WT 11. Binomiaal-Coefficienten.

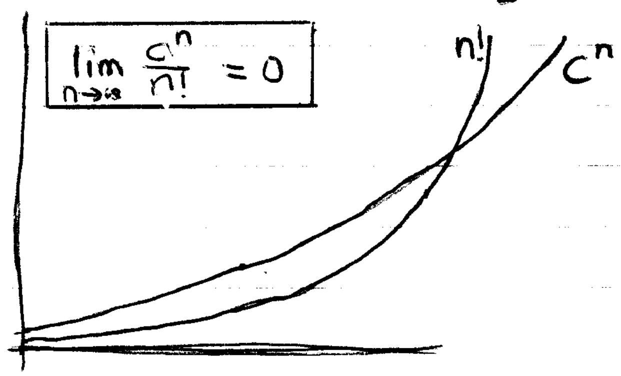
1. Faculteiten $n!$
2. Permutaties $P(n,k)$
3. Combinaties $\binom{n}{k}$
4. Additieve karakterisering
5. Drie Stellingen.
6. Binomium van Newton
7. Sommaties van B.C.
8. Conclusies

In "De Telduivel" worden optel-blokjes in een pyramide gezet. Wat gebeurt er als je bovenin een 1-blokje zet? (Foto: Plaatsing Top-blokje)
Over de getallen die daarin ontstaan gaan we het vandaag hebben. Getallen uit de Driehoek van Pascal ofwel: Binomiaal getallen

① Faculteiten.

Onder $n!$ verstaan we het product van de getallen 1 tm n : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
Wat is $0!$? Een leeg product heeft waarde 1 (Vgl 2^0).
Dus is $0! = 1$ en geldt $n! = n \cdot (n-1)!$ ook voor $n=1$.

De faculteit is een snelgroeiende functie. Hij haalt elke "exponentiële" in:



Reden: de c^n "groeit" in elke stap met een factor c.
De $n!$ groeit eerst met kleine factoren, 1, 2, 3 maar de groeifactor neemt toe.
Als de n, c gepasseerd is begint $n!$ dus c^n weer in te lopen en uiteindelijk gaat hij hem voorbij.

Hoe groot groeit $n!$ ongeveer? Wat is het "gemiddelde" van de factoren $1, 2, 3, \cdots, n$?
De Moivre bedacht dat dit ongeveer n/e moest zijn zodat $n! \approx (n/e)^n$

Dit werd nauwkeuriger gemaakt door Stirling, de factoren zijn een tikkeltje groter:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n.$$

Met deze Stirling-benadering kun je de Catalan-getallen schatten.

(2) Permutaties $P(n,k)$

Een k-uit-n Permutatie is een rytje van k verschillende elementen uit een verzameling van n elementen. Let op, als 3-uit-8 van abcdefgh, zyn dus bdg en bgd verschillend!

Vb Er zyn 25 schaatsers, hoeveel mogelykheden zyn er voor de 1e, 2e en 3e prys?
Er kunnen 25 verschillende goud-winnaars zyn.
Als de 1e eenmaal bekend is zyn er nog 24 mogelykheden voor zilver en daarna nog 23 voor brons
Totaal $25 \times 24 \times 23$ geeft 13800.

Definitie $P(n,k)$ is het aantal k-uit-n Permutaties.

Stelling $P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

We kennen deze hoeveelheid ook als $n^{\underline{k}}$.

En: $n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n \cdot (\ldots)(n-k+1) \cdot (n-k) \cdots (1)}{(n-k) \cdots 1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Speciaal geval: Volgordes van (alle) n elementen
$P(n,n) = n! = n^{\underline{n}}$.

③ Combinaties $C(n,k)$ of $\binom{n}{k}$

Een k-uit-n Combinatie is een deelverzameling van k elementen uit een verzameling van n.
Let op: hier doet de volgorde er niet toe dus zijn bdg en bgd dezelfde (en tellen samen en 1x mee!).

Vb Er zijn 25 schaatsers en je gaat uit eten met de 3 medaille winnaars. Hoeveel "eet-gezelschappen" zijn er mogelijk?
Elke Permutatie geeft je een Combinatie, maar sommige Permutaties leiden tot dezelfde Combinatie.
Een bepaald clubje van 3 (bv: xyz) komt bij 6 permutaties voor: xyz xzy yxz yzx zxy zyx
Dus zijn er $13800/6 = 2300$ combinaties.

Definitie $C(n,k)$, vaker genoteerd $\binom{n}{k}$, is het aantal deelverzamelingen van grootte k van een verzameling van grootte n.

Stelling $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{P(k,k)}$.
Bewijs Elke deelverzameling van k kan op $P(k,k)$ volgordes worden gezet, dus Permutaties en Combinaties corresponderen $P(k,k)$-op-1 ⊠

Uit de definitie volgt dus $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ Meest gebruikte schrijfwijze.

Het is al interessant om op te merken dat $n^{\underline{k}}$ altijd deelbaar is door $k!$
Merk ook op $\binom{n}{k} = 0$ als $k<0$ of $k>n$.

Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Rekenkundige afleiding: (Meestal is het het handigst om met de meest complexe kant te beginnen)

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} \qquad \{\text{Stelling, } k \to n-k\} \text{ (substitutie is al een kunst op zich)}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \{\text{Vereenvoudig}\}$$

$$= \binom{n}{k} \qquad \{\text{Stelling}\}$$

Je kunt 't ook zo zien: met elk groepje van 3 eters correspondeert een groepje van 22 niet-eters. De deelverzamelingen met k elementen komen 1-op-1 overeen met d.v. van n-k elementen, namelyk hun complement.

Een argument waar je rechtstreeks soorten verzamelingen telt en uitsplitst, heet een combinatorisch argument.
(Gerard houdt niet van Combinatorische Argumenten. Ze zijn weinig geformaliseerd en leiden vaak tot gezwam.)

De karakterisering van $\binom{n}{k}$ als $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ is multiplicatief van aard.

④ Additieve Karakterisering

Je kunt $\binom{n}{k}$ ook berekenen door alleen maar (ongeveer $(n-k)\cdot k$) optellingen. Er geldt namelyk

Stelling (Driehoek van Pascal):
(1) $\binom{n}{0} = 1$ en $\binom{n}{n} = 1$
(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ als $0 < k < n$.

Bewijs: Voor (1), merk op $\frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$, etc.

Ook voor (2) gebruiken we de uitdrukking met faculteiten. We beginnen met de ingewikkeldste kant (RHS) en voor het optellen van breuken gaan we de noemers gelykmaken, nl. op $k!\cdot(n-k)!$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \quad \left\{\text{Waarde van binom. coeff.}\right\}$$

$$= \frac{k\cdot(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\,(n-k)!} \quad \left\{\text{Voeg factoren } k \text{ en } n-k \text{ toe}\right\}$$

$$= \frac{((n-k)+k)\,(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \left\{\text{Tellers optellen}\right\}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \left\{\text{Vereenvoudig}\right\}$$

Dit bewijst dat de Driehoek van Pascal precies de binomiaalcoefficienten laat zien.
Door te definieren dat $\binom{n}{k} = 0$ voor $k<0$ of $k>n$, geldt (2) ook op de rand.
Combinatorisch argument: In een verz. met element 1, zijn de termen in de RHS precies de verzamelingen met en zonder 1.

Even kijken of het ook klopt.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{720}{6\cdot 6} = 20$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Waarom is het handig om zowel een multiplicatieve als een additieve karakterisering te hebben? Omdat je soms iets wilt bewijzen waarin de B.C worden opgeteld en soms iets waar ze worden vermenigvuldigd. Voorbeeld:

<u>Stelling: Absorptie</u>: $k\cdot\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Als je hier de B.C. als som gaat schrijven wordt de puinhoop alleen maar groter!

<u>Bewijs</u>:
$$k\cdot\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \{\text{Stelling over BC}\}$$
$$= n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} \qquad \{\text{Factoren verplaatsen}\}$$
$$= n\cdot\binom{n-1}{k-1} \qquad \boxtimes$$

Deze absorptie gaan we straks nog handig gebruiken bij Sommaties met binomiaal-coefficienten erin.

(Combinatorisch: Aantal commissies van k leden met 1 Voorzitter.
$\binom{n}{k}\cdot k$: eerst commissie dan vz, $n\cdot\binom{n-1}{k-1}$: eerst vz dan rest.
Hoe beredeneer je dat je over hetzelfde praat? Onduidelijk)

(5) Twee Zinloze Stellingen en Een Belangrijke

Er bestaan ongeveer 80.000 relaties en stellingen over binomiaalcoefficienten (die we niet allemaal gaan bewijzen :-).
Foto: Driehoek met gekleurde diagonalen.
Zo'n diagonaal begint links, dus bij $\binom{n}{0}$, en gaat naar boven maar steeds een plaats naar rechts: $\binom{3}{0}+\binom{2}{1}+\binom{1}{2}+\binom{0}{3} = 3$

$$\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}+\cdots\quad\cdots = 8$$

(5.1) Pascal Diagonaal Sommatie Fibonacci Stelling: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} = f_{n+1}$

Je ziet al aan de naam dat het niet een van de meest gebruikte stellingen is.
Er wordt hier opgeteld! Als we zouden proberen de termen uit te schryven met faculteiten, is de puinhoop al snel niet meer te overzien!
Gezien de zinloosheid van de stelling kun je het bewijs ook overslaan
<u>Bewijs</u> Met inductie naar n. In principe mag je vanaf $n=0$, voor "$n+1$" de IH gebruiken maar omdat je bij Fibonacci meestal de waarde van twee voorgangers nodig hebt, doen we $n=0$ èn $n=1$ apart

$\underline{n=0}$: $LHS = \sum_{k=0}^{0}\binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1,$
$RHS = f_1 = 1$

$\underline{n=1}$: $LHS = \sum_{k=0}^{1}\binom{1-k}{k} = \binom{1}{0}+\binom{0}{1} = 1+0 = 1$

$RHS = f_2 = 1.$

$\underline{n+1}$: We nemen aan dat de gelykheid geldt voor n en $n-1$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$ en $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} = f_n$

Te bewyzen: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = f_{n+2}$

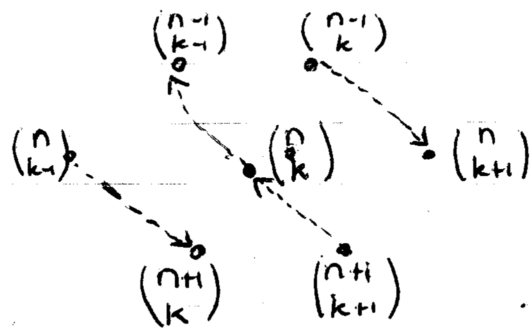
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k} && \{\text{DvP}\} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k} && \{\text{Term-splitsing}\} \\
&= \sum_{k=-1}^{n} \binom{n-(k+1)}{(k+1)-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k} && \{\text{Dummy Tr. op eerste}\} \\
&= \sum_{k=-1}^{n} \binom{(n-1)-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k} && \{\text{Vereenvoudig}\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} && \{ \tbinom{..}{-1} = 0 \text{ en } \tbinom{n-1-n}{..} = 0 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} && , \tbinom{n-(n+1)}{..} = 0 \} \\
&= f_n + f_{n+1} && \{2\text{x IH}\} \\
&= f_{n+2} && \{\text{Fibonacci}\}
\end{aligned}
$$

⊠

Dit verklaart dat de diagonaalsommen Fibonacci-getallen op leveren.

Handwaving Elk getal is de som van twee, verdeeld over de vorige twee diagonalen

(5.2) De Hexagon-Stelling gaat over de BC^s die als een zeshoek rond $\binom{n}{k}$ zitten:



<u>Hexagon:</u> $\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1}$

$$= \binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}$$

In deze stelling worden Bin Co^s met elkaar vermenigvuldigd en hier heb je juist niets aan een stelling (DvP) die de BC als som schrijft.
Maar wel aan de (multiplicatieve!) Absorptie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k}\cdot\frac{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k} && \{\text{Abs}\}\\
&= \binom{n}{k-1}\cdot\binom{n-1}{k}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{k\cdot(k+1)}\cdot\binom{n-1}{k-1} && \{\text{Abs}\}\\
&= \frac{n+1}{k}\cdot\binom{n}{k-1}\cdot\frac{n}{k+1}\cdot\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1} && \{\text{Verplaatsen}\}\\
&= \binom{n+1}{k}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n-1}{k-1} && \{2\times\text{Abs}\}
\end{aligned}$$

(5.3) Wel een belangrijke eigenschap. Zie foto van B.C^s deelbaar door **5**.
Welke $\binom{4}{i}$ zijn deelbaar door 4 en welke $\binom{6}{i}$ door 6?

<u>Stelling:</u> Als p een priemgetal is,
Dan is $\binom{p}{i}$ deelbaar door p voor $0<i<p$.

Deze stelling is uiterst belangrijk om te bepalen of een zeker getal priem is. (Fermat-Test)

<u>Bewijs</u>: De multiplicatieve relatie zegt $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$

De teller $p!$ bevat een priem factor p.

Omdat $i<p$ en $(p-i)<p$, bevat de noemer geen factor p. $\boxtimes$

Bv $\binom{5}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$

Hiermee kun je, met inductie naar a, bewijzen:

<u>Kleine Stelling van Fermat</u>: Als p een priemgetal is, dan is, voor elke gehele a, $a^p - a$ deelbaar door p.

⑥ Het Binomium van Newton

De belangrijkste formule over binomiaal coefficienten!

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x + y\\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Je ziet al waar het heen gaat:

<u>Stelling (Binomium van Newton)</u> $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$

<u>Bewijs</u>: Met inductie naar n:

<u>$n=0$</u>. LHS $= (x+y)^0 = 1$

RHS $= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^{0-k} \cdot y^k$ $\{$ Voor $n:0$ $\}$

$= \binom{0}{0} x^0 \cdot y^0 = 1$ $\{$ Eenpunt $\}$

<u>$n+1$</u>:
$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n && \{\text{Regel macht}\}\\
&= (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^k && \{\text{IH op } (x+y)^n\}\\
&= x\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k + y\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\cdot x^{n+1-k}\cdot y^k + \sum_{k=-1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^{k+1} && \{\text{Const. Factor, "extra" termen zijn 0}\}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}x^{(n+1)-k}\cdot y^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot x^{n-(k-1)}\cdot y^k && \{\text{Dum. Tr op tweede}\}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\cdot x^{n+1-k}\cdot y^k && \{\text{Term - splits}\}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot x^{n+1-k}\cdot y^k && \{\text{Dr. v Pasc}\}
\end{aligned}
$$

⊠

Gevolgen hiervan:

- Som van B.C. op één regel:

$$\sum_k \binom{n}{k} = \sum_k \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k \overset{BvN}{\equiv} 2^n.$$

- Som van B.C maal macht:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k = (1+z)^n.$$

- Alternerende som:

$$\sum_k \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Reken maar na! Vooral bij even n niet vanzelfsprekend.

- $\sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^k$

Vaak laten mensen de indices weg, impliciet loopt de som over alle k waarvoor de B.C. ongelijk 0 is

Een leuke variant van de productregel voor afgeleiden:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_k \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}. \qquad \text{(Leibniz)}$$

(7) Sommaties met Binomiaal Coefficienten

Omdat Binomiaal Coëfficienten zo vaak voorkomen. zul je ook wel eens een sommatie zien waar een BC instaat (die de sommatie variabele bevat).

Voorbeeld: Traveling Salesman

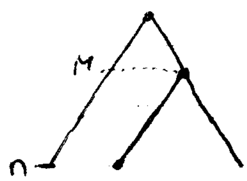
Bezoek, vanuit zeker startpunt, n locaties zo snel mogelijk.

Bij Algoritmiek gaan we hier verder op in. Wat je kunt doen is: voor elke deelverz. S van steden, en elk punt t in S, bepaal wat de snelste route door S is, die eindigt in t.
Hoeveel van die (S, t) combinaties zijn er? Er zijn 2^n deelverzamelingen, waarvan er $\binom{n}{k}$, van grootte k, die dus k maal voorkomen.
Het aantal A is dus $\sum_k \binom{n}{k} \cdot k$.

Om de waarde voor zo'n (S, t) combinatie met k punten uit te rekenen, moet je (k-1) rekenstappen doen.
Het totale werk W is dus $\sum_k (k-1)(k) \cdot \binom{n}{k}$.

(7.1) Sommatie variabele in het boven getal

$\sum_k \binom{k}{\cdot}$: hoe ziet die er verder uit?
Zeg onder in staat een M.
Voor het bereik heeft het alleen zin,
k vanaf M te laten lopen (want $\binom{k}{M} = 0$ als $k < M$)
Dan moet er nog een bovengrens zijn,
noem deze n: $\sum_{k=M}^{n} \binom{k}{M}$

In de Δ-v-P :  sommeer je een diagonaal stuk.

Het antwoord is het getal schuin eronder:

$$\sum_{k=M}^{n} \binom{k}{M} = \binom{n+1}{M+1}$$

Meestal wordt dit met inductie naar n bewezen.

Handiger:
$$\Delta \binom{k}{M+1} = \binom{k+1}{M+1} - \binom{k}{M+1} \qquad \{\text{Def } \Delta \text{ (naar } k)\}$$
$$= \binom{k}{M} \qquad \{\text{DvP}\}$$

Wat direct geeft:
$$\sum_{k=M}^{n} \binom{k}{M} = \binom{k}{M+1} \Big|_{M}^{n+1} \qquad \{\text{Differentie-Sommatie}\}$$
$$= \binom{n+1}{M+1} - \binom{M}{M+1} \qquad \{\text{invullen}\}$$
$$= \binom{n+1}{M+1}$$

Niet mee te snappen? Quote: "The ultimate goal of Mathematics is to eliminate all need for intelligent thought"

7.2 Sommatievariabele in het ondergetal.

Je hebt dan dus de term $\binom{n}{k}$, je doorloopt dus een "regel" van de Driehoek, en doorgaans loopt de sommatie over alle (niet-nul) posities: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

We weten al dat hier 2^n uitkomt.

Variant: de sommatie variabele zit boven èn onder: gebruik symmetrie:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{c+k}{k} = \sum_{k=a}^{b} \binom{c+k}{c} \qquad \{\text{Symmetrie}\}$$

$$= \binom{c+k}{c+1} \Big|_a^{b+1} \qquad \{\text{Differentie-sommatie}\}$$

$$= \binom{c+b+1}{c+1} - \binom{c+a}{c+1}$$

Je ziet hieraan al, dat je de regels voor binomiaalcoefficienten kunt gebruiken om het voorkomen van de sommatie variabele in de termformule heen en weer te pingpongen.

7.3 Onderin met extra factor

Sommeer een regel uit de driehoek met wisselende factor: $\sum_k \binom{n}{k} \cdot A_k$ (Akelige factor)

Exponentiele factor: Binomium van Newton gebruiken!

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot c^k = (1+c)^n.$$

Een factor k: Wegwerken met Absorptie:

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \qquad \{\text{Uit TSP}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \qquad \{\text{Absorptie}\}$$

Schiet dit op? JA want de n is hier constant! Dwz hangt niet af van k.

$$= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

Twee factoren k (k^2). Tweemaal Absorptie

$$W = \sum_k k \cdot (k-1) \binom{n}{k} \qquad \{\text{Uit TSP}\}$$

$$= \sum_k (k-1) \cdot n \cdot \binom{n-1}{k-1} \qquad \{\text{Absorptie}\}$$

$$= \sum_k n(n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2} \qquad \{\text{Absorptie}\}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

Combinatie van Polynomiaal en Exponentieel:

$$\sum \binom{n}{k} \cdot k^2 \cdot c^k$$

gaat net zo!

⑧ Conclusies

De binomiaal coëfficient $\binom{n}{k}$ geeft het aantal combinaties van k elementen uit n.
Over B.C. zijn ontzettend veel formules en stellingen bekend. Gelukkig maar, want je komt ze vaak tegen.

Je verdere leven zal beslist minder succesvol verlopen als je deze drie formules niet kent:

{ Binomiaal coefficient } $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

{ Driehoek van Pascal } $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

{ Binomium van Newton } $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Sommaties met een B.C. in de term kun je meestal uitwerken met BvN, eventueel aangevuld met symmetrie of absorptie.

Gebroken bovengetal: $\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}$ kun je ook voor niet-gehele (zelfs negatieve) r definiëren. Erg leuk:
de Taylorreeks

$$(1+z)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} \cdot z^k$$

is een generalisatie van BvN

Faculteit: $0! = 1$, $\quad n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirling)