**Propositielogica**

Leereenheid 9

# Propositielogica

INTRODUCTIE

*Logica*

Van oudsher is de *logica* de leer van het correct redeneren. Nog steeds is het herkennen van correcte en incorrecte redeneringen een belangrijke doelstelling van de logica. Een eenvoudig voorbeeld van een correcte redenering is:

‘De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed. Maar de tv werkt wel goed. Dus de afstandsbediening is kapot.’

Daarentegen is de volgende redenering niet correct.

‘Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is. Het schilderij hangt hier niet. Dus is het gestolen.’

Waarin zit nu het verschil? Beide redeneringen bestaan uit een conclusie (‘Dus ...’), voorafgegaan door twee Nederlandse zinnen, dus daar zit het niet in. Maar bij de eerste redenering moet de conclusie (‘Dus ...’) wel juist zijn als de uitgangspunten (de beide voorafgaande zinnen) waar zijn. Met andere woorden: er lijkt geen situatie te verzinnen waarin de eerste twee zinnen waar zijn en de derde niet. Bij de tweede redenering ligt dit heel anders. De beide uitgangspunten kunnen hier heel goed waar zijn zonder dat de vermeende conclusie dat is, denk maar aan een situatie waarin het schilderij net gerestaureerd wordt. Dan hangt het er inderdaad niet en we kunnen nog steeds beamen dat het er ook niet hangt als het gestolen is. Maar het is helemaal niet gestolen, het wordt immers gerestaureerd.

Bij voorgaande voorbeeldredeneringen ziet u misschien meteen al of ze correct zijn of niet. Voor meer ingewikkelde betogen hoeft dat helemaal niet zo simpel te zijn. En zelfs al zouden we voor iedere concrete redenering kunnen beargumenteren of die al dan niet correct is, dan blijft dat een moeizame onderneming. Bovendien: wie zegt ons dat die argumentatie weer correct is? Daarom is het beter eerst een andere weg in te slaan: welke kenmerken van de zinnen zorgen er nu voor dat een redenering correct is? Allereerst kunnen we opmerken dat de eerste redenering dezelfde vorm (maar een heel andere inhoud) heeft als de volgende, die ook correct is:

‘Onze export stagneert of de dollar staat niet hoog. De dollar staat echter wel hoog. Dus stagneert onze export.’

Kennelijk zijn het vooral de woordjes ‘of’ en ‘niet’ en de plaats waar ze voorkomen, die bepalen dat deze redenering correct is – van de rest mogen we abstraheren. We stuiten hier echter op een ander probleem:

wil een redenering correct zijn, dan moet ze in elke situatie juist zijn, maar woordjes als 'of' betekenen niet steeds hetzelfde. Bij het eerste voorbeeld zal een monteur die de uitspraak 'De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed' doet, waarschijnlijk bij de diagnose rekening houden met de mogelijkheid dat zowel afstandsbediening als tv kapot kunnen zijn, terwijl een beursanalist die 'Onze export stagneert of de dollar staat niet hoog' bezigt, vermoedelijk bedoelt dat ofwel onze export stagneert ofwel de dollar niet hoog staat, maar niet allebei. En ouders die tegen hun kinderen zeggen 'Voor je 18-de verjaardag krijg je een racefiets of een serie autorijlessen' zullen wel nooit bedoelen dat ze dat ook beide zullen krijgen.
Kortom, willen we iets definitiefs kunnen zeggen over de correctheid van redeneringen, dan zullen we een logisch 'of' moeten maken dat aanzienlijk preciezer is dan het vage en dubbelzinnige woordje uit de gewone taal.
In deze leereenheid beginnen we met het maken van een eenvoudige, maar precieze en compacte logische taal: die van de propositielogica. Hierin hebben woordjes als 'of', 'als' en 'niet' een nauwkeurig omschreven betekenis. De consequentie hiervan is dat redeneringen uit de gewone taal vrijwel nooit helemaal overeen komen met die in de logica. Maar afgezien van dit voorbehoud, kunnen we redeneringen als die in de gegeven voorbeelden tamelijk goed weergeven in propositielogica, en zo de correctheid ervan bepalen.
Meer in het algemeen gesproken is het vooral de beknoptheid en de precisie die de logica maken tot een geschikt instrument voor redeneren binnen de wiskunde en informatica, en daarom treft u het in deze cursus aan. Aan diverse toepassingen van logica op informatica wordt in dit blok aandacht besteed.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat proposities zijn
- formules van de propositielogica kunt 'lezen'
- propositielogische formules kunt opstellen met behulp van de vijf logische connectieven
- weet wat deelformules zijn
- het bereik van connectieven in logische formules kunt aangeven
- de waarheidstabellen van de connectieven kent
- waarheidstabellen kunt maken voor propositielogische formules
- kunt werken met niet-standaardconnectieven, indien daarvan de waarheidstabel is gegeven
- uitspraken in natuurlijke taal om kunt zetten naar formules in de propositielogica.

## LEERKERN

### 9.1 Wat is propositielogica?

Een propositie is waar of onwaar.

Een propositie is een uitspraak die waar of onwaar kan zijn.

Voorbeelden zijn ware uitspraken als 'Er is geen grootste priemgetal' en onware als 'Kopenhagen ligt in Nederland' (ook al denken veel Amerikanen dat). Afgezien van filosofische spitsvondigheden (hoe kunnen we bewijzen dat Kopenhagen niet in Nederland ligt?), is het waarheidsgehalte van deze proposities onomstreden.
Bij minder algemene uitspraken speelt de context vrijwel altijd een rol. Of 'Het regent' waar is, hangt duidelijk af van de situatie waarin we ons bevinden. Toch noemen we ook 'Het regent' een propositie, want het is in elke situatie óf waar óf onwaar. Dat is zelfs het geval als we niet in staat zijn het waarheidsgehalte van een uitspraak hier en nu te bepalen. 'Het regent morgen', 'De snel stijgende olieprijzen zijn de oorzaak van de crisis' en 'Er bestaan zwarte gaten' zijn dus wel degelijk proposities. Waar het om gaat, is dat deze uitspraken in elke situatie waar of onwaar zijn, en niet zowel waar als onwaar.

OPGAVE 9.1
Zijn de zinnen in de voorbeeldredeneringen van de introductie proposities? Motiveer uw antwoord.

OPGAVE 9.2 (Aanw)
Deze opgave bevat een illustratief puzzeltje over (on)waarheid.
Op een schoolbord leest u de volgende tekst:

'Precies één van deze uitspraken is onwaar.
Precies twee van deze uitspraken zijn onwaar.
Precies drie van deze uitspraken zijn onwaar.
Precies vier van deze uitspraken zijn onwaar.'

Is één van deze uitspraken inderdaad waar? Zo ja, welke is dat en hoe kunnen we dat inzien? Zo nee, waarom dan niet?

*Waarheidswaarde*

Waar en onwaar zijn waarheidswaarden.

Als de enige eis aan proposities is dat ze in iedere omstandigheid een *waarheidswaarde* (waar of onwaar) moeten hebben, dan lijkt dit zo algemeen dat we ons kunnen afvragen wat dan in hemelsnaam géén proposities zijn. Andere zinstypen zoals vraagzinnen en zinnen in de gebiedende wijs drukken in de regel geen propositie uit. Van de volgende voorbeelden, twee gewone zinnen, een wiskundig probleem en een programmaopdracht, geldt dat ze geen proposities zijn:

– Hoe laat is het?
– Kijk uit bij het oversteken!
– Zijn er positieve gehele getallen $x$, $y$, $z$, $n$ met $n > 2$ waarvoor $x^n + y^n = z^n$?
– **als** `x > 0`, **dan** `x := x + 1`

Bij vragen kunnen de antwoorden wel waar of onwaar zijn, maar de vragen zelf niet. Het laatste voorbeeld is misschien verrassend: de vorm lijkt immers veel op die van een gewone als-dan-uitspraak. Maar voor een programmaopdracht geldt niet dat die waar of onwaar is. Een programmaopdracht is een instructie om de computer iets te laten doen, en als zodanig vergelijkbaar met de gewone gebiedende wijs ('Doe ...!').

De voorwaarde van een als-dan-opdracht is wél een propositie, en de instructie na 'dan' wordt alleen uitgevoerd als de voorwaarde waar is. Dit betekent dat wanneer deze opdracht deel uitmaakt van een 'lus' in het programma, de waarheidswaarde tijdens de uitvoering van het programma kan veranderen – dat is in feite juist de bedoeling van de voorwaarde.

OPGAVE 9.3

Welke van de volgende zinnen zijn proposities?

a Het is warm vandaag.
b $x > 0$
c $x := x + 1$
d Ieder even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen.
e Ieder getal is de som van twee priemgetallen.
f Is 0 het kleinste natuurlijke getal?
g Voor elke verzameling $V$ geldt: $\varnothing \subset V$.

*Waarheidsfunctioneel*

Propositielogica is waarheidsfunctioneel: de waarheid van een uitspraak berust op de waarheid van de delen.

Het is overigens niet de taak van de logica om de werkelijkheid te bestuderen en zo de waarheidswaarde van een propositie in een bepaalde situatie te achterhalen, zo dit al mogelijk is. Een vraag waar de logica zich wel mee bezig houdt, is of de waarheidswaarde is af te leiden uit die van andere proposities. Kenmerkend voor de propositielogica is dat de waarheidswaarde van een uitspraak is af te leiden uit (alleen) de waarheidswaarden van haar delen. Met een mooi woord wordt de propositielogica daarom wel *waarheidsfunctioneel* genoemd. En meer in het algemeen bepaalt het verband tussen waarheid van de uitgangspunten en waarheid van de conclusie welke redeneringen de logica 'correct' zal noemen.

Kortom, we kunnen de propositielogica zien als een spel met waarheidswaarden. Die waarheidswaarden worden volgens strakke regels toegekend aan formules, die op een precies voorgeschreven manier zijn opgebouwd. Die vorm is een ander typerend kenmerk van de propositielogica die we nu gaan bestuderen.

## 9.2 De taal van de propositielogica

In de propositielogica kunnen we uitspraken analyseren die zijn opgebouwd met behulp van het woordje *niet* en voegwoorden (*en*, *of*, *als*, *mits*, ...). In de introductie tot deze leereenheid zagen we daarvan al diverse voorbeelden (de woorden waar het hier om gaat zijn gecursiveerd):

De afstandsbediening is kapot *of* de tv werkt *niet* goed.
Het schilderij hangt hier *niet als* het gestolen is.

Zoals gezegd is de taal van alledag echter vaak dubbelzinnig en te vaag om dergelijke proposities goed mee te analyseren. We vervangen woordjes zoals 'niet' en 'of' daarom door symbolen die we een heel precieze betekenis gaan geven.

VOORBEELD 9.1

In plaats van 'Het schilderij hangt hier *niet*.' schrijven we:

¬ Het schilderij hangt hier.

Merk op dat het symbool $\neg$ (het logische 'niet') anders dan het 'niet' in gewone taal vooraf gaat aan de uitspraak waar het betrekking op heeft, 'Het schilderij hangt hier'. De propositie 'Het schilderij hangt hier' korten we vervolgens af tot de letter $p$, zodat we tenslotte uitkomen op de uitdrukking $\neg p$. «

*Negatieteken*

Het symbool $\neg$ noemen we het *negatieteken*.

*Negatie*

De uitdrukking $\neg p$ noemen we de *negatie* van $p$.

VOORBEELD 9.2

In plaats van: 'De afstandsbediening is kapot *of* de tv werkt niet goed.' schrijven we:

De afstandsbediening is kapot $\vee$ $\neg$ de tv werkt goed.

Het symbool $\vee$ (het logische 'of') staat hier op de plaats waar het gewone 'of' ook staat. De overgebleven uitspraken 'De afstandsbediening is kapot' en 'De tv werkt goed' korten we af tot respectievelijk $p$ en $q$, zodat we tenslotte uitkomen op $p \vee \neg q$. «

*Disjunctie*

*Disjunct*

Het symbool $\vee$ is de schreefloze letter 'v', afkomstig van het Latijnse woord 'vel' voor 'of'. Door $\vee$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \vee \neg q$ in voorbeeld 9.2) heet een *disjunctie* en de proposities die door $\vee$ verbonden worden (zoals $p$ en $\neg q$ in $p \vee \neg q$), heten *disjuncten*.

*Disjunctieteken*

Het symbool $\vee$ wordt het *disjunctieteken* genoemd.

In paragraaf 9.3 zullen we zien dat we met $\vee$ de zogenaamde inclusieve disjunctie op het oog hebben: $p \vee q$ is dan ook het geval als zowel $p$ als $q$ het geval zijn.
Keren we het disjunctieteken om, dan krijgen we $\wedge$, het logische 'en'.

VOORBEELD 9.3

De uitspraak 'Gabriela tennist *en* Judith schaakt.' kan in propositielogica worden weergegeven door $p \wedge q$, waarbij $p$ staat voor 'Gabriela tennist' en $q$ voor 'Judith schaakt'. «

*Conjunctieteken*

Het symbool $\wedge$ wordt het *conjunctieteken* genoemd.

*Conjunctie*
*Conjunct*

Door $\wedge$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \wedge q$ in voorbeeld 9.3) heet een *conjunctie* en de proposities die door $\wedge$ verbonden worden, heten *conjuncten*.

OPGAVE 9.4 (Aanw)
Geef de volgende uitspraken weer door middel van respectievelijk een conjunctie en een disjunctie. Welke proposities duiden de gebruikte letters aan?
a Marie en Kees komen naar het feest.
b Jan wast af of droogt de vaat.

Het 'en' uit de gewone taal bevat eigenaardigheden die we niet in de propositielogica willen opnemen. Zo betekent 'Ze kwam binnen en ze deed het licht uit' iets anders dan 'Ze deed het licht uit en ze kwam binnen'. Het 'en' uit de gewone taal betekent vaak dat de gebeurtenis uit de tweede zinshelft later plaatsvindt dan die uit de eerste zinshelft. Dat soort bijzonderheden kunnen we niet uitdrukken in de propositielogica: die is immers waarheidsfunctioneel! In paragraaf 9.3.2 zullen we precies aangeven hoe we $\wedge$ binnen de propositielogica gebruiken.

VOORBEELD 9.4

Een constructie die we wel goed kunnen weergeven, is 'als ..., (dan)'.

De uitspraak 'Als er stroom loopt, (dan) wordt de draad warm.' kan in propositielogica worden weergegeven als $p \to q$, waarbij $p$ staat voor 'Er loopt stroom' en $q$ voor 'De draad wordt warm'. «

*Implicatieteken*

Het symbool $\to$ wordt het *implicatieteken* genoemd.

*Implicatie*

Door $\to$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \to q$ in voorbeeld 9.4) heet een *implicatie*.

*Dan en slechts dan als*

*Desda*

In de wiskunde komen we ietwat moeizame formuleringen als '*dan en slechts dan als*' tegen, wat vaak wordt afgekort tot '*desda*'. Ook die constructie kunnen we goed weergeven in propositielogica.

VOORBEELD 9.5

De uitspraak '$A \subset B$ desda $A \cap B = A$' wordt in propositielogica weergegeven als $p \leftrightarrow q$, waarin $p$ staat voor '$A \subset B$' en $q$ voor '$A \cap B = A$'. «

*Equivalentieteken*

Het symbool $\leftrightarrow$ wordt het *equivalentieteken* genoemd.

*Equivalentie*

Door $\leftrightarrow$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \leftrightarrow q$ in voorbeeld 9.5) noemen we een *equivalentie*.

*Connectief*

De speciale symbolen van de propositielogica ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ , $\leftrightarrow$ ) worden *connectieven* (logische voegwoorden) genoemd. In de volgende tabel vatten we de schrijfwijze, de uitspraak en de naam van de connectieven samen.

TABEL 9.1 Connectieven uit de propositielogica

| *connectief* | *uitspraak* | *naam* |
|---|---|---|
| $\neg$ | niet | negatieteken |
| $\wedge$ | en | conjunctieteken |
| $\vee$ | of | disjunctieteken |
| $\to$ | als ..., (dan) | implicatieteken |
| $\leftrightarrow$ | desda | equivalentieteken |

Er zijn ook andere notaties in omloop, zoals de u misschien wel bekende & voor $\wedge$, maar de in deze cursus gehanteerde symbolen zijn het meest gangbaar.

*Propositieletter*

Naast de connectieven bevatten de uitdrukkingen van de propositielogica letters en haakjes. De letters geven (niet verder deelbare) proposities aan, en heten daarom *propositieletters*. We gebruiken hier meestal de letters $p$, $q$, $r$, ... voor, soms vergezeld van een index ($p_1$, $q_7$, ...).
Bij de vertaling van concrete uitspraken uit de wiskunde of de gewone taal in propositielogica moeten we wel steeds aangeven welke letter bij welke (kleinste) propositie hoort.

Soms haakjes nodig!

Daarnaast zijn er haakjes nodig, omdat anders bijvoorbeeld $p \vee \neg q \wedge p$ op meerdere manieren gelezen zou kunnen worden, en dat willen we natuurlijk niet. Met haakjes erbij hebben we dit probleem niet: $p \vee (\neg q \wedge p)$ en $(p \vee \neg q) \wedge p$ zijn wel goede uitdrukkingen. Misschien denkt u dat ook $\neg p \vee q$ geen goede uitdrukking is, maar hier werkt een spelregel die zegt dat negatietekens vóór de overige connectieven gaan, net zoals in de gewone rekenkunde machtsverheffen voorafgaat aan de overige bewerkingen. Dus als we toch haakjes willen zetten, dan bedoelen we met $\neg p \vee q$ alleen $(\neg p) \vee q$ en niet $\neg(p \vee q)$.

*Formule*

Goede uitdrukkingen van de propositielogica noemen we *formules*; we zullen ze verderop precies definiëren. Voordat we deze definitie geven, is het goed wat meer vertrouwd te raken met formules.

VOORBEELD 9.6

Met behulp van tabel 9.1 kunnen we nu formules van de propositielogica gaan ‘lezen’. Indien nodig moeten we dan duidelijk maken waar de haakjes staan.

| | | |
|---|---|---|
| a | $p \vee \neg q$ | ‘$p$ of niet $q$’ |
| b | $(p \wedge q) \to r$ | ‘als $p$ en $q$ dan $r$' |
| c | $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ | ‘niet $p$ en $q$ tussen haakjes desda tussen haakjes niet $p$ of niet $q$' |
| d | $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | ‘$p$ en $q$ tussen haakjes of tussen haakjes niet $p$ en niet $q$’ |

NB: in plaats van ‘tussen haakjes’ spreken we ook wel van ‘haakje openen’ en ‘haakje sluiten’. Formule c wordt dan gelezen als: ‘niet – haakje openen – $p$ en $q$ – haakje sluiten – desda – haakje openen – niet $p$ of niet $q$ – haakje sluiten.’

Proposities die overeenkomen met formules van de vorm $(p \wedge q) \to r$, zijn we in de casus al op diverse plaatsen tegengekomen (ga na!). «

OPGAVE 9.5

Waarom hoeft u bij het ‘lezen’ van formule b in voorbeeld 9.6 geen haakjes te vermelden en bij c wel?

OPGAVE 9.6

Hoe spreken we de volgende formules uit?

a $p \to \neg\neg p$
b $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
c $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

### 9.2.1 FORMULES EN BEREIK

De formules $p \vee \neg q$ en $q \to \neg p$ zijn correct opgebouwd, maar een uitdrukking als $p \vee \neg q \wedge p$ was dat niet. Ook allerlei onzinrijtjes als $p \vee \neg$ en $pq$ willen we uitsluiten, al zou men kunnen denken dat dit de ‘letterlijke’ vertalingen zijn van bij voorbeeld ‘Goldbach’s vermoeden geldt wel of niet’ en ‘Het sneeuwt, de wereld wordt wit’. Meer in het algemeen kunnen we stellen dat de vorm van een formule niet precies overeenkomt met de vorm van de zinnen waarmee ze corresponderen.

Logische vorm ≠ zinsvorm

We zagen al dat in ‘Het schilderij hangt hier niet’ het woordje ‘niet’ helemaal achteraan staat, terwijl het negatieteken in $\neg p$ juist voorop staat. Nog iets duidelijker is dit punt wanneer we terugdenken aan een andere zin uit dezelfde voorbeeldredenering.

VOORBEELD 9.7

Eveneens uit de introductie stamt de uitspraak: ‘Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is.’ Kiezen we nu voor $p$: ‘Het schilderij hangt hier’ en $q$: ‘Het schilderij is gestolen’ dan is de uitspraak in propositielogica weer te geven als $q \to \neg p$. De als-bijzin staat in de uitspraak achteraan, maar in de formule (als $q$) juist voorop. «

Willekeurige formules aangeven met $\varphi$ en $\psi$.

De verzameling formules van de propositielogica kan *inductief* worden gedefinieerd: we weten wat de eenvoudigste formules zijn (de propositieletters) en hoe we van formules naar ingewikkelder formules kunnen komen (door formules middels connectieven te verbinden). In de volgende definitie gebruiken we naast propositieletters ($p$, $q$, $r$, ...), connectieven ($\neg$, $\wedge$, ...) en haakjes ook de Griekse letters $\varphi$ (fi) en $\psi$ (psi). Deze (en zonodig nog andere) Griekse letters duiden in dit blok steeds willekeurige formules aan.

*Formule van de propositielogica*

DEFINITIE 9.1

De *formules van de propositielogica* worden als volgt gedefinieerd:

– elke propositieletter ($p$, $q$, $r$, ...) is een formule
– als $\varphi$ een formule is, dan is $\neg\varphi$ ook een formule
– als $\varphi$ en $\psi$ formules zijn, dan zijn $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
– er zijn geen andere formules.

De eerste regel uit definitie 9.1 is de basis, de tweede en derde zijn de inductiestappen en in de laatste regel wordt de uitsluiting geformuleerd (zie ook leereenheid 8).
Behalve de losse propositieletters die blijkens de basisstap van de definitie formules zijn, zijn alle andere formules samengesteld.

OPGAVE 9.7
Uit hoeveel symbolen bestaat een samengestelde formule minimaal?

Haakjes aan de buitenkant mogen weg.

Als we goed naar de definitie kijken, zien we dat eerdere formules als $p \vee \neg q$ eigenlijk niet helemaal correct zijn: er had $(p \vee \neg q)$ moeten staan. Haakjes die helemaal aan de buitenkant van de formule staan en bij elkaar horen, hebben echter geen zin en worden daarom meestal weggelaten. Andere haakjes mogen meestal niet weg: we zagen al dat anders een formule als $p \vee (\neg q \wedge p)$ op diverse manieren kan worden uitgelegd. We zouden de definitie van ‘formule’ wel zo kunnen wijzigen dat die buitenste haakjes nooit zouden optreden, maar de definitie zou tamelijk ingewikkeld worden, en dat is dit punt niet waard. In de volgende leereenheid zullen we situaties bestuderen waarin ook andere haakjes weggelaten mogen worden, maar afgezien van de buitenste haakjes moeten we verder steeds heel precies zijn in het gebruik van haakjes.

VOORBEELD 9.8

Van de volgende rijtjes symbolen zijn de linker allemaal formules en de rechter geen formules:

| | |
|---|---|
| $q$ | $\neg$ |
| $\neg p$ | $\to p$ |
| $q \land q$ | $(q) \land (q)$ |
| $p \to (q \lor \neg p)$ | $p \leftrightarrow q \land r$ |
| $\neg\neg(p \lor (q \leftrightarrow \neg(p \land q)))$ | $\neg p \lor q)$ |

«

OPGAVE 9.8 (Aanw)
Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn formules?
a $p$
b $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$
c $\lor p \lor \neg p$
d $p \to (p \to p)$
e $p \lor q \to p$

*Deelformule*

Als we nog eens kijken hoe een formule volgens de definitie is opgebouwd, dan zien we hoe hiervoor eerst andere formules moeten worden gemaakt. Al deze formules treden op in de uiteindelijk geproduceerde formules, en om die reden worden ze *deelformules* genoemd.

VOORBEELD 9.9 In de formule $(p \land q) \to r$ zijn diverse andere formules te herkennen. Deze treden allemaal op als we kijken hoe de formule volgens de definitie is opgebouwd:

– allereerst zijn $p$, $q$ en $r$ formules
– $(p \land q)$ is dus ook een formule
– dus $((p \land q) \to r)$ is een formule

Dit levert meteen de deelformules:

– $p$, $q$ en $r$ zijn deelformules van $(p \land q) \to r$
– $p \land q$ is een deelformule van $(p \land q) \to r$
– $(p \land q) \to r$ noemen we ook een deelformule van $(p \land q) \to r$ «

OPGAVE 9.9
Vind alle deelformules van de volgende formules.
a $p \to (p \to p)$
b $p \lor (\neg q \land p)$
c $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$

OPGAVE 9.10 (Aanw)
De volgende eenvoudige formulering: ‘Een deelformule van een formule $\varphi$ is een stuk (een deelrijtje) van $\varphi$ dat zelf een formule is’ is niet juist. Geef een voorbeeld van een formule $\varphi$ met een deel dat wel een formule vormt, maar dat geen deelformule is van $\varphi$.

*Bereik*

Een ander begrip dat direct ontleend kan worden aan de definitie van formules, is het *bereik* van een connectief. Informeel gesproken bestaat het bereik uit het deel (of de delen) van de formule waar het connectief betrekking op heeft. Dit is vaak af te lezen aan de plaats van de haakjes.

VOORBEELD 9.10 Het bereik van $\land$ in $r \lor (\neg q \land p)$ bestaat uit de formules $\neg q$ en $p$. Het bereik van $\lor$ bestaat uit de formules $r$ en $\neg q \land p$; we kunnen dit ook door onderstreping aangeven: $\underline{r} \lor \underline{(\neg q \land p)}$. «

We zien hier een van de verschillen tussen de logica en alledaagse taal: de laatste is vaak voor meerdere uitleg vatbaar doordat het bereik van woordjes als ‘en’ en ‘niet’ vaak niet duidelijk is.

VOORBEELD 9.11

De formules $p \wedge (q \vee r)$ en $(p \wedge q) \vee r$ kunnen beide dienen als weergave van de uitspraak ‘Marie en Jan of Kees komen naar het feest’. De dubbelzinnigheid zit hier in het bereik van ‘en’ en ‘of’. Dat zien we duidelijk als we het bereik van $\wedge$ in de formules aangeven: $\underline{p} \wedge \underline{(q \vee r)}$ en $(\underline{p} \wedge \underline{q}) \vee r$. «

Als eenzelfde connectief meerdere keren in een formule optreedt, dan moeten we aangeven welk voorkomen van het connectief we bedoelen. In $p \to (q \to p)$ bestaat het bereik van het eerste implicatieteken uit de formules $p$ en $q \to p$, en dat van het tweede uit $q$ en $p$.

Zowel voor het begrip ‘deelformule’ als voor ‘bereik van een connectief’ kunnen we natuurlijk een inductieve definitie geven, maar we zien hier van af. Er is overigens wel sprake van een direct verband tussen bereik en deelformules.

OPGAVE 9.11

Beschouw de formule $\neg(p \wedge (q \vee \neg r))$.

a Geef alle deelformules.
b Wat is het bereik van de eerste negatie?
c Wat is het bereik van de tweede negatie?
d Wat is het bereik van het conjunctieteken?

OPGAVE 9.12

Formuleer het verband tussen het bereik van een connectief in een formule $\varphi$ en de deelformules van $\varphi$.

OPGAVE 9.13

Wat is het bereik van het implicatieteken in de volgende formules?

a $p \to \neg(q \leftrightarrow p)$
b $p \vee (\neg q \to p)$
c $(p \vee \neg q) \to p$
d $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
e $p \to (q \leftrightarrow (\neg p \vee q))$

## 9.3 Waarheidstabellen

In de vorige paragraaf hebben we de vorm van de propositielogische formules bekeken, nu gaan we hun betekenis onderzoeken. Net als voor de zinnen in de gewone taal is die betekenis voor logische formules gelegen in de waarheidswaarde: we weten wat een formule betekent als we kunnen zeggen in welke situaties de formule waar is.

*Semantiek*
*Tarski*
*Syntaxis*

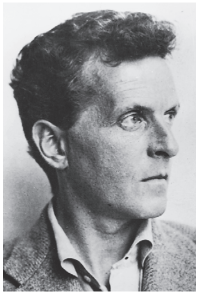
Het bestuderen van de betekenis van uitdrukkingen wordt wel semantiek genoemd. Voor de logica is de *semantiek* vooral bekend geworden door het werk van Alfred Tarski (1902-1983), eerst student en docent in Warschau, later hoogleraar in de VS. Het bestuderen van de vorm van formules en correcte redeneringen noemt men dan wel naar analogie van de taalkunde *syntaxis*.

De formules van de propositielogica hebben zoals gezegd de bijzonderheid dat ze waarheidsfunctioneel zijn, dat wil zeggen dat hun waarheidswaarde is af te leiden uit de waarheidswaarde van hun delen. Maar hoe wordt de waarheidswaarde van een formule nu berekend?

1 = waar
0 = onwaar

Om vlot met waarheidswaarden te kunnen rekenen, is het handig 'waar' weer te geven door 1 en 'onwaar' door 0. Behalve dat deze notatie korter is, sluit ze goed aan op het rekenen in digitale computers, waarvan de bits ook met nullen en enen worden voorgesteld. Een andere, eveneens internationaal gebruikelijke schrijfwijze is T ('true') voor waar en F ('false') voor onwaar.

*Waarheidstabel*



Ludwig Wittgenstein

De berekening van de waarheidswaarde van samengestelde formules vindt plaats in de vorm van tabellen, de zogenaamde *waarheidstabellen*, die vooral door de filosoof Ludwig Wittgenstein (1889-1951) voor het eerst systematisch zijn toegepast als 'berekeningswijze', hoewel schematische overzichten van mogelijkheden al eerder voorkomen bij C.S. Peirce. Voor samengestelde formules is het nodig om te weten wat de waarheidswaarden van de deelformules zijn en wat het effect van de connectieven op de waarheidswaarde is. Uiteindelijk zijn het dan de connectieven en de waarheidswaarden van de propositieletters die bepalen of de gehele formule waar of onwaar is. We laten nu de connectieven één voor één de revue passeren om hun effect op de waarheidswaarde vast te stellen.

### 9.3.1 NEGATIE

De formule $\neg p$ is waar wanneer $p$ onwaar is, en omgekeerd. Omdat proposities in deze cursus óf waar óf onwaar zijn, volgt hier meteen uit wanneer $\neg p$ onwaar is: als $p$ waar is. We vatten dit samen in de volgende waarheidstabel.

Waarheidstabel van $\neg$

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Dit gedrag van de negatie vertoont grote overeenkomst met dat van het woordje 'niet' in de gewone taal. 'Het regent niet' is immers precies dan waar als 'Het regent' onwaar is. Voor de logische negatie geldt hetzelfde, en dat blijft zo als we de negatie voor een samengestelde formule zetten. Meer in het algemeen is dus voor een willekeurige $\varphi$ de formule $\neg\varphi$ waar precies dan als $\varphi$ onwaar is. Hierdoor krijgt de waarheidstabel voor negatie de volgende vorm:

| $\varphi$ | $\neg\varphi$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

OPGAVE 9.14 (Aanw)

Als we de waarheidswaarde van $\varphi$ met $x$ aanduiden ($x$ kan dus gelijk zijn aan 0 of 1), kunt u dan een eenvoudige rekenkundige functie verzinnen die de waarheidswaarde van $\neg\varphi$ oplevert?

Met de waarheidstabel van de negatie kunnen we de waarheidswaarden van sommige samengestelde formules uitrekenen.

VOORBEELD 9.12

De waarheidstabel voor de formule $\neg\neg p$ is:

| $p$ | $\neg p$ | $\neg\neg p$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

Deze tabel komt als volgt tot stand. De waarheidswaarde van $\neg\neg p$ wordt bepaald door de waarheidswaarde van $p$: we zetten $p$ linksboven in de tabel. Nu kan $p$ waar of onwaar zijn: deze waarden zetten we in de linkerkolom onder $p$. Vervolgens berekenen we de waarheidswaarden van de deelformule $\neg p$. De waarheidstabel voor $\neg$ leert dat $\neg p$ waarheidswaarde 0 (onwaar) heeft als $p$ waarheidswaarde 1 heeft, en 1 (waar) als $p$ waarheidswaarde 0 heeft. Deze waarden schrijven we in de middelste kolom, onder $\neg p$. Tenslotte verkrijgen we hieruit, weer met de waarheidstabel voor negatie, de waarheidswaarden van de hele formule, nu in de rechterkolom. «

OPGAVE 9.15

Wat valt op als u de waarheidswaarden van $\neg\neg p$ vergelijkt met die van $p$?

OPGAVE 9.16

Bepaal de waarheidstabel van $\neg\neg\neg p$.

### 9.3.2 CONJUNCTIE

De formule $p \wedge q$ is alleen waar als zowel $p$ als $q$ waar zijn. Algemener: een conjunctie $\varphi \wedge \psi$ is waar als zowel $\varphi$ als $\psi$ waar zijn, en in alle andere gevallen onwaar. Dit wordt weergegeven door de volgende waarheidstabel ($\varphi$ en $\psi$ zijn weer willekeurige formules):

Waarheidstabel van $\wedge$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \wedge \psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

In gewone taal heeft ‘en’ vaak een vergelijkbaar effect. ‘Marie werkt en Kees zorgt voor de kinderen’ is waar als ‘Marie werkt’ en ‘Kees zorgt voor de kinderen’ beide waar zijn, en ook alleen dan. We hebben al opgemerkt dat het Nederlands zich zeker niet altijd als de logica gedraagt, bijvoorbeeld in verhalen is de gebeurtenis in de zin voor ‘en’ vaak eerder dan die na de ‘en’. In leereenheid 11 maken we kennis met een andere logica waarin we zoiets wel kunnen uitdrukken.

Hoe vinden we nu met behulp van de waarheidstabel van $\wedge$ de waarheidstabel voor een ingewikkelder formule als, zeg, $p \wedge \neg q$?

VOORBEELD 9.13

De formule $p \wedge \neg q$ bevat twee verschillende propositieletters, $p$ en $q$: die zetten we weer linksboven in de tabel. Elk van die propositieletters kan twee waarheidswaarden krijgen, dus er zijn in totaal $2 \times 2 = 4$ combinaties van waarheidswaarden mogelijk. Hierdoor krijgen we een tabel met vier rijen van waarheidswaarden. Voor elke deelformule gaan we nu de waarheidswaarde berekenen, te beginnen met de kleinste deelformules. Dat zijn de propositieletters, waarvan we de waarheidswaarden al kennen. Daarna komt de deelformule $\neg q$. Dat komt neer op het 'omdraaien' van de waarheidswaarde van $q$. Ten slotte vinden we de waarheidswaarden van de hele formule door (rij voor rij) de waarheidswaarden die onder $p$ en $\neg q$ staan te combineren, met behulp van de waarheidstabel van $\wedge$. De waarheidstabel voor $p \wedge \neg q$ wordt dus:

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Het resultaat is dat $p \wedge \neg q$ waar is als $p$ waar en $q$ onwaar is. In alle andere gevallen is $p \wedge \neg q$ onwaar. «

OPGAVE 9.17

Als een formule slechts één propositieletter bevat, krijgen we een waarheidstabel met 2 rijen waarheidswaarden. Als er twee verschillende propositieletters zijn, krijgen we een tabel met 4 rijen.

a Hoeveel rijen krijgen we bij een formule die drie propositieletters (zeg $p$, $q$ en $r$) bevat?

b En hoeveel rijen krijgen we bij een formule die $n$ verschillende propositieletters bevat?

c Van welke van de volgende twee formules is de waarheidstabel makkelijker te maken? (U hoeft de waarheidstabellen niet te maken!)

$$((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_4)) \vee ((p_5 \wedge \neg p_6) \vee (p_7 \wedge \neg p_8))$$
$$\neg((\neg(p \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg(p \wedge (q \wedge \neg r))) \wedge (\neg(p \wedge (\neg q \wedge r)) \wedge \neg(\neg p \wedge (q \wedge r))))$$

OPGAVE 9.18

Maak waarheidstabellen voor de volgende formules:

a $p \wedge q$

b $\neg p \wedge q$

c $\neg(p \wedge \neg p)$ (wat valt u hierbij op?)

d $p \wedge (q \wedge r)$

### 9.3.3 DISJUNCTIE

De waarheidstabel voor een disjunctie $\varphi \vee \psi$ is:

Waarheidstabel van $\vee$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \vee \psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Het logische 'of' is de zogenaamde inclusieve disjunctie, die we al zijn tegengekomen in gevallen als 'De afstandsbediening of de tv is kapot'. In de gewone taal wordt de inclusieve disjunctie ook wel door 'en/of' uitgedrukt. Hierbij kan het een of het ander het geval zijn, of beide.
De exclusieve disjunctie ('óf ... óf ...'), die we zagen in een zin als 'Voor je verjaardag krijg je een racefiets of autorijlessen', waarbij of het een of het ander het geval is, maar niet beide, kan overigens wel in de propositielogica worden weergegeven (zie opgave 9.22).

OPGAVE 9.19

Maak de waarheidstabel van $p \vee q$.
Wanneer is de formule $p \vee q$ onwaar?

VOORBEELD 9.14

De waarheidstabel voor de formule $(p \wedge \neg q) \vee q$ is:

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \wedge \neg q) \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

«

Een kortere notatie

Wanneer de formules langer worden, groeit het aantal deelformules meestal ook, zodat de methode om alle deelformules apart in een kolom te zetten, erg bewerkelijk kan worden. Handiger is het dan een compactere notatie te gebruiken. In plaats van de deelformules steeds opnieuw op te schrijven, plaatsen we de enen en nullen onder het connectief dat bereik heeft over de rest van deze deelformule. De volgorde waarin de waarheidswaarden zijn berekend, geven we voor de duidelijkheid nog met kleine cursieve cijfertjes aan. (U hoeft dat laatste niet per se te doen.)

VOORBEELD 9.15

We maken de waarheidstabel voor $(p \wedge \neg q) \vee q$ op de nieuwe manier:

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ | $\vee$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* | *1* |

«

Procedure voor het maken van waarheidstabellen

In dit voorbeeld werkten we volgens een algemeen procédé voor het berekenen van waarheidstabellen:
– Kijk welke propositieletters er in de te onderzoeken formule zitten en schrijf die links van de formule op.
– Zet vervolgens onder de propositieletters links alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden (dat kan in principe in willekeurige volgorde, maar aanbevolen wordt de in deze leereenheid gehanteerde volgorde te gebruiken).
– Schrijf die waarheidswaarden over onder de propositieletters in de formule.

– Reken 'van binnen naar buiten' de waarheidswaarden van de deelformules uit, dat wil zeggen bereken eerst de waarheidswaarden van de kleinste deelformules en daarna die van steeds grotere, waarbij de waarden van de kleinere gebruikt worden, totdat de waarden van de gehele formule zijn berekend.

Na verloop van tijd kunt u het overschrijven van de waarheidswaarden van de propositieletters achterwege laten, maar zeker in het begin raden wij dat ten sterkste af: laat 'pen en papier' het werk doen!

VOORBEELD 9.16 De waarheidstabel voor de formule $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ is:

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ | $\vee$ | $(\neg$ | $p$ | $\wedge$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *1* |

«

OPGAVE 9.20
a In welke kolom van voorbeeld 9.16 kunt u nu de waarheidswaarde van de hele formule aflezen?
b Wanneer (dat wil zeggen: voor welke waarheidswaarden van de propositieletters) is de formule dus waar?

OPGAVE 9.21
Maak waarheidstabellen voor de volgende formules.
a $p \vee \neg q$
b $p \wedge (\neg q \vee q)$
c $\neg((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q))$

OPGAVE 9.22 (Aanw)
Stel 'eor' is een connectief voor de exclusieve disjunctie (Engels: 'exclusive or', soms wordt ook 'xor' gebruikt). De formule $\varphi$ eor $\psi$ drukt dus uit: óf $\varphi$ óf $\psi$, maar niet allebei.
a Geef de waarheidstabel van $\varphi$ eor $\psi$.
b Verzin een formule die de exclusieve disjunctie van $\varphi$ en $\psi$ uitdrukt en alleen van $\varphi$, $\psi$ en de connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ gebruik maakt.
c Maak ter controle de waarheidstabel van de door u voorgestelde formule.

### 9.3.4 IMPLICATIE

De waarheidstabel voor een implicatie $\varphi \to \psi$ ziet er zó uit:

Waarheidstabel van $\to$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \to \psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Een implicatie vertoont een niet geheel toevallige overeenkomst met sommige als-dan-zinnen uit de gewone taal. De zin 'Als het regent, dan worden de straten nat' is duidelijk onwaar als het enerzijds regent en anderzijds de straten niet nat worden. Daarom geven we $\varphi \to \psi$ de waarheidswaarde 0 in het geval $\varphi$ waar en $\psi$ onwaar is. Dit is ook het enige geval waarin de implicatie onwaar wordt. Als $\varphi$ en $\psi$ beide waar zijn, dan is de implicatie waar, zoals aan het voorbeeld te zien is. Lastiger is het geval waarin $\varphi$ onwaar is. De implicatie kan dan nooit onwaar zijn, want een echt tegenvoorbeeld (dat wil zeggen: een situatie waarin de implicatie onwaar is) zullen we in dat geval niet kunnen vinden. Het enige tegenvoorbeeld is immers het geval waarin $\varphi$ waar en $\psi$ onwaar is.

Mocht dit u nog niet overtuigen, denk dan aan een wetenschappelijke hypothese in de vorm van een implicatie, bijvoorbeeld 'Als de temperatuur hoger wordt, stijgt de zeespiegel', hier weergegeven als $p \to q$. Een geoloog die op grond van diepteboringen de juistheid van deze hypothese onderzoekt, kijkt naar die perioden waarin de temperatuur steeg ($p$ waar was). Alleen wanneer een periode wordt gevonden waarin de temperatuur steeg, maar de zeespiegel niet, kan geconcludeerd worden dat de hypothese onjuist is: de geoloog heeft dan een situatie gevonden waarin $p$ waar is en $q$ niet.

Mochten deze argumenten u nog niet overtuigen, dan resteert er slechts een dooddoener: de waarheidstabel voor $\to$ is nu eenmaal zo gedefinieerd. Dat dit gevoelsmatig een conflict oplevert met de gewone taal, komt vooral omdat we gewend zijn 'als ..., dan ...' in een oorzaak-gevolg-situatie te gebruiken. De uitspraak 'als de juf van ijzerdraad is, dan wordt ze niet kwaad' is dus waar, juist omdat 'de juf is van ijzerdraad' onwaar is.

VOORBEELD 9.17

De waarheidstabel voor de formule $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$ is:

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\to$ | $q)$ | $\to$ | $(\neg$ | $p$ | $\to$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | *1* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *2* | *1* |

De formule is dus alleen onwaar als $p$ onwaar is en $q$ waar. «

OPGAVE 9.23 (Aanw)

Maak waarheidstabellen voor de volgende formules.

a $\neg\neg p \to \neg p$

b $(p \to \neg p) \to q$

c $(p \wedge (p \to q)) \to q$

d $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

### 9.3.5 EQUIVALENTIE

Equi-valent = gelijk-waardig

We willen uiteraard dat een equivalentie $\varphi \leftrightarrow \psi$ juist dan waar is als $\varphi$ en $\psi$ dezelfde waarheidswaarde hebben, dat wil zeggen óf allebei waar óf allebei onwaar. Hiermee ligt de waarheidstabel voor equivalentie voor de hand:

Waarheidstabel van $\leftrightarrow$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

*Desda*

In gewone taal wordt 'als' ook vaak in de betekenis van 'desda' gebruikt, bijvoorbeeld in 'Je mag tv kijken als je huiswerk af is'. Volgens sommigen heeft ook 'mits' deze betekenis. Wanneer we expliciet willen aangeven dat we met een equivalentie en niet met een implicatie te maken hebben, moeten we onze toevlucht nemen tot min of meer moeizame constructies als 'precies dan als' en 'dan en slechts dan als' (desda). Die laatste formulering is in de wiskunde heel gebruikelijk, en daarom spreken we het symbool $\leftrightarrow$ ook als 'desda' uit.

VOORBEELD 9.18 De waarheidstabel voor de formule $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ is:

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg$ | $p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | *3* | *1* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *2* | *1* |

«

OPGAVE 9.24

a In welke kolom vindt u de waarheidswaarden van de formule in voorbeeld 9.18?

b Maak de waarheidstabel van $p \leftrightarrow q$.

c Vergelijk nu de waarheidswaarden van $p \leftrightarrow q$ met die van de formule in voorbeeld 9.18. Wat valt u op?

OPGAVE 9.25

Maak waarheidstabellen voor de volgende formules.

a $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$

b $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

c $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

## 9.4 De kracht van de propositielogica

De propositielogica is hiervoor omschreven als een spel met waarheidswaarden en als een taaltje gebaseerd op (preciseringen van) woorden als 'niet' en 'of'. Dat lijkt allemaal nogal bescheiden. Hoewel we in leereenheid 11 inderdaad een krachtiger logica zullen leren kennen, moet hier toch op een paar sterke punten gewezen worden. In de eerste plaats is de propositielogica de basis voor veel logische systemen en als zodanig al heel belangrijk. Voorts is de propositielogica in bepaalde opzichten sterker dan we misschien zouden denken. Dat blijkt als we proberen nog andere ('sterkere') connectieven toe te voegen.

### 9.4.1 ANDERE CONNECTIEVEN

In de voorgaande paragrafen hebben we een aantal connectieven bestudeerd. Zijn ze dit nu allemaal?
Zonder twijfel zijn $\neg$, $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ de meest bekende connectieven van de propositielogica: ze zijn volkomen standaard. Daarnaast worden er voor diverse doeleinden nog wel eens andere connectieven van stal gehaald. Een voorbeeld hiervan hebt u al gezien. In opgave 9.22 werd een speciaal connectief ingevoerd voor de exclusieve disjunctie (eor). Maar we hebben daar ook opgemerkt dat zo'n nieuw connectief niet echt nodig is. De bedoeling van 'óf $p$ óf $q$' kon ook worden bewerkstelligd door bijvoorbeeld de formule $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Dit nu is een illustratie van een veel algemener feit. Grofweg komt het hierop neer dat alle mogelijke waarheidstabellen inderdaad bij een of andere formule horen. Iets preciezer gezegd: alle mogelijke verdelingen van waarheidswaarden treden op als laatst verkregen kolom in de waarheidstabel van een formule die alleen van de standaardconnectieven gebruik maakt (en uiteraard van propositieletters en haakjes). Zoals we in leereenheid 10 zullen zien, hoeven we zelfs niet van alle standaardconnectieven gebruik te maken: alleen met $\neg$ en $\vee$ kan het bijvoorbeeld ook. De andere connectieven dienen dan uitsluitend voor ons gemak.

*Peirce*
*Sheffer*

Een logica met maar één connectief

De wiskundige vraag is nu: kan het ook met slechts één connectief? Een bevestigend antwoord hierop is gegeven door C.S. Peirce en H.M. Sheffer: het kan inderdaad met één connectief genaamd 'nand', dat de volgende waarheidstabel heeft:

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi$ nand $\psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Deze en de volgende tabel hoeft u niet te onthouden, maar als u zo'n tabel gegeven krijgt, moet u er wel mee kunnen werken.

Uit de tabel blijkt dat $\varphi$ nand $\psi$ staat voor 'niet zowel $\varphi$ als $\psi$'; nand is dan ook een samentrekking van het Engelse 'not' (niet) en 'and' (en). Een ander symbool voor hetzelfde connectief is de 'Sheffer-streep' $|$.

OPGAVE 9.26
Maak waarheidstabellen voor de volgende formules.
a $p$ nand $p$
b $(\varphi$ nand $\psi)$ nand $(\varphi$ nand $\psi)$

*Quine*

De Amerikaanse logicus W.V.O. Quine heeft nog een andere oplossing bedacht voor de voorgaande wiskundige vraag: het connectief 'nor', waarbij we $p$ nor $q$ kunnen lezen als 'noch $p$ noch $q$'. Naar zijn ontdekker wordt nor ook wel de 'Quine-dolk' (†) genoemd, welke de volgende waarheidstabel heeft.

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi$ nor $\psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

OPGAVE 9.27
Waarom zou dit connectief 'nor' heten?

### 9.4.2 VERTALEN IN PROPOSITIELOGICA

Een gevolg van het voorgaande is dat we (propositionele) uitspraken in de natuurlijke taal met allerlei connectieven kunnen vertalen naar formules in de propositielogica die uitsluitend gebruik maken van de standaardconnectieven $\neg$, $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$. In de volgende opgaven kunt u dit nog een aantal keren doen.

OPGAVE 9.28 (Aanw)
Gegeven zijn de volgende proposities:
$p$: Jan gaat naar het feest
$q$: Marie gaat naar het feest
Zet nu de volgende uitspraken om in formules van de propositielogica:
a Marie noch Jan gaat naar het feest.
b Of Marie óf Jan gaat naar het feest.
c Jan gaat naar het feest, tenzij Marie er naar toe gaat.

OPGAVE 9.29 (Aanw)
De gewone taal en soms zelfs de wiskundige taal kunnen behoorlijk misleidend zijn. Probeer de volgende zinnen weer te geven met formules van de propositielogica die de betekenis zo goed mogelijk benaderen. Geef steeds aan waar de gebruikte propositieletters voor staan.
a Zowel Jan als Marie gaan naar het feest.
b Men verhoogt de entreeprijzen en er komt niemand meer.
c (In een definitie) Een verzameling is leeg als zij geen elementen bevat.

OPGAVE 9.30 (Aanw)
Gegeven is dat de volgende uitspraak in een bepaalde situatie waar is:
'Als Jan gaat, gaat Marie in ieder geval, en Piet gaat alleen als Jan niet gaat.'
Wie gaan er nu? Zet de uitspraak eerst om in een formule en stel de waarheidstabel van deze formule op.

OPGAVE 9.31
De volgende uitspraken zijn dubbelzinnig. Geef de diverse manieren om de uitspraken te interpreteren weer in propositielogica.
a Niet roken en drinken is gezond.
b Het regent of hagelt en waait.

De propositielogica blijft ondanks haar goede eigenschappen een tamelijk beperkt geheel. Een van de beperkingen is gelegen in het feit dat we slechts over de waarheidswaarden waar en onwaar beschikken.

Voor sommige toepassingen in de informatica kan het wel zin hebben met meer waarheidswaarden te kunnen rekenen. Denk bijvoorbeeld aan een gegevensbank (zie de casus van blok 3). Als de informatie over een bepaalde uitspraak (zeg: 'Persoon *x* is gehuwd') geheel ontbreekt, dan kunnen we dit weergeven door hieraan de waarde 'onbepaald' (genoteerd als 1/2 ) toe te kennen. Als er daarentegen juist tegenstrijdige informatie over een bepaalde uitspraak is, dan kunnen we die de waarde 'overbepaald' geven. De meerwaardige logica houdt zich hiermee bezig: deze maakt het zelfs mogelijk met oneindig veel waarheidswaarden te rekenen. Een andere afwijking van het hebben van slechts twee waarheidswaarden is de zogenaamde 'fuzzy logic' waarin we waarheidswaarden als 'vrijwel waar', 'een beetje waar' en 'nagenoeg onwaar' mogen gebruiken. Deze 'vage logica' heeft haar weg naar de techniek al gevonden: zelfregulerende systemen zoals een anticiperende cv-thermostaat werken ermee en het wordt ook toegepast in de besturing van bedrijfsliften.

## SAMENVATTING

De taal van de propositielogica wordt gevormd door formules. Zulke formules zijn volgens strakke regels opgebouwd uit propositieletters ($p$, $q$, ...), haakjes en connectieven. De connectieven, hun uitspraak en de benamingen zijn:

| *connectief* | *uitspraak* | *naam* |
|---|---|---|
| $\neg$ | niet | negatieteken |
| $\wedge$ | en | conjunctieteken |
| $\vee$ | of | disjunctieteken |
| $\rightarrow$ | als ..., (dan) | implicatieteken |
| $\leftrightarrow$ | desda | equivalentieteken |

Behalve het negatieteken, dat maar met één formule combineert tot een nieuwe formule $\neg\varphi$, combineren de connectieven twee formules: $(\varphi \wedge \psi)$ noemen we een conjunctie, $(\varphi \vee \psi)$ een disjunctie, $(\varphi \rightarrow \psi)$ een implicatie en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een equivalentie. Formules die optreden bij de opbouw van een formule, noemen we deelformules van die formule. De deelformules van een formule $\varphi$ die door een connectief worden gecombineerd tot een nieuwe deelformule van $\varphi$, vormen het bereik van dat connectief.

De betekenis van de formules is gelegen in hun waarheidstabellen. Die waarheidstabellen zijn op stelselmatige wijze op te stellen wanneer de waarheidstabellen van de connectieven bekend zijn. Deze zijn:

| $\varphi$ | $\psi$ | $\neg\varphi$ | $\varphi \wedge \psi$ | $\varphi \vee \psi$ | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\varphi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

ZELFTOETS

1 Er kan bewezen worden dat er geen grootste priemgetal bestaat. Beschouw nu de uitspraak ‘Er is een grootste priemgetal’.
a Is deze uitspraak waar of onwaar?
Motiveer uw antwoord.
b Is deze uitspraak een propositie? Motiveer uw antwoord.
c Stel nu dat een krantenlezer het feit dat het grootst bekende priemgetal meer dan 250 000 cijfers bezit, verkeerd opvat en denkt dat hiermee het grootste priemgetal gevonden is. Wat is volgens deze krantenlezer de waarheidswaarde van eerdergenoemde uitspraak? Is dit te rijmen met uw antwoorden op a en b?

2 Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn formules en welke niet? Als een rijtje geen formule is, geef dan aan waarom. Als een rijtje wel een formule is, schrijf dan op hoe deze formule moet worden uitgesproken.
a $\wedge p \wedge q$
b $p \vee p$
c $(p \to q) \leftrightarrow \neg(\neg q \to \neg p)$
d $p \wedge \vee q$

3 a Geef de waarheidstabellen voor $\vee$ en $\to$.
b Maak de waarheidstabel voor de formule $(p \to q) \vee (q \to p)$.
c Maak ook de waarheidstabel voor $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$.

4 Geef (bijvoorbeeld door onderstreping) het bereik aan van:
a $\vee$ in $(p \to q) \vee (q \to p)$.
b het eerste voorkomen van $\vee$ in $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$.
c het tweede voorkomen van $\vee$ in $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$.

5 In een wiskundige analyse komt de volgende propositie voor:
‘als $x > 3$ en $y \leq 0$, dan $z \neq 0$’.
a Zet deze uitspraak om in een formule van de propositielogica.
b Stel de waarheidstabel van deze formule op.
c Wanneer is de formule dus onwaar?

TERUGKOPPELING LEEREENHEID 9

## 1 Uitwerking van de opgaven

9.1 De zinnen in de voorbeeldredeneringen in de introductie, zoals 'De afstandsbediening is kapot' en 'De tv werkt goed', zijn proposities, want zijn ondubbelzinnig waar of onwaar. Toevoegingen als 'maar' en 'dus' voegen op zich niets toe aan de proposities, maar helpen de lezer wel bij de betekenis in 'gewone taal'.

9.2 Zoals in de aanwijzing wordt opgemerkt, kan er maar hoogstens één uitspraak waar zijn. Het geval dat er helemaal geen uitspraak waar is, kan zich echter niet voordoen, want dan zijn er immers vier uitspraken onwaar, en dat zegt de laatste uitspraak nu juist, dus die zou dan waar zijn! Er is dus precies één uitspraak waar, en dus zijn er precies drie onwaar, en de derde uitspraak zegt dit ook: dat is dus de enige ware uitspraak.

9.3 Behalve c (een opdracht) en f (een vraag) zijn het allemaal proposities, ook al is die waarheid wellicht niet objectief vast te stellen (a), of tot op heden onbekend (d). Propositie e is onwaar en g waar.

9.4 **a** De conjunctie wordt $p \wedge q$ met $p$: 'Marie komt naar het feest' en $q$: 'Kees komt naar het feest'.
**b** De disjunctie wordt $p \vee q$ met $p$: 'Jan wast af' en $q$: 'Jan droogt de vaat'.

9.5 Bij b hoeven geen haakjes 'gelezen' te worden, want zoals het er staat, is het ook ondubbelzinnig. Anders gezegd: 'en $q$ dan $r$' kan nooit een formule aanduiden. Bij c moeten we de haakjes wel lezen, want bijvoorbeeld 'niet $p$ en $q$ desda tussen haakjes niet $p$ of niet $q$' kan ook de formule $\neg p \wedge (q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$ aanduiden.

9.6 **a** 'als $p$ dan niet niet $p$'
**b** 'als $p$ dan $q$ tussen haakjes desda tussen haakjes niet $p$ of $q$'
**c** 'als én als $p$ dan $q$ én als $q$ dan $r$, dan als $p$ dan $r$' (met 'tussen haakjes' krijgen we hier een onbegrijpelijke brij, een alternatief is gewoon spellen: 'linkerhaakje linkerhaakje $p$ implicatieteken ...')

9.7 Een samengestelde formule bestaat uit minstens twee symbolen, bijvoorbeeld $\neg p$.

9.8 De rijtjes bij a, b en d zijn formules. Het rijtje c is geen formule, want een disjunctieteken kan nooit vooraan staan. Bij e zouden er haakjes bij moeten. Rijtje b ziet er misschien gek uit, maar het mag wel.

9.9 **a** $p, p \to p, p \to (p \to p)$
**b** $p, q, \neg q, \neg q \wedge p, p \vee (\neg q \wedge p)$
**c** $p, q, \neg p, p \to q, \neg p \vee q, (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

9.10 In $\neg p \vee q$ komt het deelrijtje $p \vee q$ voor dat geen deelformule is van $\neg p \vee q$.

9.11 **a** $p, q, r, \neg r, q \vee \neg r, p \wedge (q \vee \neg r), \neg(p \wedge (q \vee \neg r))$
**b** $\neg\underline{(p \wedge (q \vee \neg r))}$
**c** $\neg(p \wedge (q \vee \neg \underline{r}))$
**d** $\neg(\underline{p} \wedge \underline{(q \vee \neg r)})$

9.12 Het bereik van (een voorkomen van) een connectief in $\varphi$ bestaat uit die deelformules van $\varphi$ die gecombineerd met dit connectief weer een deelformule van $\varphi$ vormen.

9.13 **a** $\underline{p} \rightarrow \underline{\neg(q \leftrightarrow p)}$
**b** $p \vee (\underline{\neg q} \rightarrow \underline{p})$
**c** $\underline{(p \vee \neg q)} \rightarrow \underline{p}$
**d** $(\underline{p} \rightarrow \underline{q}) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
**e** $\underline{p} \rightarrow \underline{(q \leftrightarrow (\neg p \vee q))}$

9.14 Als de waarheidswaarde van $\varphi$ gelijk aan 0 is, dan moet de waarheidswaarde van $\neg\varphi$ gelijk zijn aan 1. En als de waarheidswaarde van $\varphi$ gelijk aan 1 is, dan moet de waarheidswaarde van $\neg\varphi$ gelijk aan 0 zijn. De waarheidswaarden van $\varphi$ en $\neg\varphi$ zijn dus elkaars complement ten opzichte van 1. Als $x$ de waarheidswaarde van $\varphi$ is (en de waarde 0 of 1 kan hebben) dan is $1 - x$ de waarheidswaarde van $\neg\varphi$. Een oplossing voor de gevraagde rekenkundige functie is dus $1 - x$. (Andere oplossingen zijn bijvoorbeeld $(x + 1)\text{mod}2$ of $2^{(1-x)} - 1$.)

9.15 Ze zijn gelijk! Zoals we in de volgende leereenheid zullen zien, is dit niet van belang ontbloot.

9.16 De waarheidstabel van $\neg\neg\neg p$ bevat een kolom meer dan de tabel in voorbeeld 9.12:

| $p$ | $\neg p$ | $\neg\neg p$ | $\neg\neg\neg p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |

9.17 **a** Voor drie propositieletters zijn er $2 \times 2 \times 2 = 8$ combinaties van waarheidswaarden mogelijk, dus 8 rijen.
**b** Voor $n$ propositieletters zijn er dus evenzo $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^n$ combinaties van waarheidswaarden mogelijk, dus $2^n$ rijen.
**c** De bovenste formule bevat 8 verschillende propositieletters, dus zal de waarheidstabel volgens onderdeel b $2^8 = 256$ rijen met waarheidswaarden bevatten. Bij de onderste formule is er slechts sprake van 3 verschillende propositieletters, dus daar krijgen we 8 rijen. Nu is de bovenste formule wel wat korter dan de onderste (19 tegen 31 tekens als we de haakjes niet meerekenen), maar het gaat om het aantal deelformules en dat is bij de bovenste ook 19, bij de onderste 21. De bovenste tabel is dus $256 \times 19 = 4864$ plaatsen groot, de onderste $8 \times 21 = 168$ en daardoor relatief makkelijk te maken. Zo'n tabel stelt u uiteraard niet zelf op, maar u schrijft na een geschikte vervolgcursus een computerprogramma dat dit voor u doet!

9.18 **a**

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**b**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \wedge q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

**c**

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ | $\neg(p \wedge \neg p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |

Merk op dat deze formule alleen waar kan zijn. We komen hier in de volgende leereenheid uitgebreid op terug.

**d**

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \wedge (q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

9.19 De waarheidtabel voor $p \vee q$ wordt:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

De formule $p \vee q$ is onwaar als $p$ en $q$ beide onwaar (0) zijn.

9.20 **a** In kolom 4: daar staat het connectief met bereik over de hele formule.
**b** De formule is waar als $p$ en $q$ verschillen in waarheidswaarde.

9.21 **a**

| $p$ | $q$ | $p$ | $\vee$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | *1* | *3* | *2* | *1* |

**b**

| $p$ | $q$ | $p$ | $\wedge$ | $(\neg$ | $q$ | $\vee$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *1* |

**c**

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $((p$ | $\vee$ | $\neg$ | $q)$ | $\wedge$ | $(\neg$ | $p$ | $\vee$ | $q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | *5* | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *1* |

9.22 **a** De waarheidstabel voor eor is: (zie ook de aanwijzing)

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi$ eor $\psi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**b** De uitspraak óf $\varphi$ óf $\psi$ wordt uitgedrukt door bijvoorbeeld $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$. Ook $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$ voldoet.
**c** De waarheidstabel voor de formule $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$ staat in feite al in voorbeeld 9.16, als we $\varphi$ voor $p$ in de plaats zetten en $\psi$ voor $q$.

9.23 **a**

| $p$ | | $\neg$ | $\neg$ | $p$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | *3* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* |

**b**

| $p$ | $q$ | | $(p$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $p)$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* | *1* |

**c**

| $p$ | $q$ | | $(p$ | $\wedge$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q))$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | | *1* | *3* | *1* | *2* | *1* | *4* | *1* |

**d**

| $p$ | $q$ | $r$ | | $((p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $(q$ | $\rightarrow$ | $r))$ | $\rightarrow$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | *1* | *2* | *1* | *3* | *1* | *2* | *1* | *4* | *1* | *2* | *1* |

9.24 **a** In de kolom waar 4 onder staat.
**b** De waarheidstabel van $p \leftrightarrow q$ is:

| $p$ | $q$ | | $p$ | $\leftrightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 |
| | | | *1* | *2* | *1* |

**c** Kolom 4 in voorbeeld 9.18 is gelijk aan kolom 2 in onderdeel b van deze opgave.

9.25 **a**

| $p$ | $p$ | $\leftrightarrow$ | $(p$ | $\leftrightarrow$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | *1* | *3* | *1* | *2* | *1* |

**b**

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\to$ | $q)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg$ | $p$ | $\vee$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | *1* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *1* |

**c**

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg$ | $p$ | $\vee$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | *3* | *1* | *2* | *1* | *4* | *2* | *1* | *3* | *2* | *1* |

9.26 **a**

| $p$ | $p$ | nand | $p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| | *1* | *2* | *1* |

**b**

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi$ | nand | $\psi)$ | nand | $(\varphi$ | nand | $\psi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | *1* | *2* | *1* | *3* | *1* | *2* | *1* |

9.27 Nor is een samentrekking van 'not' en 'or', en komt als zodanig ook in het gewone Engels voor, in de betekenis van ons 'noch'.

9.28 **a** Goed zijn bijvoorbeeld $\neg q \wedge \neg p$ of $\neg p \wedge \neg q$.
**b** Bijvoorbeeld $p \leftrightarrow \neg q$ (zie uitwerking opgave 9.22).
**c** Dit hangt af van hoe we 'tenzij' opvatten: in de zin van 'als niet' opgevat, wordt de vertaling $\neg q \to p$, en opgevat als 'desda niet' wordt het $p \leftrightarrow \neg q$. (Dit komt dus neer op het verschil tussen inclusieve en exclusieve disjunctie, vergelijk ook met onderdeel b van deze opgave.)

9.29 **a** Laat $p$ en $q$ zijn als bij opgave 9.28. De uitspraak wordt dan weergegeven door $p \wedge q$ (dus met $\wedge$ en niet met $\rightarrow$).
**b** Zij $p$: 'Men verhoogt de entreeprijzen' en $q$: 'Er komt nog iemand'. De meest voor de hand liggende lezing is dan niet $p \wedge \neg q$, maar $p \rightarrow \neg q$!
**c** De logische formule wordt: $p \leftrightarrow \neg q$ met $p$: 'Verzameling $V$ is leeg' en $q$: 'Verzameling $V$ bezit elementen'. De koppeling die door $V$ in de uitspraken bereikt wordt, is in de vertaling overigens verloren gegaan: daarvoor is de propositielogica niet toegerust. Waar het hier om gaat, is dat er niet $\rightarrow$ maar $\leftrightarrow$ staat: zo worden definities nu eenmaal opgevat!

9.30 Zij $p$: 'Jan gaat', $q$: 'Marie gaat' en $r$: 'Piet gaat'. De uitspraak kan dan in propositielogica worden uitgedrukt door: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p)$ (soms wordt 'alleen als' niet als $\rightarrow$, maar als $\leftrightarrow$ opgevat – die mogelijkheid laten we hier buiten beschouwing). De waarheidstabel voor deze formule is:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $(r$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | | *1* | *2* | *1* | *4* | *1* | *3* | *2* | *1* |

De gevallen waarin de formule waar is, zijn in de tabel uit de kolom boven 4 te halen. Het zijn die gevallen (rijen) waarin een 1 staat in de kolom boven 4. Voor deze gevallen kan uit de kolommen onder $p$, $q$ en $r$ worden afgeleid dat óf Jan en Marie gaan, maar Piet niet, óf Jan gaat niet.

9.31 **a** Er zijn diverse mogelijkheden: $\neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q)$ en $\neg p \wedge q$, met $p$: 'Roken is gezond' en $q$: 'Drinken is gezond'. (We zien af van de dubbelzinnigheid van het woord 'drinken'.)
**b** Mogelijkheden zijn nu: $p \vee (q \wedge r)$ en $(p \vee q) \wedge r$, met $p$: 'Het regent', $q$: 'Het hagelt' en $r$: 'Het waait'.

## 2 Uitwerking van de zelftoets

1 **a** De uitspraak is onwaar: we gaan ervan uit dat als iets bewezen is, het ook waar is. Dus de stelling die zegt dat er geen grootste priemgetal bestaat, is waar, en deze stelling vormt de ontkenning van de gegeven uitspraak – die is dus onwaar.
**b** Ja, de uitspraak is onwaar en derhalve een propositie.
**c** Volgens onze krantenlezer is de uitspraak uiteraard waar. Dit doet echter niets af aan de antwoorden op a en b.

2 **a** Dit is geen formule: uitgezonderd het negatieteken kan een connectief in onze propositielogica niet voorop staan (zie definitie).
**b** Dit is een formule (ook al is de disjunctie in feite overbodig); spreek uit: '$p$ of $p$'.
**c** Dit is ook een formule; spreek uit: 'als $p$ dan $q$ tussen haakjes desda niet tussen haakjes als niet $q$ dan niet $p$'.
**d** Dit is geen formule, connectieven anders dan $\neg$ kunnen volgens de definitie van formule nooit direct naast elkaar staan.

3 **a** De waarheidstabel van $\vee$ staat in paragraaf 9.3.3 en die van $\rightarrow$ in paragraaf 9.3.4.

**b**

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\vee$ | $(q$ | $\rightarrow$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | *1* | *2* | *1* | *3* | *1* | *2* | *1* |

**c**

| $p$ | $q$ | $r$ | $((p$ | $\vee$ | $\neg$ | $q)$ | $\wedge$ | $r)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $r)$ | $\vee$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* | *1* | *5* | *3* | *1* | *2* | *1* | *4* | *1* |

4 **a** $\underline{(p \rightarrow q)} \vee \underline{(q \rightarrow p)}$
**b** $((\underline{p} \vee \underline{\neg q}) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$
**c** $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\underline{\neg(p \wedge r)} \vee \underline{q})$

5 **a** Een mogelijke formule is: $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$, met $p$: '$x > 3$', $q$: '$y \leq 0$' en $r$: '$z = 0$'. (Kiest u voor $r$: '$z \neq 0$', dan wordt de formule $(p \wedge q) \rightarrow r$; onderdeel b en de motivatie bij onderdeel c veranderen navenant.)

**b**

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**c** De formule is onwaar als $p$, $q$ en $r$ alle waar zijn, dat wil zeggen: in het geval $x > 3$, $y \leq 0$ en $z = 0$.