(2,3),(3,4)\}$

$R \circ (S-T) \supseteq (R \circ S) - (R \circ T)$

stel $(a,c) \in (R \circ S) - (R \circ T)$. Dan aRb en bSc maar voor geen d is aRd en dTc. Dus aRb en bSc maar niet aRb en bTc (neem $d = b$), ofwel aRb en $b(S-T)c$.

$\supsetneq$ met zelfde R, S, T als hierboven

Opg 5. Als opg 1

Opg 6. Uit de definities.

Opg 7. (A moet R zijn.) R reflexive $\Rightarrow (a,a) \in R \Rightarrow R \cap R^{-1} \neq \emptyset$ (mits $A \neq \emptyset$), dus niet asymmetrisch. Dito omgekeerd: R asymmetrisch, stel $I_A \cap R \neq \emptyset$, dan $(a,a) \in R$ voor een a. Etc.

Merk op: R irreflexive en transitief $\Rightarrow R$ asymmetrisch

R irreflexive en antisymmetric $\Rightarrow R$ asymmetrisch

Opg 8. Oefening in aftelling.

(a) 1^e manier: A, B aftelb oneindig $\Rightarrow A \times B$ aftelb oneindig, met zelfde bewijs als voor $\mathbb{N}^2$. Dan volgen $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$, etc.
2^e manier: codeer $(n_1, \ldots, n_k)$ als $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, met $p_1, \ldots, p_k$ de eerste k priemgetallen. Dit geeft een injectie van $\mathbb{N}^k$ in $\mathbb{N}$, dus $\mathbb{N}^k \preceq \mathbb{N}$. Dan $\mathbb{N}^k \equiv \mathbb{N}$.

(b) In stap i: som op i^{de} element (in de opsomming) van A_0, ..., 1^{ste} element van A_{i-1}, voorzover de elementen bestaan.

(c) Neem A_i = "de rijtjes van i natuurlijke getallen" $\approx \mathbb{N}^i$, en pas vorige toe.

Opg 9. Dit oefent het diagonaal argument, steeds met contradictie.

(a) Stel $r_1, r_2, \cdots$ is een aftelling van $\mathbb{N}^\omega$. Maak een rijtje r als volgt: i^{de} element van r = (i^{de} element van r_i) + 1. Rijtje r moet in de opsomming voorkomen, zeg $r = r_k$. Dan contradictie.

(b) Stel $r_1, r_2, \cdots$ is een aftelling van de relaties $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Maak een relatie $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ met $(i, x) \in r \Longleftrightarrow (i, x) \notin r_i$ (willek i, x). Relatie r moet in de opsomming voorkomen, zeg $r = r_k$. Dan contradictie op de elementen (k, x).

(c) Speciaal geval van (b).