Wetten van de predikaatlogica

Leereenheid 12

Wetten van de predikaatlogica

INTRODUCTIE

Net als bij de propositielogica zijn we ook bij de predikaatlogica geïnteresseerd in bepaalde wetmatigheden. We kunnen bepalen of een formule, of een stel formules een wet vormt, door naar de waarheidswaarden op alle modellen te kijken. Voor de predikaatlogica onderscheiden we drie soorten wetten.

Een eerste soort wetten betreft formules die 'altijd' waar zijn, zoals $x = 1 \vee x \neq 1$. Omdat het begrip 'tautologie' is voorbehouden aan propositionele formules, zal voor predikaatlogische formules die op elk model waar zijn, een ander begrip ingevoerd worden.

Het tweede soort betreft formules die, informeel gesproken, op hetzelfde neerkomen. Een uitspraak als 'Geen viervoud is priem' kan worden weergegeven door $\neg\exists x\ (V(x) \wedge P(x))$, maar evengoed door $\forall x\ (V(x) \rightarrow \neg P(x))$, of door vele andere formules. Dat deze formules alle voldoen, komt omdat ze logisch equivalent zijn: de formules zijn in precies dezelfde modellen waar. Logische equivalentie speelt net als bij de propositielogica ook een grote rol bij het 'omzetten' van formules in een speciale vorm. Het is daarom belangrijk een beperkt aantal standaard-equivalenties te kennen om handig mee te kunnen 'rekenen'.

Het derde soort wetten betreft logische gevolgen. Een voorbeeld van een logisch gevolg voor de predikaatlogica is $\forall x\ (W(x) \rightarrow S(x)), W(j) \Rightarrow S(j)$, wat kan worden opgevat als een formalisering van de redenering 'Stel dat alle wiskundigen schaken en dat Jan een wiskundige is. Dan schaakt Jan dus.' Met het oog op bepaalde toepassingen (zoals programmeren met predikaatlogische formules), zullen we ook hier bepaalde standaardwetten aangeven.

In deze leereenheid zullen we vaak niet direct nagaan of bijvoorbeeld een formule altijd waar is door de waarheidswaarde in elk mogelijk model te onderzoeken. Dat is namelijk zowel theoretisch aanvechtbaar als praktisch onuitvoerbaar: we hebben de modellen daarvoor niet precies genoeg ingevoerd, en bovendien is de klasse mogelijke modellen in veel gevallen erg groot. Alleen voor een beperkt aantal gevallen zullen we 'informeel bewijzen' dat ze in elk model waar zijn. Wat we verder zullen doen, is een beperkt aantal wetten aannemen en daar andere wetten uit afleiden. De logica in deze leereenheid is dan ook eerder te vergelijken met een gereedschapskist, dan met een zwaar theoretisch bouwsel. We gaan die 'gereedschapskist' nu vullen.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat de begrippen algemeen geldige formule, logische equivalentie en logisch gevolg voor de predikaatlogica inhouden
- in eenvoudige gevallen met modellen kunt aantonen dat een formule algemeen geldig is
- weet wanneer een term substitueerbaar is voor een variabele in een formule en dit kunt toepassen
- met behulp van standaardequivalenties kunt 'rekenen' met predikaatlogische formules, in het bijzonder een formule in een prenexe normaalvorm om kunt zetten
- wanneer een formule niet algemeen geldig is of een gevolgtrekking geen logisch gevolg is, dit door middel van een tegenvoorbeeld kunt aantonen
- de behandelde standaardgevolgen kent en kunt gebruiken.

LEERKERN

12.1 Algemeen geldige formules

Net als in leereenheid 10 beginnen we met losse formules. Van bepaalde formules is vrijwel direct te zien dat ze altijd waar zijn, maar het is goed eens te kijken hoe we dit met modellen kunnen controleren.

VOORBEELD 12.1

De formule $(P(x) \wedge x = y) \rightarrow P(y)$ is waar in elk model. Dit kunnen we aan de hand van de vorige leereenheid als volgt begrijpen: als een model $P(x) \wedge x = y$ waar maakt, dan heeft x kennelijk een waarde die tot de verzameling elementen behoort die door 'P' wordt aangeduid, en x en y hebben dezelfde waarde in dat model, zodat de waarde van y ook tot de verzameling elementen behoort die door 'P' wordt aangeduid, kortom $P(y)$ is waar. «

In plaats van 'waar in elk mogelijk model' noemen we dit soort formules algemeen geldig.

Algemeen geldig

DEFINITIE 12.1

Een formule is *algemeen geldig* als zij waar is op elk mogelijk model.

De formule $(P(x) \wedge x = y) \rightarrow P(y)$ is derhalve algemeen geldig. Een andere illustratie van deze definitie is het volgende, vrij simpele geval.

VOORBEELD 12.2

De formule $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$, waarbij a een constante is, is algemeen geldig. Dit kunnen we als volgt begrijpen. Beschouw een willekeurig model M. Er zijn nu twee mogelijkheden:
– Ofwel de deelformule $\forall x\, P(x)$ is onwaar in M, en dan leert de waarheidstabel van $\rightarrow$ dat $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$ juist waar is in M.
– Ofwel $\forall x\, P(x)$ is waar in M. Dat houdt in dat alle objecten uit het model de eigenschap 'P' hebben, maar dan moet dat ook gelden voor het object dat met 'a' wordt aangeduid, kortom $P(a)$ is dan waar in M. Met de waarheidstabel van $\rightarrow$ volgt weer dat $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$ ook in dit geval waar is in M. «

Nog een ander voorbeeld laat een algemeen geldige equivalentie zien.

VOORBEELD 12.3

De formule $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$ is algemeen geldig. Om te bewijzen dat de formule waar is op alle mogelijke modellen, moeten we, weer volgens de waarheidstabel van $\leftrightarrow$, laten zien dat $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ en $(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$ in elk model dezelfde waarheidswaarde hebben, dat wil zeggen: in precies dezelfde modellen waar zijn. Voor een willekeurig model M geldt dat $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ waar is in M precies dan als voor elk object in M de formule $P(x) \wedge Q(x)$ waar is, wat precies dan zo is als elk object in M zowel de eigenschap 'P' als de eigenschap 'Q' heeft. Dit laatste is precies dan het geval als in M de formules $\forall x\, P(x)$ en $\forall x\, Q(x)$ waar zijn, dat wil zeggen als $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ in M waar is. «

OPGAVE 12.1

Bewijs op dezelfde manier als in voorbeeld 12.3 dat $\exists x\,(P(x) \vee Q\,(x)) \leftrightarrow$ $(\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x))$ algemeen geldig is.

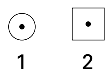
Misschien lijkt het hier of we van een mug een olifant maken: dat deze voorbeeldformules algemeen geldig zijn, is ook zo wel in te zien. Hier zijn twee opmerkingen op z'n plaats: (i) juist omdat het zulke eenvoudige formules zijn, kunnen we de algemene geldigheid tamelijk eenvoudig bewijzen, in veel andere gevallen is dat zeker niet zo simpel; (ii) een iets algemenere formule dan die in voorbeeld 12.2, waarvan u misschien ook wel zou denken dat ze algemeen geldig is, blijkt dat niet te zijn (zie paragraaf 12.1.1).

Tegenvoorbeeld

Vaak blijft het met behulp van modellen bewijzen van algemene geldigheid een bijzondere moeizame affaire. Waar modellen wel buitengewoon handig voor zijn, is om in te zien dat een formule *niet* algemeen geldig is. We hoeven dan volgens definitie 12.1 alleen maar een model te geven waarin de formule onwaar is. Een dergelijk model, dat aantoont dat een formule niet algemeen geldig is, noemen we een *tegenvoorbeeld* voor (de algemene geldigheid van) de formule.

VOORBEELD 12.4

Dat $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$ niet algemeen geldig is, volgt doordat we een model kunnen maken waarop de formule onwaar is. We kunnen dit model als volgt opbouwen. Als het model de formule onwaar moet maken, dan volgt uit de waarheidstabellen van $\rightarrow$ en $\vee$ dat dan op dat model $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ waar moet zijn, terwijl $\forall x\, P(x)$ en $\forall x\, Q(x)$ onwaar zijn. Uit het feit dat $\forall x\, P(x)$ en $\forall x\, Q(x)$ onwaar zijn, volgt dat er in het model een object moet zijn dat niet de eigenschap P heeft en een object dat niet de eigenschap Q heeft. Maar $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ moet waar zijn, dus moet het eerste object dan wel eigenschap Q hebben, en het tweede object eigenschap P. Als dit bovendien de enige twee objecten zijn, dan is ook aan de eis voldaan dat $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ waar moet zijn. Kortom, we komen uit op een model met twee objecten (zie figuur 12.1).



FIGUUR 12.1 Model bestaande uit twee objecten met verschillende eigenschappen

We kunnen ook een oneindig model gebruiken, bijvoorbeeld $\mathbb{N}$. Laat nu P staan voor 'is even' en Q voor 'is oneven'. Dan is $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ waar, want iedere $x \in \mathbb{N}$ is even of oneven, maar $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ is onwaar, want zowel $\forall x\, P(x)$ als $\forall x\, Q(x)$ zijn onwaar. «

OPGAVE 12.2

Bewijs met een tegenvoorbeeld dat $(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)) \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge \neg P(x))$ niet algemeen geldig is.

12.1.1 STANDAARD GELDIGE FORMULES

Ook in de predikaatlogica zien we bepaalde algemeen geldige formules steeds weer terugkeren, zij het in iets andere vorm, dat wil zeggen met andere predikaatsymbolen, constanten, variabelen, enzovoorts. Om niet steeds moeizame bewijzen met modellen te moeten leveren, willen we een aantal van die vormen kunnen herkennen.

Distributiviteit

We zagen in voorbeeld 12.3 dat $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$ algemeen geldig is, maar $\forall x\,(x \geq 0 \wedge x < 9) \leftrightarrow (\forall x\, x \geq 0 \wedge \forall x\, x < 9)$ is dat net zo goed: in de laatste formule staat $x \geq 0$ waar eerst $P(x)$ stond, en $x < 9$ in plaats van $Q(x)$. We kunnen deze vorm algemener omschrijven door te zeggen dat $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi)$ algemeen geldig is. U herkent hier wellicht een soort *distributiviteit* in, nu niet van disjunctie over conjunctie, of conjunctie over disjunctie (de propositielogische wetten gelden overigens nog steeds!), maar van de universele kwantor over de conjunctie. Om ze te onthouden, is het goed eraan te denken dat er een verband tussen universele kwantificatie en conjunctie bestaat, en dat er ook een vergelijkbaar verband tussen existentiële kwantificatie en disjunctie is. Dit zien we al in een klein model.

VOORBEELD 12.5

Stel een model bestaat uit slechts twee objecten, zeg 1 en 2. De formule $\forall x\, P(x)$ is dan waar precies als $P(1)$ waar is en $P(2)$ waar is, dus precies als $P(1) \wedge P(2)$ waar is. Evenzo is $\exists x\, P(x)$ waar precies als $P(1)$ waar is of als $P(2)$ waar is (of beide), dus precies als $P(1) \vee P(2)$ waar is. Deze verbanden geven de mogelijkheid om op kleine modellen algemeen geldige formules te controleren. Zo is de distributiviteit van $\forall$ over $\wedge$ in dit model niets anders dan de logische equivalentie van $(P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2))$ met $(P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2))$. «

Er gelden nog meer van dergelijke soorten van distributiviteit van kwantoren over connectieven. De meeste zijn geen equivalenties, maar implicaties: de 'distributiviteit' gaat dan slechts één kant op.
De volgende formules zijn algemeen geldig:

Probeer deze formules alvast te onthouden.

$$\exists x\,(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi) \tag{12.1}$$
$$\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi) \tag{12.2}$$
$$(\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi) \rightarrow \forall x\,(\varphi \vee \psi) \tag{12.3}$$
$$\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi) \tag{12.4}$$

In opgave 12.1 hebben we al de algemene geldigheid van een speciaal geval van formule 12.1 aangetoond. Formule 12.2 is in voorbeeld 12.3 en hiervoor al aan bod geweest. Het bewijs dat formules 12.3 en 12.4 algemeen geldig zijn, stellen we uit (zie opgave 12.21 en zelftoetsopgave 5). Dat we bij formules 12.3 en 12.4 de implicaties niet mogen 'omkeren', hebben we ook al bewezen (zie ook opgave 12.4).

OPGAVE 12.3

Ga voor de volgende formules na van welke van de gegeven vormen ze speciale gevallen zijn.

a $(\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)) \rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$

b $\exists x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x))$

c $\exists x\, (\forall y\, x < y \wedge \forall y\, P(y)) \rightarrow (\exists x\, \forall y\, x < y \wedge \exists x\, \forall y\, P(y))$

OPGAVE 12.4

Ga na welke tegenvoorbeelden we voor de omkeringen van formules 12.3 en 12.4 hebben gegeven.

De algemeen geldige formules 12.1 en 12.2 zeggen in feite dat we $\exists$ over $\vee$ mogen distribueren respectievelijk dat we $\forall$ over $\wedge$ mogen distribueren (we komen hier nog preciezer op terug in paragraaf 12.2). Dat we formules 12.3 en 12.4 niet mogen omkeren, betekent in feite dat we in het algemeen $\forall$ *niet* over $\vee$ en $\exists$ *niet* over $\wedge$ mogen distribueren. Omkeringen van formules 12.3 en 12.4 zijn alleen mogelijk als we een zware voorwaarde aan de formules stellen: φ of ψ mag geen vrije variabele x bevatten. Onder deze voorwaarde zijn ook algemeen geldig:

$$\forall x\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi) \quad \text{als } x \text{ niet vrij is in } \varphi \text{ of } \psi \tag{12.5}$$

$$(\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi) \rightarrow \exists x\, (\varphi \wedge \psi) \quad \text{als } x \text{ niet vrij is in } \varphi \text{ of } \psi \tag{12.6}$$

Het bewijs dat formules 12.5 en 12.6 algemeen geldig zijn, volgt in opgave 12.24 in paragraaf 12.3.
Let in formules 12.5 en 12.6 goed op de formulering 'x niet vrij in φ of ψ'. De kwantoren $\forall x$ en $\exists x$ spelen hierbij *geen* rol meer! We moeten alleen naar de 'losse' formules φ dan wel ψ kijken.

VOORBEELD 12.6

Neem $P(x)$ voor φ en $Q(x)$ voor ψ in formule 12.5. Dan is deze niet algemeen geldig, zoals we in voorbeeld 12.4 zagen, en inderdaad is x vrij in zowel $P(x)$ als $Q(x)$, zodat niet aan de voorwaarde in formule 12.5 is voldaan.
Neem nu $P(a)$ voor φ (waarbij a een constante is) en $Q(x)$ voor ψ in formule 12.5, dan is $\forall x\, (P(a) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(a) \vee \forall x\, Q(x))$ wel algemeen geldig volgens formule 12.5, omdat nu x niet vrij is in $P(a)$. «

Een ander type algemeen geldige formule zagen we in voorbeeld 12.2. De formule $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$ is algemeen geldig. En hetzelfde geldt voor $\forall x\, x \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0$. Kunnen we zulke algemeen geldige formules weer als speciale gevallen van meer algemene vormen zien? Ja, dat kan inderdaad, alleen moeten we goed oppassen.

In beide gevallen gaat het om een implicatie van de vorm $\forall x\, \varphi \rightarrow [c/x]\varphi$, waarbij c een constante is (respectievelijk a en 3) en $[c/x]\varphi$ staat voor de substitutie van alle vrije voorkomens van x in φ door c (zie paragraaf 11.1.4). Hier is ook niks mis mee, maar soms willen we ook een variabele of een andere term kunnen invullen.

VOORBEELD 12.7

De formule $\forall x\, (x \geq 0 \rightarrow N(x)) \rightarrow (y \geq 0 \rightarrow N(y))$ is algemeen geldig. Om dit in te zien beschouwen we een willekeurig model M. Hierin laten we het object 0 voor het gemak overeenkomen met de constante 0, en noemen de binaire relatie die met $\geq$ overeenkomt, simpelweg 'groter-of-gelijk'. Neem aan dat $\forall x\, (x \geq 0 \rightarrow N(x))$ waar is in M (in het andere geval is de hele formule zeker waar in M); dan hebben alle objecten uit M die groter dan of gelijk zijn aan 0 de eigenschap ‘N’. Als nu de waarde die we aan y toekennen, groter dan of gelijk aan 0 is, dan heeft die waarde dus de eigenschap N, zodat de deelformule $y \geq 0 \rightarrow N(y)$ waar is. Als de waarde die we aan y toekennen, niet groter dan of gelijk aan 0 is, dan is de deelformule $y \geq 0 \rightarrow N(y)$ ook waar. Kortom, de formule is waar in M, en M was willekeurig, zodat hiermee bewezen is dat de formule algemeen geldig is. «

Echter, de formule $\forall x\ \varphi \rightarrow [t/x]\varphi$, waarbij t een willekeurige term is, is *niet* algemeen geldig. Een gevaar dat op de loer ligt, is dat φ een kwantor (zeg $\forall y$ of $\exists y$) bevat en de variabele y ook in de te substitueren term t voorkomt. In zulke gevallen kan de formule $\forall x\ \varphi \rightarrow [t/x]\varphi$ in bepaalde modellen onwaar worden.

VOORBEELD 12.8

Kies voor φ de formule $\exists y\ x \neq y$ en voor t de variabele y. De substitutie $[y/x]\exists y\ x \neq y$ resulteert in $\exists y\ y \neq y$. De formule $\forall x\ \exists y\ x \neq y \rightarrow \exists y\ y \neq y$ is echter niet algemeen geldig: deze formule is onwaar in een model dat minstens twee objecten bevat: de deelformule vóór het implicatieteken is dan immers waar, en die erna is (zelfs op elk model) onwaar. «

OPGAVE 12.5

a Geef een tegenvoorbeeld voor de formule $\forall x\ \exists y\ y > x \rightarrow \exists y\ y > y$.
b Toon aan dat $\forall x\ \exists y\ y > x \rightarrow \exists y\ y > z$ wel algemeen geldig is.

Wat we duidelijk moeten voorkomen, is dat de te substitueren term een variabele bevat *die na substitutie gebonden wordt*. De volgende beperking op $\forall x\ \varphi \rightarrow [t/x]\varphi$ levert wél alleen algemeen geldige formules op.

Substitueerbaar

DEFINITIE 12.2

Een term t is *substitueerbaar* voor x in φ indien t geen variabele bevat die gebonden wordt in $[t/x]\varphi$.

VOORBEELD 12.9

a 1 is substitueerbaar voor x in $x < 0$, want 1 is een constante.
b y is niet substitueerbaar voor x in $\exists y\ R(x, y)$, want y is een variabele die na substitutie gebonden wordt.
c y is wel substitueerbaar voor x in $P(x) \rightarrow Q(x)$, want y wordt na substitutie niet gebonden.
d $(3^2 + 1)$ is substitueerbaar voor y in $\forall x\ y < x$, want de term bevat geen variabelen.
e $(x + 1)$ is niet substitueerbaar voor y in $\exists x\ x = y^2$, want x is een variabele die na substitutie gebonden wordt.
f $(x + 1)$ is substitueerbaar voor y in $y < 0$, want de variabele in de term blijft na substitutie vrij.
g $(x + 1)$ is substitueerbaar voor y in $\exists y\ x = y^2$, want de variabele y komt helemaal niet vrij voor! (Zie ook de laatste regel in voorbeeld 11.16.) «

Constanten zijn altijd substitueerbaar, want ze bevatten geen variabele, dus ook geen variabele die gebonden kan worden. Meer in het algemeen zijn termen die geen variabelen bevatten (zogenaamde ‘grondtermen’), steeds substitueerbaar. Variabelen, en termen die variabelen bevatten, zijn soms wel en soms niet substitueerbaar. Als een term niet substitueerbaar is, hoeven we nog niet te wanhopen: daar is nog wel een mouw aan te passen, al hebben we dan logische equivalentie nodig – we keren er daarom in paragraaf 12.2 op terug.

OPGAVE 12.6

Beantwoord de volgende vragen en motiveer uw antwoord.

a Is 3 substitueerbaar voor x in $x \geq 0$?

b Is x substitueerbaar voor y in $\exists y\, x \neq y$?

c Is x substitueerbaar voor y in $P(y) \wedge \exists x\, R(x, y)$?

d Is x substitueerbaar voor y in $\forall y\, (P(y) \wedge \exists x\, R(x, y))$?

e Is $(x^2 + 1)$ substitueerbaar voor y in $P(y) \wedge \exists z R(z, y)$?

Bekijken we voorbeelden 12.2, 12.7 en 12.8 nogmaals, dan zien we dat deze gaan over formules van de vorm $\forall x\, \varphi \rightarrow [t/x]\varphi$. Wanneer t substitueerbaar is voor x in φ, dan krijgen we een algemeen geldige formule. We noemen dit *instantiatie*: als voor alle x een formule geldt, geldt ze ook voor een specifieke t.

Instantiatie

Deze regel moet u onthouden

$\forall x\, \varphi \rightarrow [t/x]\varphi$ is algemeen geldig mits t substitueerbaar is voor x in φ.

We bewijzen dit hier niet: zo'n bewijs is alleen mogelijk wanneer we de modellen wat formeler hebben ingevoerd, en dan is het nog een hele rekenpartij.

OPGAVE 12.7

Waarom luidt de voorwaarde niet: t is substitueerbaar voor x in $\forall x\, \varphi$?

OPGAVE 12.8 (Aanw)

Is een formule van de vorm $\forall x\, \varphi \rightarrow \varphi$ algemeen geldig? Zo ja, laat zien waar dit uit volgt. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Het omgekeerde, van specifieke naar algemene uitspraken, kan alleen onder bepaalde voorwaarden. Het is eenvoudig in te zien dat $\varphi \rightarrow \forall x\, \varphi$ niet algemeen geldig is. Daartoe kiezen we eerst bijvoorbeeld de concrete formule $x = 0$ voor φ.

OPGAVE 12.9

Geef een tegenvoorbeeld voor de formule $x = 0 \rightarrow \forall x\, x = 0$.

Een dergelijk tegenvoorbeeld is uit te sluiten door voor φ een gesloten formule te kiezen. De kwantor $\forall x$ bindt dan geen variabele meer.

VOORBEELD 12.10

De formule $\exists x\, x = 0 \rightarrow \forall x\, \exists x\, x = 0$ is weer algemeen geldig: als een model M de formule $\exists x\, x = 0$ waar maakt, dan is er een object '0' in het model. Maar dan geldt voor alle objecten in M dat er een object '0' in M is, dus is $\forall x\, \exists x\, x = 0$ ook waar in M. Kortom, $\exists x\, x = 0 \rightarrow \forall x\, \exists x\, x = 0$ is waar in elk willekeurig model M. «

Loze universele kwantificatie

Wat in dit voorbeeld voor een concrete formule is aangetoond, kunnen we ook zonder problemen algemener bewijzen: als x niet vrij in φ voorkomt, dan is $\varphi \rightarrow \forall x\, \varphi$ algemeen geldig. Dit wordt *loze universele kwantificatie* genoemd. Mocht u de regel van loze kwantificatie als bijzonder nutteloos voorkomen, dan is het goed nu alvast te weten dat deze regel in iets andere vorm verderop (paragraaf 12.2) juist heel nuttig blijkt te zijn.

We hebben gezien dat als x wel vrij voorkomt, $\varphi \rightarrow \forall x\, \varphi$ niet meer algemeen geldt. Wel is het dan zo dat $\forall x\, \varphi$ algemeen geldig is als φ dat ook is.

VOORBEELD 12.11

De formule $x = x$ is uiteraard algemeen geldig: welke waarde we ook aan x toekennen, die waarde zal altijd gelijk zijn aan zichzelf. Om precies dezelfde reden is $\forall x\ x = x$ dan ook waar in elk willekeurig model M, dus is ook $\forall x\ x = x$ algemeen geldig. «

Meer in het algemeen kan de volgende regel bewezen worden (maar wij zien van dat bewijs hier weer af).

Universele generalisatie

Deze regel moet u onthouden.

Als φ algemeen geldig is, dan is $\forall x\ \varphi$ ook algemeen geldig.

OPGAVE 12.10 (Aanw)

Ga na dat a, b en c voorbeelden van loze universele kwantificatie zijn, en d en e zijn af te leiden met universele generalisatie.

a $P(3) \to \forall x\ P(3)$
b $\exists x\ P(x) \to \forall x\ \exists x\ P(x)$
c $\exists y\ R(x, y) \to \forall z\ \exists y\ R(x, y)$
d $\forall y\ (\forall x\ x > 0 \to y > 0)$
e $\forall x\ ((P(x) \wedge (P(x) \to Q(x))) \to Q(x))$

Dit waren allemaal feiten over de universele kwantor. Hoe zit het met de existentiële kwantor? Zonder bewijs of commentaar noemen we alvast dat de volgende formules algemeen geldig zijn (onder de vermelde voorwaarde).

$\exists x\ \varphi \leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$
$[t/x]\varphi \to \exists x\ \varphi$ mits t substitueerbaar is voor x in φ
$\exists x\ \varphi \leftrightarrow \varphi$ mits x niet vrij in φ voorkomt

De eerste hiervan, de zogenaamde dualiteit, legt een verband tussen de universele en de existentiële kwantor en bewijzen we in stelling 12.2. De tweede (de zogenaamde existentiële generalisatie) en de derde (de zogenaamde loze existentiële kwantificatie), zijn te vergelijken met de instantiatie en loze universele kwantificatie en kunnen met behulp van de dualiteit bewezen worden (zie voorbeeld 12.15 respectievelijk opgave 12.15).

12.2 Logische equivalentie

Ook voor de predikaatlogica is het vaak belangrijk verschillende formules aan elkaar te relateren, met name wanneer die formules hetzelfde ‘betekenen’.

VOORBEELD 12.12

Zoals in de introductie al is opgemerkt, zijn de formules $\neg\exists x\ (V(x) \wedge P(x))$ en $\forall x\ (V(x) \to \neg P(x))$ in precies dezelfde modellen waar. Want $\neg\exists x\ (V(x) \wedge P(x))$ is waar in model M precies dan als $\exists x\ (V(x) \wedge P(x))$ in M onwaar is, dat wil zeggen dat er *geen* object in M is dat behoort tot de verzameling objecten die de eigenschappen ‘V’ en ‘P’ bezitten, met andere woorden dat alle objecten in M ofwel de eigenschap ‘V’ ofwel de eigenschap ‘P’ missen, wat weer op hetzelfde neerkomt als: alle objecten in M met de eigenschap ‘V’ hebben niet de eigenschap ‘P’. (Teken zo nodig een model dat de gegeven formules waar maakt: dat is hier een Venn-diagram, de verzamelingen ‘V’ en ‘P’ zijn dan disjunct.) «

Logisch equivalent

DEFINITIE 12.3

Twee formules heten *logisch equivalent* als ze in elk model dezelfde waarheidswaarde hebben.

Notatie

We schrijven $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Afgezien van de termen ‘model’ en ‘waardering’ zijn de definities van *algemeen geldig* en *logische equivalentie* voor de predikaatlogica dus net als voor de propositielogica: logisch equivalente formules zijn voor elk model (waardering) of beide waar of beide onwaar. We bespeuren ook hetzelfde systematische verband tussen logische en materiële equivalentie.

STELLING 12.1

Er geldt: $\varphi \leftrightarrow \psi$ is algemeen geldig precies dan als $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Het bewijs is in wezen niet anders dan bij de propositielogica (met steeds ‘model’ in plaats van ‘waardering’) en volgt direct uit de definities van ‘algemeen geldig’, ‘logische equivalentie’ en de waarheidstabel van $\leftrightarrow$, die nog steeds van kracht is. De stelling heeft als prettige consequentie dat we nu in één klap over een aantal logische equivalenties beschikken.

VOORBEELD 12.13

Er geldt: $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$, want in voorbeeld 12.3 hebben we bewezen dat $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ algemeen geldig is.
Op dezelfde manier blijkt uit opgave 12.1 dat $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$. «

Overigens zijn logische equivalenties vaak handiger dan algemeen geldige materiële equivalenties. Dit is niet alleen zo in het bewijzen ervan, maar ook in de toepassing. Voor een deel komt dit door de mogelijkheid equivalenties ‘door’ te schakelen, zoals we in leereenheid 10 zagen: als $\varphi \Leftrightarrow \psi$ en $\psi \Leftrightarrow \chi$, dan ook $\varphi \Leftrightarrow \chi$, zodat de notatie $\varphi \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \chi$ mogelijk is. Voor een ander deel doordat we nu ook niet-algemeen geldige formules kunnen ‘omwerken’. Tenslotte kunnen we nu ook slechts een deel van een formule vervangen door een equivalente formule: de oorspronkelijke en de resulterende formule zullen ook weer equivalent zijn. Voor een vlotte toepassing van logische equivalentie zijn een aantal standaardequivalenties onontbeerlijk.

12.2.1 STANDAARDEQUIVALENTIES

De algemeen geldige formules uit paragraaf 12.1 geven aanleiding tot de volgende logische equivalenties die we in het vervolg als standaardequivalenties zullen gaan gebruiken. Deze equivalenties moet u kennen of snel af kunnen leiden.

Distributiviteit	$\forall$ over $\wedge$	$\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi)$		(12.7)
	$\exists$ over $\vee$	$\exists x\ (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\ \varphi \vee \exists x\ \psi)$		(12.8)
Dualiteit		$\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$		(12.9)
Loze kwantificatie	$\forall$	$\forall x\ \varphi \Leftrightarrow \varphi$	mits x niet vrij is in φ	(12.10)
	$\exists$	$\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \varphi$	mits x niet vrij is in φ	(12.11)
Distributiviteit	$\forall$ over $\vee$	$\forall x\ (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \forall x\ \varphi \vee \forall x\ \psi$	mits x niet vrij is in φ of ψ	(12.12)
	$\exists$ over $\wedge$	$\exists x\ (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \exists x\ \varphi \wedge \exists x\ \psi$	mits x niet vrij is in φ of ψ	(12.13)

De eerste twee logische equivalenties volgen direct uit de eerder gegeven algemeen geldige formules 12.1 en 12.2 en stelling 12.1. Denk hierbij aan het verband tussen universele kwantificatie en conjunctie, en tussen existentiële kwantificatie en disjunctie (zie paragraaf 12.1).
De eigenschap *dualiteit* is een algemene formulering van het feit dat bijvoorbeeld 'Er is een correct bewijs van het laatste theorema van Fermat' en 'Het is niet zo dat alle bewijzen van het laatste theorema van Fermat incorrect zijn' op hetzelfde neerkomen. We leveren nu een algemeen bewijs van dualiteit.

STELLING 12.2

Er geldt: $\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$ (dualiteit).

Bewijs
Om aan te tonen dat $\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$, moeten we laten zien dat $\exists x\ \varphi$ en $\neg\forall x\ \neg\varphi$ in precies dezelfde modellen waar zijn. Welaan dan, $\neg\forall x\ \neg\varphi$ is waar in een model M, precies wanneer $\forall x\ \neg\varphi$ onwaar is in M, en dat is weer precies zo als er in M een object is waarvoor $\neg\varphi$ onwaar is, dat wil zeggen: als er in M een object is waarvoor φ waar is, dat wil zeggen: precies dan als $\exists x\ \varphi$ in M waar is. □

Voor loze universele kwantificatie, standaardequivalentie 12.10, volstaat het op te merken dat (zoals we in opgave 12.8 hebben ingezien) $\forall x\ \varphi \to \varphi$ algemeen geldig is, en $\varphi \to \forall x\ \varphi$ onder de gegeven voorwaarde ook (zie voorbeeld 12.10 en de tekst erna), zodat met eenvoudige propositielogica volgt dat $\forall x\ \varphi \leftrightarrow \varphi$ algemeen geldig is. Stelling 12.1 leert dus dat $\forall x\ \varphi \Leftrightarrow \varphi$.

OPGAVE 12.11
Waaruit volgen de standaardequivalenties 12.12 en 12.13?

Gebruik zonodig propositielogische equivalenties!

Het is handig over al deze standaardequivalenties te beschikken, al hoeven we ze niet per se allemaal apart te bewijzen. Het is namelijk ook mogelijk equivalenties 12.8 (distributie van $\exists$ over $\vee$), 12.11 en 12.13 met behulp van dualiteit uit de overige regels af te leiden. Daarbij is het goed te bedenken dat we de propositielogische equivalenties nog steeds mogen gebruiken: voor φ, ψ en χ in de standaardequivalenties van de propositielogica mogen we uiteraard predikaatlogische formules invullen.

VOORBEELD 12.14

Standaardequivalentie 12.8 kan uit de overige standaardequivalenties worden afgeleid:

$\exists x\ (\varphi \vee \psi)$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg(\varphi \vee \psi)$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	De Morgan
$\Leftrightarrow \neg(\forall x\ \neg\varphi \wedge \forall x\ \neg\psi)$	distributiviteit van $\forall$ over $\wedge$
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi \vee \neg\forall x\ \neg\psi$	De Morgan
$\Leftrightarrow \exists x\ \varphi \vee \exists x\ \psi$	dualiteit

«

OPGAVE 12.12
Leid op dezelfde manier standaardequivalentie 12.13 af uit de overige.

Standaardequivalenties kunnen nu gebruikt worden om formules in een wat eenvoudiger vorm om te zetten.

OPGAVE 12.13
Toon met behulp van de standaardequivalenties aan dat
$\exists x\ \forall y\ x < y \wedge \forall y\ P(y) \Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ (x < y \wedge P(y))$.

Bezuinigen op kwantoren

Omdat we de dualiteitwet kunnen gebruiken om $\exists x$ te definiëren als een afkorting van $\neg\forall x\ \neg$, is het mogelijk behoorlijk te 'bezuinigen' op de kwantoren en connectieven: alleen $\neg$, $\wedge$ en $\forall$ volstaan al.

Ook zijn er nu wat meer verrassende equivalenties te bewijzen. Soms mag een kwantor wel uit een implicatie gehaald worden, maar verandert deze van gedaante, dat wil zeggen $\exists$ wordt $\forall$ en omgekeerd.

Let op: deze behoren niet tot onze standaard-equivalenties!

$\exists x\ \varphi \to \psi \Leftrightarrow \forall x\ (\varphi \to \psi)$ als x niet vrij in ψ voorkomt (12.14)
$\forall x\ \varphi \to \psi \Leftrightarrow \exists x\ (\varphi \to \psi)$ als x niet vrij in ψ voorkomt (12.15)

Bewijs van 12.14
Laat ψ een formule zijn waarin x niet vrij voorkomt, dan

$\exists x\ \varphi \to \psi$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi \to \psi$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg\neg\forall x\ \neg\varphi \vee \psi$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ \neg\varphi \vee \psi$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow \forall x\ \neg\varphi \vee \forall x\ \psi$	loze universele kwantificatie
$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg\varphi \vee \psi)$	distributiviteit $\forall$ over $\vee$: x niet vrij in ψ
$\Leftrightarrow \forall x\ (\varphi \to \psi)$	implicatie-eliminatie

OPGAVE 12.14
Bewijs equivalentie 12.15; geef steeds aan welke standaardequivalenties u hebt gebruikt.

Afleiden van algemeen geldige formules

Net als in leereenheid 10 kunnen we logische equivalentie gebruiken om bepaalde algemeen geldige formules uit andere algemeen geldige formules af te leiden. Dat is aantrekkelijk omdat, zoals we gezien hebben, door middel van modellen bewijzen dat een formule algemeen geldig is, vaak heel moeizaam gaat. We maken er hier dus weer gebruik van dat alle algemeen geldige formules logisch equivalent zijn.

Existentiële generalisatie

VOORBEELD 12.15 *Existentiële generalisatie*, dus $[t/x]\varphi \to \exists x\ \varphi$, kunnen we nu afleiden uit dualiteit, instantiatie en propositionele wetten.

$[t/x]\varphi \to \exists x\ \varphi$	
$\Leftrightarrow [t/x]\varphi \to \neg\forall x\ \neg\varphi$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg\neg\forall x\ \neg\varphi \to \neg[t/x]\varphi$	contrapositie
$\Leftrightarrow \forall x\ \neg\varphi \to \neg[t/x]\varphi$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow \forall x\ \neg\varphi \to [t/x]\neg\varphi$	definitie $[t/x]$

Als t substitueerbaar is voor x in φ, dan is t dat ook in $\neg\varphi$, dus is de formule op de laatste regel algemeen geldig: het is een geval van instantiatie (met $\neg\varphi$ in plaats van φ). Onder dezelfde voorwaarde is de formule $[t/x]\varphi \to \exists x\ \varphi$ dus ook algemeen geldig. «

OPGAVE 12.15

Leid op dezelfde manier met behulp van dualiteit en contrapositie uit de algemene geldigheid van $\varphi \to \forall x\ \varphi$ (mits x niet vrij in φ voorkomt) af dat $\exists x\ \varphi \to \varphi$ algemeen geldig is (mits x niet vrij in φ) en omgekeerd. Uit propositielogica volgt dan dat hiermee logische equivalentie 12.11 is bewezen.

Afsplitsen van deel kwantor

Een meer praktische toepassing van de equivalentieregels die ook voor het ontwerpen en bestuderen van programma's van belang blijkt te zijn, is het '*afsplitsen*' van een deel van de kwantor. In bepaalde gevallen kunnen we een deel van hetgene waarop een universele kwantor intuïtief gesproken betrekking heeft, 'afsplitsen' en als een conjunctie weer toevoegen.

VOORBEELD 12.16

Beschouw de formule $\forall x\ (x \leq n \to Q(x))$. Gebruikmakend van de (veronderstelde) equivalentie $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$ kunnen we bij de eerste formule het geval $x = n$ afsplitsen. Dit levert de equivalente formule:

$$Q(n) \wedge \forall x\ (x < n \to Q(x)) \qquad (12.16)$$

Deze formule zullen we verderop gebruiken. «

Om zulke afsplitsingen netjes te kunnen afleiden, hebben we een standaardequivalentie met betrekking tot '=' nodig. We geven die regel hier niet in de meest algemene vorm, maar in een vorm die voldoende algemeen is voor de beoogde toepassing. Als P een willekeurig predikaat is en c een willekeurige constante, dan vinden we dat

$$\forall x\ (x = c \to P(x)) \Leftrightarrow P(c) \qquad (12.17)$$

OPGAVE 12.16

Bewijs met gebruikmaking van equivalentie 12.17 dat $\forall x\ ((x = a \vee x = b) \to P(x))$ equivalent is met $P(a) \wedge P(b)$.

OPGAVE 12.17

Laat nu zien hoe met behulp van de equivalentie $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$ en de equivalentie 12.17 volgt: $\forall x\ (x \leq n \to Q(x)) \Leftrightarrow Q(n) \wedge \forall x\ (x < n \to Q(x))$.

In het algemeen komt dit afsplitsen van een deel van een universele kwantificatie neer op: $\forall x\ \varphi \Leftrightarrow [c/x]\varphi \wedge \forall x\ (x \neq c \to \varphi)$. Hieruit blijkt weer het nauwe verband tussen universele kwantificatie en conjunctie (zie paragraaf 12.1).
Voor $\exists$ en disjunctie geldt een vergelijkbare afsplitsing, die we formeel kunnen weergeven als $\exists x\ \varphi \Leftrightarrow [c/x]\varphi \vee \exists x\ (x \neq c \wedge \varphi)$.

VOORBEELD 12.17

$\exists x\ ((x = a \vee x = b \vee x = c) \wedge P(x))$ is equivalent met $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$. «

Ook hier zien we weer de nauwe relatie tussen existentiële kwantificatie en disjunctie.

Veilig substitueren

Een handige toepassing van logische equivalentie bestaat uit een methode om in feite toch te kunnen substitueren in gevallen die eerder problemen opleverden, zoals bij $[y\ /\ x]\exists y\ x \neq y$. We maken daarbij gebruik van het feit dat het er niet zoveel toe doet *welke* variabele voor binding zorgt: bijvoorbeeld $\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \exists y\ P(y)$. We kunnen gebonden variabelen dus herbenoemen, door elk voorkomen van een variabele in het bereik van een kwantor te vervangen door een nieuwe variabele die nog niet in de formule en in de te substitueren term voorkomt. Deze voorzorg kan altijd genomen worden: substitueren is dan vrij veilig. We maken hierbij gebruik van de volgende standaardequivalenties:

Herbenoemen gebonden variabele

Dit zijn standaard-equivalenties.

$\forall x\ \varphi \Leftrightarrow \forall y\ [y\ /\ x]\varphi$ als y niet in φ voorkomt
$\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \exists y\ [y\ /\ x]\varphi$ als y niet in φ voorkomt

Het is duidelijk wat ons te doen staat. Als een substitutie $[t\ /\ x]\varphi$ tot problemen leidt omdat t niet substitueerbaar is voor x in φ, dan herbenoemen we eerst in φ alle gebonden variabelen die ook in t voorkomen. Bijvoorbeeld $\exists y\ x \neq y \Leftrightarrow \exists z\ x \neq z$. In de rechterformule kunnen we nu rustig y voor x substitueren: $[y\ /\ x]\exists z\ x \neq z$ levert $\exists z\ y \neq z$.

OPGAVE 12.18
Herbenoem de gebonden variabelen in de volgende formules zodat u veilig kunt substitueren.
a $[y\ /\ x]\exists y\ R(x, y)$
b $[x\ /\ y](P(y) \wedge \exists x\ R(x, y))$

12.2.2 NORMAALVORMEN

De standaardequivalenties uit de vorige paragraaf maken het weer mogelijk een formule om te zetten in een equivalente formule met een speciale vorm. Voor de predikaatlogica bestaan er diverse normaalvormen, maar we noemen er hier slechts één.

Prenexe normaalvorm

Een predikaatlogische formule is in *prenexe normaalvorm* als alle kwantoren voorop staan, dat wil zeggen: de formule bestaat uit een (eventueel leeg) rijtje kwantoren gevolgd door een kwantorvrije formule.

VOORBEELD 12.18 De volgende formules zijn alle in prenexe normaalvorm:

$\forall y\ (R(x, y) \rightarrow x = y)$
$\exists x\ \forall y\ R(x, y)$
$\forall x\ \forall y\ \forall z((P(x) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$

De volgende formules zijn *niet* in prenexe normaalvorm:

$\forall y\ R(x, y) \rightarrow x = y$
$\exists x\ \neg\forall y\ x > y$
$\forall x\ (\exists y\ y \leq 0 \vee P(x))$

De eerste formule is niet in prenexe normaalvorm omdat alleen $R(x, y)$ in het bereik van $\forall y$ voorkomt. Hetzelfde geldt voor $\exists y$ in de derde formule. In de tweede formule staat $\neg$ tussen de kwantoren, zodat het geen prenexe normaalvorm is. «

Formules kunnen nu in prenexe normaalvorm worden gebracht. De benodigde procedure spellen we hier niet uit, maar moge duidelijk zijn aan de hand van de volgende voorbeelden.

VOORBEELD 12.19 We zetten $\exists x\, P(x) \vee \forall x\, \exists y\, R(x, y)$ om in prenexe normaalvorm:

$\exists x\, P(x) \vee \forall x\, \exists y\, R(x, y)$	
$\Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \forall z\, \exists y\, R(z, y)$	herbenoemen
$\Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \exists x\, \forall z\, \exists y\, R(z, y)$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \vee \forall z\, \exists y\, R(z, y))$	$\exists$ distributief over $\vee$
$\Leftrightarrow \exists x\, (\forall z\, P(x) \vee \forall z\, \exists y\, R(z, y))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists x\, \forall z\, (P(x) \vee \exists y\, R(z, y))$	$\forall$ distributief over $\vee$: z niet vrij in $P(x)$
$\Leftrightarrow \exists x\, \forall z\, (\exists y\, P(x) \vee \exists y\, R(z, y))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists x\, \forall z\, \exists y\, (P(x) \vee R(z, y))$	$\exists$ distributief over $\vee$ «

VOORBEELD 12.20 We zetten $\exists x\, P(x) \to \neg\forall y\, Q(y)$ om in prenexe normaalvorm waarbij we voor het gemak gebruik maken van de logische equivalentie 12.14, hoewel dit geen standaardequivalentie is:

$\exists x\, P(x) \to \neg\forall y\, Q(y)$	
$\Leftrightarrow \exists x\, P(x) \to \exists y\, \neg Q(y)$	dualiteit
$\Leftrightarrow \forall x\, (P(x) \to \exists y\, \neg Q(y))$	logische equivalentie 12.14: x niet vrij in $\exists y\, \neg Q(y)$
$\Leftrightarrow \forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\, (\exists y\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \forall x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(y))$	$\exists$ distributief over $\vee$ «

Een prenexe normaalvorm is zeker niet uniek, zelfs het rijtje kwantoren is dat niet. Zo heeft de zojuist gegeven voorbeeldformule ook $\exists y\, \forall x\, \neg(P(x) \wedge Q(y))$ als prenexe normaalvorm.

OPGAVE 12.19
Laat zien dat $\exists x\, P(x) \to \neg\forall y\, Q(y)$ ook $\exists y\, \forall x\, \neg(P(x) \wedge Q(y))$ als prenexe normaalvorm heeft.

OPGAVE 12.20
Zet $\exists x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \forall y\, R(x, y)$ om in prenexe normaalvorm (alleen als u genoeg tijd heeft).

Bij een prenexe normaalvorm kunnen we de kwantorvrije deelformule na het rijtje kwantoren weer in een speciale vorm brengen, bijvoorbeeld disjunctieve (DNV) of conjunctieve normaalvorm (CNV).

12.3 Logisch gevolg

Voor verschillende doeleinden en toepassingen moeten we met predikaatlogica correct kunnen redeneren. Het begrip 'logisch gevolg' speelt hierin een cruciale rol. De definitie van dit begrip hoeft, vergeleken met leereenheid 10, slechts weinig te worden aangepast.

Logisch gevolg

DEFINITIE 12.4 De formule ψ is een *logisch gevolg* van $\varphi_1, ..., \varphi_n$ als elk model dat de formules $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt, ook ψ waar maakt.
Notatie: $\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi$.

VOORBEELD 12.21 In de introductie tot deze leereenheid werd al opgemerkt dat geldt $\forall x\, (W(x) \to S(x)), W(j) \Rightarrow S(j)$. Dit kunnen we bewijzen met behulp van definitie 12.4. Stel dat M een willekeurig model is dat de beide uitgangspunten waar maakt. Dus alle objecten in M met eigenschap 'W' bezitten ook eigenschap 'S', en het object dat met 'j' overeenkomt, bezit eigenschap 'W'. Dan bezit object 'j' ook eigenschap 'S', en daaruit blijkt dat formule $S(j)$ waar is in M. «

OPGAVE 12.21
Toon op dezelfde manier aan dat $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$, waarmee eindelijk (een speciaal geval van) formule 12.3 is bewezen.

VOORBEELD 12.22 De rijkdom van de predikaatlogica brengt met zich mee dat veel wiskunde erin kan worden uitgedrukt. 'Logisch gevolg' zorgt dan voor allerlei verbanden. Zo drukt $\forall x\, \neg R(x, x)$, $\forall x\, \forall y\, \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)) \Rightarrow \forall x\, \forall y\, (R(x, y) \to \neg R(y, x))$ een bekend verband uit tussen eigenschappen van relaties. «

Ook hier is het inmiddels bekende verband tussen algemeen geldige implicaties aan de ene kant en logische gevolgen aan de andere kant te bespeuren.

STELLING 12.3 Er geldt dat $\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi$ precies dan als $(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \psi$ algemeen geldig is.

Weer kunnen we opmerken dat we stelling 12.3 in feite al terloops gebruikt hebben bij diverse bewijzen. Zo is in voorbeeld 12.1 eigenlijk bewezen dat $P(x)$, $x = y \Rightarrow P(y)$.

Wel is het goed er hier op te wijzen dat de relatie van 'logisch gevolg' niet hetzelfde is als de regel om uit een algemeen geldige formule een andere algemeen geldig formule af te leiden. Er bestaan regels, zoals universele generalisatie (zie paragraaf 12.1.1), om uit een algemeen geldige formule φ een algemeen geldige formule ψ af te leiden, zonder dat ψ een logisch gevolg is van φ. Omdat $x = y \not\Rightarrow \forall x\, x = y$ is universele generalisatie geen gewoon logisch gevolg.

OPGAVE 12.22
Waarom klopt de regel universele generalisatie (als φ algemeen geldig, dan ook $\forall x\, \varphi$) eigenlijk als we $x = y$ voor φ nemen?

OPGAVE 12.23
Ga na dat het omgekeerde wel geldt: als $\varphi \Rightarrow \psi$ en φ is algemeen geldig, dan is ψ ook algemeen geldig.

12.3.1 STANDAARDGEVOLGEN

Allereerst merken we op dat de propositielogische standaardgevolgen nog steeds van kracht zijn: de predikaatlogica gaat met de connectieven op dezelfde manier om. Ook levert elke standaardequivalentie $\varphi \Leftrightarrow \psi$ onmiddellijk de logische gevolgen $\varphi \Rightarrow \psi$ en $\psi \Rightarrow \varphi$. Verder leidt stelling 12.3 in combinatie met enige in paragraaf 12.1.1 gegeven standaard geldige formules tot een aantal nuttige logische gevolgen. Allereerst hebben we twee gevallen van gedeeltelijke ('één kant op') distributiviteit, bewezen in opgave 12.21 respectievelijk zelftoetsopgave 5, en twee gevallen waarin de distributiviteit alleen onder een voorwaarde geldt.

Gedeeltelijke distributiviteit

$\forall x\ \varphi \vee \forall x\ \psi \Rightarrow \forall x\ (\varphi \vee \psi)$ (12.18)
$\exists x\ (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\ \varphi \wedge \exists x\ \psi$ (12.19)
$\forall x\ (\varphi \vee \psi) \Rightarrow \forall x\ \varphi \vee \forall x\ \psi$ als x niet vrij is in φ of ψ (12.20)
$\exists x\ \varphi \wedge \exists x\ \psi \Rightarrow \exists x\ (\varphi \wedge \psi)$ als x niet vrij is in φ of ψ (12.21)

In opgave 12.24 wordt in essentie het logisch gevolg 12.20 bewezen, waarmee dan ook formule 12.5 is bewezen. Net zo kan men logisch gevolg 12.21 (en daarmee formule 12.6) bewijzen, maar men kan dit ook, als in opgave 12.12, via dualiteit (en contrapositie) afleiden uit logisch gevolg 12.20; we laten dit verder achterwege.
Merk nog op dat de logische gevolgen 12.18 en 12.20 (respectievelijk 12.19 en 12.21), onder de voorwaarde dat x niet vrij is in φ of ψ, gecombineerd kunnen worden tot de logische equivalentie 12.12 (respectievelijk 12.13). Omgekeerd halen we uit de logische equivalenties 12.12 en 12.13 onmiddellijk de logische gevolgen 12.20 en 12.21, maar *niet* 12.18 en 12.19, omdat deze laatste twee algemener zijn: de voorwaarde dat x niet vrij is in φ of ψ, kan hier vervallen.

OPGAVE 12.24
a Waarom is de omkering van het eerste logische gevolg geen logisch gevolg?
b Bewijs logisch gevolg 12.20 voor het speciale geval dat we $P(x)$ voor φ nemen en $Q(y)$ voor ψ (merk op dat x niet vrij is in $Q(y)$).

OPGAVE 12.25
Bewijs door middel van een tegenvoorbeeld dat we de restrictie bij gevolg 12.20 niet mogen weglaten.

Evenzo kunnen we de logische gevolgen instantiatie en existentiële generalisatie afleiden uit de overeenkomstige algemeen geldige formules:

Instantiatie
Existentiële generalisatie

$\forall x\ \varphi \Rightarrow [t/x]\varphi$ als t substitueerbaar is voor x in φ (12.22)
$[t/x]\varphi \Rightarrow \exists x\ \varphi$ als t substitueerbaar is voor x in φ (12.23)

VOORBEELD 12.23 Zonder commentaar geven we enige gevallen van instantiatie en existentiële generalisatie:

a $\forall x\ (N(x) \rightarrow \exists z\ (P(z) \wedge z > x))$
$\Rightarrow N(10000000000) \rightarrow \exists z\ (P(z) \wedge z > 10000000000)$
b $\forall x\ x \leq y \Rightarrow y^2 \leq y$
c $P(2^{859433} - 1) \wedge 2^{859433} - 1 > 10^{258716} \Rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge x > 10^{258716})$

OPGAVE 12.26
Geef aan welke regels in voorbeeld 12.23 gebruikt zijn en waarom de substitueerbaarheidsvoorwaarde vervuld is.

OPGAVE 12.27 (Aanw)
Bewijs de noodzaak van de voorwaarde dat t substitueerbaar is voor x in φ bij existentiële generalisatie, dat wil zeggen: verzin een term t en een formule φ waarvoor uit een model blijkt dat $[t/x]\varphi \not\Rightarrow \exists x\ \varphi$.

Volgorde van kwantoren

Bij de prenexe normaalvormen zagen we dat we de volgorde van sommige kwantoren mogen verwisselen. Wanneer mag dit nu precies?

En: wat is het verband tussen de formules wanneer dit niet mag?

VOORBEELD 12.24 Bij de eerste twee van de volgende gevallen mag omwisselen van kwantoren wel, bij de laatste twee niet (de kwantoren waarom het gaat zijn onderstreept)

$\underline{\forall x}\ \underline{\forall y}\ ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)) \Leftrightarrow \underline{\forall y}\ \underline{\forall x}\ ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y))$
$\underline{\exists x}\ \underline{\exists y}\ P(x, y, x) \rightarrow \forall x\ A(x) \Leftrightarrow \underline{\exists y}\ \underline{\exists x}\ P(x, y, x) \rightarrow \forall x\ A(x)$
$\underline{\forall x}\ \underline{\exists y}\ R(x, y) \not\Leftrightarrow \underline{\exists y}\ \underline{\forall x}\ R(x, y)$
$\underline{\forall x}\ (\underline{\forall y}\ A(y) \rightarrow B(x)) \not\Leftrightarrow \underline{\forall y}\ (\underline{\forall x}\ A(y) \rightarrow B(x))$ «

Voorbeeld 12.24 leidt tot een vrij eenvoudige vaststelling:

Verwisselen van kwantoren

Twee direct aangrenzende kwantoren van hetzelfde type (of allebei $\forall$ of allebei $\exists$) mogen worden verwisseld.
Er mag niets tussen staan, zelfs geen haakjes! Iets formeler wordt de observatie:

$\forall\forall \Leftrightarrow \forall\forall$
$\exists\exists \Leftrightarrow \exists\exists$

$\forall x\ \forall y\ \varphi \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ \varphi$
$\exists x\ \exists y\ \varphi \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ \varphi$

Deze twee logische equivalenties laten we tot de standaardequivalenties behoren.
Maar, zoals we bij de prenexe normaalvormen zagen, er mogen soms zelfs verschillende kwantoren verwisseld worden.

VOORBEELD 12.25 $\forall x\ \exists y\ \neg(P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \exists y\ \forall x\ \neg(P(x) \wedge Q(y))$ «

De reden hiervoor is dat er in het kwantorvrije gedeelte geen directe relatie tussen x en y gelegd wordt: ze komen niet in dezelfde atomaire formule voor.
Wél geldt heel in het algemeen dat de $\exists\forall$-volgorde de $\forall\exists$-volgorde als logisch gevolg heeft:

$\exists\forall \Rightarrow \forall\exists$

$$\exists x\ \forall y\ \varphi \Rightarrow \forall y\ \exists x\ \varphi \tag{12.24}$$

VOORBEELD 12.26 $\exists x\ \forall y\ x \leq y \Rightarrow \forall y\ \exists x\ x \leq y$ «

Alle behandelde logische gevolgen 12.18-12.24 zullen we tot de standaardgevolgen rekenen.

OPGAVE 12.28
Geef een tegenvoorbeeld dat aantoont dat het omgekeerde in het algemeen niet geldt, dat wil zeggen: $\forall y\ \exists x\ R(x, y) \not\Rightarrow \exists x\ \forall y\ R(x, y)$.

12.4 Informaticatoepassingen

We bespreken hier twee al eerder genoemde toepassingen: de correctheidsbewijzen van Hoare en de logische programmeertaal Prolog. Uiteraard gaat het hier slechts om een eerste kennismaking met deze onderwerpen.

12.4.1 BEWIJZEN VAN CORRECTHEIDSBEWERINGEN

C.A.R. Hoare

In leereenheid 11 hebben we correctheidsbeweringen ingevoerd. Ze beschrijven wat een programma doet bij een bepaalde input. Dit krijgt vooral zin als we kunnen bewijzen dat deze correctheidsbeweringen kloppen. We hoeven dan niet meer door uitproberen een programma van zijn fouten te ontdoen (‘debuggen’), maar kunnen aantonen dat het voorgestelde programma precies doet wat het zou moeten doen, en dit logisch onderbouwen. De Engelsman C.A.R. Hoare ging ons hierin voor. Het idee is voor elk soort opdracht in een programmeertaal als Pascal een of meer regels te geven die het effect van dit type opdracht zo algemeen mogelijk beschrijven.

We kijken nog eens naar de toekenningsopdracht $x := x + 1$. Met die opdracht verhogen we de waarde van x (zeg a) met 1, wat we uitdrukten als

```
{x = a} x := x + 1 {x = a + 1}
```

Evenzo geldt dat

```
{x = a} x := 3 {x = 3}
```

Dit ‘toekennen’ van een nieuwe waarde aan x lijkt als twee druppels water op het substitueren van een nieuwe term voor een variabele. Inderdaad is er een mooi verband tussen toekenningen en substituties, al ligt dat misschien toch net even anders dan oppervlakkig gedacht zou kunnen worden.

OPGAVE 12.29
Laat zien dat de regel $\{\varphi\}\ x := t\ \{[t/x]\varphi\}$ voor voorgaande twee gevallen tot verkeerde specificaties leidt.

De juiste regel voor toekenningsopdrachten werkt precies omgekeerd:

Toekenningsregel

```
{[t/x]φ} x := t {φ}
```

OPGAVE 12.30
Ga na dat de laatste regel voor de eerder genoemde twee gevallen wel tot de correcte specificaties leidt.

Doordat de opeenvolging van opdrachten neerkomt op het aaneenschakelen van specificaties, kunnen we de correctheid van het omwisselprogramma uit leereenheid 11 als volgt bewijzen:

VOORBEELD 12.27

```
{x = a, y = b}
begin         {y = b, x = a}
  z := x;     {y = b, z = a}
  x := y;     {x = b, z = a}
  y := z      {x = b, y = a}
einde
{x = b, y = a}
```

Omdat bij een toekenningsregel de substitutie ook van rechts naar links voert (en voor langere programma's van onder naar boven), moet dit bewijs ook van onder naar boven gelezen worden. De komma's in de specificaties moeten als conjuncties gelezen worden, dus onderaan staat eigenlijk de formule $x = b \wedge y = a$. De toekenningsregel geeft bij de laatste opdracht $x = b \wedge z = a$ in de voorafgaande specificatie, en na nog twee substituties komen we zo uit bij $y = b \wedge x = a$ wat logisch equivalent is met $x = a \wedge y = b$. «

OPGAVE 12.31 (Aanw)

Bewijs de correctheid van een ander omwisselprogrammaatje.

```
{x = a, y = b}
begin
  x := x + y;
  y := x - y;
  x := x - y
einde
{x = b, y = a}
```

Dát we specificaties van opvolgende opdrachten mogen aaneenschakelen en logische equivalentie voor een specificatie kunnen gebruiken, wordt door regels in deze 'correctheidscalculus' gerechtvaardigd. Bij ingewikkelder programma's komt er ook meer predikaatlogica om de hoek kijken, al speelt kwantificatie in correctheidsbeweringen meestal een bescheiden rol.

12.4.2 PROLOG

Het effect van programma's kan met behulp van logische formules worden beschreven, maar we kunnen de logica ook zelf aanwenden om mee te programmeren. Voor de logische programmeertaal Prolog worden predikaatlogische formules van een heel beperkte vorm gebruikt.

VOORBEELD 12.28 Beschouw het volgende kleine Prolog-programma, met links de Prolog-notatie en rechts de standaard predikaatlogische notatie.

`man(alex).`	$M(a)$
`man(bernd).`	$M(b)$
`man(claus).`	$M(c)$
`vrouw(juul).`	$V(j)$
`vrouw(trix).`	$V(t)$
`ouder(claus, alex).`	$O(c, a)$
`ouder(trix, alex).`	$O(t, a)$
`ouder(juul, trix).`	$O(j, t)$
`ouder(bernd, trix).`	$O(b, t)$
`vader(X, Y) :- man(X), ouder(X, Y).`	$\forall x\, \forall y\, ((M(x) \wedge O(x, y)) \to V'(x, y))$
`moeder(X, Y) :- vrouw(X), ouder(X, Y).`	$\forall x\, \forall y\, ((V(x) \wedge O(x, y)) \to M'(x, y))$

Dit programma kan gezien worden als een relationele databank met negen feiten, aangevuld met twee regels. Maar het kan ook worden opgevat als een verzameling (of beter nog: als een conjunctie) van negen atomaire formules en twee universeel gekwantificeerde implicaties. «

In Prolog vervangen punten en komma's de logische conjunctietekens en zijn de implicaties omgekeerd: het teken :- kan worden gezien als $\leftarrow$. Feiten en regels zijn hier van de vorm $\forall x_1 \ldots \forall x_n((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta)$, waarin $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ atomaire formules zijn die alleen de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ mogen bevatten (dit is een betere weergave dan in leereenheid 10 gegeven is). Formules van deze vorm heten *Horn-clausules*. In het geval van feiten mogen we de α's weglaten (dat kan door voor elke α_i de algemeen geldige formule $x_1 = x_1$ te nemen).

Horn-clausule

Aan deze databank kunnen vragen gesteld worden, wat ook Horn-clausules zijn, waarbij nu β open is gelaten (logisch is dat te bereiken door voor β een contradictie te nemen, bijvoorbeeld $x_1 \neq x_1$). Grofweg komt het stellen van de vraag neer op het kijken of er een aan de vraag gekoppelde formule kan worden afgeleid uit de verzameling formules die het programma vormt.

VOORBEELD 12.29 Aan het voorgaande programmaatje kunnen we vragen of Alex een man is:

```
?- man(alex).

yes
?-
```

Ook kunnen we vragen met variabelen stellen, zoals 'Wie zijn de mannen?', waarop het programma alle goede antwoorden opsomt; met 'no' aan het eind geeft het aan dat het geen andere antwoorden meer vindt.

```
?- man(X)

X = alex;
X = bernd;
X = claus;
no
?-
```

«

Hoe werkt zo'n Prolog-programma nu eigenlijk? Wat opvalt is dat er alleen feitelijke informatie over een bepaald onderwerp in het programma staat, en geen opdrachten wat het moet doen. Dat komt omdat er in feite een vaste procedure in Prolog is 'ingebakken' die ervoor zorgt dat wanneer er een vraag gesteld is, deze systematisch met het programma vergeleken wordt. Dit vergelijken gaat met behulp van de zogenaamde *resolutieregel*:

Resolutie

$$\varphi \vee \neg\psi,\ \psi \vee \neg\chi \Rightarrow \varphi \vee \neg\chi$$

Met implicatie-eliminatie kunt u snel zien dat dit niet anders dan het oude vertrouwde *hypothetisch syllogisme* is, dat in leereenheid 10 al is genoemd. Een bijzonder geval van de resolutieregel ontstaat als φ en χ afwezig zijn: dan hebben we in feite een geval van conjunctie-introductie (zie weer leereenheid 10): $\neg\psi$, $\psi \Rightarrow \bot$.

VOORBEELD 12.30 De vraag ?- man(alex) wordt logisch als $\neg M(a)$ opgevat. Vergelijken met het eerste programmafeit levert dan met de resolutieregel $\neg M(a)$, $M(a) \Rightarrow \bot$. Dit kunnen we lezen als een bewijs uit het ongerijmde voor het feit dat het programma $M(a)$ als logisch gevolg heeft. De vraag ?- man(trix) wordt logisch als $\neg M(t)$ weergegeven, en nu volgt er geen contradictie, met welk feit of regel we deze formule ook combineren. Daarom wordt op deze vraag het antwoord no gegeven. «

Resolutie kan in veel gevallen alleen maar werken doordat eerst met behulp van de instantiatieregel geschikte substituties worden gepleegd.

VOORBEELD 12.31 De vraag ?- man(X) wordt logisch als $\forall x\ \neg M(x)$ opgevat. Diverse instantiaties leveren nu antwoorden. Bijvoorbeeld $x = a$ levert: $\forall x\ \neg M(x)$, $M(a) \Rightarrow \neg M(a)$, wat een contradictie is, zodat X = alex als antwoord wordt gegeven. Daarna wordt de volgende substitutie geprobeerd, enzovoorts. Ook voor de vraag ?- moeder(trix, alex) is instantiatie nodig: logisch wordt dit opgevat als $\neg M'(t, a)$. Achtereenvolgende instantiaties (van t voor x en a voor y) in de 'moeder-regel' leveren $(V(t) \wedge O(t, a)) \rightarrow M'(t, a)$. Samen met $\neg M'(t, a)$ heeft dit $\neg V(t) \vee \neg O(t, a)$ tot gevolg, wat een contradictie geeft wanneer we dit combineren met de feiten $V(t)$ en $O(t, a)$. «

Dit is, heel globaal, wat aan Prolog ten grondslag ligt. Om daar echt mee uit de voeten te kunnen, moet u uiteraard een volwaardige cursus daarover volgen. Dan kunt u ook een computerprogramma voor Lingo schrijven, waarvan de volledige beschrijving en uitleg hier te veel ruimte zou vragen.

SAMENVATTING

We onderscheidden drie soorten wetten in de predikaatlogica: algemeen geldige formules, logische equivalenties en logische gevolgen.

Een formule is *algemeen geldig* als ze waar is op elk mogelijk model. Twee formules zijn *logisch equivalent* (notatie $\varphi \Leftrightarrow \psi$) als ze in elk model dezelfde waarheidswaarde hebben. De formule ψ is een *logisch gevolg* van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (notatie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$) als elk model dat de formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ waar maakt, ook ψ waar maakt. Er zijn in de predikaatlogica systematische verbanden tussen algemeen geldige formules enerzijds, en logische equivalenties en logische gevolgen anderzijds: $\varphi \leftrightarrow \psi$ is algemeen geldig precies dan als $\varphi \Leftrightarrow \psi$, en $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ is algemeen geldig precies dan als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$.

Modellen zijn vooral handig voor het geven van tegenvoorbeelden: ze tonen dan aan dat een formule niet algemeen geldig is, of dat twee formules niet logisch equivalent zijn. Om algemene geldigheid, logische equivalentie en gevolg aan te tonen, is een bewijs met modellen vaak heel bewerkelijk. In eenvoudige gevallen is dit nog wel te doen, maar indien mogelijk gebruiken wij daarvoor liever standaardwetten.

– Standaardequivalenties
Naast de propositionele standaardequivalenties zijn er de volgende regels.

naam	*equivalentie*	*voorwaarde*
distributiviteit	$\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi)$	
	$\exists x\,(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi)$	
dualiteit	$\exists x\,\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\,\neg\varphi$	
loze universele kwantificatie	$\forall x\,\varphi \Leftrightarrow \varphi$	x niet vrij in φ
loze existentiële kwantificatie	$\exists x\,\varphi \Leftrightarrow \varphi$	x niet vrij in φ
herbenoemen variabelen	$\forall x\,\varphi \Leftrightarrow \forall y\,[y/x]\varphi$	y komt niet in φ voor
	$\exists x\,\varphi \Leftrightarrow \exists y\,[y/x]\varphi$	y komt niet in φ voor
verwisselen kwantoren	$\forall x\,\forall y\,\varphi \Leftrightarrow \forall y\,\forall x\,\varphi$	
	$\exists x\,\exists y\,\varphi \Leftrightarrow \exists y\,\exists x\,\varphi$	

– Standaardgevolgen
Naast de standaardgevolgen uit de propositielogica zijn er de volgende regels.

naam	*gevolg*	*voorwaarde*
gedeeltelijke distributiviteit	$\forall x\,\varphi \vee \forall x\,\psi \Rightarrow \forall x\,(\varphi \vee \psi)$	
	$\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\,\varphi \wedge \exists x\,\psi$	
	$\forall x\,(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \forall x\,\varphi \vee \forall x\,\psi$	x niet vrij in φ of ψ
	$\exists x\,\varphi \wedge \exists x\,\psi \Rightarrow \exists x\,(\varphi \wedge \psi)$	x niet vrij in φ of ψ
instantiatie	$\forall x\,\varphi \Rightarrow [t/x]\varphi$	t substitueerbaar voor x in φ
existentiële generalisatie	$[t/x]\varphi \Rightarrow \exists x\,\varphi$	t substitueerbaar voor x in φ
verwisselen kwantoren	$\exists x\,\forall y\,\varphi \Rightarrow \forall y\,\exists x\,\varphi$	

– Standaard geldige formules
Alle standaardequivalenties en standaardgevolgen keren via de genoemde verbanden terug als algemeen geldige formules. Ook de standaardtautologieën gelden nog steeds, waarbij we nu predikaatlogische formules mogen invullen. Daarnaast is er een belangrijke regel om uit een algemeen geldige formule een andere algemeen geldige formule af te leiden:

universele generalisatie	Als φ algemeen geldig is, dan is $\forall x\ \varphi$ ook algemeen geldig

Met de logische equivalenties, in het bijzonder dualiteit, kunnen we bezuinigen op het aantal connectieven en kwantoren. Een toepassing van standaardequivalenties is het in *prenexe normaalvorm* brengen van een formule. Een andere specifieke vorm is de Horn-clausule, de vorm van formules in een Prolog-programma. Logische equivalenties en gevolgen blijken onmisbaar voor het bewijzen van correctheidsbeweringen van bijvoorbeeld Pascal-programma's en voor het functioneren van Prolog.

ZELFTOETS

1 Een vorm van loze existentiële kwantificatie betreft logische gevolgen van de vorm $\exists x\ \varphi \Rightarrow \varphi$. Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de voorwaarde dat x niet vrij in φ mag voorkomen, hier noodzakelijk is.

2 a Wat zijn standaardequivalenties dualiteit en distributiviteit van $\forall$ over $\wedge$?
b Pas deze toe in een bewijs van de equivalentie van twee in leereenheid 11 gegeven formules: $E(2) \wedge P(2) \wedge \neg\exists x\ (x \neq 2 \wedge E(x) \wedge P(x))$ en $\forall x\ ((E(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow x = 2)$. Gebruik bij het bewijs de equivalentie $\forall x\ (x = c \to \varphi) \Leftrightarrow [c/x]\varphi$.

3 Zet om in prenexe normaalvorm: $\forall x\ x \geq 0 \to \forall y\ \exists x\ (y > x \wedge P(x))$.

4 Toon het volgende feit aan (Prolog maakt er gebruik van):

$$\forall x\ ((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \to \bot) \Leftrightarrow \forall x\ (\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_m)$$

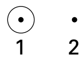
5 a Laat met behulp van modellen zien dat $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$.
b Leid het logisch gevolg uit onderdeel a opnieuw af, maar nu uit logisch gevolg 12.18, dualiteit en contrapositie.

TERUGKOPPELING LEEREENHEID 12

1 Uitwerking van de opgaven

12.1 Om te bewijzen dat $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$ waar is op alle mogelijke modellen, moeten we laten zien dat $\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$ en $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$ in dezelfde modellen waar zijn. Voor een willekeurig model M geldt dat $\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$ waar is in M precies dan als er een object in M is waarvoor de formule $P(x) \vee Q(x)$ waar is, dat wil zeggen dat dit object in M ofwel de eigenschap 'P' ofwel de eigenschap 'Q' heeft. Dit laatste is precies dan het geval als in M ofwel $\exists x\ P(x)$ ofwel $\exists x\ Q(x)$ waar is, dus precies dan als $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$ waar is in M.

12.2 Een model waarin $(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(x))$ onwaar is, moet $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)$ waar maken en $\exists x\ (P(x) \wedge \neg P(x))$ onwaar. Dat laatste is wel heel erg makkelijk: dat is altijd zo. Voor het eerste moet er dus een object zijn met de eigenschap 'P' en één zonder die eigenschap. Dus een model met twee objecten volstaat (zie figuur 12.2).



FIGUUR 12.2

12.3 **a** Dit is een speciaal geval van formule 12.3.
b Dit is een speciaal geval van formule 12.1.
c Dit is een speciaal geval van formule 12.4.

12.4 Voor de omkering van formule 12.3, dat wil zeggen $\forall x\ (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x\ \varphi \vee \forall x\ \psi)$, hebben we in voorbeeld 12.4 al een tegenvoorbeeld gegeven, en voor de omkering van formule 12.4 in opgave 12.2.

12.5 **a** Neem als model de verzameling natuurlijke getallen met de gewone groter-dan-relatie. Dan is $\forall x\ \exists y\ y > x$ waar, want voor elk natuurlijk getal is er een groter getal, maar $\exists y\ y > y$ is onwaar: geen natuurlijk getal kan groter zijn dan zichzelf. De formule is dus onwaar op dit model.
b Beschouw een willekeurig model M. Neem aan dat $\forall x\ \exists y\ y > x$ waar is in M (anders is de formule zeker waar). Dan is er dus voor elk object van M een object dat in relatie '>' staat met het eerste object. Dit geldt dus in het bijzonder ook voor het object dat aan z is toegekend, dus ook $\exists y\ y > z$ is dan waar in M. Kortom, de formule $\forall x\ \exists y\ y > x \rightarrow \exists y\ y > z$ is waar op een willekeurig model M en is dus algemeen geldig.

12.6 **a** Ja, want 3 is een constante en bevat dus geen variabelen die gebonden kunnen worden.
b Ja (deze is tamelijk gemeen), want x wordt niet gebonden na substitutie: het resultaat van de substitutie is namelijk gewoon de formule $\exists y\ x \neq y$! Immers, alleen vrije variabelen worden bij substitutie vervangen.
c Nee, x is niet substitueerbaar voor y in $P(y) \wedge \exists x\ R(x, y)$, want het laatste voorkomen van y is eerst vrij en zou na substitutie (als x) gebonden zijn.
d Ja, vergelijk onderdeel b.
e Ja, want na substitutie komt x wel binnen het bereik van een kwantor, maar dat is $\exists z$ en die bindt x niet.

12.7 Zoals we bij b en d van de vorige opgave gezien hebben, zou dat een zinloze conditie zijn, want alleen *vrije* voorkomens van x kunnen gesubstitueerd worden.

12.8 Ja, die is algemeen geldig. Dit volgt snel uit instantiatie door als te substitueren term x te nemen, want $[x/x]\varphi = \varphi$. Of φ de variabele x wel of niet (vrij) bevat, doet niet ter zake.

12.9 Neem een model met twee objecten, 0 en 1, en ken x object 0 toe. De formule voor het implicatieteken is dan waar, die erachter onwaar. De implicatie is dus onwaar in dit model.

12.10 **a** $P(3)$ is gesloten, dus x komt daar niet vrij in voor en loze universele kwantificatie met voor φ de formule $P(3)$ is toegestaan.
b Ook $\exists x\, P(x)$ is gesloten, en dus is loze universele kwantificatie toegestaan.
c De variabele z komt niet vrij in $\exists y\, P(x, y)$ voor, dus loze universele kwantificatie door middel van $\forall z$ is toegestaan.
d $\forall x\, x > 0 \rightarrow y > 0$ is algemeen geldig vanwege instantiatie, en dus vanwege universele generalisatie ook $\forall y\, (\forall x\, x > 0 \rightarrow y > 0)$.
e $(P(x) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(x)$ is algemeen geldig, want het is een predikaatlogische invulling van de tautologie $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$. Universele generalisatie levert $\forall x\, ((Px) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(x))$.

12.11 De logische equivalenties 12.12 en 12.13 volgen beide met stelling 12.1 uit de overeenkomstige algemeen geldige formules die in paragraaf 12.1.1 zijn gegeven: formules 12.3 en 12.5 gecombineerd leveren 12.12, terwijl formules 12.4 en 12.6 gecombineerd 12.13 opleveren. Daarbij zij opgemerkt dat 12.3, 12.4, 12.5 en 12.6 bewezen worden in paragraaf 12.3 (opgaven 12.21 en 12.24) en in zelftoetsopgave 5.

12.12 De afleiding van 12.13 uit de overige standaardequivalenties gaat als volgt. Stel dat x niet vrij voorkomt in φ of ψ, dan:

$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg\varphi \wedge \neg\forall x\, \neg\psi$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg(\forall x\, \neg\varphi \vee \forall x\, \neg\psi)$	De Morgan
$\Leftrightarrow \neg\forall x\, (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	distributiviteit: x niet vrij in φ of ψ (regel 12.12)
$\Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg(\varphi \wedge \psi)$	De Morgan
$\Leftrightarrow \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$	dualiteit

12.13

$\exists x\, \forall y\, x < y \wedge \forall y\, P(y)$	
$\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, x < y \wedge \exists x\, \forall y\, P(y)$	loze existentiële kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists x\, (\forall y\, x < y \wedge \forall y\, P(y))$	distributiviteit: x niet vrij in $\forall y\, P(y)$ (regel 12.13)
$\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, (x < y \wedge P(y))$	distributiviteit

12.14 Stel dat x niet vrij in ψ voorkomt, dan:

$\forall x\ \varphi \rightarrow \psi$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \varphi \vee \psi$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\neg\varphi \vee \psi$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow \exists x\ \neg\varphi \vee \psi$	dualiteit
$\Leftrightarrow \exists x\ \neg\varphi \vee \exists x\ \psi$	loze existentiële kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists x\ (\neg\varphi \vee \psi)$	distributiviteit
$\Leftrightarrow \exists x\ (\varphi \rightarrow \psi)$	implicatie-eliminatie

12.15

$\exists x\ \varphi \rightarrow \varphi$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \varphi$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\forall x\ \neg\varphi$	contrapositie
$\Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \forall x\ \neg\varphi$	dubbele negatie

Als x niet vrij is in φ, dan is x ook niet vrij in $\neg\varphi$, dus de laatste formule is algemeen geldig, maar dan is de formule op de eerste regel ook algemeen geldig.
Op precies dezelfde manier volgt uit de algemeen geldigheid van $\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ via (onder meer) dualiteit dat ook $\varphi \rightarrow \exists x\ \varphi$ algemeen geldig is (als x niet vrij is in φ).

12.16

$\forall x\ ((x = a \vee x = b) \rightarrow P(x))$	
$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg(x = a \vee x = b) \vee P(x))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x = a \wedge \neg x = b) \vee P(x))$	De Morgan
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x = a \vee P(x)) \wedge (\neg x = b \vee P(x)))$	$\vee$ distributief over $\wedge$
$\Leftrightarrow \forall x\ ((x = a \rightarrow P(x)) \wedge (x = b \rightarrow P(x)))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ (x = a \rightarrow P(x)) \wedge \forall x\ (x = b \rightarrow P(x))$	distributiviteit
$\Leftrightarrow P(a) \wedge P(b)$	equivalentie 12.17

12.17

$\forall x\ (x \leq n \rightarrow Q(x))$	
$\Leftrightarrow \forall x\ ((x < n \vee x = n) \rightarrow Q(x))$	met $x \leq n \Leftrightarrow x < n \vee x = n$
$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg(x < n \vee x = n) \vee Q(x))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x < n \wedge \neg x = n) \vee Q(x))$	De Morgan
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x < n \vee Q(x)) \wedge (\neg x = n \vee Q(x)))$	$\vee$ distributief over $\wedge$
$\Leftrightarrow \forall x\ ((x < n \rightarrow Q(x)) \wedge (x = n \rightarrow Q(x)))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ (x < n \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\ (x = n \rightarrow Q(x))$	distributiviteit
$\Leftrightarrow \forall x\ (x < n \rightarrow Q(x)) \wedge Q(n)$	equivalentie 12.17

12.18 **a** $\exists y\ R(x, y) \Leftrightarrow \exists z\ R(x, z)$ en $[y\ /\ x]\exists z\ R(x, z)$ geeft $\exists z\ R(y, z)$.
b $(P(y) \wedge \exists x\ R(x, y)) \Leftrightarrow (P(y) \wedge \exists z\ R(z, y))$ en $[x\ /\ y](P(y) \wedge \exists z\ R(z, y))$ geeft $P(x) \wedge \exists z\ R(z, x))$.

12.19

$\exists x\ P(x) \rightarrow \neg\forall y\ Q(y)$	
$\Leftrightarrow \neg\exists x\ P(x) \vee \neg\forall y\ Q(y)$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg(\exists x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y))$	De Morgan
$\Leftrightarrow \neg(\forall y\ \exists x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \neg\forall y\ (\exists x\ P(x) \wedge Q(y))$	$\forall$ distributief over $\wedge$
$\Leftrightarrow \neg\forall y\ (\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(y))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \neg\forall y\ \exists x\ (P(x) \wedge Q(y))$	$\exists$ distributief over $\wedge$: x niet vrij in $Q(y)$
$\Leftrightarrow \neg\forall y\ \neg\forall x\ \neg(P(x) \wedge Q(y))$	dualiteit
$\Leftrightarrow \exists y\ \forall x\ \neg(P(x) \wedge Q(y))$	dualiteit

12.20 Voor de liefhebbers staan diverse wegen open: (we doen om ruimte te besparen meerdere stappen op 1 regel)

$\exists x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \forall y\, R(x, y)$	
$\Leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \forall y\, R(x, y)) \vee (\neg\exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, \forall y\, R(x, y))$	equivalentie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\exists z\, \exists x\, P(x) \wedge \exists z\, \forall y\, R(z, y)) \vee \neg(\exists x\, P(x) \vee \exists x\, \forall y\, R(x, y))$	loze kwantificatie; herbenoemen; De Morgan
$\Leftrightarrow \exists z\, (\exists x\, P(x) \wedge \forall y\, R(z, y)) \vee \neg\exists x\, (P(x) \vee \forall y\, R(x, y))$	z niet vrij in $\exists x\, P(x)$; distributiviteit
$\Leftrightarrow \exists z\, (\forall y\, \exists x\, P(x) \wedge \forall y\, R(z, y)) \vee \neg\exists x\, (\forall y\, P(x) \vee \forall y\, R(x, y))$	twee maal loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall y\, (\exists x\, P(x) \wedge R(z, y)) \vee \neg\exists x\, \forall y\, (P(x) \vee R(x, y))$	distributiviteit; y niet vrij in $P(x)$
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall y\, (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, R(z, y)) \vee \forall x\, \neg\forall y\, (P(x) \vee R(x, y))$	loze kwantificatie; dualiteit
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y)) \vee \forall x\, \neg\forall y\, (P(x) \vee R(x, y))$	x niet vrij in $R(z, y)$; distributiviteit
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y)) \vee \exists z\, \forall x\, \neg\forall y\, \neg\neg(P(x) \vee R(x, y))$	loze kwantificatie; dubbele negatie
$\Leftrightarrow \exists z\, (\forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y)) \vee \forall x\, \exists y\, \neg(P(x) \vee R(x, y)))$	distributiviteit; dualiteit
$\Leftrightarrow \exists z\, (\forall v\, \forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y)) \vee \forall v\, \exists y\, \neg(P(v) \vee R(v, y)))$	loze kwantificatie; herbenoemen
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall v\, (\forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y)) \vee \exists y\, \neg(P(v) \vee R(v, y)))$	v niet vrij in $\forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, y))$; distributiviteit
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall v\, (\forall u\, \exists x\, (P(x) \wedge R(z, u)) \vee \forall u\, \exists y\, \neg(P(v) \vee R(v, y)))$	herbenoemen; loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall v\, \forall u\, (\exists y\, (P(y) \wedge R(z, u)) \vee \exists y\, \neg(P(v) \vee R(v, y)))$	u niet vrij in $\exists y\, \neg(P(v) \vee R(v, y))$; distributiviteit; herbenoemen
$\Leftrightarrow \exists z\, \forall v\, \forall u\, \exists y\, ((P(y) \wedge R(z, u)) \vee \neg(P(v) \vee R(v, y)))$	distributiviteit

12.21 Stel M is een willekeurig model dat $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ waar maakt. Dan is of $\forall x\, P(x)$ waar, of $\forall x\, Q(x)$ is waar, of beide. We beschouwen verder alleen het eerste geval (de andere gaan net zo). Dus $P(x)$ is waar voor alle objecten in M, maar dan is $P(x) \vee Q(x)$ zeker waar voor alle objecten in M, en daarom is $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ waar in M.

12.22 Als we voor φ de formule $x = y$ nemen, dan klopt de regel van universele generalisatie nog steeds: $x = y$ is *niet* algemeen geldig, dus elke uitspraak van de vorm 'als $x = y$ algemeen geldig is, dan ...' is juist. We gebruiken hier dus gewoon de waarheidstabel voor $\rightarrow$, maar nu op een 'hoger niveau' zogezegd.

12.23 Gegeven is dat $\varphi \Rightarrow \psi$ en dat φ algemeen geldig is. Formule φ is dus waar in elk model, maar voor elk model geldt ook dat áls φ waar is, ψ ook waar is. Dus ψ is ook waar in elk model, kortom ψ is algemeen geldig.

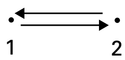
12.24 **a** In voorbeeld 12.4 is in feite al bewezen (zelfs met behulp van twee verschillende modellen) dat $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$.
b Om met modellen te bewijzen dat $\forall x\, (P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(y)$, nemen we een model dat $\forall x\, (P(x) \vee Q(y))$ waar maakt. We moeten dan aantonen dat ook $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(y)$ waar is. Als $\forall x\, P(x)$ waar is, zijn we klaar. Als $\forall x\, P(x)$ onwaar is, dan is er een object dat niet eigenschap P heeft. Maar omdat $P(x) \vee Q(y)$ waar is voor dit object, volgt er dat $Q(y)$ waar is in het model. Dan is ook $\forall x\, Q(y)$ waar en daarmee dus $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(y)$ waar, wat we moesten bewijzen.

12.25 Bijvoorbeeld $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \not\Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$: het twee-objecten-model uit opgave 12.2 levert ook hiervoor het tegenvoorbeeld. We kunnen ook de uitwerking van opgave 12.24a gebruiken als tegen-voorbeeld.

12.26 **a** Instantiatie: 1000000000 is een constante en dus zeker substitueerbaar voor x in $N(x) \rightarrow \exists z\ (P(z) \wedge z > x)$.
b Instantiatie: y^2 is substitueerbaar voor x in $x \leq y$, want y wordt na substitutie niet gebonden.
c Existentiële generalisatie: $2^{859433} - 1$ is substitueerbaar voor x in $P(x) \wedge x > 10^{258716}$.

12.27 (Zie de aanwijzing voor motivering.) Kies voor φ de formule $\forall y\ x = y$ en voor t de variabele y. Merk op dat $\forall y\ y = y \not\Rightarrow \exists x\ \forall y\ x = y$: ieder model met twee objecten vormt een tegenvoorbeeld.

12.28 Het model uit figuur 12.3 maakt $\forall y\ \exists x\ R(x, y)$ waar en $\exists x\ \forall y\ R(x, y)$ onwaar. Denk bij zo'n model eventueel aan 'Iedereen houdt van iemand, maar niemand houdt van iedereen'.



FIGUUR 12.3

12.29 Volgens $\{\varphi\}\ x := t\ \{[t/x]\varphi\}$ krijgen we (vanuit de beginspecificatie) in het eerste geval $\{x = a\}\ x := x + 1\ \{x + 1 = a\}$ en in het tweede geval $\{x = a\}\ x := 3\ \{3 = a\}$. Het eerste is fout omdat $x + 1 = a \Leftrightarrow x = a - 1$, dus dan zou de waarde van x juist verminderd zijn, het tweede klopt niet omdat de specificatie $a = 3$ niet alleen onjuist kan zijn, maar ook geen informatie over x meer bevat.

12.30 Met de goede toekenningsregel krijgen we in het eerste geval $\{x + 1 = a + 1\}\ x := x + 1\ \{x = a + 1\}$ en dat is juist omdat $x + 1 = a + 1 \Leftrightarrow x = a$, en in het tweede geval $\{3 = 3\}\ x := 3\ \{x = 3\}$. Dat ziet er wel heel anders uit dan de correctheidsbewering in de tekst, maar die volgt er wel uit: $3 = 3$ is immers altijd waar, dus zeker als $x = a$!

12.31 We hebben na iedere stap de vergelijkingen zoveel mogelijk vereenvoudigd – dat hoeft natuurlijk niet. Lees het bewijs weer van onder naar boven.

```
{x = a, y = b}
begin         {x + y = a + b, y = b} ⇔ {x = a, y = b}
  x := x + y; {x = a + b, x - y = a} ⇔ {x = a + b, y = b}
  y := x - y; {x - y = b, y = a} ⇔ {x = a + b, y = a}
  x := x - y  {x = b, y = a}
einde
{x = b, y = a}
```

2 Uitwerking van de zelftoets

1 Laat φ de formule $x = y$ zijn. Dan geldt $\exists x\ x = y \not\Rightarrow x = y$: we kunnen een model maken waarin (voor de vrije variabelen!) $x = 1$ en $y = 2$. Daarin is $\exists x\ x = y$ nog steeds waar (er is zeker een object gelijk aan 2), maar $x = y$ is dan onwaar.

2 **a** Dualiteit is de equivalentie $\exists x\ \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$. Distributiviteit van $\forall$ over $\wedge$ is: $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi)$.

b

$E(2) \wedge P(2) \wedge \neg\exists x\ (x \neq 2 \wedge E(x) \wedge P(x))$	
$\Leftrightarrow E(2) \wedge P(2) \wedge \forall x\ \neg(x \neq 2 \wedge E(x) \wedge P(x))$	dualiteit
$\Leftrightarrow E(2) \wedge P(2) \wedge \forall x\ (x = 2 \vee \neg(E(x) \wedge P(x)))$	De Morgan
$\Leftrightarrow \forall x\ (x = 2 \rightarrow (E(x) \wedge P(x)) \wedge \forall x\ (x = 2 \vee \neg(E(x) \wedge P(x))))$	gegeven equivalentie
$\Leftrightarrow \forall x\ ((x = 2 \rightarrow (E(x) \wedge P(x)) \wedge (x = 2 \vee \neg(E(x) \wedge P(x))))$	distributiviteit
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x = 2 \vee (E(x) \wedge P(x)) \wedge (x = 2 \vee \neg(E(x) \wedge P(x))))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x = 2 \wedge x = 2) \vee (\neg x = 2 \wedge \neg(E(x) \wedge P(x)))$	$\wedge$ distributief over $\vee$
$\vee\ (x = 2 \wedge (E(x) \wedge P(x))) \vee ((E(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(E(x) \wedge P(x))))$	
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg x = 2 \wedge \neg(E(x) \wedge P(x))) \vee (x = 2 \wedge (E(x) \wedge P(x))))$	$\perp$-regels
$\Leftrightarrow \forall x\ ((E(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow x = 2)$	commutativiteit; equivalentie-eliminatie

3 Het kan op diverse manieren, bijvoorbeeld:

$\forall x\ x \geq 0 \rightarrow \forall y\ \exists x\ (y > x \wedge P(x))$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ x \geq 0 \vee \forall y\ \exists x\ (y > x \wedge P(x))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall y\ \neg\forall x\ x \geq 0 \vee \forall y\ \exists x\ (y > x \wedge P(x))$	loze kwantificatie
$\Leftrightarrow \forall y\ (\neg\forall x\ x \geq 0 \vee \exists x\ (y > x \wedge P(x)))$	distributief: y niet vrij in $\forall x\ x \geq 0$
$\Leftrightarrow \forall y\ (\exists x\ \neg x \geq 0 \vee \exists x\ (y > x \wedge P(x)))$	dualiteit
$\Leftrightarrow \forall y\ \exists x\ (\neg x \geq 0 \vee (y > x \wedge P(x)))$	distributiviteit

4

$\forall x\ ((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \rightarrow \perp)$	
$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \vee \perp)$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \forall x\ ((\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_m) \vee \perp)$	De Morgan (herhaald)
$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_m)$	$\perp$-regel

5 **a** Om te bewijzen dat $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ algemeen geldig is, beschouwen we een willekeurig model M. Is $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ onwaar in M, dan is de hele formule zeker waar in M. Neem dus aan dat $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ waar is. Dan is er een object in M, waarvoor zowel $P(x)$ als $Q(x)$ waar is, met andere woorden: er is een object waarvoor $P(x)$ waar is en er is een object, namelijk hetzelfde, waarvoor $Q(x)$ waar is, ofwel: $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ is waar. Ook in dit geval is nu de hele formule waar. De formule is dus algemeen geldig.

b Voor het gemak schrijven we φ voor $P(x)$ en ψ voor $Q(x)$.

$\exists x\ (\varphi \wedge \psi)$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg(\varphi \wedge \psi)$	dualiteit
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	De Morgan

Nu geldt dat $\forall x\ \neg\varphi \vee \forall x\ \neg\psi \Rightarrow \forall x\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (het standaardgevolg 12.18 – gedeeltelijke distributiviteit – toegepast op $\neg\varphi$ en $\neg\psi$), dus met contrapositie krijgen we dat $\neg\forall x\ (\neg\varphi \vee \neg\psi) \Rightarrow \neg(\forall x\ \neg\varphi \vee \forall x\ \neg\psi)$. Dus:

$\exists x\ (\varphi \wedge \psi)$	
$\Rightarrow \neg(\forall x\ \neg\varphi \vee \forall x\ \neg\psi)$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi \wedge \neg\forall x\ \neg\psi$	De Morgan
$\Leftrightarrow \exists x\ \varphi \wedge \exists x\ \psi$	dualiteit