Hoofdstuk 2

Kernbegrippen uit de naïeve verzamelingenleer

2.1 Terminologie en notatie-afspraken

Wat verzamelingen zijn weet u eigenlijk al, want u begrijpt wat er bedoeld wordt wanneer iemand het heeft over de verzameling van alle Nederlanders boven 21 jaar, en u hebt een idee van wat een postzegelverzameling is.

In de wiskunde is een *verzameling* simpelweg een of andere collectie van dingen (Engels voor 'verzameling': *set*). De dingen die samen in een verzameling zitten heten de *leden* of *elementen* van die verzameling (Engels: *members*, *elements*). We kunnen verzamelingen namen geven, bij voorbeeld door ze aan te duiden met hoofdletters van het Romeinse alfabet. We kunnen dan bij voorbeeld spreken over een of andere verzameling A.

Het begrip 'verzameling' is een grondbegrip dat zelf niet gedefinieerd kan worden. De omschrijving in termen van 'collectie van objecten' die we u zojuist hebben laten slikken is geen definitie maar een verschuiving van het definitie-probleem: immers, wat is een collectie? Net zo voor het begrip 'element': ook hier moeten we ons tevreden stellen met een vage kenschets. 'Verzameling' en 'element' zijn de meest fundamentele begrippen uit het wiskundige woordenboek: ze worden gebruikt om andere begrippen te definiëren, maar ze worden zelf niet gedefinieerd. U wordt geacht ermee vertrouwd te zijn; als dat niet zo is raakt u er vanzelf mee vertrouwd door dit hoofdstuk te lezen.

Verzamelingen spelen in wiskunde en logica een grote rol. Verzamelingenleer is een relatief jong onderdeel van de wiskunde, begonnen met het werk van Georg Cantor (1845–1918). Werken met verzamelingen maakt het mogelijk om snel complexe structuren te maken. Nieuwe objecten kunnen worden gecreëerd door lagere te verzamelen; die nieuwe objecten kunnen heel andere eigenschappen hebben dan hun elementen. Om dit laatste in te zien hoeft u niets van wiskunde te weten: een Nederlandse postzegel kan de eigenschap hebben dat er een portret van Beatrix op staat, maar een verzameling van Nederlandse postzegels heeft die eigenschap niet.

De elementen van een verzameling A hoeven niets met elkaar gemeen te hebben (behalve dan het feit dat ze samen in A zitten). De elementen van een verzameling hoeven ook niet per se *materiële* dingen te zijn. Uit het feit dat de elementen van een verzameling abstracte dingen mogen zijn volgt dat die elementen bij voorbeeld zelf ook verzamelingen mogen zijn. Op deze mogelijkheid gaan we straks nader in.

Omdat de elementen van een verzameling niets met elkaar gemeen hoeven te hebben zouden we kunnen besluiten het getal 3, paus Johannes Paulus II en de stad Parijs samen in een verzameling te stoppen. Een manier om deze verzameling aan te duiden is:

$$A = \{3, \text{Johannes Paulus II}, \text{Parijs}\}.$$

De verzameling A wordt hier gekarakteriseerd door het opsommen van zijn elementen. Het feit dat het getal 3, de paus, en de stad Parijs samen in een verzameling zitten geven we aan met de accolades.

We kunnen verzamelingen op verschillende manieren definiëren. Wanneer het gaat om eindige verzamelingen (dat wil zeggen om verzamelingen waarvan je de leden kunt opsommen, zo dat die opsomming op een gegeven moment afgelopen is), dan kun je gewoon alle elementen *noemen*. Dit heet: definitie door opsomming. De introductie van de verzameling A hierboven is een voorbeeld van definitie door opsomming.

We kunnen verzamelingen ook invoeren door middel van *omschrijving*. Deze methode werkt ook voor oneindige verzamelingen. Voorbeeld:

$$B = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal en } x \text{ is even}\}.$$

B is de verzameling van alle natuurlijke getallen (getallen uit het rijtje 0, 1, 2, 3, 4, enzovoorts) die deelbaar zijn door twee, ofwel: de verzameling van alle *even* natuurlijke getallen. Merk op dat B niet eindig is. B is verkregen door een deel te nemen van een andere verzameling. De verzameling van natuurlijke getallen beschouwen we als gegeven. Deze verzameling wordt vaak aangeduid als $\mathbf{N}$.

We voeren nu de volgende notatie in:

- $a \in B$ "a is een element van B."
- $a \notin B$ "a is geen element van B."

- $A \subseteq B$ "A is bevat in B"; "A is een deelverzameling van B" (dit wil zeggen: elk element van A is een element van B).

- $A \not\subseteq B$ "A is niet bevat in B"; "A is geen deelverzameling van B" (dit wil zeggen: niet elk element van A is een element van B).

- $A \subset B$ "A is echt bevat in B"; "A is een echte deelverzameling van B" (dit wil zeggen: elk element van A is een element van B en niet elk element van B is een element van A).

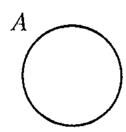
- $A \not\subset B$ "A is niet echt bevat in B"; "A is geen echte deelverzameling van B."

  Opmerking: om voor ons niet geheel duidelijke redenen zijn er in de middelbare school wiskunde notatie-afspraken gemaakt die enigszins afwijken van de internationaal gangbare afspraken die hierboven zijn vermeld. Met name:

  - $\subset$ wordt gebruikt voor "is bevat in".
  - $\underset{\neq}{\subset}$ wordt gebruikt voor "is echt bevat in".

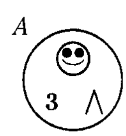
  In dit boek volgen wij het wetenschappelijk gangbare spraakgebruik, en *niet* de middelbare school notatie.

Om het denken over verzamelingen te vergemakkelijken is het nuttig om plaatjes te tekenen. Een verzameling A geven we als volgt aan met behulp van een cirkel:

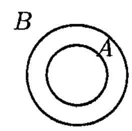


De punten die binnen de cirkel liggen zijn de elementen van A.

Wanneer A een eindige verzameling is, kunnen we de afzonderlijke elementen in de cirkel tekenen:



Het gegeven dat $A \subseteq B$ kan nu in het volgende plaatje worden uitgedrukt:



Als $A = B$ dan is het buitengebied leeg, als $A \subset B$ dan bevat het buitengebied een of meer elementen. We tekenen de plaatjes altijd zo algemeen mogelijk, dus we houden rekening met deze tweede mogelijkheid. Dit soort plaatjes heten Venndiagrammen (naar de logicus J. Venn, 1834–1923).

Verzamelingen die precies één element hebben worden *atomaire verzamelingen* of *singletons* genoemd (Engels: *singletons*, *singleton sets*). Dus: wanneer a een of ander willekeurig ding is, dan is $\{a\}$ een atomaire verzameling. De verzameling $\{a\}$ wordt wel aangeduid als: "singleton a". Let op: er is verschil tussen a en $\{a\}$, tussen het ding a en de atomaire verzameling met a als element. Iets concreter: er is verschil tussen de paus en de atomaire verzameling met de paus als element. Johannes Paulus II is een persoon; de verzameling met Johannes Paulus II als enige element is geen persoon, maar een eigenschap, namelijk de eigenschap Johannes Paulus II te zijn. In een plaatje:

de paus singleton de paus

We hebben hierboven opgemerkt dat de elementen van verzamelingen zelf ook weer verzamelingen kunnen zijn. Dus: als a en b willekeurige dingen zijn, dan is $\{a, b\}$ een verzameling. Maar nu is $\{\{a, b\}\}$ ook een verzameling, namelijk: de verzameling met de verzameling $\{a, b\}$ als enige element. Let op: $\{\{a, b\}\}$ en $\{a, b\}$ zijn verschillende verzamelingen; $\{\{a, b\}\}$ is een atomaire verzameling, $\{a, b\}$ is dat niet.

Opdracht 2.1 *Ga na of de volgende verzamelingen singletons zijn:*

1. $\{\{a\}\}$
2. $\{\{a\}, \{b\}\}$
3. $\{\{\{a\}, \{b\}\}\}$.

Opdracht 2.2 *Hier volgen wat beweringen over verzamelingen waarbij de zojuist ingevoerde notatie-afspraken worden gebruikt. Ga na wat de beweringen precies uitdrukken en of ze juist zijn. De objecten a en b zijn* verschillend, *en het zijn zelf geen verzamelingen.*

1. $a \in \{a\}$
2. $a \subseteq \{a\}$
3. $a \subseteq a$
4. $\{a\} \subseteq \{a\}$
5. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
6. $a \in \{a, b\}$
7. $\{a\} \in \{a, b\}$
8. $\{a\} \subset \{a, b\}$
9. $\{a\} \subseteq \{a, b\}$
10. $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$.

2.2 Gelijkheid van verzamelingen

Dat twee verzamelingen A en B aan elkaar gelijk zijn, kunnen we als volgt uitdrukken:

$$A = B.$$

Dat twee verzamelingen A en B *niet* aan elkaar gelijk zijn drukken we als volgt uit:

$$A \neq B.$$

Als twee verzamelingen aan elkaar gelijk zijn dan hebben ze dezelfde elementen. Met andere woorden: als $A = B$ dan geldt voor iedere x: $x \in A$ dan en slechts dan als $x \in B$. Met andere woorden: als $A = B$ geldt voor iedere x: als $x \in A$ dan $x \in B$ *en* als $x \in B$ dan $x \in A$. Nog anders gezegd: als $A = B$ dan geldt $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

In het vervolg zullen we 'dan en slechts dan als' afkorten als *desda* (Engels voor 'dan en slechts dan als': *if and only if*; voor de afkorting 'desda': *iff*). In plaats van 'desda' wordt ook wel het symbool $\Longleftrightarrow$ gebruikt. De bewering 'p dan en slechts dan als q' is een combinatie van 'p indien q' (dat wil zeggen: 'als q dan p'), soms genoteerd als '$p \Leftarrow q$', en 'p slechts indien q' (dat wil zeggen 'als p dan q'), met notatie '$p \Rightarrow q$'.

Voor de hand liggende vraag: geldt nu ook *omgekeerd*, dat als twee verzamelingen A en B dezelfde elementen hebben, A gelijk is aan B? In de verzamelingenleer geldt de afspraak dat dit inderdaad zo is. Deze afspraak is vervat in het zogenaamde *extensionaliteits-axioma* of *axioma van uitgebreidheid*.

Axioma 2.1 (Extensionaliteit)
$A = B$ desda A en B dezelfde elementen hebben.

Het extensionaliteits-axioma kan als volgt worden geparafraseerd: $A = B$ desda voor alle x geldt: $x \in A$ desda $x \in B$. Wat het axioma in feite zegt is dat de identiteit van een verzameling volledig bepaald is door zijn elementen. Twee verzamelingen zijn alleen verschillend wanneer er een ding valt aan te wijzen dat element is van de ene maar niet van de andere verzameling. Uit het extensionaliteitsaxioma volgt meteen:

- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

Het maakt kennelijk niet uit in welke volgorde je de elementen van een verzameling opsomt. De elementen van een verzameling zijn *ongeordend.* Verder volgt uit het extensionaliteitsaxioma:

- $\{a, a\} = \{a\}$.

Immers, er valt geen element aan te wijzen dat in $\{a, a\}$ zit en niet in $\{a\}$, en omgekeerd net zo. Dus: het heeft geen zin om bij het opsommen van een verzameling een bepaald element meerdere keren te noemen.

Opdracht 2.3 *Ga na of de volgende verzamelingen singletons zijn:*

1. $\{\{a\}, \{a\}\}$
2. $\{\{a, b\}, \{b, a\}\}$.

2.3 De lege verzameling

Het ligt niet in het begrip verzameling opgesloten dat een verzameling minstens één element heeft. We kunnen ook verzamelingen met 0 elementen bekijken. Laten we een verzameling met 0 elementen een lege verzameling noemen. Het extensionaliteits-axioma levert nu op dat er *precies één* lege verzameling is. Immers, stel dat er meer dan één lege verzameling zou zijn. Dan zou je twee lege verzamelingen A en B kunnen nemen die dan—volgens het extensionaliteits-axioma—van elkaar zouden moeten verschillen in het feit dat A een element heeft dat B niet heeft of omgekeerd. Maar dit kan nu juist niet, omdat A en B allebei leeg zijn. Dus: A en B moeten—in tegenspraak met wat we hadden aangenomen—aan elkaar gelijk zijn. De slotsom is dat er precies één lege verzameling is. We noemen deze verzameling *de* *lege verzameling*. De lege verzameling wordt vaak aangeduid als $\emptyset$. Soms wordt ook wel de notatie $\{\}$ gebruikt, maar wij houden het op $\emptyset$.

Bij de eerste kennismaking met de lege verzameling is het even wennen. De lege verzameling is een ding (zij het dan een abstract ding). Dit ding kan dus zelf voorkomen als element van verzamelingen. We kunnen dus bij voorbeeld hebben: $\{\emptyset\}$, ofwel: singleton de lege verzameling. Weer moeten we bedacht zijn op het verschil tussen $\emptyset$ en $\{\emptyset\}$. De lege verzameling is niet gelijk aan singleton de lege verzameling. Immers: $\emptyset$ heeft geen elementen, en $\{\emptyset\}$ heeft er precies één. We hebben:

- $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

Verder heeft de lege verzameling de eigenschap dat hij bevat is in elke andere verzameling. Immers: omdat $\emptyset$ geen elementen heeft zal altijd gelden: als A een verzameling is, dan is elk element van $\emptyset$ element van A.

Opdracht 2.4 *Ga na dat* $\emptyset$ echt *bevat is in elke verzameling behalve* $\emptyset$.

Opdracht 2.5 *Wat drukken de volgende beweringen uit? Welke ervan zijn juist en welke niet?*

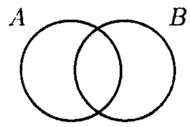
1. $\emptyset \subseteq \{a\}$
2. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \in \emptyset$
5. $\emptyset \notin \emptyset$
6. $\emptyset \in \{a\}$.

2.4 Vereniging, doorsnede en verschil

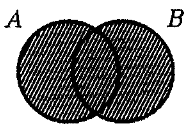
Laat A en B twee verzamelingen zijn. Dan is de *vereniging* (Engels: *union* of *join*) van A en B als volgt gedefinieerd.

Definitie 2.1 *De* **vereniging** *van A en B $\stackrel{\text{def}}{=}$ de verzameling van alle elementen uit A plus alle elementen uit B.*

We noteren de vereniging van A en B als $A \cup B$. Het is nuttig om plaatjes (Venn diagrammen) te tekenen. We tekenen een Venn diagram altijd zo algemeen mogelijk:



Nu is $A \cup B$ het gearceerde gebied:



$A \cup B$

Een paar voorbeelden van het gebruik van $\cup$:

- $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $\{a\} \cup \{\{a\}\} = \{a, \{a\}\}$
- $\{a, b\} \cup \emptyset = \{a, b\}$.

Het verenigen van twee verzamelingen is een *bewerking* die je op verzamelingen uitvoert, en waarvan het resultaat een nieuwe verzameling is. Zo'n bewerking wordt een *operatie* genoemd. De operatie 'verenigen' (aangeduid met het symbool $\cup$) heeft een aantal elementaire eigenschappen die we hier opsommen:

- $A \cup A = A$ (deze eigenschap heet *idempotentie*)
- $A \cup B = B \cup A$ (deze eigenschap heet *commutativiteit*)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (deze eigenschap heet *associativiteit*).

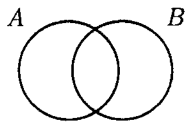
Het bewijs van de idempotentie van $\cup$: een willekeurig ding x zit in $A \cup A$ desda x in een van de twee verenigde verzamelingen zit, dus: desda x in A zit of in A, dat wil zeggen desda x in A zit. Dus $A \cup A = A$.

Opdracht 2.6 *Bewijs op dezelfde manier dat $\cup$ commutatief en associatief is.*

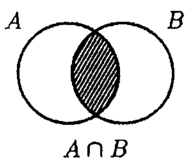
Uit de associativiteit van $\cup$ volgt dat we willekeurig veel verzamelingen kunnen verenigen zonder ons druk te maken om de haakjes (dat wil zeggen om de *volgorde* bij het toepassen van de verenigings-operatie). We kunnen dus in plaats van $A \cup (B \cup C)$ of $(A \cup B) \cup C$ zonder bezwaar schrijven: $A \cup B \cup C$.

Definitie 2.2 *De* **doorsnede** *of* **doorsnijding** *(Engels:* intersection *of* meet*) van twee verzamelingen A en B $\stackrel{\text{def}}{=}$ de verzameling van de dingen die zowel element van A als van B zijn.*

De doorsnijding van A en B wordt aangegeven als: $A \cap B$. Weer is een plaatje nuttig. Laat dit de verzamelingen A en B zijn:



Dan is het gearceerde gebied de verzameling $A \cap B$:



Een paar voorbeelden (neem aan dat a, b en c onderling *verschillende* dingen zijn):

- $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{a\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Net als 'verenigen' heeft 'doorsnijden' de volgende eigenschappen:

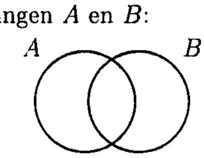
- $A \cap A = A$ (idempotentie)
- $A \cap B = B \cap A$ (commutativiteit)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativiteit).

Opdracht 2.7 *Bewijs de idempotentie, commutativiteit en associativiteit van* $\cap$.

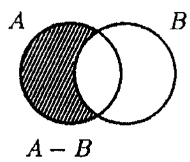
We kunnen nu ook een argument geven waarom een abstract object als $\emptyset$ handig is. Stel dat A en B verzamelingen zijn zonder gemeenschappelijke elementen. Ook in dit geval willen we toch dat $A \cap B$ een verzameling is: dat is nu dus $\emptyset$. De derde elementaire operatie op verzamelingen die we behandelen is het nemen van het *verschil* van twee verzamelingen A en B (Engels: *the difference of A and B*).

Definitie 2.3 *Het* **verschil** *van* A *en* $B \stackrel{\text{def}}{=}$ *de verzameling van alle elementen van* A *die niet in* B *zitten.*

Notatie voor het verschil van A en B: $A - B$. We tekenen weer een plaatje. Hier zijn weer de verzamelingen A en B:



$A - B$ is nu het gearceerde gedeelte:

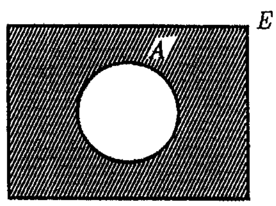


Voorbeelden (neem weer aan dat a, b, en c onderling verschillende dingen zijn):

- $\{a\} - \{b\} = \{a\}$
- $\{a, b, c\} - \{a, b\} = \{c\}$
- $\{a, b\} - \emptyset = \{a, b\}$
- $\{a, \{a\}\} - \{a\} = \{\{a\}\}$
- $\{a, \{a\}\} - \{\{a\}\} = \{a\}$
- $\emptyset - \{a, b, c\} = \emptyset$.

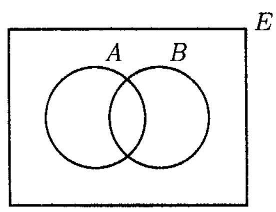
Opdracht 2.8 *Is de verschil-operatie idempotent? Commutatief? Associatief?*

Wanneer A een deelverzameling is van E noemen we het verschil van E en A ook wel: het *complement* van A ten opzichte van E. Het gearceerde gedeelte in het plaatje is het complement van A ten opzichte van E:



Wanneer duidelijk is ten opzichte van *welke verzameling* er complementen worden genomen kunnen we het vermelden van de verzameling E ook achterwege laten. De notatie voor het complement van A wordt nu: A^c. Andere notaties die ook wel worden gebruikt zijn: A' en $\overline{A}$.

Opdracht 2.9 *Beschouw het volgende plaatje:*



Geef de volgende verzamelingen aan door middel van arceren (teken zo nodig nieuwe plaatjes):

1. A^c
2. $(A^c)^c$
3. $A^c \cup B^c$
4. $A^c \cap B^c$
5. $(A \cup B)^c$
6. $(A \cap B)^c$.

De complementen zijn steeds ten opzichte van E.

2.5 Deel- en machtsverzamelingen

De notatie $A \subseteq B$ voor "A is een deelverzameling van B" hebben we hierboven al ingevoerd. "A is een deelverzameling van B" betekent per definitie: elk element van A is een element van B.

Nu is de verzameling van alle deelverzamelingen van een verzameling A zelf weer een verzameling. Deze verzameling noemen we de *machtsverzameling* van A (Engels: *the power set of* A). Notatie: $\mathcal{P}(A)$, of ook wel: $\mathbf{POW}(A)$. De machtsverzameling van een verzameling A is als volgt gedefinieerd:

Definitie 2.4 $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{B \mid B \subseteq A\}$.

Merk op dat voor elke verzameling A geldt dat de lege verzameling element is van $\mathcal{P}(A)$. Immers: $\emptyset$ is een deelverzameling van elke verzameling, dus ook van A. Verder geldt voor elke verzameling A dat A een element is van $\mathcal{P}(A)$. De verzameling A zelf is immers ook een deelverzameling van A.

Voorbeelden van machtsverzamelingen (we nemen weer aan dat a, b en c onderling verschillende dingen zijn):

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Uit de voorbeelden lezen we af: de machtsverzameling van een verzameling zonder elementen heeft 1 element ; die van een verzameling met 1 element heeft 2 elementen; die van een verzameling met 2 elementen heeft 4 elementen; die van een verzameling met 3 elementen heeft 8 elementen. Algemeen (voor eindige verzamelingen): als een verzameling A n elementen heeft dan heeft $\mathcal{P}(A)$ 2^n elementen. Het bewijs zullen we hier nog niet geven (zie opdracht 5.7).

Opdracht 2.10 *Bewijs dat als $A \subseteq B$, dan $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.*

Opdracht 2.11 *Bewijs het omgekeerde van wat u in opdracht 2.10 hebt bewezen: als $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ dan $A \subseteq B$.*

We kunnen de operatie van het nemen van de machtsverzameling van een verzameling *herhaald* toepassen. We kunnen dus spreken over $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$—of voor het leesgemak: $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$—enzovoorts.

Voorbeeld (schrikt u vooral niet; het is gewoon een kwestie van domweg de definitie toepassen):

- $\mathcal{PP}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}$.

Opdracht 2.12 *Schrijf de volgende verzamelingen uit:*

1. $\mathcal{PP}(\emptyset)$
2. $\mathcal{PP}(\{a\})$
3. $\mathcal{PPP}(\{a\})$
4. $\mathcal{PP}(\{a, b\})$.

2.6 Geordende paren, rijtjes en producten

Wanneer we twee dingen a en b samenvoegen in een verzameling $\{a, b\}$ dan zijn—zoals we hebben gezien—die twee elementen ten opzichte van elkaar *ongeordend*. Dit wil zeggen: $\{b, a\}$ is dezelfde verzameling als $\{a, b\}$.

Het kan echter voorkomen dat we juist wel geïnteresseerd zijn in de volgorde van a en b. Neem het geval waarin a en b de coördinaten zijn voor een plaatsbepaling op het aardoppervlak, waarbij de eerste coordinaat de lengtegraad aangeeft, en de tweede de breedtegraad. a en b mogen nu niet worden verwisseld, want 15° Oosterlengte, 80° Noorderbreedte geeft een andere plaats aan dan 80° Oosterlengte, 15° Noorderbreedte. Een ander voorbeeld. Neem aan dat a en b schrijftekens zijn waarvan we de links-rechts volgorde willen vastleggen. Weer mogen a en b niet worden verwisseld.

Wanneer we de twee elementen a en b willen samenvoegen tot een paar waarvan de volgorde van belang is, dan spreken we van *het geordend paar* van a en b. De notatie die we invoeren is: $\langle a, b\rangle$. Ronde haken worden ook wel gebruikt; het geordend paar van a en b wordt dan aangegeven als: (a, b). Engels voor 'geordend paar' : *ordered pair*. Als a en b twee verschillende dingen zijn, dan hebben we: $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$. Verder geldt:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff a = c \text{ en } b = d.$$

Als we een willekeurig geordend paar hebben kunnen we spreken over het *eerste lid* van het paar en het *tweede lid* van het paar. Het eerste lid van $\langle a, b\rangle$ is a, het tweede lid is b.

We kunnen het begrip 'geordend paar' generaliseren tot 'geordend n-tal' (Engels: *ordered n-tuple*). Een geordend 1-tal $\langle a\rangle$ is niets anders dan het object a. En geordend 2-tal hebben we al gedefinieerd. Een geordend 3-tal is een rijtje $\langle a, b, c\rangle$. Voor geordende drietallen geldt:

$$\langle a, b, c\rangle = \langle e, f, g\rangle \iff a = e \text{ en } b = f \text{ en } c = g.$$

Voor langere rijtjes gaat het net zo.

We zien nu dat $\langle a \rangle \neq \langle a, a \rangle$. Immers: $\langle a \rangle$ is een geordend 1-tal en $\langle a, a \rangle$ een geordend paar. Dus: het meerdere keren opnemen van een en hetzelfde element maakt bij geordende rijtjes wel degelijk verschil.

Met behulp van het begrip 'geordend paar' kunnen we nu een nieuw begrip invoeren. Het *(Cartesisch) product* van twee verzamelingen A en B, notatie $A \times B$, is per definitie de verzameling van alle geordende paren waarvan het eerste element in A zit en het tweede element in B. Anders gezegd:

Definitie 2.5 $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \textit{ en } b \in B\}$.

Het epitheton 'Cartesisch' is een hommage aan de Franse wiskundige en filosoof René Descartes (Cartesius) (1596–1650), die geordende paren gebruikte om punten in een vlak aan te duiden, in de door hem ontwikkelde analytische meetkunde.

Voorbeelden van Cartesische producten (laat a en b twee verschillende dingen zijn):

- $\{a\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{a\} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle\}$.

Het is duidelijk dat als A en B verschillend zijn, $A \times B \neq B \times A$.

We kunnen ook Cartesische producten nemen van meer dan twee verzamelingen: dit levert verzamelingen geordende 3-tallen, 4-tallen, enzovoorts. Dus:

$$A \times B \times C = \{\langle a, b, c \rangle \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Meestal wordt voor $A \times A$ een speciale notatie gebruikt: A^2. Net zo voor $A \times A \times A$: A^3, enzovoorts. In het algemeen staat A^n dus voor de verzameling van alle geordende n-tallen uit A.

Voorbeelden (a en b zijn weer twee verschillende dingen):

- $\{a, b\}^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$
- $\{a, b\}^3 =$
  $\{\langle a, a, a \rangle, \langle a, a, b \rangle, \langle a, b, b \rangle, \langle b, b, b \rangle, \langle b, b, a \rangle, \langle b, a, a \rangle, \langle a, b, a \rangle, \langle b, a, b \rangle\}$.

Opdracht 2.13 *Hoeveel elementen heeft* $\{1, 2, 3\}^3$ *?*

2.7 Relaties en hun eigenschappen

Wat relaties zijn weten we allemaal. We weten bij voorbeeld dat 'beminnen' een relatie is die tussen mensen kan bestaan of juist niet bestaan, dat 'eigenaar zijn van' een relatie is die tussen mensen en dingen kan bestaan, en dat 'groter zijn dan' een relatie is die tussen getallen kan bestaan.

Dit zijn allemaal voorbeelden van relaties tussen twee partners. We noemen ze daarom *twee-plaatsige relaties.* Er bestaan ook relaties die drie partners van node hebben. Een voorbeeld is 'geven aan': deze relatie geldt tussen een subject (de gever), een direct object (het gegevene) en een indirect object (de begunstigde). 'Geven aan' is een voorbeeld van—u vermoedde het al—een *drieplaatsige relatie.*

In het algemeen kun je de plaatsen die de partners in een relatie innemen niet straffeloos verwisselen. Uit het feit dat Jan Marietje bemint hoeft immers nog niet te volgen dat Marietje ook Jan bemint. Hieruit zien we dat tweeplaatsige relaties gelden tussen geordende paren, drieplaatsige relaties tussen geordende drietallen, enzovoorts.

Het inzicht dat we de partners in een relatie moeten beschouwen als de leden van een rijtje leidt tot een mooie abstracte kijk op relaties. Daarbij beschouwen we een relatie als een verzameling, en wel—u zag het al aankomen—als een verzameling van rijtjes. We definiëren de zaak als volgt.

Definitie 2.6 *R is een* **tweeplaatsige relatie** *tussen de elementen van A en de elementen van B $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ R is een deelverzameling van het Cartesisch product van A en B.*

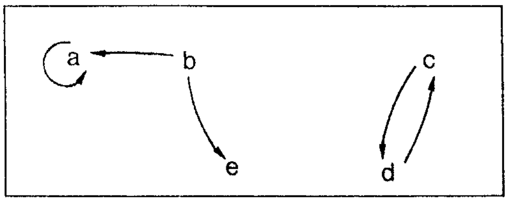
Anders gezegd: $R \subseteq A \times B$. We zeggen ook wel: R is een relatie *binnen* $A \times B$. Net zo voor een drieplaatsige relatie tussen elementen van A, B en C, enzovoorts.

Voorbeeld 2.1 Laat M een verzameling mensen zijn. Dan is de relatie 'beminnen' de verzameling B van geordende paren die bevat is in M^2 en die zodanig is dat $\langle a, b\rangle \in B$ desda persoon a persoon b bemint.

Neem voor het gemak even aan dat M bestaat uit 5 individuen, laten we zeggen: $M = \{a, b, c, d, e\}$. Stel dat a zichzelf bemint, en verder bemint b zowel a als e, en beminnen c en d elkaar. Neem aan dat er verder niet bemind wordt. Dan is de relatie B gelijk aan de volgende verzameling:

$$\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}.$$

Als altijd is een plaatje nuttig. Wanneer R een relatie is binnen A^2, dan kunnen we elementen van R aangeven door het intekenen van pijlen in een



plaatje van de verzameling A. Een pijl $\longrightarrow$ van x naar y betekent dat $\langle x, y\rangle$ element is van R. Voor ons voorbeeld levert dit het volgende plaatje op:

Hier komen nog een paar definities.

Definitie 2.7 *Als R een tweeplaatsige relatie is binnen $A \times B$, dan is het* **domein** *van R de verzameling van dingen uit A die tot zeker ding in B in relatie R staan.*

Gangbare notatie voor het domein (Engels: *domain*) van R: $\text{dom}(R)$.

Definitie 2.8 *Het* **bereik** *van R is de verzameling van dingen uit B waartoe zeker ding in A in de relatie R staat.*

Gangbare notatie voor het bereik (Engels: *range*) van R: $\text{rng}(R)$. We kunnen een en ander nu ook als volgt formuleren. Als $R \subseteq A \times B$, dan:

- $\text{dom}(R) = \{a \mid a \in A$ en er is een $b \in B$ met $\langle a, b\rangle \in R\}$
- $\text{rng}(R) = \{b \mid b \in B$ en er is een $a \in A$ met $\langle a, b\rangle \in R\}$.

In woorden: $\text{dom}(R)$ is de verzameling *eerste* leden van R, $\text{rng}(R)$ de verzameling *tweede* leden. In het 'beminnen'-voorbeeld hierboven, waar B de relatie

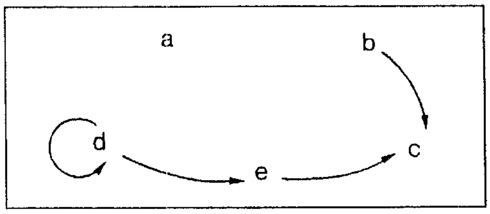
$$\{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,e\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\}$$

op $M = \{a, b, c, d, e\}$ is, hebben we:

- $\text{dom}(B) = \{a, b, c, d\}$
- $\text{rng}(B) = \{a, c, d, e\}$.

Opdracht 2.14 *Laat R de relatie zijn die met behulp van pijlen is getekend in onderstaand plaatje. Wat zijn* $\text{dom}(R)$ *en* $\text{rng}(R)$*?*

We kunnen nu *eigenschappen* van relaties gaan bestuderen. Dit onderwerp zullen we hier niet uitputtend behandelen; we noemen alleen een paar belangrijke eigenschappen van tweeplaatsige relaties waarvan zowel het domein als het bereik bevat is in een of andere verzameling A. Zulke relaties heten: tweeplaatsige relaties *op* A. Een tweeplaatsige relatie op A is dus een deelverzameling van A^2, ofwel: een relatie *binnen* A^2.



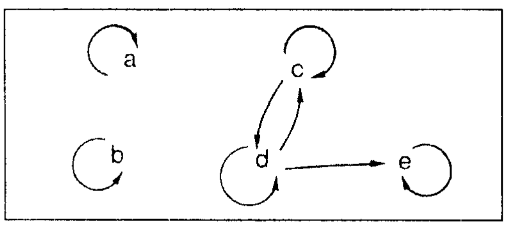
Opdracht 2.15 *Ga na dat 'groter dan' een tweeplaatsige relatie is op* $\mathbf{N}$, *waarbij* $\mathbf{N}$ *de verzameling van de natuurlijke getallen aanduidt, dat wil zeggen* $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Definitie 2.9 *Een relatie* $R \subseteq A^2$ *heet* **reflexief** *wanneer voor elke* $a \in A$ *geldt:* $\langle a, a \rangle \in R$.

Voorbeeld 2.2 De relatie 'waardering hebben voor' tussen de leden van een groep mensen is reflexief wanneer het zo is dat iedereen in die groep zichzelf waardeert (en mogelijkerwijs ook nog anderen).

Voorbeeld 2.3 De relatie 'groter of gelijk zijn aan' tussen natuurlijke getallen is reflexief: elk getal is immers groter dan of gelijk aan zichzelf.

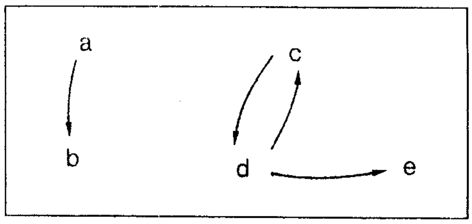
Voorbeeld 2.4 De relatie die met behulp van pijlen is aangegeven in het volgende plaatje is reflexief:



Definitie 2.10 *Een relatie* $R \subseteq A^2$ *heet* **irreflexief** *wanneer voor geen enkele* $a \in A$ *geldt dat* $\langle a, a \rangle \in R$.

Voorbeeld 2.5 De relatie 'groter zijn dan' tussen natuurlijke getallen is irreflexief: geen enkel getal is immers groter dan zichzelf.

Voorbeeld 2.6 De relatie die met behulp van pijlen is getekend in het volgende plaatje is irreflexief:



Opdracht 2.16 *Teken een plaatje van een relatie die noch reflexief, noch irreflexief is.*

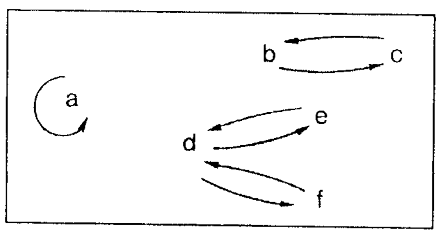
Definitie 2.11 *Een relatie $R \subseteq A^2$ is* **symmetrisch** *wanneer voor elk paar $\langle a, b\rangle \in R$ geldt: $\langle b, a\rangle \in R$.*

Voorbeeld 2.7 De relatie 'familie zijn van' tussen mensen is symmetrisch.

Voorbeeld 2.8 De relatie 'even oud zijn als' tussen mensen is symmetrisch.

Voorbeeld 2.9 De relatie 'beminnen' is—helaas—vaak *niet* symmetrisch.

Voorbeeld 2.10 In de situatie van het volgende plaatje is de relatie aangegeven door de pijlen symmetrisch:



Definitie 2.12 *Een relatie $R \subseteq A^2$ heet* **asymmetrisch** *wanneer voor geen enkel paar $\langle a, b\rangle \in R$ geldt dat $\langle b, a\rangle \in R$.*

Voorbeeld 2.11 De relatie 'ouder zijn dan' tussen mensen is asymmetrisch.

Voorbeeld 2.12 De relatie 'ouder zijn van' tussen mensen is asymmetrisch.

Opdracht 2.17 *Laat zien dat uit de definitie van* asymmetrie *volgt dat elke asymmetrische relatie irreflexief is.*

Let op: het niet symmetrisch zijn van een relatie is iets anders dan het asymmetrisch zijn van een relatie. Zie de volgende opdracht.

Opdracht 2.18 *Teken een plaatje van een relatie die noch symmetrisch, noch asymmetrisch is.*

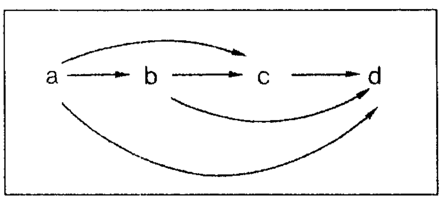
Definitie 2.13 *Een relatie $R \subseteq A^2$ heet* **transitief** *wanneer uit het gegeven dat $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in R$ volgt: $\langle a, c\rangle \in R$.*

Voorbeeld 2.13 De relatie 'ouder zijn dan' tussen mensen is transitief: Als Jan ouder is dan Willem, en Willem is ouder dan Kees, dan is Jan ouder dan Kees.

Voorbeeld 2.14 De relatie 'groter zijn dan' tussen natuurlijke getallen is transitief.

Voorbeeld 2.15 De relatie 'groter dan of gelijk zijn aan' tussen natuurlijke getallen is transitief.

Voorbeeld 2.16 De relatie die met behulp van pijlen is getekend in het volgende plaatje is transitief:



Definitie 2.14 *Een relatie $R \subseteq A^2$ heet* **intransitief** *wanneer voor geen enkele a, b en c in A geldt: $\langle a, b\rangle \in R$, $\langle b, c\rangle \in R$ en $\langle a, c\rangle \in R$.*

Voorbeeld 2.17 De relatie 'vader zijn van' tussen mensen is intransitief.

Weer geldt: er bestaan relaties die noch transitief, noch intransitief zijn.

Opdracht 2.19 *Teken een plaatje van een relatie die noch transitief, noch intransitief is.*

Definitie 2.15 *Een relatie $R \subseteq A^2$ heet* **antisymmetrisch** *wanneer voor elke a, b in A geldt: als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, a\rangle \in R$, dan $a = b$.*

Voorbeeld 2.18 De relatie $\leq$ op de verzameling $\mathbf{N}$ van de natuurlijke getallen is antisymmetrisch.

Opdracht 2.20

1. *Laat zien dat een asymmetrische relatie altijd anti-symmetrisch is.*
2. *Laat zien dat het omgekeerde niet geldt. U kunt dit laten zien door een voorbeeld te geven van een anti-symmetrische relatie die niet asymmetrisch is.*

Opdracht 2.21 *Beschouw een willekeurige verzameling A. Merk op dat $\subseteq$ een tweeplaatsige relatie is op $\mathcal{P}(A)$. Maak aan de hand van de hierboven gegeven definities een lijstje van de eigenschappen van deze relatie. Ook $\subset$ is een tweeplaatsige relatie op $\mathcal{P}(A)$. Maak ook voor deze relatie een eigenschappenlijstje.*

Zoals de laatste opdracht illustreert kunnen relaties allerlei combinaties vertonen van eigenschappen.

Definitie 2.16 *Een relatie die transitief, reflexief en antisymmetrisch is wordt een* **partiële orde** *genoemd.*

Definitie 2.17 *Een relatie die transitief, irreflexief en asymmetrisch is heet een* **strikte partiële orde**.

In feite is elke relatie die transitief en irreflexief is tevens asymmetrisch (ga dit na). Net zo is elke relatie die transitief en asymmetrisch is tevens irreflexief (ga na). Hieruit volgt dat het in de definitie van *strikte partiële orde* voldoende is om naast transitiviteit ofwel irreflexiviteit ofwel asymmetrie te eisen.

Opdracht 2.22 *Laat zien dat de relatie $\leq$ op de verzameling $\mathbf{N}$ van de natuurlijke getallen een partiële orde is.*

Opdracht 2.23 *Laat zien dat elke strikte partiële orde bevat is in een partiële orde.*

2.8 Functies

Een functie is een manier om elk van de elementen van een bepaalde verzameling in verband te brengen met een element van een andere verzameling. Voorbeelden van functies kent u uit de krant; de grafiekjes waarin de werkloosheidscijfers vanaf een jaar geleden tot nu maand voor maand zijn af te lezen zijn functies. Elke maand wordt in verband gebracht met een getal rond de 800.000 dat het aantal geregistreerde werklozen in die maand aangeeft.

Een functie wordt ook wel een *afbeelding* genoemd. We zeggen: een functie beeldt de elementen van een verzameling A af op de elementen van een verzameling B. Een functie die de elementen van A afbeeldt op elementen van B heet *een functie van A naar B*. Functies duiden we vaak aan met de letters f, g en h. "f is een functie van A naar B" wordt vaak als volgt genoteerd:

$$f : A \rightarrow B.$$

Wanneer $f : A \rightarrow B$ noemen we A het *domein* en B het *codomein* van f.

De dingen uit A waaraan door de functie f dingen uit B worden toegekend heten de *argumenten* of *originelen* van de functie f. De dingen uit B die door f aan dingen uit A worden toegekend heten de *beelden* of *waarden* van f.

We zeggen: *toepassen* van de functie op het argument a geeft als waarde het element b. Notatie voor "f toegepast op a": $f(a)$. Als $f : A \rightarrow B$, en f toegepast op $a \in A$ levert $b \in B$ als waarde op hebben we dus: $f(a) = b$.

Om het begrip *functie* te verduidelijken gaan we weer plaatjes tekenen. Hier is een (slechts bij grove benadering juist) plaatje van een werkloosheidsfunctie. Het plaatje laat het aantal ingeschreven werkloze academici per jaar zien, van 1978 tot en met 1987:[1]

1978	$\longrightarrow$	4200
1979	$\longrightarrow$	4800
1980	$\longrightarrow$	5200
1981	$\longrightarrow$	6400
1982	$\longrightarrow$	9000
1983	$\longrightarrow$	11500
1984	$\longrightarrow$	16000
1985	$\longrightarrow$	16400
1986	$\longrightarrow$	16000
1987	$\longrightarrow$	17000

Laten we deze werkloosheidsfunctie even g noemen. Uit het plaatje blijkt dat het domein van g de verzameling is van alle jaren vanaf 1979 tot en met 1987. Het codomein van g is de verzameling van natuurlijke getallen. Uit het plaatje kunnen we bij voorbeeld aflezen welke waarde g toekent aan 1987: $g(1987) = 17000$. Merk op dat niet elk natuurlijk getal hoeft op te treden als waarde. Dat het codomein van de functie de verzameling van

[1] De gegevens zijn afgelezen uit een grafiekje in *Carrière*, 12 december 1987.

natuurlijke getallen is wil alleen zeggen dat elke waarde die de functie kan aannemen een natuurlijk getal is.

Nog een voorbeeld. Als we een verzameling mensen bekijken—noem die verzameling A—dan is "moeder van" een functie. Het is een manier om elk mens in A in verband te brengen met een element van een verzameling mensen B die alle moeders van mensen uit A bevat. Immers: gegeven een bepaalde persoon a, dan is er altijd een persoon te vinden die de moeder is van a. Hier is een voorbeeld-tabel:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Wilhelmina} & \longrightarrow & \text{Emma} \\
\text{Juliana} & \longrightarrow & \text{Wilhelmina} \\
\text{Beatrix} & \longrightarrow & \text{Juliana} \\
\text{Willem-Alexander} & \longrightarrow & \text{Beatrix}
\end{array}$$

Noem deze functie h. Nu is $h(\text{Juliana}) = \text{Wilhelmina}$. De functie h kent aan argument Juliana de waarde Wilhelmina toe. Algemeen: de functie h kent aan elk element uit de verzameling

$$\{\text{Wilhelmina}, \text{Juliana}, \text{Beatrix}, \text{Willem-Alexander}\}$$

de moeder toe van dat element.

Abstract beschouwd is een functie met domein A en codomein B niets anders dan een bijzondere vorm van een tweeplaatsige relatie binnen $A \times B$. Beschouw het voorbeeld van de koninklijke moeders: de functie uit de tabel kan als volgt worden genoteerd als een verzameling:

$$\{\langle \text{Wilhelmina}, \text{Emma}\rangle, \langle \text{Juliana}, \text{Wilhelmina}\rangle,$$
$$\langle \text{Beatrix}, \text{Juliana}\rangle, \langle \text{Willem-Alexander}, \text{Beatrix}\rangle\}.$$

Deze verzameling is een tweeplaatsige relatie binnen het product:

$$\{\text{Wilhelmina}, \text{Juliana}, \text{Beatrix}, \text{Willem-Alexander}\} \times$$
$$\{\text{Emma}, \text{Wilhelmina}, \text{Juliana}, \text{Beatrix}\}.$$

In het algemeen kunnen we een functie altijd beschouwen als een verzameling paren, waarbij de argumenten van de functie optreden als eerste lid van een paar, en de toegekende waarden als tweede lid. Dus: elke functie $f : A \to B$ is een relatie binnen $A \times B$.

Is nu ook elke relatie R binnen $A \times B$ een functie van A naar B? Nee, dat is niet zo, want het bijzondere aan een functie is, dat je voor elk argument een waarde moet kunnen aflezen. Met andere woorden: de waarde die aan een bepaald argument wordt toegekend moet *uniek zijn*. Verder moet bij een functie aan *elk* element uit A een element uit B worden toegekend. Bij een relatie hoeft dit niet. Enkele plaatjes ter verduidelijking:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & & B & \qquad & A & & B & \qquad & A & & B \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet \\
 & \nearrow & & & & & & & & \nearrow & \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}$$

De pijlen in de plaatjes links en midden geven een relatie tussen A en B aan, maar deze relatie is geen functie van A naar B. De reden in het plaatje links: sommige objecten uit A zijn gekoppeld aan meer dan één object in B. De reden in het middelste plaatje: niet alle objecten uit A hebben een waarde. De pijlen in het derde plaatje, tenslotte, geven een relatie binnen $A \times B$ aan die tevens een functie is van A naar B: elk element van A is uniek gekoppeld aan een element van B.

Voorbeeld 2.19 De relatie tussen personen en hun geboorte-datum is een functie.

Voorbeeld 2.20 De relatie tussen personen en hun vaders is een functie.

Voorbeeld 2.21 De relatie tussen personen en hun broer is geen functie, want sommige mensen hebben geen broers, of ze hebben er meer dan één.

Voorbeeld 2.22 De relatie tussen personen en hun jongste zusje is geen functie, want sommige mensen hebben geen zusjes.

Voorbeeld 2.23 De relatie tussen landen en hun hoofdsteden is een functie (want elk land heeft precies één hoofdstad).

Voorbeeld 2.24 De relatie tussen landen en hun hoofdsteden annex residentiesteden is geen functie, want in sommige landen vallen hoofdstad en residentiestad niet samen.

Voorbeeld 2.25 De relatie tussen IBM-personal computers en hun serienummers is een functie, want elke PC heeft een uniek serienummer.

Voorbeeld 2.26 De relatie tussen natuurlijke getallen en hun kwadraten is een functie, want elk natuurlijk getal heeft een uniek kwadraat.

Voorbeeld 2.27 De relatie tussen natuurlijke getallen en hun derdemachtswortels is een functie.

Uit een relatie die geen functie is kan soms simpelweg een functie worden geconstrueerd door de domein-verzameling van de relatie anders te kiezen.

Voorbeeld 2.28 De relatie tussen mannen en hun huidige-echtgenotes in $M \times V$ (waarbij M de verzameling van alle mannen is, en V de verzameling van alle vrouwen) is geen functie, want sommige mannen zijn niet getrouwd. Wanneer we M inperken tot de verzameling M' van getrouwde mannen, dan is diezelfde relatie wel een functie: elke getrouwde man kan uniek worden afgebeeld op zijn huidige wettige echtgenote (we gaan hier even uit van een monogame samenleving).

Een relatie die strikt genomen geen functie is omdat zij niet voor elk argument een waarde oplevert, maar die bij inperking van het domein *wel* een functie is voor dat nieuwe domein wordt wel een *partiële functie* genoemd.

Voorbeeld 2.29 Hier is een voorbeeld van een partiële functie:

$$\begin{array}{ccccc} & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \\ & & & & B \\ A & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \\ & & & & \\ & \bullet & & & \end{array}$$

Inperking van het domein geeft:

$$\begin{array}{ccccc} & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \\ A' & & & & B \\ & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \end{array}$$

Opdracht 2.24 *Ga na of de volgende relaties tevens functies zijn:*

1. *de relatie kind–ouder;*
2. *de relatie tussen een persoon en de verzameling van zijn/haar ouders.*

Nu kunnen we een precieze verzamelingstheoretische definitie van het begrip 'functie' geven:

Definitie 2.18 *f is een* **functie** *van A naar B* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- *$f \subseteq A \times B$;*
- *bij elke $a \in A$ is er precies één $b \in B$ zodanig dat $\langle a, b \rangle \in f$.*

Opdracht 2.25 *Ga na of er—volgens deze definitie—functies bestaan met als domein de lege verzameling. Zo nee, waarom niet? Zo ja, welke?*

De *domein-* en *bereik*-definities voor relaties zijn nu ook van toepassing op functies. We hebben dus voor functie $f : A \to B$ het volgende: $\text{dom}(f) = A$ en $\text{rng}(f) \subseteq B$.

De verzameling van alle functies met domein A en codomein B wordt wel aangeduid als B^A. Dus:

$$B^A = \{f \mid f \text{ is een functie van } A \text{ naar } B\}.$$

Opdracht 2.26 *Wat zijn de elementen van* $\{c, d\}^{\{a,b\}}$ *?*

Definitie 2.19 *Als f een functie is van A naar B, en $A' \subseteq A$, dan is* $f[A']$, **het beeld van A' onder f**, *de verzameling*

$$\{b \in B \mid \textit{er is een } a \in A' \textit{ met } f(a) = b\}.$$

Definitie 2.20 *Als f een functie is van A naar B, en $B' \subseteq B$, dan is* $f^{-1}[B']$, **het volledig origineel van B' onder f**, *de verzameling*

$$\{a \in A \mid \textit{er is een } b \in B' \textit{ met } f(a) = b\}.$$

Uit deze definities volgt onmiddellijk dat als $f : A \to B$, dan $f[A] = \text{rng}(f)$ en $f^{-1}[B] = A$.

Een functie f kan worden toegepast op een waarde van een functie g, mits de desbetreffende waarde van g maar in het domein van f ligt. In het algemeen: als $g : A \to B$ en $f : B \to C$, dan kunnen we, voor een $a \in A$, eerst a afbeelden op een element van B met behulp van g, en vervolgens dit element van B afbeelden op een element van C met behulp van f. Het element van c waar we zo terecht komen kan worden aangeduid als $f(g(a))$. Deze procedure van eerst g en vervolgens f toepassen levert ons in feite een *nieuwe* functie op, een functie met domein A en codomein C. Deze functie wordt de *compositiefunctie* $f \circ g$ (spreek uit "f na g") genoemd. We kunnen $f(g(a))$ nu ook noteren als $f \circ g(a)$. Wederom: plaatjes kunnen dit verduidelijken:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "g"] & B \arrow[r, phantom, "f"] & C \\ a \arrow[r] & u \arrow[r] & x \\ b \arrow[r] & v \arrow[r] & y \\ c \arrow[r] & w \arrow[ur] & \\ d \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "f \circ g"] & C \\ a \arrow[r] & x \\ b \arrow[dr] & \\ c \arrow[r] & y \\ d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Wanneer f een functie is met een en dezelfde verzameling A als domein en als codomein, dan kunnen we de functie op waarden van zichzelf toepassen. Dit heet *functie-iteratie*. Voorbeeld: de moeder van de moeder van de moeder van Willem Alexander. Of: het kwadraat van het kwadraat van 2.

Definitie 2.21 *Een functie met een en dezelfde verzameling A als domein en als codomein wordt een* **eenplaatsige operatie** *op A genoemd.*

Opdracht 2.27 *Beschouw het volgende plaatje.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b \arrow[d] \\
d \arrow[u] & c \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

De relatie die getekend is geeft voor ieder element van A precies één ding waartoe dat element in relatie staat. Ditzelfde in andere woorden gezegd: de relatie is functioneel. *Noem deze functionele relatie (dat wil zeggen: functie) voor het gemak f.*

1. *Bepaal $f(a)$.*
2. *Bepaal $f(f(a))$.*
3. *Bepaal $f(f(f(a)))$.*
4. *Bepaal $f(f(f(f(a))))$.*
5. *Bepaal $f(b)$.*
6. *Bepaal $f(f(f(f(b))))$.*

Opmerking: $f(f(a))$ kan ook worden geschreven als: $f \circ f(a)$, $f(f(f(a)))$ als $f \circ f \circ f(a)$, enzovoorts.

Opdracht 2.28 *Breid het plaatje uit de vorige opdracht uit met pijlen die de functionele relatie $f \circ f$ aanduiden (gebruik pijlen van de vorm $\Longrightarrow$).*

Merk op dat het domein van een functie f zelf een Cartesisch product kan zijn. In dat geval bestaan de argumenten van f uit rijtjes. Laat $f : A^2 \to B$ zo'n functie zijn. Dan kent f aan elk paar $\langle x, y \rangle \in A^2$ een element van B toe. In plaats van $f(\langle x, y \rangle)$ schrijft men meestal: $f(x, y)$. De functie f kent waarden toe aan tweetallen argumenten.

Een functie $f : A^2 \to A$ wordt een tweeplaatsige operatie op A genoemd; een functie $f : A^3 \to A$ heet een drieplaatsige operatie op A, enzovoorts.

Voorbeeld 2.30 De functie $+$ die aan elk paar van natuurlijke getallen $\langle m, n\rangle$ het getal $m + n$ toekent is een tweeplaatsige operatie op $\mathbf{N}$. Deze operatie wordt in de wandeling 'optellen' genoemd. Merk op dat de optel-operatie *commutatief* is: de volgorde waarin de argumenten worden genomen maakt niet uit.

We besluiten met nog wat notatie. Als $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (dat wil zeggen f is een functie met als domein en als codomein de natuurlijke getallen), en f is de functie die ieder getal afbeeldt op zijn kwadraat (anders gezegd: f is de functie 'kwadrateren'), dan drukken we dit wel uit met behulp van het voorschrift $f(x) = x^2$. De functie $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ die elk getal eerst kwadrateert en er dan 1 bij optelt heeft als voorschrift $g(x) = x^2 + 1$. Als h staat voor de functie die twee natuurlijke getallen bij elkaar optelt en het resultaat vervolgens kwadrateert, dan wordt het functie-voorschrift:

$$h(x, y) = (x + y)^2.$$

In feite legt zo'n functie-voorschrift uit wat een functie doet in termen van operaties die al eerder gegeven zijn en waarvan de werking bekend wordt verondersteld, zoals 'optellen' en 'machtsverheffen'.

2.9 Bijzondere functies

Functies die als codomein de verzameling $\{0, 1\}$ hebben noemen we *karakteristieke functies.* Een karakteristieke functie $f : A \to \{0, 1\}$ doet in feite niets anders dan een *deelverzameling* van A karakteriseren, namelijk de deelverzameling van die elementen van A die op 1 worden afgebeeld. Weer kan een tabel helpen:

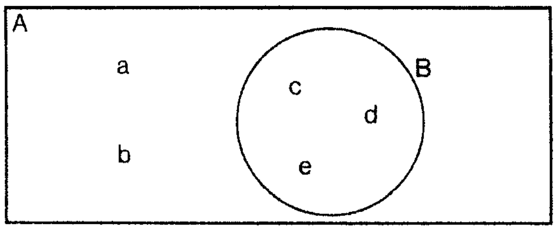
$$\begin{array}{ccc}
A & f & \{0,1\} \\
a & \longrightarrow & 1 \\
b & \longrightarrow & 0 \\
c & \longrightarrow & 1 \\
d & \longrightarrow & 1 \\
e & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

De functie f uit het plaatje karakteriseert de verzameling $\{a, c, d\} \subset A$.

Opdracht 2.29 *Het volgende plaatje laat een verzameling A met een echte deelverzameling B zien.*

Som de elementen op van de functie $f : A \to \{0, 1\}$ die B karakteriseert.

Er bestaat een één–één correspondentie tussen karakteristieke functies met domein A en deelverzamelingen van A. Het verband is als volgt:



- Met de karakteristieke functie $f : A \to \{0, 1\}$ correspondeert de volgende deelverzameling A' van A:

  $A' = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$.

- Als $A' \subseteq A$ dan is de karakteristieke functie $f : A \to \{0, 1\}$ die A' karakteriseert de volgende functie:

  $f = \{\langle a, 1\rangle \mid a \in A'\} \cup \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A - A'\}$.

Opdracht 2.30 *Ga na dat* $\{\langle a, 1\rangle \mid a \in A'\} \cup \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A - A'\}$ *inderdaad*

1. *een functie is,*
2. *een karakteristieke functie is,*
3. *de functie is die A' karakteriseert.*

We geven nu enkele definities van *eigenschappen* die functies kunnen hebben.

Definitie 2.22 *Een functie f heet* **injectief** *of* **één–één-duidig** *als f aan verschillende elementen uit zijn domein verschillende waarden toekent.*

Iets formeler: als $a \neq b$ dan $f(a) \neq f(b)$. Dit komt op hetzelfde neer als het volgende: als $f(a) = f(b)$ dan $a = b$. In een paar plaatjes:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \\ & \bullet \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] & \bullet \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

De functie uit het plaatje links is injectief. De functie uit het plaatje rechts is dat niet. Een injectieve functie wordt ook wel een *injectie* genoemd. De notatie voor 'f is een injectie van A naar B' is: $f : A \xrightarrow{i} B$.

Opdracht 2.31 *Een zekere verzameling A heeft 15 elementen. Verder is gegeven dat er een injectieve functie $f : A \rightarrow B$ bestaat. Wat kunt u hieruit afleiden met betrekking tot het* aantal *elementen in B?*

Definitie 2.23 *Een functie f heet* **surjectief** *wanneer elk element uit het codomein van f optreedt als functie-waarde.*

Iets formeler: als f een functie is van A naar B, dan is er voor elke $b \in B$ een $a \in A$ met $b = f(a)$. Dus: een functie $f : A \rightarrow B$ is surjectief desda $B = \text{rng}(f)$. We verduidelijken een en ander weer met plaatjes:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & & \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & \nearrow & \\ \bullet & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & & \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & \nearrow & \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

De functie uit het plaatje links is surjectief; de functie uit het plaatje rechts is dat niet. Een surjectieve functie wordt wel een *surjectie* genoemd. Notatie voor surjecties: $f : A \stackrel{s}{\rightarrow} B$. Voor een surjectie zegt men ook wel: f is een functie van A *op* B (Engels: *onto*).

Definitie 2.24 *Een functie f heet* **bijectief** *(spreek uit: bi-jectief) wanneer f zowel injectief als surjectief is.*

Een bijectieve functie heet in de wandeling een *bijectie*. Notatie voor bijecties: $f : A \stackrel{i,s}{\rightarrow} B$. Een plaatje van een bijectie:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

Als f een bijectie is van A naar B dan brengt f een één–één-duidige correspondentie tot stand tussen de leden van A en de leden van B: bij iedere $a \in A$ hoort precies één $b \in B$ met $b = f(a)$, en bij iedere $b \in B$ hoort precies één $a \in A$ met $b = f(a)$ (ga dit zelf na aan de hand van de eigenschappen van een bijectie).

Opdracht 2.32 $\mathbf{N}$ *is de verzameling van natuurlijke getallen (de verzameling $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, en $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ is de functie 'met 2 vermenigvuldigen' (dat wil zeggen $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, enzovoorts). Is f surjectief? Injectief? Bijectief?*

Een voorbeeld van een bijectie hebben we eigenlijk hierboven al gezien, toen we het verband bespraken tussen deelverzamelingen en karakteristieke functies. We kunnen dat verband nu expliciet formuleren in termen van het begrip 'bijectie'. Laat K de verzameling karakteristieke functies zijn met domein A, voor een willekeurige A, met andere woorden $K = \{0,1\}^A$. Nu is er een bijectie $g : K \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Ga na dat g wordt vastgelegd door het voorschrift $g(f) = \{a \mid f(a) = 1\}$ (waarbij f een functie $\in K$ is).

Als f een bijectie is, dan kunnen we de richting van de functie omdraaien door eenvoudigweg elk element $\langle a,b \rangle$ van f te veranderen in $\langle b,a \rangle$. Het resultaat zal weer een functie zijn, en wel: een bijectie. Immers, omdat f bijectief is, is er voor elke waarde van f een uniek argument dat die waarde oplevert. De functie die door zo uit een bijectie f ontstaat door 'omdraaien' heet de *inverse functie* van f, en wordt genoteerd als: f^{-1}. Dus: als $f : A \rightarrow B$ een bijectie is, dan is f^{-1} de functie van B naar A die aan elke $b \in B$ het uniek bepaalde element $a \in A$ koppelt waarvoor geldt dat $f(a) = b$.

Voorbeeld 2.31 De functie f uit het linkerplaatje is een bijectie, en dus is ook f^{-1} uit het rechterplaatje een bijectie:

$$
\begin{array}{ccc}
A & f & B \\
a & \longrightarrow & w \\
b & \longrightarrow & x \\
c & \longrightarrow & y \\
d & \longrightarrow & z
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
B & f^{-1} & A \\
w & \longrightarrow & a \\
x & \longrightarrow & b \\
y & \longrightarrow & c \\
z & \longrightarrow & d
\end{array}
$$

Voorbeeld 2.32 De functie

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ en } x \text{ is even}\}$$

die gedefinieerd wordt door $f(n) = 2n$ is een bijectie. De inverse functie

$$f^{-1} : \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ en } x \text{ is even}\} \rightarrow \mathbf{N}$$

is gedefinieerd door $f^{-1}(m) = m/2$.

We zullen in het volgende hoofdstuk zien dat bijecties een grote rol spelen bij het redeneren over oneindige verzamelingen. De meeste verzamelingen die we u hierboven hebben voorgeschoteld waren eindig, maar dat was alleen om didactische redenen. Verzamelingenleer gaat pas echt geestverruimend werken wanneer we de innerlijke blik richten op het oneindige. In hoofdstuk 3 nemen we u mee om een kijkje te nemen in 'Cantor's paradijs' van oneindige verzamelingen.