5.7 Axiomatiek

In de paragrafen hierboven hebben we het zogenaamde *semantische perspectief* op propositielogica uiteengezet. De semantische kijk op tautologieën karakteriseert een tautologie als een formule die waar is voor alle interpretaties van de propositieletters. In dezelfde geest geeft het semantische perspectief een karakterisering van logisch geldige redeneringen. In § 5.6 hebben we een gestroomlijnde semantische testmethode voor geldigheid en tautologie-zijn gepresenteerd. Naast het semantische perspectief op redeneren bestaat er nog een heel andere kijk, met een veel langere traditie, het zogenaamde *afleidingsperspectief*.

In het afleidingsperspectief wordt een aantal *axioma's* als uitgangspunt gekozen, en uit die axioma's worden met behulp van zogenaamde *afleidingsregels* nieuwe formules afgeleid, de zogenaamde *stellingen*. Bij het afleiden van een conclusie φ uit een verzameling premissen $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ is het nu de kunst om, met behulp van de afleidingsregels, φ af te leiden uit de axioma's plus de premissenverzameling.

Een verzameling axioma's plus een verzameling afleidingsregels heet een *deductief systeem* (of: een *axiomatiek*, een *axiomatische calculus*, of kortweg een *calculus*). We geven een deductief systeem S voor de propositielogische taal $\mathcal{T}$.

Definitie 5.11 *Formules van de volgende vormen zijn* **axioma's** *van de propositielogica.*

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

Niets anders is een axioma.

Merk op dat er oneindig veel axioma's zijn.

Opdracht 5.37 *Ga na waarom de volgende formules axioma's zijn:*

1. $p \to (p \to p)$
2. $(p \to q) \to (p \to (p \to q))$
3. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$
4. $(p \to (q \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to (p \to (p \to q)))$
5. $(\neg\neg p \to \neg(q \to r)) \to ((q \to r) \to \neg p)$.

We nemen aan dat het deductieve systeem slechts één enkele afleidingsregel kent. Die regel is *Modus Ponens*:

> *Als φ is afgeleid en $(\varphi \to \psi)$ is afgeleid, dan mag ook ψ worden afgeleid.*

We gaan nu een formele definitie geven van het begrip *afleiding* (Engels: *derivation*) in een deductief systeem. Iets preciezer gezegd: we definiëren het begrip "afleiding in deductief systeem S uit formuleverzameling Σ". Informeel komt de definitie neer op het volgende: een afleiding uit een formuleverzameling Σ is een eindig geordend rijtje formules, waarbij geldt: elke formule in het rijtje is een axioma, of een formule uit Σ, of een formule die met behulp van een afleidingsregel is verkregen uit voorafgaande formules in het rijtje. Een afleiding binnen S waarbij geen extra premissen worden gebruikt noemen we een *stelling* van S.

We zullen straks gaan demonstreren hoe je *in* en *over* het deductieve systeem S kunt redeneren, maar eerst voeren we wat nieuwe notatie in. De notatie voor "φ is afleidbaar uit formuleverzameling Σ" wordt:

$$\Sigma \vdash \varphi.$$

Wanneer we te maken hebben met een eindige verzameling Σ die bestaat uit formules $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ wordt ook wel de volgende notatie gebruikt

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$$

in plaats van:

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi.$$

De notatie voor "φ is een stelling van het systeem" wordt:

$$\vdash \varphi.$$

Hier is een voorbeeld van een heel simpele afleiding binnen het zojuist gepresenteerde deductieve systeem S; de afleiding laat zien dat de formule r afleidbaar is uit de twee premissen $q \to r$ en $(p \to (p \to p)) \to q$.

Stelling 5.2 *Er geldt:* $q \to r, (p \to (p \to p)) \to q \vdash r$.

Bewijs:

1	$p \to (p \to p)$	[ax 1]
2	$(p \to (p \to p)) \to q$	[premisse]
3	q	[MP uit 1 en 2]
4	$q \to r$	[premisse]
5	r	[MP uit 3 en 4].

Bij elke formule uit het rijtje is aangegeven hoe we eraan komen: de eerste formule is een axioma volgens schema 1; de tweede formule is element van de premissen-verzameling; de derde is door Modus Ponens verkregen uit de eerste en de tweede; de vierde is weer een premisse; en de vijfde, de uiteindelijke conclusie, is verkregen door Modus Ponens uit de derde en de vierde. ∎

Nog een voorbeeld, om te laten zien dat p afleidbaar is uit de twee premissen $\neg p \rightarrow \neg q$ en q.

Stelling 5.3 *Er geldt:* $\neg p \rightarrow \neg q, q \vdash p$.

Bewijs:

1	$\neg p \rightarrow \neg q$	[premisse]
2	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	[ax 3]
3	$q \rightarrow p$	[MP uit 1 en 2]
4	q	[premisse]
5	p	[MP uit 3 en 4].

Hiermee is de stelling bewezen. ∎

Het begrip *afleiding binnen een deductief systeem* schreeuwt natuurlijk om een recursieve definitie. We definiëren recursief de verzameling $\text{AFL}_{S,\Sigma}$ van alle afleidingen binnen deductief systeem S uit formule-verzameling Σ.

Definitie 5.12 *De verzameling $AFL_{S,\Sigma}$ van alle afleidingen binnen deductief systeem S uit formule-verzameling Σ:*

- *Als φ een axioma is van S of een lid van Σ, dan is $\langle\varphi\rangle$ een lid van $AFL_{S,\Sigma}$.*
- *Als $\langle\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle$ een lid is van $AFL_{S,\Sigma}$, en φ is een axioma van S, een lid van Σ, of een formule die met behulp van een afleidingsregel uit S verkregen is uit formules in $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, dan is $\langle\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi\rangle$ ook een lid van $AFL_{S,\Sigma}$.*
- *Niets anders is een lid van $AFL_{S,\Sigma}$.*

De formules die voorkomen als laatste element van een lid van $\text{AFL}_{S,\Sigma}$ heten *afleidbaar* in S uit Σ. We kunnen Σ hier zien als een verzameling waaruit de premissen voor de afleiding mogen worden gekozen. Als Σ eindig is, is Σ dus een verzameling $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ van formules . In het algemeen hoeft Σ echter geen eindige verzameling te zijn.

Een speciaal geval hebben we wanneer Σ gelijk is aan de lege verzameling.

Definitie 5.13 *De formules die in een deductief systeem S afleidbaar zijn uit de lege verzameling heten de* **stellingen** *(Engels:* theorems*) van S.*

Met andere woorden: de stellingen van een deductief systeem S zijn alle formules die voorkomen als laatste element van zeker lid van $\mathrm{AFL}_{S,\emptyset}$. Merk op dat elk axioma van systeem S een stelling is van het systeem.

Definitie 5.14 *Een afleiding in S uit de lege verzameling heet een* **bewijs** *in S (Engels:* proof *in S).*

De bovenstaande definities waren voor willekeurige deductieve systemen. Vanaf nu concentreren we ons weer op het deductieve systeem voor de propositielogica waarvoor we hierboven de axioma's en de redeneerregel hebben gegeven. Overigens zijn er meerdere deductieve systemen voor de propositielogica mogelijk die equivalent zijn met het systeem dat wij hier hebben gepresenteerd, in de zin dat ze precies dezelfde verzameling stellingen opleveren.

Hier is een heel simpel voorbeeld van een bewijs van een stelling binnen ons deductieve systeem voor de propositielogica:

Stelling 5.4 *Er geldt:* $\vdash p \rightarrow (p \rightarrow p)$.

Bewijs:

$$1 \quad p \rightarrow (p \rightarrow p) \quad [\text{ax } 1].$$

Deze afleiding toont aan dat $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ een stelling is in het deductieve systeem. ■

Het systeem dat hierboven gegeven is, gebruikt een minimum aan axioma's en redeneerregels. Het geven van een zo zuinig systeem heeft als voordeel dat redeneren *over* het systeem gemakkelijk is. Het nadeel is dat het leveren van afleidingen *binnen* het systeem in eerste instantie wat lastiger is dan bij een systeem met meerdere afleidingsregels. Je moet nu eerst extra redeneerhulpmiddelen gaan fabriceren: iedere stelling die je hebt bewezen mag vanaf dat moment worden gebruikt als was het een axioma.

Opdracht 5.38 *Zij gegeven de premissenverzameling* $\{\neg\neg q \rightarrow \neg\neg p, q\}$. *Leid hieruit de formule p af. Met andere woorden: laat zien dat*

$$\neg\neg q \rightarrow \neg\neg p, q \vdash p.$$

Opdracht 5.39 *Toon aan:* $p, q, r, p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \vdash s$.

Opdracht 5.40 *Toon aan:* $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$.

Het zo precies uitspellen van de definitie van *afleiding* (en daarmee samenhangend: die van *stelling*) als we hierboven gedaan hebben lijkt misschien pedant of anderszins overdreven, maar een recursieve formulering van het begrip *afleiding* is van belang wanneer we gaan redeneren *over* ons deductieve systeem: de recursieve definitie van *afleiding* maakt het mogelijk inductieve bewijzen te gaan leveren van zogenaamde *metastellingen* (Engels: metatheorems), stellingen *over* het deductieve systeem, die moeten worden onderscheiden van de stellingen *van* het systeem.

We geven nu eerst nog een voorbeeld van een redenering *binnen* het systeem. Een bewijs voor $\varphi \to \varphi$ gaat als volgt (schrikt u vooral niet):

Stelling 5.5 *In het systeem S voor de propositielogica geldt voor elke formule φ het volgende:* $\vdash \varphi \to \varphi$.

Bewijs:

1	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	[ax 1, met $(\varphi \to \varphi)$ voor ψ]
2	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ $\to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	[ax 2, met $(\varphi \to \varphi)$ voor ψ]
3	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	[MP uit 1 en 2]
4	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	[ax 1, met φ voor ψ]
5	$\varphi \to \varphi$	[MP uit 3 en 4].

Hiermee is het bewijs geleverd. ∎

Opmerking: dit is eigenlijk geen bewijs in het systeem S, maar een bewijs*stramien*; elke invulling van een formule voor φ levert een bewijs op (vandaar dat het verhaal voor elke formule φ opgaat). φ is weer een metavariabele.

Als u toch geschrokken bent van dit bewijs: zo'n afleiding construeer je natuurlijk niet van voor naar achter, maar *andersom*. Je constateert eerst dat $\varphi \to \varphi$ zelf geen axioma is, maar $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ wel. Dus zijn we klaar als we $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ kunnen aantonen. Maar dat volgt weer uit het axioma

$$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$$

plus het axioma

$$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$$

en klaar.

Goed, dit was een laatste voorbeeld van een afleiding *binnen* het systeem. Nu een voorbeeld van redeneren *over* het systeem. We zullen een metastelling bewijzen, de zogenaamde *deductiestelling*. In het bewijs van deze stelling wordt gebruik gemaakt van *inductie*, en wel als volgt. We laten eerst zien dat een bepaalde eigenschap geldt voor afleidingen van lengte 1 (dat wil zeggen afleidingen die uit een enkele formule bestaan; de afleiding van $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ die we boven hebben gegeven is een voorbeeld). Dit is de basisstap in het inductie-bewijs. Daarna laten we zien dat *als* de eigenschap geldt voor afleidingen waarvan de lengte niet groter is dan n, *dan* geldt hij ook voor afleidingen van lengte $n+1$. Dat is de inductie-stap. Omdat de inductie-redenering betrekking heeft op de lengte van de afleiding noemen we dit: *inductie naar de lengte van een afleiding*. In § 5.4 hebben we kennisgemaakt met *inductie naar de complexiteit van een formule*, in het bewijs dat de welgevormde formules van een propositielogische taal in standaardnotatie evenveel linker- als rechter-haakjes hebben.

Stelling 5.6 (Deductiestelling) *Als* $\varphi \vdash \psi$, *dan* $\vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Bewijs: We gebruiken inductie *naar de lengte van de afleiding* van ψ uit φ, dat wil zeggen van het bewijs van $\varphi \vdash \psi$.

- **basisstap:** De lengte van de afleiding is 1, dus: ofwel ψ is een axioma, of $\psi = \varphi$. In het eerste geval is

1	ψ	[axioma volgens gegeven]
2	$\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	[ax 1]
3	$\varphi \rightarrow \psi$	[MP uit 1 en 2].

  de gevraagde afleiding van $\varphi \rightarrow \psi$, in het tweede geval moeten we $\varphi \rightarrow \varphi$ bewijzen. Dat hebben we in stelling 5.5 al gedaan, dus: klaar. Dit was het basisgeval.

- **inductiestap:** De inductiehypothese luidt: de bewering geldt voor alle paren φ, ψ waarbij de lengte van de afleiding van ψ uit φ niet groter is dan n. We bekijken nu een paar φ, ψ waarbij ψ in $n+1$ stappen uit φ is afgeleid. Er zijn drie mogelijkheden:

  1. ψ is een axioma. Bewijs nu $\varphi \rightarrow \psi$ als in de basisstap.
  2. $\psi = \varphi$. Bewijs $\varphi \rightarrow \psi$ als in de basisstap.
  3. ψ komt via MP uit eerdere χ, $\chi \rightarrow \psi$ in de afleiding.
     In dit laatste geval is het recept voor de afleiding van $\varphi \rightarrow \psi$ als volgt. Merk eerst op dat op χ en $\chi \rightarrow \psi$ de inductiehypothese van toepassing is. We hebben dus: $\vdash \varphi \rightarrow \chi$ en $\vdash \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$. De afleiding voor $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ is nu:

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \\
\varphi \to \chi & \text{[de afleiding van } \varphi \to \chi\text{]} \\
\vdots & \\
\varphi \to (\chi \to \psi) & \text{[de afleiding van } \varphi \to (\chi \to \psi)\text{]} \\
(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to & \\
\quad ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)) & \text{[ax 2]} \\
(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) & \text{[MP uit voorafgaande formules]} \\
\varphi \to \psi. & \text{[nogmaals MP]}
\end{array}
$$

Dit is de gevraagde afleiding, en hiermee is de deductiestelling rond. ∎

Opdracht 5.41 *Lever een bewijs van het omgekeerde van de deductiestelling:* "als $\vdash \varphi \to \psi$ dan $\varphi \vdash \psi$".

De deductiestelling kan het redeneren binnen het systeem gemakkelijker maken omdat we haar mogen gebruiken als extra afleidingsregel. Voordat we dat gaan demonstreren roepen we u op om zelf een versterking van de deductiestelling te bewijzen:

Opdracht 5.42 *Werk het bewijs van de deductiestelling uit tot een bewijs voor een meer algemene variant van deze stelling die het volgende zegt:*

$$\textit{Als } \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \vdash \psi \textit{ dan } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash (\varphi_{n+1} \to \psi).$$

We zullen de versterkte versie van de deductiestelling gebruiken om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 5.7 $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$.

Bewijs: Om dit te laten zien hoeven we volgens de deductiestelling (versie uit opdracht 5.42) alleen het volgende aan te tonen:

$$\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \vdash \chi.$$

Dit is simpel:

1	φ	[gegeven]
2	$\varphi \to \psi$	[gegeven]
3	ψ	[MP uit 1 en 2]
4	$\psi \to \chi$	[gegeven]
5	χ	[MP uit 3 en 4].

Hiermee is de stelling bewezen. ∎

5.8 Beslisbaarheid, correctheid, volledigheid

Het zogenaamde *beslisbaarheidsprobleem* voor de propositielogica is de volgende vraag: bestaat er een mechanische procedure die, voor een willekeurige formule φ van de propositielogica, kan uitmaken of die formule een tautologie is? We hebben niet precies omschreven wat een mechanische procedure is, maar we mogen het beslisbaarheidsprobleem hier wel even als volgt parafraseren: valt er een **Pascal**-computerprogramma te schrijven dat, nadat ik een willekeurige formule heb ingetikt, in een eindige hoeveelheid tijd kan uitmaken of die formule een tautologie is? Het antwoord is: ja. De waarheidstafelmethode en de semantische tableau-methode zijn methoden die met niet al te veel moeite zijn om te zetten in computerprogramma's: voor allebei deze werkwijzen geldt dat ze bestaan uit domweg regeltjes toepassen, en het gestelde probleem wordt beantwoord. Dus: de propositielogica is beslisbaar.

We komen nu toe aan de hamvraag die kan worden gesteld met betrekking tot het semantische perspectief en het afleidingsperspectief op propositielogisch redeneren: dekken de centrale begrippen uit het eerste perspectief (logisch gevolg) en die uit het tweede perspectief (afleidbaar uit) elkaar? Ofwel: dekken $\models$ en $\vdash$ elkaar? Deze vraag valt in twee onderdelen uiteen:

- **Ten eerste:** geldt *als* $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ *dan* $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$?

Dit is de vraag naar de *correctheid* van het deductieve systeem. Een systeem is correct als geen enkele gevolgtrekking waarvoor in het systeem een afleiding kan worden gevonden logisch ongeldig blijkt te zijn.

Dat het in § 5.7 gegeven deductieve systeem voor de propositielogica correct is, is niet zo moeilijk te bewijzen. Gebruik waarheidstafels of semantische tableaus om te laten zien dat alle axioma's tautologieën zijn, en dus ook: logische gevolgen van elke premissenverzameling. Toon vervolgens aan dat Modus Ponens de eigenschap van logisch-gevolg-zijn van een gegeven premissenverzameling bewaart.

Opdracht 5.43 *Werk deze schets van het bewijs van de correctheid van ons deductief systeem voor de propositielogica uit.*

Correctheid is heel handig wanneer we willen aantonen dat $\psi_1, \ldots, \psi_n \nvdash \varphi$. Het feit dat u of wij er niet in slagen om een afleiding van φ uit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ te vinden bewijst immers niet er niet zo'n afleiding bestaat ... Maar een tegenvoorbeeld voor $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ is in het algemeen snel gevonden. En *correctheid* zegt dan dat uit $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$ volgt dat $\psi_1, \ldots, \psi_n \nvdash \varphi$.

Er is echter nog een tweede onderdeel van de vraag naar de verhouding tussen $\vdash$ en $\models$.

- **Ten tweede:** geldt *als* $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$, *dan* $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$?

Dit is de vraag naar de *volledigheid* van het deductieve systeem: is het deductieve systeem rijk genoeg om voor elke willekeurige logisch geldige gevolgtrekking een afleiding te kunnen produceren?

Een eerste kleine hobbel die we moeten nemen heeft te maken met het feit dat de axioma's in de boven gepresenteerde propositielogische calculus alleen gebruik maken van de voegwoorden $\neg$ en $\rightarrow$, terwijl de afleidingsregel Modus Ponens bij de axioma's aansluit door alleen gebruik te maken van het voegwoord $\rightarrow$. Een en ander betekent dat alleen formules kunnen worden afgeleid die alleen de voegwoorden $\neg$ en $\rightarrow$ bevatten. Het gebruik van alleen $\neg$ en $\rightarrow$ heeft voordelen voor het redeneren over de calculus: bij inductiebewijzen naar de complexiteit van formules hoeven we in de inductiestap maar twee gevallen te bekijken. Aan de andere kant is het handig om toch de beschikking te hebben over de andere voegwoorden, met name als we de brug tussen axiomatiek en semantiek willen slaan. De formules waarvan in de volledigheidsstelling sprake is kunnen immers de voegwoorden $\wedge$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ bevatten.

Om hier een mouw aan te passen kunnen we formules die voorkomens van $\wedge$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ bevatten beschouwen als *afkortingen* voor formules met alleen $\neg$ en $\rightarrow$. We spreken af:

- $\varphi \wedge \psi$ is een afkorting voor $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$.
- $\varphi \vee \psi$ is een afkorting voor $\neg\varphi \rightarrow \psi$.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een afkorting voor $\neg((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi))$.

U kunt gemakkelijk met behulp van waarheidstafels nagaan dat deze afkortingen de juiste betekenissen toekennen.

Ook nadat deze eerste hobbel is weggewerkt is de volledigheidsvraag veel moeilijker te beantwoorden dan de correctheidsvraag. De rest van deze paragraaf is eraan gewijd, maar wie de details bij eerste lezing wil overslaan heeft onze zegen. Wie tot volledig begrip van wat nu volgt wil geraken raden wij aan om de rest van de paragraaf niet alleen van voren naar achteren maar ook van achteren naar voren te lezen. Deze werkwijze maakt duidelijk wat de motivering is van de hulpstellingen die tot het uiteindelijke resultaat leiden.

We beginnen met het toepassen van *contrapositie*. Dit wil zeggen, we zetten de volledigheidsvraag om in:

- Geldt *als* $\psi_1, \ldots, \psi_n \nvdash \varphi$, *dan* $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$?

Om conclusies te kunnen trekken uit het feit dat een bepaalde formule *niet* afleidbaar is uit een gegeven stel premissen hebben we een flinke omweg nodig. Noem de premissenverzameling Γ. Wat we willen is een waardering vinden voor de formules van de taal die alle premissen waar maakt maar de conclusie φ onwaar. De weg die we zullen bewandelen om zo'n waardering te vinden is als volgt. We breiden de premissenverzameling eerst uit met de negatie van de conclusie. Dit geeft de verzameling $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Deze verzameling breiden we vervolgens verder uit tot een verzameling Γ^* van formules die de volgende eigenschap heeft: $\psi \in \Gamma^*$ desda $\Gamma^* \vdash \psi$. Wanneer dan ook nog uit de constructie van Γ^* volgt dat er een valuatie V is die precies de formules uit Γ^* waar maakt zijn we klaar. Die V zal de premissen uit de oorspronkelijke premissenverzameling waar maken en de conclusie onwaar, waarmee is aangetoond dat $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$.

We voeren een paar nieuwe begrippen in. Allereerst het begrip *consistentie.*

Definitie 5.15 *Een verzameling formules* Γ *heet* **consistent** *wanneer er geen formule* φ *is waarvoor zowel* $\Gamma \vdash \varphi$ *als* $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Een voorbeeld van een consistente verzameling formules is $\{p, p \vee q, \neg q\}$. Een formuleverzameling die niet consistent is heet *inconsistent*; $\{p, \neg p\}$ is een voorbeeld van een inconsistente formuleverzameling.

Opdracht 5.44 *Laat zien: als een formuleverzameling* Γ *inconsistent is, dan is elke* Γ' *zo dat* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *eveneens inconsistent.*

We bewijzen nu een paar stellingen die ons iets meer vertellen over het zojuist gedefinieerde begrip *consistentie.*

Stelling 5.8 *Een formuleverzameling* Γ *is consistent desda er een formule* φ *te vinden is zodat* $\Gamma \nvdash \varphi$.

Bewijs: De stelling bestaat uit twee onderdelen. Ten eerste: als Γ consistent is, dan is er een φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$. Ten tweede: als $\Gamma \nvdash \varphi$ dan is Γ consistent.

Het eerste is gemakkelijk. Als Γ consistent is, dan is er per definitie geen φ te vinden zo dat zowel φ zelf als zijn negatie afleidbaar is uit Γ. Neem dus een willekeurige formule φ. Ofwel $\Gamma \nvdash \varphi$, en klaar, ofwel: $\Gamma \vdash \varphi$ en daaruit volgt dat $\Gamma \nvdash \neg\varphi$, en ook klaar.

Nu de andere richting. Stel er is een φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$. We moeten nu laten zien dat Γ consistent is, dat wil zeggen dat er geen ψ is waarvoor $\Gamma \vdash \psi$ en $\Gamma \vdash \neg\psi$. Veronderstel even dat er wel zo'n ψ is: we hebben dan $\Gamma \vdash \psi$ en $\Gamma \vdash \neg\psi$. Als we nu kunnen laten zien dat $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, dan hebben we ook $\Gamma \vdash \varphi$ (tweemaal Modus Ponens), en dus een tegenspraak met het gegeven dat $\Gamma \nvdash \varphi$. We mogen dan concluderen dat de aanname dat Γ inconsistent is niet klopt, en we zijn klaar. (Dit is weer een *reductio ad absurdum.*)

We laten nu zien dat

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$$

en dus zeker:

$$\Gamma \vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

In stelling 5.7 hebben we bewezen dat

$$\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi.$$

We gebruiken dit hulpresultaat in de verlangde afleiding:

1	$\neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	[ax 1]
2	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	[ax 2]
3	$\neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	[hulpresultaat toegepast op 1 en 2].

En klaar. Hiermee is de stelling bewezen. ■

Opdracht 5.45 *Laat met behulp van stelling 5.8 zien dat de verzameling van alle propositieletters van een propositielogische taal $\mathcal{T}$ consistent is.*

Stelling 5.9 *Als $\Gamma \nvdash \varphi$ dan is $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ consistent.*

Bewijs: Neem aan dat $\Gamma \nvdash \varphi$. Dan is Γ kennelijk consistent (stelling 5.8). We doen nu weer een *reductio ad absurdum*. Veronderstel dat $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inconsistent is. Dan volgt uit stelling 5.8 dat

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\alpha$$

voor een willekeurig propositielogisch axioma α. Toepassen van de deductiestelling levert nu: $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\alpha$. Hieruit volgt, met behulp van axiomaschema 3: $\Gamma \vdash \alpha \to \varphi$. Maar α was een axioma, dus we hebben zeker $\Gamma \vdash \alpha$, zodat we met Modus Ponens kunnen concluderen: $\Gamma \vdash \varphi$. Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Gamma \nvdash \varphi$. Hiermee is de veronderstelling dat $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistent is weerlegd. ■

Definitie 5.16 *We noemen een formuleverzameling Γ* **maximaal consistent** *wanneer Γ de volgende twee eigenschappen heeft:*

- *Γ is consistent.*
- *Als $\Gamma \subset \Gamma'$, dan is Γ' inconsistent.*

Een maximaal consistente verzameling formules is een consistente verzameling formules waaraan geen formules meer kunnen worden toegevoegd zonder de verzameling inconsistent te maken.

Opdracht 5.46 *Laat zien: als V een waardering is voor de formules uit $\mathcal{T}$, dan is $\{\varphi \in \mathcal{T} \mid V(\varphi) = 1\}$ een maximaal consistente verzameling.*

Stelling 5.10 (Lemma van Lindenbaum) *Elke consistente verzameling Γ van propositielogische formules is bevat in een maximaal consistente formuleverzameling Γ^*.*

Bewijs: Elke propositielogische taal $\mathcal{T}$ heeft aftelbaar veel formules. We mogen daarom aannemen dat we beschikken over een aftelling

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

van alle formules van de taal. We definiëren nu, uitgaande van Γ, een rij van verzamelingen Γ_i met de eigenschap dat voor alle i: $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. De definitie gaat als volgt:

- $\Gamma_0 = \Gamma$.
- $\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} & \text{als } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ consistent is.} \\ \Gamma_i & \text{anders.} \end{cases}$

Tenslotte nemen we de limiet van deze rij door al deze formuleverzamelingen op één hoop te vegen:

- $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$.

Door inductie naar i is nu gemakkelijk in te zien dat elk van de verzamelingen Γ_i consistent is. Maar dan is ook Γ^* consistent. Stel immers van niet. Dan is er een formule ψ zo dat zowel $\Gamma^* \vdash \psi$ als $\Gamma^* \vdash \neg\psi$. Elk van deze afleidingen gebruikt slechts eindig veel premissen. Dus is er een getal m zo dat alle premissen die in een van beide afleidingen gebruikt worden in Γ_m zitten. Maar dan hebben we: $\Gamma_m \vdash \psi$ en $\Gamma_m \vdash \neg\psi$, met andere woorden Γ_m is inconsistent: een tegenspraak met wat we reeds hadden aangetoond.

Tenslotte geldt dat Γ^* maximaal consistent is. Neem een willekeurige formule ψ zo dat $\psi \notin \Gamma^*$ en beschouw de verzameling $\Gamma^* \cup \{\psi\}$. Formule ψ zit in onze aftelling van de formules van de taal, dus er is een k zo dat $\psi = \varphi_k$. Beschouw nu de stap in het constructieproces van Γ^* waar Γ_{k+1} werd gevormd. We weten dat $\varphi_k \notin \Gamma^*$, en dat kan alleen betekenen dat toevoeging van φ_k aan Γ_k de verzameling inconsistent zou hebben gemaakt. Maar dan is $\Gamma^* \cup \{\varphi_k\}$ eveneens inconsistent, want $\Gamma_k \subseteq \Gamma^*$. ■

We bewijzen nu dat maximaal consistente verzamelingen de eigenschappen hebben die nodig zijn voor het volledigheidsresultaat.

Stelling 5.11 *Als Γ een maximaal consistente formuleverzameling is dan geldt voor elke formule φ: $\varphi \in \Gamma$ desda $\Gamma \vdash \varphi$.*

Bewijs: Uiteraard geldt dat als $\varphi \in \Gamma$ dan $\Gamma \vdash \varphi$. Om het omgekeerde te bewijzen nemen we aan dat $\varphi \notin \Gamma$. Uit de maximaliteit van Γ volgt dat $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inconsistent is. Als nu $\Gamma \vdash \varphi$ dan volgt dat ook Γ inconsistent is, in tegenspraak met het gegeven omtrent Γ. Dus $\Gamma \nvdash \varphi$. ∎

Stelling 5.12 *Als Γ een maximaal consistente formuleverzameling is dan geldt voor elke formule φ: $\varphi \in \Gamma$ of $\neg\varphi \in \Gamma$.*

Bewijs: Stel voor een willekeurige formule φ dat $\neg\varphi \notin \Gamma$. Omdat Γ *maximaal* consistent is moet dus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistent zijn. Vanwege stelling 5.9 is derhalve $\Gamma \vdash \varphi$. Met stelling 5.11 volgt dat dan $\varphi \in \Gamma$. ∎

Merk op dat we deze stelling ook anders mogen formuleren: als Γ maximaal consistent is geldt dat $\varphi \in \Gamma$ desda $\neg\varphi \notin \Gamma$.

Stelling 5.13 *Als Γ een maximaal consistente formuleverzameling is, dan geldt: $\varphi \to \psi \in \Gamma$ desda (als $\varphi \in \Gamma$ dan $\psi \in \Gamma$).*

Bewijs: Neem aan dat Γ maximaal consistent is en dat $\varphi \to \psi \in \Gamma$ en $\varphi \in \Gamma$. Eenmaal toepassen van Modus Ponens geeft: $\Gamma \vdash \psi$, en met stelling 5.11 kunnen we concluderen dat $\psi \in \Gamma$.

Omgekeerd, neem aan dat Γ maximaal consistent is, en dat we weten dat voor een tweetal formules φ, ψ geldt: als $\varphi \in \Gamma$ dan $\psi \in \Gamma$. Twee mogelijkheden: ofwel ψ zit in Γ, en dan hebben we $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ (gebruik axioma $\psi \to (\varphi \to \psi)$ plus Modus Ponens), en dus $\varphi \to \psi \in \Gamma$ met stelling 5.11, ofwel φ, ψ geen van beide in Γ, en dan hebben we $\neg\varphi \in \Gamma$ met stelling 5.12, en opnieuw: $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ (gebruik axioma $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, pas Modus Ponens toe, en gebruik axiomaschema 3 plus nogmaals Modus Ponens om $\varphi \to \psi$ af te leiden), zodat ook in dit geval $\varphi \to \psi \in \Gamma$. ∎

We weten nu genoeg om te kunnen laten zien dat maximaal consistente verzamelingen geschikt zijn om de brug te slaan tussen axiomatiek en semantiek.

Stelling 5.14 *Als Γ een consistente verzameling formules is, dan is er een waardering V zo dat voor elke $\varphi \in \Gamma$: $V(\varphi) = 1$.*

Bewijs: Als Γ consistent is dan is er, zoals we hierboven hebben bewezen, een maximaal consistente Γ^* zo dat $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Neem nu de waardering V die gebaseerd is op de volgende interpretatie I voor de propositieletters van de taal $\mathcal{T}$: $I(p) = 1$ desda $p \in \Gamma^*$.

We laten zien dat voor de aldus gedefinieerde V geldt: $V(\varphi) = 1$ desda $\varphi \in \Gamma^*$. We gebruiken inductie naar de complexiteit van de formule φ.

- Basisstap: wanneer φ atomair geldt de bewering per definitie.

- Inductiestap:
  - Stel dat φ de vorm $\neg\psi$ heeft. Dan hebben we: $V(\varphi) = 1$ desda $V(\psi) = 0$ desda (inductiehypothese) $\psi \notin \Gamma^*$ desda (stelling 5.12) $\varphi \in \Gamma$.
  - Als φ de vorm $\psi \to \chi$ heeft hebben we: $V(\varphi) = 0$ desda ($V(\psi) = 1$ en $V(\chi) = 0$) desda (inductiehypothese) ($\psi \in \Gamma^*$ en $\chi \notin \Gamma^*$) desda (stelling 5.13) $\varphi \notin \Gamma^*$.

Omdat $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ hebben we: als $\varphi \in \Gamma$ dan $V(\varphi) = 1$. ∎

De volledigheidsstelling volgt nu onmiddellijk:

Stelling 5.15 (Volledigheid van de propositielogica) *Als* $\Gamma \nvdash \varphi$, *dan* $\Gamma \nvDash \varphi$.

Bewijs: Neem aan dat $\Gamma \nvdash \varphi$. Uit het feit dat formule φ niet uit Γ afleidbaar is volgt dat Γ consistent is, en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ook. Volgens stelling 5.14 is er nu een waardering V die alle formules in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ waar maakt. Deze waardering V levert een tegenvoorbeeld waarin alle formules uit Γ waar zijn terwijl φ niet waar is. ∎

De volledigheidsstelling voor de propositielogica werd in 1920 bewezen door de logicus E. Post. De methode die wij hebben gevolgd is van L. Henkin.

Dankzij de volledigheidsstelling weten we dat het moeizame zoeken van afleidingen in de propositielogische calculus kan worden ingeruild voor het construeren van waarheidstafels of semantische tableaus.

5.9 Functionele volledigheid

Een leuke vraag die je over de voegwoorden van de propositielogica kunt stellen is deze. Welke connectieven kunnen in termen van welke andere worden gedefinieerd? Een voorbeeld: het invoeren van een speciaal teken a voor het exclusieve of is niet nodig, omdat $\varphi \; a \; \psi$ kan worden weergegeven als $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$. In § 5.8 hebben we gezien hoe $\wedge$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ kunnen worden uitgedrukt in termen van $\to$ en $\neg$ alleen.

Op deze manier kun je nog meer connectieven wegwerken: $\leftrightarrow$ is definieerbaar in termen van $\to$ en $\wedge$; $\to$ is definieerbaar met behulp van $\neg$ en $\vee$. Een verzameling connectieven in termen waarvan je alle waarheidstafelpatronen kunt uitdrukken heet *functioneel volledig*. Iets formeler:

Definitie 5.17 *Een verzameling connectieven C heet* **functioneel volledig** *desda er voor elk natuurlijk getal $n > 0$ en voor elke functie*

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$