Predikaatlogica

Introductie

Leerkern

11.1 De taal van de predikaatlogica
11.1.1 Termen en formules
11.1.2 Kwantorbereik
11.1.3 Vrij en gebonden
11.1.4 Substitutie
11.2 Modellen
11.3 Een informaticatoepassing

Samenvatting

Zelftoets

Terugkoppeling

Leereenheid 11

Predikaatlogica

INTRODUCTIE

De taal van de propositielogica, zoals behandeld in de vorige twee leereenheden, is voor veel toepassingen te arm. In de wiskunde doen we graag algemene uitspraken over objecten uit een oneindige verzameling en van de logica verlangen we dat we deze uitspraken heel precies kunnen weergeven, en er de juiste gevolgen uit af kunnen leiden. De propositielogica is hiervoor niet altijd geschikt. Bijvoorbeeld de uitspraak 'elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen' (het zogenaamde vermoeden van Goldbach) kan niet goed worden weergegeven in propositielogica. Wat bedoelen we hier met 'goed weergeven'? Om dat te zien, doen we een klein 'gedachtenexperiment': stel dat we wel een geschikte formule uit de propositielogica hadden, hoe zou die er uit moeten zien? Aangezien er in de uitspraak geen voegwoorden te onderscheiden zijn, zouden we de uitspraak als een propositieletter moeten weergeven, zeg door 'p'. Beschouw nu de uitspraak '1998 is de som van twee priemgetallen'. Dit volgt uit het vermoeden van Goldbach, dat wil zeggen, als het vermoeden van Goldbach juist is, dan is 1998 inderdaad te schrijven als de som van twee priemgetallen. Dit laatste is overigens een ware uitspraak (bijvoorbeeld 1998 = 1201 + 797, en 1201 en 797 zijn priemgetallen), maar voor het vertalen in propositielogica doet het er weinig toe of de laatste uitspraak en het vermoeden van Goldbach nu waar zijn of niet. Hiervoor is belangrijker dat '1998 is de som van twee priemgetallen' een andere uitspraak is dan het vermoeden van Goldbach. Er zit weer niets anders op dan hiervoor ook een andere propositieletter te kiezen, zeg q. Maar dan doet zich het probleem voor dat $p \not\Rightarrow q$, dat wil zeggen: q is geen logisch gevolg van p, want p kan waar zijn terwijl q onwaar is. Het antwoord op de vraag of q een logisch gevolg is van p, staat namelijk los van de relatie tussen de uitspraken waar p en q vertalingen van zouden moeten zijn: de symbolen p en q zijn bij wijze van spreken 'losgeweekt' van de getaltheoretische context (een propositieletter heeft op zich geen inhoud!). De conclusie is dus dat p geen goede weergave is van het vermoeden van Goldbach, en eigenlijk lag dat ook wel voor de hand: de interne structuur van de uitspraak is niet in de formule p terug te vinden.
Een andere poging om 'Goldbach' in propositielogica weer te geven is: laat p_i staan voor 'i is de som van twee priemgetallen'. Dan zouden we het vermoeden van Goldbach door een oneindig lange conjunctie kunnen weergeven: $p_4 \wedge p_6 \wedge p_8 \wedge p_{10} \wedge \ldots$ wat inderdaad p_{1998} tot gevolg zou hebben. We kunnen echter geen oneindig lange formules maken, dus ook dit feest gaat niet door.
De predikaatlogica, waarmee we in deze leereenheid kennismaken, heeft een veel grotere uitdrukkingskracht dan de propositielogica, waar ze een verfijning en uitbreiding van is. Het vermoeden van Goldbach en zijn gevolgen kunnen we in predikaatlogica wel goed weergeven.
In deze leereenheid maken we kennis met de taal van de predikaatlogica en met een methode om situaties aan te geven waarin een predikaatlogische formule waar is. In de volgende leereenheid kijken we naar de

wetten van de predikaatlogica, zodat we tenslotte in predikaatlogica kunnen afleiden dat '1998 de som is van twee priemgetallen' volgt uit het vermoeden van Goldbach.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat predikaatsymbolen, functiesymbolen, termen en kwantoren zijn
- correcte predikaatlogische formules kunt opstellen en lezen
- weet wat het bereik van een kwantor is
- het verschil tussen vrije en gebonden variabelen kent
- substituties van termen voor variabelen kunt uitvoeren
- kunt aangeven of een formule waar is in een model
- eenvoudige modellen voor formules kunt opstellen.

LEERKERN

11.1 De taal van de predikaatlogica

In de propositielogica konden we een eenvoudige uitspraak als 'Judith schaakt' in feite alleen maar weergeven door een propositieletter. In de predikaatlogica kunnen we de interne structuur van zulke uitspraken zichtbaar maken.

VOORBEELD 11.1 'Judith schaakt' wordt in predikaatlogica weergegeven als $S(j)$. Hierin staat S voor de eigenschap 'schaken' die toekomt aan het object 'Judith', dat met j is aangeduid ('object' wordt hier in algemene zin gebruikt: daaronder vallen ook menselijke individuen). Merk op dat in de logica de eigenschap voorop staat. «

OPGAVE 11.1

Als we 'Karel' met k aanduiden en 'tuinieren' met T, hoe kunnen we de uitspraak 'Karel tuiniert' dan weergeven?

Predikaatsymbool
Constante
Vertaalsleutel

De predikaatlogica bevat uitdrukkingen die predikaten (dat wil zeggen: eigenschappen van objecten en relaties tussen objecten) aangeven: dat noemen we *predikaatsymbolen*. Daarnaast zien we namen voor objecten: de *constanten*. In voorbeeld 11.1 is S dus een predikaatsymbool en j een constante. Voor predikaatsymbolen gebruiken we hoofdletters (A, ..., Z) of speciale symbolen zoals '='. Voor constanten worden (meestal) kleine letters (a, ..., t) gebruikt. De letters u, ..., z gebruiken we als variabelen, waarover verderop meer. Speciale constanten zijn bijvoorbeeld de getallen die we op de gewone wijze met rijtjes cijfers weergeven. We kiezen over het algemeen letters die makkelijk te onthouden zijn, bijvoorbeeld de beginletter van het met het predikaatsymbool overeenkomstige woord. Maar logisch gezien is er geen enkel verband tussen een letter en de daarmee bedoelde eigenschap, dus dit verband moeten we expliciet aangeven door middel van een zogeheten *vertaalsleutel*.

VOORBEELD 11.2 De uitspraken:

a Marie is wiskundige
b 5 is een priemgetal

kunnen in predikaatlogica worden weergegeven door respectievelijk:

a′ $W(m)$
b′ $P(5)$

Daarbij is gebruik gemaakt van de volgende vertaalsleutel:

m: Marie
5: vijf
W: is wiskundige
P: is een priemgetal

In het vervolg laten we het vermelden van de vertaalsleutel vaak achterwege wanneer deze erg voor de hand ligt. «

OPGAVE 11.2
Wat zijn in voorbeeld 11.2 de predikaatsymbolen en wat zijn de constanten?

Ook relaties, zowel in wiskundige als in andere zin, kunnen we nu logisch aanduiden met predikaatsymbolen.

VOORBEELD 11.3 De uitspraken:

a Jan houdt van Marie
b 5 is groter dan 3

kunnen in predikaatlogica worden vertaald als:

a′ $H(j, m)$
b′ $G(5, 3)$

Merk op dat ook hier de predikaatsymbolen voorop staan, gevolgd door de objecten tussen haakjes en door komma's gescheiden.

De weergave in b′ wijkt echter wel erg van de wiskundige praktijk af. In plaats van G gebruiken we het symbool '>'; bovendien wordt dat gewoon tussen de constanten in geschreven, zodat we de volgende bekende notatie gebruiken:

b″ $5 > 3$ «

Ook andere gangbare relaties zoals gelijkheid '=', kleiner dan '<' en groter dan of gelijk aan '≥' worden door de bekende symbolen weergegeven en tussen de constanten geschreven.

Eenplaatsig

Tweeplaatsig

n-plaatsig

Predikaatsymbolen zoals P en W in voorbeeld 11.2 worden door slechts één constante gevolgd: zulke predikaatsymbolen worden *éénplaatsig* genoemd. De predikaatsymbolen in voorbeeld 11.3 hebben twee constanten bij zich: we noemen deze *tweeplaatsig*. Eigenschappen worden dus in de regel door 1-plaatsige predikaatsymbolen weergegeven, binaire relaties door 2-plaatsige. Hier houdt het uiteraard niet mee op: er zijn ook 3-plaatsige, 4-plaatsige en in het algemeen *n-plaatsige* predikaatsymbolen.

VOORBEELD 11.4 De uitspraken:

a 0,5 ligt tussen 0 en 1
b Marie geeft Jan 'De Aanslag'
c punt D heeft dezelfde afstand tot P, Q en R

kunnen in predikaatlogica worden weergegeven door:

a′ $T(0{,}5, 0, 1)$
b′ $G(m, j, a)$
c′ $A(d, p, q, r)$ «

OPGAVE 11.3
Geef de volgende uitspraken weer in predikaatlogica.
a 3 is een priemgetal
b Marie is groter dan Jan
c Marie stelt Jan aan Piet voor

Naast constanten, die elk een bepaald vast object aanduiden, willen we ook graag over symbolen beschikken die verschillende objecten kunnen aanduiden.

VOORBEELD 11.5 De uitspraken:

a x is groter dan 3
b Marie houdt van hem

kunnen worden weergegeven door:

a′ $x > 3$
b′ $H(m, x)$

Zowel bij a als bij b hangt het van de situatie af wat 'x' (of 'hem') is. Overigens merken we op dat b′ slechts een benadering is van de betekenis van b: we gaan er bijvoorbeeld aan voorbij dat 'hem' mannelijk is.

Hoewel we zo meteen zullen zien dat we dit ook in predikaatlogica kunnen uitdrukken, zien we hiervan meestal af. «

Variabele

Net als in de wiskunde noemen we x een *variabele*. De letters y en z, en soms ook u en v, worden eveneens gebruikt als variabele, eventueel vergezeld van een accent (x') of een index (x_0).

OPGAVE 11.4
Geef de volgende uitspraken weer in predikaatlogica.
a x is een priemgetal
b Hij is vader van Jan
c 5 is kleiner dan y
d x is groter dan y
e x ligt tussen y en z

Hoewel we in de predikaatlogica geen propositieletters meer hebben (maar aanzienlijk gedetailleerdere uitdrukkingen, zoals u hier zojuist gezien hebt), is het van belang dat we wel beschikken over het andere in de propositielogica aanwezige materiaal: haakjes en connectieven. Met behulp van de connectieven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ kunnen we nu ook ingewikkelder uitspraken weergeven (of: 'vertalen') in predikaatlogica.

VOORBEELD 11.6 De uitspraken:

a Jan houdt van Marie, maar Marie niet van Jan
b x is groter dan 0 of y is kleiner dan 1
c Als x groter is dan 3, dan is x een priemgetal

kunnen worden vertaald als:

a′ $H(j, m) \wedge \neg H(m, j)$
b′ $x > 0 \vee y < 1$
c′ $x > 3 \rightarrow P(x)$

Bij uitspraak c moeten we wel bedenken dat een dergelijke uitspraak vaak algemener wordt opgevat, namelijk als: 'voor elke x geldt, dat als x groter is dan 3, dan is x een priemgetal'. Zoals hierna blijkt, kunnen we ook dit laatste in predikaatlogica weergeven, maar in c′ is een beperktere uitleg aan de uitspraak c gegeven, namelijk voor een specifieke, zij het nog onbekende waarde voor x. «

OPGAVE 11.5 (Aanw)
Geef de volgende uitspraken weer in predikaatlogica.
a Jan en Marie houden van elkaar
b x is groter dan 3 desda y kleiner is dan 4
c x is even of een priemgetal kleiner dan 4

Universele kwantor $\forall$
Al-kwantor

Algemene feiten van het soort 'voor elke x geldt dat als x een priemgetal groter dan 3 is, dan is x oneven' zijn heel precies uit te drukken in predikaatlogica. De formule $(x > 3 \wedge P(x)) \rightarrow O(x)$ voldoet echter niet, want daarin heeft x nog steeds een specifieke (maar 'verzwegen') waarde. Wat we *expliciet* moeten aangeven, is dat we hier alle mogelijke waarden voor x op het oog hebben. Dit doen we door de zogenaamde *kwantor* $\forall$ (spreek uit: 'voor elke ...' of 'voor alle ...') en de betreffende variabele voor de formule te zetten, resulterend in $\forall x\ ((x > 3 \wedge P(x)) \rightarrow O(x))$. Het symbool $\forall$ wordt (al dan niet in combinatie met een variabele) de universele kwantor of al-kwantor genoemd.

VOORBEELD 11.7 Om de uitspraak 'Alle wiskundigen schaken' in predikaatlogica weer te geven, herschrijven we de uitspraak in vormen die het mogelijk maken de tot nu toe geïntroduceerde begrippen te gebruiken. We gaan daarbij stukje bij beetje te werk (de stukjes die aangepakt worden, zijn steeds onderstreept):

<u>Alle</u> wiskundigen schaken
$\forall x$ (<u>als</u> x wiskundige is, <u>dan</u> schaakt x)
$\forall x$ (x <u>is wiskundige</u> $\rightarrow$ x <u>schaakt</u>)
$\forall x\ (W(x) \rightarrow S(x))$ «

Ook voor meer ingewikkelde gevallen kunnen we deze methode gebruiken, maar nog belangrijker is dat u een patroon in de predikaatlogische formules ontdekt.

VOORBEELD 11.8 De uitspraken:

a Alle natuurlijke getallen zijn groter dan of gelijk aan 0
b Elk natuurlijk getal is groter dan elk negatief geheel getal

kunnen worden weergegeven door de volgende formules:

a′ $\forall x\ (N(x) \rightarrow x \geq 0)$
b′ $\forall x\ (N(x) \rightarrow \forall y\ ((Z(y) \wedge y < 0) \rightarrow x > y))$

We zien dat de universele kwantor hier in beide gevallen met een implicatie optreedt. «

Het patroon $\forall x\ (... \rightarrow ...)$ komt ontzettend vaak terug. Dat is geen toeval, want vaak willen we iets uitdrukken als 'voor alle dingen die aan een bepaalde eis voldoen, geldt dat ...'; die eis komt dan links van het implicatieteken te staan. Overigens is dit geen wet van Meden en Perzen: formules als $\forall x\ W(x)$ en $\forall x\ \forall y\ R(x, y)$ zijn zonder meer correct en kunnen heel zinvolle uitspraken zijn.

OPGAVE 11.6
Als W staat voor 'is een wiskundige' en R voor 'heeft een relatie met', welke uitspraken worden dan weergegeven door:
a $\forall x\ W(x)$
b $\forall x\ \forall y\ R(x, y)$

Existentiële kwantor

$\exists$ Een ander type uitspraak is van de vorm 'Er is een ...' De predikaatlogica is daarom uitgerust met een tweede kwantor, de existentiële *kwantor* $\exists$. Daarbij moet $\exists x$ (spreek uit: 'er is een x') worden opgevat als 'voor minstens één x'.

VOORBEELD 11.9 De uitspraken

a Jan houdt van iemand
b Marie is groter dan haar vaders vader
c 2 is het enige even priemgetal

kunnen worden weergegeven door de volgende formules:

a′ $\exists x\, H(j, x)$
b′ $\exists x\, (V(x, m) \wedge \exists y\, (V(y, x) \wedge m > y))$
c′ $E(2) \wedge P(2) \wedge \neg\exists x\, (x \neq 2 \wedge E(x) \wedge P(x))$

Informeel gesproken is bij b′ x Maries vader en y Maries opa van vaderskant. Wat we hier niet hebben uitgedrukt, is dat Marie maar één vader heeft, enzovoorts. Logisch gezien is er geen reden waarom mensen niet twee vaders zouden kunnen hebben. We kunnen dit wel uitdrukken zoals in c′, maar het wordt dan een tamelijk ingewikkelde formule. Omdat er ook nog een andere oplossing voor dit probleem is, waarover verderop meer, laten we het hierbij. Bij c moeten we bedenken dat deze uitspraak neerkomt op '2 is een even priemgetal en er zijn geen andere even priemgetallen'. Net als in de propositielogica geldt hier dat er equivalente formules gegeven kunnen worden; zo kunnen we voor c ook de vertaling $\forall x\, ((E(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow x = 2)$ geven. We komen in de volgende leereenheid uitgebreid op dit soort equivalenties terug. «

Ook in dit voorbeeld zien we een patroon opduiken: de existentiële kwantor gaat vaak vergezeld van een conjunctie. En hoewel ook hier geldt dat $\exists$ best zonder $\wedge$ kan optreden (zoals in $\exists x\, V(x)$), zien we inderdaad het patroon $\exists x\, (... \wedge ...)$ heel regelmatig terugkeren.

OPGAVE 11.7 (Aanw)
Vertaal de volgende uitspraken in predikaatlogica.
a Sommige grafen zijn samenhangend
b Elke boom heeft een wortel
c Een boom is een samenhangende gerichte graaf

'Losse' variabelen niet universeel of existentieel opvatten.

Net zoals bepaalde uitspraken vaak universeel worden opgevat, zien we dat andere zoals 'Marie houdt van hem' door sommigen eerder existentieel worden opgevat, dat wil zeggen: gelezen worden als 'er is iemand waar Marie van houdt'. Ook 'x is groter dan 3 en y is kleiner dan 4' zal soms existentieel worden gelezen. Toch is het zeker in het laatste geval duidelijk dat we dit in het algemeen niet willen: denk bijvoorbeeld aan een probleem dat we aan het oplossen zijn waarbij we de te zoeken grootheden x en y genoemd hebben. We willen dan wel degelijk de waarden van x en y achterhalen, en niet alleen maar beweren dat zulke waarden bestaan.

De zojuist ingevoerde kwantoren zijn niet zo maar toeters en bellen: zonder overdrijving kunnen we stellen dat het vooral de kwantoren zijn die de predikaatlogica haar uitdrukkingskracht verlenen. We laten de kracht van de predikaatlogica nog even zien aan de hand van het vermoeden van Goldbach (zie introductie).

VOORBEELD 11.10 Het vermoeden van Goldbach kunnen we weergeven door:

$$\forall x\, ((E(x) \wedge x > 2) \rightarrow \exists y\, \exists z\, (P(y) \wedge P(z) \wedge S(x, y, z)))$$

We hebben hier van een nieuw 3-plaatsig predikaatsymbool S gebruik gemaakt, waarbij $S(x, y, z)$ staat voor 'x is de som van y en z'. «

OPGAVE 11.8
Laat met behulp van stapsgewijze herschrijvingen als in voorbeeld 11.7 zien hoe de voorafgaande vertaling van het vermoeden van Goldbach tot stand komt.

Voorbeeld 11.10 illustreert dat we in predikaatlogica inderdaad aardig wat wiskunde kunnen weergeven. Goldbach's vermoeden is een openstaand probleem uit de getaltheorie, en we zouden kunnen denken dat we misschien met logica kunnen uitzoeken of het vermoeden waar is of niet. Wie dat denkt, komt bedrogen uit. De formule uit voorbeeld 11.10 geeft weliswaar de globale logische structuur van het vermoeden weer, maar de predikaatsymbolen die erin voorkomen, hebben nog geen specifieke eigenschappen: voor de logica zou E net zo goed kunnen staan voor 'een getal zijn dat met het cijfer 1 begint'. We komen hierop terug in paragraaf 11.2 en in leereenheid 12.

Om nog eens aan te tonen dat we echt veel meer kunnen uitdrukken dan in propositielogica, komen we nog even terug op een geval dat in leereenheid 9 al werd genoemd.

VOORBEELD 11.11 Van een uitspraak als 'Ze kwam binnen en deed het licht uit' werd in leereenheid 9 al geconstateerd dat die niet goed door simpele propositielogica kon worden weergegeven, en ook een vertaling in predikaatlogica als $B(x) \wedge L(x)$ doet geen recht aan het feit dat de uitspraak iets anders betekent dan 'Ze deed het licht uit en kwam binnen'. Het effect van de tijdsordening kunnen we nu verwerken door B en L tweeplaatsig te maken: $B(x, y)$ betekent dan 'x komt binnen op tijdstip y'. Voor het gemak gebruiken we de variabelen t_0, t_1 en t_2. Laat $<$ een ordening op tijdstippen (of intervallen) zijn. De eerste uitspraak is dan te vertalen als (de vrije variabele t_0 geeft het 'nu' van de uitspraak weer):

$$\exists t_1\, \exists t_2\, (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_0 \wedge B(x, t_1) \wedge L(x, t_2))$$ «

Een ander punt is dat we het predikaatsymbool S gebruikt hebben, waar we eerder het teken '+' verwacht hadden, zie voorbeeld 11.10. In de rekenkunde combineert '+' twee getallen tot een nieuw getal, maar we hebben hier nog geen manier aangegeven om twee constanten of variabelen op een dergelijke manier te verbinden. Bijvoorbeeld $P(x, y)$ drukt een relatie tussen x en y uit, en geen bewerking op x en y. Om bewerkingen als optellen direct in predikaatlogica weer te geven, nemen we ook '+' in de logische taal op; '+' heet dan een *functiesymbool*. Net als bij de predikaatsymbolen kennen we eenplaatsige, tweeplaatsige en in het algemeen n-plaatsige functiesymbolen. '+' is hier een tweeplaatsig functiesymbool, √ en ² zijn voorbeelden van eenplaatsige functiesymbolen. Ook voorbeeld 11.9b kunnen we nu eenvoudig weergeven, namelijk als $m > f(f(m))$, met f voor: 'de vader van'.

Functiesymbool

VOORBEELD 11.12 Het vermoeden van Goldbach kunnen we nu ook weergeven door:

$$\forall x\, ((E(x) \wedge x > 2) \rightarrow \exists y\, \exists z\, (P(y) \wedge P(z) \wedge x = y + z))$$ «

OPGAVE 11.9
Stel we gebruiken het functiesymbool '–' voor de bewerking 'aftrekken'. Als E staat voor 'is even' en P voor 'is een priemgetal', wat drukt de formule $\forall x\, ((E(x) \wedge x > 2) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge P(x - y)))$ dan uit?

Hoewel 2 + 3 voor de logica geen constante is (de uitkomst 5 natuurlijk wel, maar daar gaat het nu niet om), zien we dat we '2 + 3' toch op dezelfde plaatsen als '5' mogen gebruiken.
In de volgende paragraaf gaan we precies aangeven hoe we functiesymbolen, predikaatsymbolen, constanten, variabelen, connectieven en kwantoren mogen gebruiken.

OPGAVE 11.10 (Aanw)
a Geef de volgende uitspraak weer in predikaatlogica: 'er zijn geen positieve gehele getallen x, y en z waarvoor $x^3 + y^3 = z^3$'. Geef hierbij aan wat de gebruikte predikaatsymbolen, functiesymbolen, variabelen en constanten zijn.
b Waarom kunnen we de uitspraak 'er zijn geen positieve gehele getallen x, y, z en n waarvoor $n \geq 3$ en $x^n + y^n = z^n$' (het zogenaamde 'laatste theorema van Fermat') niet met dezelfde predikaat- en functiesymbolen vertalen? Verzin een ander functiesymbool zodat we wel een met a overeenkomstige vertaling kunnen geven.

OPGAVE 11.11
Stel dat P staat voor 'is een priemgetal'. Welke (ware) uitspraak wordt dan uitgedrukt door $\neg\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x))$?

11.1.1 TERMEN EN FORMULES

Alle ingrediënten om predikaatlogische formules te maken zijn nu behandeld. Voordat we definiëren hoe dit precies gaat, leggen we eerst vast hoe we constanten en variabelen door middel van functiesymbolen mogen combineren.

VOORBEELD 11.13 Neem aan dat we beginnen met de constante 1 en de variabele x. Welke combinaties kunnen we nu maken met behulp van het tweeplaatsige functiesymbool '+' en het eenplaatsige functiesymbool ^{2}? We lichten dit toe aan de hand van de opbouw van $(x + 1)^2 + (x^2 + 1)^2$:

x, 1
x^2
$(x + 1)$, $(x^2 + 1)$
$(x + 1)^2$, $(x^2 + 1)^2$
$(x + 1)^2 + (x^2 + 1)^2$

Afgezien van de eerste regel (variabele x en constante 1) worden de uitdrukkingen met functiesymbolen gevormd uit voorafgaande uitdrukkingen. Voor een tweeplaatsig functiesymbool zoals + zien we dat we weer haakjes moeten toevoegen om de gewenste uitdrukking te krijgen. En net als bij de tweeplaatsige connectieven van de propositielogica, geldt ook hier dat het paar haakjes aan de buitenkant van de uitdrukking wel weg kan. «

Het is handig dit type uitdrukkingen een naam te geven: we noemen ze termen. De verzameling termen gaan we nu precies vastleggen. Om deze definitie gladjes te laten verlopen, noemen we variabelen en constanten ook 'termen' – vergelijk de eerste regel van de constructie in voorbeeld 11.13.

Term

DEFINITIE 11.1

De *termen* van de predikaatlogica worden als volgt gedefinieerd:
– elke variabele of constante is een term
– als f een n-plaatsig functiesymbool is en $t_1, ..., t_n$ zijn termen, dan is $f(t_1, ..., t_n)$ ook een term
– niets anders is een term.

Functiesymbolen staan niet altijd voorop.

Functiesymbolen gaan volgens deze definitie dus eigenlijk vooraf aan de termen die ze verbinden, maar omdat dit voor bijvoorbeeld kwadraten en optellen geen prettig leesbare termen oplevert, gebruiken we de gangbare notatie, dus ^{2} na de term en + tussen de termen in, net als in voorbeeld 11.13. Haakjes laten we daarbij vaak weg als de uitdrukkingen maar ondubbelzinnig blijven.

OPGAVE 11.12

Stel we beschikken alleen over haakjes, de variabele x, de constante 1, het tweeplaatsige functiesymbool '+', en het eenplaatsige functiesymbool ^{2}. Correcte termen zijn bijvoorbeeld $(x + 1)$ en $(x)^2$, waarin haakjes eventueel weg mogen als er geen verwarring ontstaat. Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn termen die we met de gegeven symbolen kunnen maken?

a $(x^2 + 1)^2$
b $x^2 + x^3$
c $(x^2 + x) + 1^2$
d $(x^2)^2$
e x^{2^2}
f $x^{(2^2)}$

Nu we de verzameling termen gedefinieerd hebben, kunnen we vastleggen wat precies de (correcte) formules van de predikaatlogica zijn.

VOORBEELD 11.14

Deze definitie ligt voor de hand als we kijken naar de opbouw van een correcte uitdrukking zoals $\neg\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x))$:

$P(x)$, $P(y)$, $y \leq x$
$P(y) \rightarrow y \leq x$
$\forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x)$
$P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x)$
$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x))$
$\neg\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow y \leq x))$

Met de predikaatsymbolen P en $\leq$ en de variabelen x en y maken we eerst de eenvoudige formules van de eerste regel. Vervolgens kunnen we die formules combineren met connectieven en kwantoren, zodat we tenslotte op de beoogde formule uitkomen. «

We hebben nu alles in gereedheid om een precieze definitie te geven van predikaatlogische formules. Daarbij maken we gebruik van de eerdere definitie van 'termen' en de combinatieregels voor de connectieven uit leereenheid 9. Als we dan ook combinatieregels voor de kwantoren toevoegen en de basisclausule wat aanpassen, dan hebben we een goede definitie van wat een predikaatlogische formule is.

Formule van de predikaatlogica

DEFINITIE 11.2

De *formules van de predikaatlogica* worden als volgt gedefinieerd:

– als P een n-plaatsig predikaatsymbool is en $t_1, ..., t_n$ zijn termen ($n \geq 1$), dan is $P(t_1, ..., t_n)$ een formule
– als φ een formule is, dan is $\neg\varphi$ ook een formule
– als φ en ψ formules zijn, dan zijn $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
– als φ een formule is en v een willekeurige variabele, dan zijn $\forall v\ \varphi$ en $\exists v\ \varphi$ ook formules
– er zijn geen andere formules.

Andere notaties

In plaats van onze notatie voor bijvoorbeeld de uitspraken '3 is een priemgetal' en 'Hij heeft een relatie met Anna', namelijk respectievelijk $P(3)$ en $R(x, a)$, wordt ook de schrijfwijze $P3$ en Rxa gebruikt, die heel kort is, maar met ingewikkelde termen wel erg ondoorzichtig kan worden.
Weer een andere notatie volgt de gewone taal zoveel mogelijk (dit wordt wel 'syntactic sugar' genoemd): PRIEMGETAL(3) en RELATIE_MET(x, anna). Dat is makkelijk om te onthouden, maar omslachtig om mee te werken. We kiezen met onze notatie dus een (heel gangbare) middenweg.
Voor de universele kwantor 'voor alle x' schrijven wij $\forall x$, maar ook $\bigwedge x$, (x) en Ax worden gebruikt. In plaats van $\exists x$ ('voor minstens één x') wordt ook $\bigvee x$ en Ex gebruikt.

Atomaire formule

De basisstap van deze definitie, die predikaatsymbolen combineert met termen, levert zogenaamde *atomaire formules*. $E(3)$ en $x < y$ zijn voorbeelden van atomaire formules. Atomaire formules zijn enigszins vergelijkbaar met de propositieletters uit de propositielogica: ze zijn de kleinste predikaatlogische formules. En net als in de natuurkunde kunnen we deze 'atomen' verder splitsen, al hebben we dan geen atomen meer.

Identiteitsteken =

Een aantal gangbare predikaatsymbolen schrijven we zoals gezegd niet 'voorop', maar 'middenin'. Een speciaal geval hiervan is het *identiteitsteken* '='. Voor elk paar termen t en t' is dus $t = t'$ een formule. Verder zullen we ook symbolen als <, ≥ blijven gebruiken.

Samengestelde formule

De formules die we met de overige stappen kunnen maken, zijn *samengestelde formules*. Aan de stappen voor de connectieven zien we duidelijk dat de predikaatlogica een uitbreiding is van de propositielogica. Merk ook nog op dat de stap voor de kwantoren geen enkele beperking stelt op de formule φ: $\forall x\ P(3)$ is dus ook een goede formule. Later zullen we zien dat we $\forall x$ hier weer rustig mogen weglaten, maar de formule is dus wel correct!

OPGAVE 11.13
Ga na dat de uitdrukkingen in voorbeeld 11.14 inderdaad formules zijn.
Welke van deze formules zijn atomair en welke samengesteld?

OPGAVE 11.14
Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn predikaatlogische formules?
a $\exists x\ (E(x) \vee E(4))$
b $\exists x\ E(x) \wedge E(4)$
c $E(2 \wedge 4)$
d $P(3) \wedge E(x) \vee E(y)$
e $\forall x\ \exists x\ P(x)$
f $\forall P(x)\ \exists Q(y)\ R(x, y)$
g $\forall x\ M(x) \rightarrow H(x, \exists y\ M(y))$

Hiermee is de rijke taal van de predikaatlogica voldoende omschreven. Een aantal aspecten verdient nog nadere aandacht.

11.1.2 KWANTORBEREIK

Deelformule

In deze en de volgende paragraaf gaan we een aantal belangrijke eigenschappen van kwantoren bekijken. Net als voor de propositielogica bestaan ook voor de predikaatlogica de begrippen ‘deelformule’ en ‘bereik’. Een formule is een *deelformule* van een formule als die bij de opbouw van die formule gebruikt is; elke formule noemen we voor het gemak ook een deelformule van zichzelf. In de definitie van predikaatlogische formule zijn de φ’s en ψ’s in de diverse stappen dus steeds deelformules.

OPGAVE 11.15 (Aanw)
Wat zijn de deelformules van $\neg\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \rightarrow y \leq x))$?

Het bereik van een connectief is binnen de predikaatlogica op precies dezelfde manier gedefinieerd als in de propositielogica. Het bereik van een kwantor is, net als bij de connectieven, het deel van de formule waarop het betrekking heeft. In de volgende formules is het bereik van de kwantor $\forall x$ onderstreept:

$\forall x\, \underline{(P(x) \rightarrow \exists y\, R(x, y))}$
$\forall x\, \underline{P(x)} \rightarrow \exists y\, R(z, y)$

We kunnen het bereik van een kwantor weer precies definiëren door middel van deelformules: als we bedenken hoe de voorgaande formules zijn opgebouwd, dan ligt deze definitie volkomen voor de hand.

Kwantorbereik

DEFINITIE 11.3 Als $\forall x\, \varphi$ een deelformule van ψ is, dan is het *bereik* van deze kwantor $\forall x$ in ψ de formule φ.

OPGAVE 11.16
Geef het bereik aan van de kwantor $\forall x$ in de volgende formules.
a $\forall x\, R(x, x)$
b $\forall x\, ((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge C(x))$
c $\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge C(x)$
d $(\forall x\, A(x) \rightarrow B(x)) \wedge C(x)$

OPGAVE 11.17
Geef zelf de definitie voor het bereik van de existentiële kwantor $\exists x$.

OPGAVE 11.18
Geef het bereik van $\exists x$ aan in de volgende formules.
a $\exists x\, P(x) \wedge \forall y\, R(z, y)$
b $\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, R(z, y))$

Vooral formules waarin een kwantor binnen het bereik van een andere kwantor voorkomt, zijn van belang. Eén van de manieren om uit te drukken dat er geen grootste priemgetal bestaat, is bijvoorbeeld:

$\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge y > x))$

De uitspraak dat er wel een kleinste priemgetal bestaat, kan worden uitgedrukt door:

$\exists y\ (P(y) \wedge \forall x\ (P(x) \to x \geq y))$

Verschillen in kwantorbereik zijn belangrijk.

(Dit zijn toevallig twee ware feiten uit de getaltheorie, maar bedenk dat we evengoed onware uitspraken kunnen uitdrukken!) Afgezien van andere verschillen, gaat het hier om het verschil in bereik van de existentiële en de universele kwantor. Dit is nog duidelijker wanneer de rest van de formule gelijk is.

VOORBEELD 11.15 De formule $\exists x\ \forall y\ x < y$ drukt uit dat er minstens één x is die kleiner is dan iedere y; 'x' hangt hier dus niet van 'y' af, maar 'y' wel van 'x'. Daarentegen drukt $\forall y\ \exists x\ x < y$ uit dat er voor alle y een x te vinden is die kleiner is dan y. Hier hangt 'x' dus juist wel van 'y' af. «

OPGAVE 11.19
Geef het bereik van $\exists y$ aan in de volgende formules.
a $A(c) \wedge \forall x\ \exists y\ R(x, y)$
b $\exists y\ \forall x\ (A(x) \wedge B(y))$
c $\forall x\ \exists y\ \forall z\ S(x, y, z)$
d $\exists z\ \forall x\ \exists y\ S(x, y, z)$

11.1.3 VRIJ EN GEBONDEN

In een formule als $\forall x\ x^2 > y$ spelen de variabelen x en y een totaal verschillende rol. De formule drukt uit dat alle kwadraten groter zijn dan een bepaalde waarde y. Die waarde van y mogen we (als er verder geen beperkingen zijn) vrij kiezen; x daarentegen heeft hier geen specifieke waarde: het moet gewoon voor alle getallen zo zijn.

Vrije variabele
Gebonden variabele

Meer in het algemeen zeggen we dat een variabele v die in een formule vóórkomt, *vrij* is als deze niet binnen het bereik van $\forall v$ of $\exists v$ ligt. Een variabele die in de formule voorkomt, maar niet vrij is, heet *gebonden*. Dus in de formule $\forall x\ x^2 > y$ is y vrij en x gebonden. Dezelfde variabele kan meerdere keren in een formule optreden. We moeten dan over vrije en gebonden *voorkomens* van variabelen spreken. In $\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x, y)$ is het eerste voorkomen van x (in $P(x)$) gebonden en het tweede (in $R(x, y)$) vrij.

OPGAVE 11.20
Geef in de volgende formules aan welke (voorkomens van) variabelen vrij zijn en welke gebonden.
a $P(x) \wedge \exists y\ P(y)$
b $A(c) \wedge \forall x\ R(x, y)$
c $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ y \geq x)$
d $\exists x\ P(x) \wedge \forall y\ y \geq x$
e $\exists x\ x^2 > y \wedge \forall y\ y < z$

Veel formules bevatten helemaal geen vrije variabelen. In feite zijn er diverse soorten formules zonder vrije variabelen: formules die helemaal geen variabelen bevatten zoals $32^2 > 1000$ en formules waarin alle variabelen gebonden zijn zoals $\exists y\ \forall x\ x^2 > y$. Een bizar geval is ook nog als de variabelen alleen in de kwantoren voorkomen, zoals bij $\forall x\ P(3)$;

ook dan zijn er uiteraard geen vrije variabelen. Een formule waarin geen vrije variabelen voorkomen, heet *gesloten*. Komt er wel een vrije variabele in voor, dan heet de formule *open*. Dus $\forall x\, x^2 > y$ is een open formule.

Gesloten formule
Open formule

OPGAVE 11.21
Geef aan welke formules in opgave 11.20 open zijn en welke gesloten.

11.1.4 SUBSTITUTIE

Voor diverse toepassingen is het nuttig als we een variabele door een andere term mogen vervangen. Als we in een concreet geval willen kijken wat de formule $\forall x\, x^2 > y$ uitdrukt, dan moeten we een waarde voor y kiezen, zeg 4. We vullen die waarde dan voor y in, en krijgen de formule $\forall x\, x^2 > 4$. Zo kunnen we iedere constante invullen voor y en kijken wat de verkregen formule voorstelt. Als y meerdere keren voorkomt, moeten we wel *alle* (vrije) voorkomens van y door *dezelfde* term vervangen: anders zouden we door 4 voor y in te vullen, uit $\forall x\, x^2 > y \vee y < 0$ de formule$\forall x\, x^2 > 4 \vee y < 0$ kunnen verkrijgen, en dat drukt iets heel anders uit. Tenslotte willen we alleen vrije voorkomens van variabelen vervangen, want er is in het geheel geen verband tussen de onderstreepte voorkomens van x in $\forall x\, \underline{x}^2 > 4 \vee \underline{x} < 0$.
De term die we invullen, kan een constante zijn, of een samengestelde term, maar ook een andere variabele. Voor het vervangen van een *vrije* variabele gebruiken we de notatie $[t/v]\varphi$, wat betekent: de *substitutie* (vervanging) van alle *vrije* voorkomens van variabele v in φ door de term t.

Substitutie $[t/v]\varphi$

VOORBEELD 11.16 In het volgende tabelletje staat in de linkerkolom de uit te voeren substitutie en rechts het resultaat daarvan. Let op dat alleen vrije voorkomens van x vervangen worden; in het bijzonder zien we dat er in het laatste voorbeeld helemaal niets gebeurt.

$[3/x]x > y$	$3 > y$
$[a/x]R(x, x)$	$R(a, a)$
$[f(x)/x]x \leq y$	$f(x) \leq y$
$[z + 1/x]x > 1$	$z + 1 > 1$
$[y/x](R(x, y) \wedge \exists x\, P(x))$	$R(y, y) \wedge \exists x\, P(x)$
$[y/x]\, \forall x\, R(x, y)$	$\forall x\, R(x, y)$

«

OPGAVE 11.22
Voer de volgende substituties uit.
a $[y/x]x < y$
b $[y/x]\exists x\, x < y$
c $[x/y]\exists x\, x < y$
d $[0/x](\exists x\, R(x, x) \wedge P(x))$
e $[x^2/y](\exists x\, \exists y\, R(x, y) \wedge P(y))$
f $[x + y/x](\exists x\, P(x) \rightarrow x > y)$

In sommige gevallen levert substitutie een ongewenst resultaat op. Op deze probleemgevallen komen we in de volgende leereenheid terug.

Het hoogste woord, de logica van Aristoteles

'Dat de logica al sinds de vroegste tijden op dit zekere pad is voortgeschreden, laat zich hieruit opmaken, dat ze sinds Aristoteles niet een stap terug heeft hoeven doen, als men tenminste de verwijdering van enkele onnodige subtiliteiten of de verduidelijking van haar onderricht niet als een verbetering wil beschouwen, maar deze zaken hebben eerder betrekking op de elegantie dan op de zekerheid van de wetenschap. Het is bovendien opmerkelijk dat de logica tot op de huidige dag niet een stap voorwaarts heeft kunnen zetten en dus naar het zich laat aanzien gesloten en voltooid is.' Aldus de Duitse filosoof Immanuel Kant in 1787. Hij kon niet weten welke reuzenstappen er in de wiskunde en de wiskundige logica na hem nog zouden worden gezet.

Ruwweg kan de geschiedenis van de logica in drie stadia worden ingedeeld: Griekse logica, logica van de Scholastici (circa 1200) en wiskundige logica van de 19e en 20e eeuw. In de eerste twee stadia, die direct op de ideeën van Aristoteles (384-322 v. C.) zijn terug te voeren, is de logica afgeleid van de gewone taal.
De wiskundige logica bewandelt de omgekeerde weg: ze construeert eerst een zuiver formeel systeem, een kunstmatige taal, en kijkt daarna of er interpretaties in de dagelijkse spraak mogelijk zijn. Maar ook hier is de invloed van Aristoteles aanwezig.
De verhandelingen die Aristoteles over logica schreef, worden het Organon-werktuig of -instrument genoemd. Logica werd door de Grieken niet als een van de wezenlijke onderdelen van de filosofie gezien, maar eerder als een methode die een nuttig instrument voor alle onderzoekingen vormde.
Centraal in Aristoteles' werk staat een type redenering die 'syllogisme' wordt genoemd. Syllogismen zijn opgebouwd uit beweringen van de vorm subject-predikaat (*S*-*P*). Deze beweringen zijn onder te verdelen in vier typen: ze zijn bevestigend of ontkennend en algemeen of particulier.

Voorbeelden van deze vier typen zijn:
– Ieder mens is sterfelijk – algemeen bevestigend (*a*-bewering)
– Geen mens is sterfelijk – algemeen ontkennend (*e*)
– Een zeker mens is sterfelijk – particulier bevestigend (*i*)
– Een zeker mens is niet sterfelijk – particulier ontkennend (*o*)
Aristoteles verwoordde deze beweringen op omgekeerde wijze, waarbij de predikaatterm voor de subjectterm staat, bijvoorbeeld: 'Sterfelijk behoort toe aan ieder mens', of in het algemeen: *P* behoort toe aan iedere *S*. Het is opmerkelijk dat Aristoteles al letters gebruikt om de termen van beweringen weer te geven. Wij zullen deze bewering hier weergeven als *PaS*.
Een syllogisme bestaat uit drie beweringen: twee premissen en een conclusie.
Twee beweringen kunnen tot een conclusie leiden als ze een gemeenschappelijke term hebben, de 'midderterm' (*M*). De termen van de conclusie zijn dan de andere twee termen die in de premissen voorkomen.
Bijvoorbeeld: alle mensen zijn sterfelijk en Socrates is een mens, dus Socrates is sterfelijk (eigenlijk: sterfelijk behoort toe aan iedere Socrates) ofwel *PaM*, *MaS* $\rightarrow$ *PaS*.

Aristoteles bereikte een hoge mate van systematiek en precisie, van abstractie en strengheid, maar zijn werk heeft ook beperkingen. Niet alleen is het bereik van zijn syllogistiek uiterst beperkt, bovenal is de syllogistiek uitsluitend een predikaatlogica. Voor een volledige logica is zowel een predikaatlogica als een propositielogica vereist, en deze laatste is zelfs de meest fundamentele van de twee. Aristoteles vertrouwt bij de ontwikkeling van zijn syllogistiek (noodzakelijkerwijs) op stellingen die tot de propositielogica behoren, maar hij vermeldt of onderzoekt deze niet expliciet. De propositielogica was in de oudheid al door de Stoïcijnen ontwikkeld, maar er ontspon zich een strijd met de Aristotelianen over de vraag welke 'school' de ware logica had. Omdat de Aristotelianen wonnen, moest de propositielogica na Kant opnieuw worden opgebouwd.

11.2 **Modellen**

Wanneer is een predikaatlogische formule waar? Om de gedachten te bepalen, beschouwen we nog eens de formule

$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (P(y) \wedge y > x))$

Wanneer 'P' staat voor 'is priem', drukt deze formule uit dat er geen grootste priemgetal bestaat. Is deze formule waar? Wel, een kijkje in de getaltheorie leert dat er inderdaad geen grootste priemgetal is (het bewijs staat in leereenheid 3), en de formule zou dan dus waar zijn. Maar het is hier oppassen geblazen: deze waarheid steunt op het feit dat P staat voor de priemeigenschap, maar logisch gezien is er geen enkele reden waarom de formule zo opgevat moet worden. P kan net zo goed staan voor 'is een prijs in de trekking van de staatsloterij van 31 december 1998', en in die situatie zou de formule zeker niet waar zijn, want er is zeker een grootste prijs (de hoofdprijs). Met andere woorden, dat we 'volgens de vertaalsleutel' geneigd zouden zijn een formule waar te noemen, is een neiging die we moeten *onderdrukken*. Dit is in feite niet anders dan bij de propositielogica: na de vertaling van een uitspraak, keken we ook los van die vertaalsleutel naar de omstandigheden waaronder een formule waar is. Maar omdat de predikaatlogica ontegenzeggelijk dichter bij de wiskunde (en bij de gewone taal, of zelfs het denken ...) staat dan de propositielogica, is het bespeurde gevaar hier zeker niet denkbeeldig.

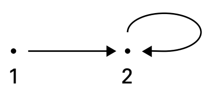
Waarheid formule hangt niet af van vertaalsleutel.

Precies aangeven wanneer een formule waar is, blijkt in de predikaatlogica echter veel minder eenvoudig dan in de propositielogica. Hoewel de waarheidstabellen van de connectieven nog steeds een rol spelen, kunnen we de waarheidswaarden van een formule niet in een overzichtelijke tabel weergeven. Anders dan de propositielogica is de predikaatlogica namelijk niet waarheidsfunctioneel: de waarheidswaarde van een formule is niet altijd te berekenen uit de waarheidswaarden van de deelformules. Wel kunnen we situaties aangeven waarin formules waar zijn. We illustreren dit aan de hand van een eenvoudig geval. De atomaire formule $R(a, b)$ is waar in een situatie als de met a en b aangeduide objecten in een relatie staan die met R overeenkomt.

Predikaatlogica is niet waarheidsfunctioneel.

VOORBEELD 11.17

In figuur 11.1 wordt de constante a vertegenwoordigd door het getal 1, en b door het getal 2. De (binaire) relatie R is met pijlen weergegeven. In dit geval is $R(a, b)$ waar: er gaat een pijl van 1 naar 2.



FIGUUR 11.1 Een situatie waarin $R(a, b)$ waar is

Ook kunnen we kijken of samengestelde formules waar zijn in deze structuur (een 'graaf' volgens de terminologie van leereenheid 4):
– $\exists y\ R(a, y)$ is waar, want de keuze van 2 voor y voldoet
– $\forall x\ R(x, x)$ is onwaar, want (1, 1) behoort niet tot de pijlrelatie
– $\exists y\ \forall x\ R(x, y)$ is waar, want neem voor y maar 2, dan gaat zowel van 1 als van 2 een pijl naar 2. «

Misschien vraagt u zich af waarom we niet gewoon a en b bij de punten van de structuur zetten. De reden hiervoor is dat de objecten 1 en 2 in de

De constanten uit de predikaatlogica kunnen verschillende objecten weergegeven.

figuur zeker verschillen, maar hoewel de constanten a en b niet hetzelfde zijn, kunnen ze wel hetzelfde object aanduiden. Met andere woorden: er is dus wel een diagram te maken waarin a en b hetzelfde object (zeg: 1) aanduiden. Eigenlijk is dit net als bij pseudoniemen: 'Paul Haenen', 'Margreet Dolman' en 'Dominee Gremdaat' zijn eveneens gewoon namen voor dezelfde persoon. Ook in de logica zijn constanten namen voor objecten, en hetzelfde object kan dus best met verschillende namen worden aangeduid.

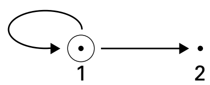
Voor connectieven waarheidstabellen gebruiken.

Met connectieven kan nog steeds gerekend worden zoals in de propositielogica. Zo is in figuur 11.1 de formule $R(a, b) \wedge R(b, b)$ waar, omdat $R(a, b)$ en $R(b, b)$ beide waar zijn, terwijl $R(a, b) \to R(b, a)$ onwaar is: er gaat immers wel een pijl van 1 naar 2, maar niet eentje van 2 naar 1.
Vervolgens kunnen we kwantoren en connectieven weer in formules combineren: $\forall y\ (\exists x\ R(x, y) \to R(y, y))$ is waar in de situatie van figuur 11.1, want als $y = 1$, dan is $\exists x\ R(x, y)$ onwaar en dus de implicatie waar, en als $y = 2$, dan zijn $\exists x\ R(x, y)$ en $R(y, y)$ beide waar en ook dan is de implicatie waar.

OPGAVE 11.23
Welke van de volgende formules zijn waar in figuur 11.1?
a $\exists x\ R(x, x)$
b $\exists x\ \neg R(x, x)$
c $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$
d $\exists x\ \forall y\ R(x, y)$
e $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \to R(y, y))$

Model

Een situatie als in figuur 11.1 heet in de logica een *model*. Algemeen gesproken bestaat een model uit een verzameling objecten waarop een aantal relaties en bewerkingen zijn gegeven die overeenkomen met de predikaat- en functiesymbolen. Ook moeten we aangeven welk object uit de gegeven verzameling staat voor welke constante. We geven hier geen exacte definitie van het begrip 'model' – hiervoor kunt u terecht in meer gespecialiseerde cursussen en leerboeken – maar laten door middel van een aantal voorbeelden zien hoe modellen werken. U mag daarbij de modellen gerust als 'figuren' zien: voor een eerste kennismaking is dat voldoende.
Wanneer er ook nog sprake is van een eenplaatsig predikaatsymbool P, dan geven we behalve pijlen ook gebieden in het model aan (zoals in Venn-diagrammen) of markeren de punten die aan een bepaalde eigenschap voldoen afzonderlijk (hier door middel van een rondje).



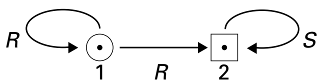
FIGUUR 11.2 Twee objecten, een eigenschap en een relatie
Object 1 heeft de eigenschap P, en de relatie $\{(1, 1), (1, 2)\}$ komt met R overeen.

OPGAVE 11.24
Welke van de volgende formules zijn waar in het model van figuur 11.2?
a $\exists x\ (P(x) \wedge R(x, x))$
b $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$
c $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$
d $\forall x\ (R(x, x) \to (P(x) \wedge \exists y\ (R(x, y) \wedge \neg P(y))))$

Tot nu gaven we een model en bekeken dan welke formules waar waren. Soms zijn we meer in een andere vraag geïnteresseerd: gegeven een formule, verzin een model dat deze formule waar (of juist onwaar) maakt.

VOORBEELD 11.18 De formule $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$ is waar in het model van figuur 11.1 (zie opgave 11.23c) en onwaar in figuur 11.2 (zie opgave 11.24b); bij de formule $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \to R(x, x))$ is het omgekeerde het geval: waar in het tweede (voor $x = 1$ zijn $R(1, 1) \to R(1, 1)$ en $R(1, 2) \to R(1, 1)$ beide waar en voor $x = 2$ zijn $R(2, 1) \to R(2, 2)$ en $R(2, 2) \to R(2, 2)$ ook beide waar) en onwaar in het eerste model (neem $x = 1$ en $y = 2$, dan is $R(1, 2) \to R(1, 1)$ onwaar). «

Wanneer we meerdere eenplaatsige of tweeplaatsige predikaatsymbolen hebben, zetten we die predikaatletters in het plaatje van het model bij de pijlen of gebieden. Voor eenplaatsige predikaatsymbolen kunnen we ook werken met verschillende markeringen (rondjes, vierkantjes, driehoekjes en dergelijke).

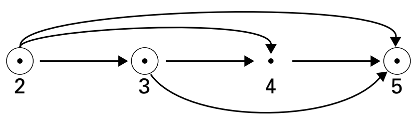


FIGUUR 11.3 Twee objecten, twee eigenschappen en twee relaties
Object 1 heeft eigenschap P (rondje), object 2 eigenschap Q (vierkantje), R en S zijn bij de pijlen aangegeven.

OPGAVE 11.25 (Aanw)
Verzin voor elk van de volgende formules een model waarin de formule waar is en een model waarin ze onwaar is.
a $\forall x\ (A(x) \to B(x))$
b $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$
c $\forall x\ (C(x) \leftrightarrow (A(x) \vee B(x)))$

Tot nu toe hebben we het alleen over modellen voor gesloten formules gehad. Wat te doen met vrije variabelen? Anders dan voor een constante, ligt de waarde van een (vrije) variabele niet vast door het model. Om te kunnen vaststellen of de formule in zo’n geval waar is, moeten de waarden van de vrije variabelen expliciet worden aangegeven. Zo is $P(x) \wedge \exists y\ R(x, y)$ waar in figuur 11.2 als $x = 1$, maar onwaar als $x = 2$.

OPGAVE 11.26 (Aanw)
Beschouw het model dat gegeven is door figuur 11.4.



FIGUUR 11.4 Vier objecten, een eigenschap P en een relatie $<$

De constanten 2, 3, 4 en 5 zijn gewoon door die getallen weergegeven.
Leg uit waarom de formule $x < 5 \to P(x)$
a waar is als $x = 3$
b onwaar is als $x = 4$
c waar is als $x = 5$.

Hoewel hiervoor de nadruk heeft gelegen op eindige modellen, zijn natuurlijk ook oneindige modellen mogelijk, hoewel het tekenen van de plaatjes minder makkelijk is ...

VOORBEELD 11.19 De verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ is het schoolvoorbeeld van een oneindige verzameling. Het is bij dit voorbeeld niet echt nodig (een deel van) de figuur te tekenen, we geven een andere beschrijving van het model. In dit model wordt het predikaatsymbool P opgevat als de verzameling priemgetallen $\{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$, het predikaatsymbool E als de verzameling even natuurlijke getallen $\{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ en de tweeplaatsige predikaatsymbolen $>$ en $\leq$ gewoon als de groter-dan-relatie respectievelijk kleiner-dan-of-gelijk-relatie.
Op dit model zijn bijvoorbeeld de volgende formules waar: $\forall x\ (E(x) \rightarrow \exists y\ ((y > x) \wedge E(y)))$ en $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ ((y > x) \wedge P(y)))$. Onwaar zijn daarentegen: $\forall x\ (E(x) \vee P(x))$ en $\forall x\ (P(x) \rightarrow P(x + 2))$ (het functiesymbool + wordt opgevat als gewone optelling). Tenslotte zijn er nog formules waarvan de waarheid momenteel nog onbekend is, zoals het vermoeden van Goldbach: $\forall x\ ((E(x) \wedge x > 2) \rightarrow \exists y\ \exists z\ (P(y) \wedge P(z) \wedge x = y + z))$. «

OPGAVE 11.27
Welke van de volgende formules zijn waar in het model van voorbeeld 11.19?
a $\exists x\ (P(x) \wedge E(x))$
b $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg E(x))$
c $\forall x\ (\neg E(x) \rightarrow (P(x + 2) \vee P(x + 4)))$
d $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow x \leq y))$

11.3 Een informaticatoepassing

De predikaatlogica wordt in diverse wetenschappen gebruikt, ook in de informatica. Een van die toepassingen betreft het beschrijven van het gedrag van een programma. Deze beschrijving bestaat uit stukken 'commentaar' dat, net als het gewone commentaar dat de programmeur toevoegt, tussen accolades wordt gezet. We illustreren dit aan de hand van zogenaamde toekenningsopdrachten. In programmeertalen als Pascal komen we eenvoudige opdrachten tegen als '$x := x + 1$'. Het effect van deze opdracht is dat de waarde van x met 1 verhoogd wordt.

VOORBEELD 11.20 Als x eerst 3 was, dan is de waarde van x na het uitvoeren van de opdracht $x := x + 1$ gelijk aan 4. We noteren dit nu als

```
{x = 3} x := x + 1 {x = 4}
```
«

Iets algemener: als x voor het 'draaien' van het programma de waarde a had, dan is x na afloop $a + 1$, kortom:

```
{x = a} x := x + 1 {x = a + 1}
```

Correctheids-bewering

Dit heet een *correctheidsbewering*; de stukken tussen de accolades worden wel specificaties genoemd: ze specificeren de toestanden van de computer. Die specificaties worden gegeven met predikaatlogische formules. Meestal doet het programma nog wel meer dan in de correctheidsbewering wordt vermeld – daarin staat slechts datgene waarin we geïnteresseerd zijn. In het algemeen heeft een correctheidsbewering de vorm

$\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$

$\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$, waarbij φ en ψ formules van de predikaatlogica zijn en P een programma is. Zo'n correctheidsbewering is dus juist, indien in alle gevallen waarin vóór het 'draaien' φ het geval is, het programma na 'draaien' in een toestand komt waarin ψ geldt. Wanneer het programma meerdere regels telt, zetten we de specificaties onder en boven het programma. Dit zien we in een volgend programma, waaraan we een kleine anecdote vooraf laten gaan.

Stel Marie en Jan hebben op een feestje al een drankje op, Marie een whisky en Jan een berenburg. Ze lusten er nog wel eentje, maar per ongeluk verwisselt de gastheer voor het inschenken de glazen. Jan en Marie willen niet uit elkaars glas drinken. Kunnen we de inhoud van deze glazen verwisselen?
Nee, dat kan niet zonder meer, want als we de whisky bij de berenburg gieten, hebben we de drankjes vermengd, en dat was niet de bedoeling. Moeten we dan twee schone glazen pakken, of kan het met minder? Ja, het kan met slechts één extra glas: giet achtereenvolgens de whisky maar in het extra glas, de berenburg in het zojuist geleegde glas, en tenslotte de whisky in het lege berenburg-glas.

VOORBEELD 11.21

Eenzelfde truc kan bij het programmeren worden gebruikt om de waarden van twee variabelen om te wisselen: ook dan is een hulpvariabele handig.

```
begin
  z := x;
  x := y;
  y := z
einde
```

Het uiteindelijke effect van dit programmaatje kan nu als volgt gespecificeerd worden:

```
{x = a, y = b}
begin
  z := x;
  x := y;
  y := z
einde
{x = b, y = a}
```

In de waarde van z zijn we niet geïnteresseerd. Aan het enige criterium voor een correctheidsbewering wordt voldaan: als x en y vooraf respectievelijk de waarden a en b hebben, dan zijn die waarden achteraf inderdaad omgewisseld. De gegeven programmaspecificatie is daarom juist en het programma de correcte implementatie van deze specificatie. «

OPGAVE 11.28

Waarom heeft het volgende programma niet hetzelfde omwisseleffect?
Geef ook een correctheidsbewering voor dit programmaatje.

```
begin
  x := y;
  y := x
einde
```

We kunnen, in plaats van de 'pats-boem-methode' die hiervoor gebruikt is, de correctheidsbewering ook stapsgewijs opbouwen, en het programma op die manier controleren. Door per regel commentaar toe te voegen, kunnen we de juistheid van de correctheidsbewering in voorbeeld 11.21 inzien. Om ruimte te besparen, schrijven we het effect van een programmaregel steeds achter de opdracht:

```
{x = a, y = b}
begin
  z := x;  {x = a, y = b, z = a}
  x := y;  {x = b, y = b, z = a}
  y := z   {x = b, y = a, z = a}
einde
{x = b, y = a}
```

OPGAVE 11.29 (Aanw)
Hoewel het zeker makkelijk is een derde variabele te gebruiken om de waarden van twee andere variabelen te verwisselen, is dit strikt genomen niet nodig. Bedenk zelf een programmaatje dat slechts x en y als variabelen gebruikt en de waarden van x en y verwisselt.

OPGAVE 11.30
Specificeer het volgende programma regel voor regel, en geef aan het eind de bedoelde correctheidsbewering. Wat doet dit programma?

```
{x = a, y = b, z = c}
begin
  u := x;
  x := y;
  y := z;
  z := u
einde
```

Dit 'annoteren' van programma's zou een tamelijk zinloze hobby zijn als het slechts commentaar over het effect van een programma zou inhouden; vaak zouden we dit commentaar net zo goed of zelfs beter in gewone taal kunnen geven. Maar de belangrijkste reden voor de logicus C.A.R. Hoare om correctheidsbeweringen op te voeren, is dat men zich zo voor eens en altijd kan vergewissen van de juistheid van een programma. Hoare heeft namelijk een methode ontwikkeld om de correctheid van een programma te kunnen bewijzen. In deze methode leiden we correctheidsbeweringen van hele programma's af door de correctheidsbeweringen van opvolgende opdrachten aan elkaar te koppelen, zoals we bij diverse voorbeelden al informeel hebben gedaan. Omdat we dan van predikaatlogische wetten gebruik moeten maken, komen we hier pas in de volgende leereenheid op terug.

SAMENVATTING

De taal van de predikaatlogica bestaat uit termen en formules. Termen zijn samengesteld uit constanten (bijvoorbeeld a of 1), variabelen (x, y) en functiesymbolen (abstracte zoals f of concrete zoals + en √). Zo is $\sqrt{(x + 1)}$ een (samengestelde) term. Formules zijn opgebouwd uit predikaatsymbolen (P, Q, ..., =, <, ...), haakjes, termen, connectieven en kwantoren.

Er zijn twee (soorten) kwantoren in de predikaatlogica:

kwantor	*uitspraak*	*naam*
$\forall$	voor elke	universele kwantor of al-kwantor
$\exists$	er is een	existentiële kwantor of existentie-kwantor

Een term is ofwel een constante, ofwel een variabele, ofwel met een functiesymbool samengesteld uit andere termen: als f een n-plaatsig functiesymbool is, en $t_1, ..., t_n$ zijn termen, dan is $f(t_1, ..., t_n)$ eveneens een term. Een predikaatsymbool (zeg P) combineert ook altijd met een vast aantal termen: deze combinatie heet een atomaire formule. Als P een n-plaatsig predikaatsymbool is, en $t_1, ..., t_n$ zijn termen, dan is $P(t_1, ..., t_n)$ een formule. Als φ een formule is, dan zijn $\forall x\ \varphi$ en $\exists x\ \varphi$ eveneens formules. Connectieven combineren op dezelfde manier als in de propositielogica formules tot nieuwe formules.
Het bereik van een connectief of kwantor bestaat uit die deelformule(s) waarmee dat connectief of die kwantor combineert tot een nieuwe deelformule. Een variabele x komt vrij voor in een formule als die niet binnen het bereik van een kwantor $\forall x$ of $\exists x$ ligt. Een variabele in de formule die niet vrij is, heet gebonden. Een formule is open als er een vrije variabele in voorkomt en anders heet de formule gesloten.
Een vrije variabele x mogen we vervangen door een willekeurige term t. De notatie $[t/x]\varphi$ betekent: de substitutie van t voor alle vrije voorkomens van x in φ.
Voor het bepalen van de waarheidswaarde van een formule spelen in de predikaatlogica modellen dezelfde rol als waarderingen in de propositielogica. Een model is een structuur die bestaat uit een verzameling objecten waarop eigenschappen, relaties en bewerkingen zijn gedefinieerd die overeenkomen met de predikaat- en functiesymbolen van de formules waaraan we een waarheidswaarde willen toekennen. Verschillende constanten kunnen in een model hetzelfde object aanduiden en een constante kan in verschillende modellen door verschillende objecten worden weergegeven. Voor variabelen kunnen we in een gegeven model nog verschillende waarden kiezen.
Eénplaatsige predikaatsymbolen corresponderen met deelverzamelingen van de verzameling objecten van het model, tweeplaatsige met binaire relaties in die verzameling objecten, enzovoorts. De waarheidswaarden van negaties, conjuncties, disjuncties, implicaties en (materiële) equivalenties worden bepaald door de bijbehorende waarheidstabellen. Een formule $\forall x\ \varphi$ is waar als φ geldt voor elk object dat we aan x kunnen toekennen; $\exists x\ \varphi$ is waar als er ten minste één zo'n object bestaat.
Een informaticatoepassing van predikaatlogische formules vormt het gebruik van zogenaamde correctheidsbeweringen die het (gewenste) effect van een programma op logische wijze omschrijven.

ZELFTOETS

1 Welke van de volgende uitdrukkingen zijn formules en welke niet? Indien niet een formule, geef dan aan waarom. Indien het wel een formule is, zeg dan hoe deze moet worden uitgesproken en wat de formule uitdrukt.

a $\exists x\ \forall y\ x = y$
b $\forall x + y\ \exists z\ x + y < z$
c $\forall x \wedge y\ \exists z\ x + y < z$
d $\forall xy\ \exists z\ x + y < z$
e $\forall x\ \forall y\ \exists z\ x + y < z$

2 Gegeven is een bepaalde verzameling V waarop een soort kleiner-of-gelijk-relatie $\preccurlyeq$ is gedefinieerd. Geef de volgende uitspraken weer in predikaatlogische formules met als predikaatsymbolen alleen V en $\preccurlyeq$.
a Er is een kleinste element in V.
b Er is geen grootste element in V.
c Er is een maximaal element in V (dat wil zeggen: een element dat niet kleiner is dan enig ander element).

3 Geef in de volgende formules het bereik aan van $\forall y$, kijk steeds welke variabelen vrij en welke gebonden zijn, en concludeer ten slotte of de formule open of gesloten is.
a $\forall x\ \forall y\ \exists z\ y + z = x$
b $\forall y\ \exists z\ y + z = x$
c $\forall y\ \exists z\ y < z \wedge y > x$
d $P(y) \rightarrow \forall y\ \exists z\ y < z$

4 Voer voor de formules van vraag 3 de substituties $[y^2/x]$ en $[x \times y/x]$ uit.

5 Beschouw de formule $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$.
a Is deze formule waar, in een model met de natuurlijke getallen als objecten, waarin R overeenkomt met de gewone kleiner-dan-relatie (<)?
b En in een model met dezelfde verzameling objecten, maar nu met de relatie $\preccurlyeq$ gedefineerd door $x \preccurlyeq y \ \Leftrightarrow x \leq y + 1$.
c Is de formule waar op het model uit figuur 11.1?
d Is de formule waar op elk model met precies twee objecten? Zo ja, bewijs dit, zo nee, geef een voorbeeld van een model met twee objecten waarop de formule niet waar is.

6 (Waarschuwing: deze opgave is moeilijker dan een gemiddelde zelftoetsopgave!)
Formules zoals $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$ kunnen we eenvoudig opvatten als uitspraken uit de elementaire verzamelingenleer (hier dus $A \subset B$). Een (deel)verzameling geven we hierin aan met een predikaatsymbool. Maar we kunnen ook een andere weg inslaan: kijken of we verzamelingenleer kunnen formaliseren door elementen en verzamelingen in het model gewoon als objecten op te vatten en met constanten en variabelen weer te geven. Zulks is in de jaren '30 gedaan door onder anderen Zermelo en Fraenkel. Net zoals Hilbert eerder (in navolging van Euclides) de vlakke meetkunde geformaliseerd had, bleek het mogelijk een aantal formules op te stellen die precies vastleggen wat er voor verzamelingen geldt. Geef bij de volgende formules aan welk feit van de verzamelingenleer er door wordt uitgedrukt: ('$\in$' is een tweeplaatsig predikaatsymbool dat tussen de termen wordt geschreven)
a $\exists x\ \forall y\ \neg(y \in x)$
b $\neg\exists x\ x \in x$
c $\forall x\ \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

TERUGKOPPELING LEEREENHEID 11

1 Uitwerkingen van de opgaven

11.1 De uitspraak 'Karel tuiniert' wordt dan door $T(k)$ weergegeven.

11.2 W en P zijn predikaatsymbolen, m en 5 zijn de constanten.

11.3 **a** $P(3)$
b $m > j$
c $S(m, j, p)$

11.4 **a** $P(x)$
b $V(x, j)$
c $5 < y$
d $x > y$
e $T(x, y, z)$

11.5 **a** $H(j, m) \wedge H(m, j)$
b $x > 3 \leftrightarrow y < 4$
c $E(x) \vee (P(x) \wedge x < 4)$

11.6 **a** 'Iedereen is wiskundige'
b 'Iedereen heeft een relatie met iedereen' (of: 'Alles heeft een relatie met alles')

11.7 **a** Hier is de taal tamelijk vaag. Een eenvoudige interpretatie is 'sommige' als 'een' op te vatten, dan is de formule simpel $\exists x\ (G(x) \wedge S(x))$. Desgewenst kunnen we het meervoud tot uitdrukking brengen: $\exists x\ \exists y\ (x \neq y \wedge G(x) \wedge S(x) \wedge G(y) \wedge S(y))$. Als we ook nog tot uitdrukking willen brengen dat kennelijk niet alle grafen samenhangend zijn, wordt de vertaling: $\exists x\ \exists y\ (x \neq y \wedge G(x) \wedge S(x) \wedge G(y) \wedge S(y) \wedge \exists z\ (G(z) \wedge \neg S(z)))$.
b $\forall x\ (B(x) \rightarrow \exists y\ (W(y) \wedge H(x, y)))$; hierbij betekent B: 'is een boom', W: 'is een wortel' en $H(x, y)$: 'punt y behoort tot graaf x'.
c $\forall x\ (B(x) \rightarrow (S(x) \wedge G(x)))$

11.8 Elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen
<u>Voor elk</u> getal dat even is en groter dan 2, <u>zijn er</u> twee priemgetallen waarvan het de som is
$\forall x$ <u>als</u> x even en groter dan 2, <u>dan</u> $\exists y\ \exists z$: (y is priem en z is priem en x is de som van y en z)
$\forall x$ ((x is even <u>en</u> x is groter dan 2) $\rightarrow \exists y\ \exists z$: ($y$ is priem <u>en</u> z is priem <u>en</u> x is de som van y en z))
$\forall x$ ((x <u>is even</u> $\wedge$ x <u>is groter dan</u> 2) $\rightarrow \exists y\ \exists z$: ($y$ <u>is priem</u> $\wedge$ z <u>is priem</u> $\wedge$ x <u>is de som van</u> y <u>en</u> z))
$\forall x\ ((E(x) \wedge x > 2) \rightarrow \exists y\ \exists z\ (P(y) \wedge P(z) \wedge S(x, y, z)))$

11.9 Letterlijk: 'voor elk even getal groter dan twee is er een priemgetal waarvoor het verschil van het even getal en dit priemgetal weer een priemgetal is.' Dat is uiteraard niets anders dan het vermoeden van Goldbach, in een andere gedaante. Indien nog niet duidelijk, kunnen we dit als volgt inzien. Noem maar $x - y = z$. Voor elk even getal groter dan 2 en elk priemgetal y bestaat er zo'n natuurlijk getal z (want als $y > x$, dan zou

$x - y$ geen (positief) priemgetal zijn). Verder geldt $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$ als eigenschap van natuurlijke getallen (geen logische maar wel een wiskundige equivalentie).

11.10 **a** Deze bewering kunnen we eerst herformuleren als 'Het is niet zo dat er x, y, z bestaan die gehele en positieve getallen zijn en waarvoor $x^3 + y^3 = z^3$.' Zo komen we op de formule: $\neg\exists x\ \exists y\ \exists z\ (Z(x) \wedge Z(y) \wedge Z(z) \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge x^3 + y^3 = z^3)$. De gebruikte variabelen zijn x, y, z, de functiesymbolen + , ^{3} (eenplaatsig, als hooggeplaatste index erna geschreven), de enige constante 0, de predikaatsymbolen Z ('is een geheel getal'), > en =.
b Getal n is hier evengoed een variabele, dus ^{n} kan niet als functiesymbool optreden. We moeten daarom een nieuw tweeplaatsig functiesymbool $\uparrow$ invoeren, waarbij $x \uparrow u$ staat voor x^u. (We gebruiken liever de notatie $\uparrow$ om verwarring met de eerdere eenplaatsige functiesymbolen ^{2} en ^{3} te vermijden.) Het 'laatste theorema van Fermat' kan dan als volgt worden weergegeven: $\neg\exists x\ \exists y\ \exists z\ \exists n\ (Z(x) \wedge Z(y) \wedge Z(z) \wedge Z(n) \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge n > 2 \wedge (x \uparrow n) + (y \uparrow n) = (z \uparrow n))$.

11.11 Letterlijk staat er: 'Het is niet zo dat er een x is die priemgetal is, en dat tevens geldt dat voor alle getallen die (ook) priemgetal zijn, geldt dat ze kleiner dan of gelijk aan x zijn.' Dat kan in gewoon Nederlands veel korter worden gezegd: 'Er is geen grootste priemgetal.'

11.12 Onderdelen a, c en d zijn correcte termen. Onderdeel b is niet correct, want ^{3} was niet gegeven als functiesymbool. Onderdeel e is ook niet correct, omdat er haakjes ontbreken en ook typografisch klopt de exponent niet met de gegeven functieconstante ^{2}. In de wiskunde wordt de notatie van e wel gebruikt: er wordt dan hetzelfde als f mee bedoeld (dat wil zeggen: gelijk aan x^4). Maar ook f kan niet met de functieconstante ^{2} worden gevormd, want 2^2 is wel een term, maar als exponent geen functieconstante. We kunnen dit gemis opvangen zoals in opgave 11.10.

11.13 De formules op de eerste regel zijn atomair, de overige samengesteld.

11.14 **a** Ja, dit is een keurig nette formule. We mogen dus best de existentiële kwantor met een disjunctie combineren!
b Ook een goede formule: de buitenste haakjes om de conjunctie mochten immers weg.
c Nee, in weerwil van de mogelijke interpretatie 'Twee en vier zijn even' is dit geen correcte formule, want $\wedge$ mag alleen formules verbinden en geen termen. 'Twee en vier zijn even' kunnen we uitdrukken door $E(2) \wedge E(4)$.
d Niet correct, want er moeten haakjes om de disjunctie of de conjunctie heen.
e Dit is een goede formule, al doet de universele kwantor hier helemaal niets: we kunnen net zo goed $\exists x\ P(x)$ schrijven (zie leereenheid 12).
f Geen goede formule: direct achter de kwantorsymbolen mag alleen een variabele staan. Als we 'Voor alle x met de eigenschap P is er een y met de eigenschap Q waarvoor $R(x, y)$' willen uitdrukken, kan dit met: $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \wedge R(x, y)))$.
g Ook niet correct, want een predikaat mag alleen werken op termen, terwijl één van de argumenten van H hier een formule is. Iets als 'Ieder mens houdt van een mens' kan natuurlijk wel worden uitgedrukt (vergelijk onderdeel f).

11.15 Dit zijn alle formules die in voorbeeld 11.14 gegeven werden!

11.16
a $\forall x\ \underline{R(x, x)}$
b $\forall x\ \underline{((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge C(x))}$
c $\forall x\ \underline{(A(x) \rightarrow B(x))} \wedge C(x)$
d $(\forall x\ \underline{A(x)} \rightarrow B(x)) \wedge C(x)$

11.17 Als $\exists x\ \varphi$ een deelformule van ψ is, dan is het bereik van de kwantor $\exists x$ in ψ de formule φ.

11.18
a $\exists x\ \underline{P(x)} \wedge \forall y\ R(z, y)$
b $\exists x\ \underline{(P(x) \wedge \forall y\ R(z, y))}$

11.19
a $A(c) \wedge \forall x\ \exists y\ \underline{R(x, y)}$
b $\exists y\ \underline{\forall x\ (A(x) \wedge B(y))}$
c $\forall x\ \exists y\ \underline{\forall z\ S(x, y, z)}$
d $\exists z\ \forall x\ \exists y\ \underline{S(x, y, z)}$

11.20
a Variabele x is vrij en y is gebonden.
b Variabele x is gebonden en y is vrij.
c Alle voorkomens van x en y zijn gebonden.
d Variabele y en het eerste voorkomen van x zijn gebonden; het tweede voorkomen van x is vrij, want het tweede conjunct valt buiten het bereik van $\exists x$.
e Variabele x en het tweede voorkomen van y zijn gebonden; z en het eerste voorkomen van y zijn vrij.

11.21 Alleen de formule van onderdeel c is gesloten, de overige formules uit de vorige opgave zijn open.

11.22
a $y < y$
b $\exists x\ x < y$ (x is immers gebonden, dus substitutie doet hier niets)
c $\exists x\ x < x$ (we komen hier in leereenheid 12 op terug)
d $\exists x\ R(x, x) \wedge P(0)$ (alleen het tweede voorkomen van x was vrij)
e $\exists x\ \exists y\ R(x, y) \wedge P(x^2)$
f $\exists x\ P(x) \rightarrow x + y > y$

11.23
a Waar, want (2, 2) behoort tot een pijlrelatie.
b Waar, want (1, 1) behoort niet tot een pijlrelatie.
c Ook waar, want als we voor x object 1 nemen, dan is er een object, namelijk 2, waarvoor (1, 2) tot de relatie behoort, en als we voor x object 2 kiezen, dan is weer (2, 2) element van de pijlrelatie. Merk op dat de waarde van y helemaal niet hoeft te verschillen van die van x!
d Onwaar, want proberen we voor x het object 1, dan staat dit niet tot alle objecten in de pijlrelatie (zie b), en proberen we voor x object 2, dan ook niet, immers (2, 1) behoort niet tot de pijlrelatie.
e Waar, want alle pijlen lopen alleen naar object 2, en dat heeft een luspijl naar zichzelf.

11.24 **a** Waar, want de keuze van object 1 voor x voldoet.
b Onwaar, want neem voor x het object 2 en merk op dat geen pijl uit 2 vertrekt.
c Waar, want alleen object 1 heeft de eigenschap die met P overeenkomt, en er loopt een pijl van 1 naar 2.
d Waar. Dit lijkt lastiger dan het is, want alleen 1 heeft een luspijl, en 1 heeft inderdaad de eigenschap P, staat in de pijlrelatie tot 2 en 2 heeft niet de eigenschap P. Voor 2 is de uitspraak $R(x, x)$ onwaar, dus ook dan is de implicatie waar.

11.25 Objecten met de eigenschap A krijgen een rondje, met eigenschap B een vierkantje, en met eigenschap C een driehoekje.
a De formule is waar in elk model waarin alle objecten die ‘rondjes’ hebben ook ‘vierkantjes’ hebben, bijvoorbeeld:

FIGUUR 11.5

De formule is onwaar in elk model waarin tenminste één object met een rondje geen vierkantje heeft, bijvoorbeeld:

FIGUUR 11.6

b De formule is waar in elk model waarin tenminste één object zowel een rondje als een vierkantje heeft, en onwaar in elk model waarin elk object of geen rondje of geen vierkantje heeft. Dezelfde voorbeeld-modellen als bij a voldoen hier dus.
c De formule is waar in elk model waarin de verzameling objecten met driehoekjes de vereniging is van de verzamelingen van objecten met rondjes en met vierkantjes, bijvoorbeeld:

FIGUUR 11.7

De formule is onwaar als dit niet zo is (zoals bij alle in a en b gegeven voorbeeldmodellen het geval is).

11.26 **a** Waar als $x = 3$, omdat dan $x < 5$ waar is en ook $P(x)$, zodat de implicatie volgens haar waarheidstabel waar is.
b Onwaar als $x = 4$, omdat dan $x < 5$ wel waar is, maar $P(x)$ onwaar, zodat dan de implicatie als geheel onwaar is.
c Waar als $x = 5$, omdat dan $x < 5$ onwaar is, zodat de implicatie volgens haar waarheidstabel waar is.

11.27 **a** Waar: 2 is een even priemgetal.
b Onwaar, om dezelfde reden.
c Onwaar: 23 is oneven, maar 25 en 27 zijn geen priemgetallen.
d Waar: 2 is het kleinste priemgetal.

11.28 Na de eerste opdracht ($x := y$) hebben x en y dezelfde waarde gekregen (de oude waarde van y), en dat blijft zo na de tweede opdracht. Een (juiste) correctheidsbewering voor dit programma is daarom:

```
{x = a, y = b}
begin
  x := y;
  y := x
einde
{x = b, y = b}
```

11.29 We geven hier één oplossing (er zijn er nog twee die dezelfde drie opdrachten vertonen, maar dan in een andere volgorde). De varianten ontstaan door cyclische permutatie. Per regel geven we aan wat er gebeurt voor een paar concrete waarden:

```
{x = 3, y = 5}
begin
  x := x + y;  {x = 8, y = 5)
  y := x – y;  {x = 8, y = 3}
  x := x - y   {x = 5, y = 3)
einde
{x = 5, y = 3}
```

11.30
```
{x = a, y = b, z = c}
begin
  u := x;  {x = a, y = b, z = c, u = a}
  x := y;  {x = b, y = b, z = c, u = a}
  y := z;  {x = b, y = c, z = c, u = a}
  z := u   {x = b, y = c, z = a, u = a}
einde
{x = b, y = c, z = a}
```

We zien hier een zogenaamde cyclische permutatie van de waarden van x, y en z.

2 Uitwerking van de zelftoets

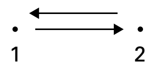
1 **a** Wel een formule, spreek uit: 'Er is een x waarvoor voor elke y geldt dat x gelijk is aan y', met andere woorden: er is precies één object.
b Geen formule: achter een kwantor moet één variabele staan en geen andere term.
c en **d**: Idem dito.
e Wel een formule, spreek uit: 'Voor elke x (en) voor elke y is er een z waarvoor x plus y kleiner is dan z'.

2 **a** $\exists x\ (V(x) \wedge \forall y\ (V(y) \rightarrow x \preccurlyeq y))$
b $\neg\exists x\ (V(x) \wedge \forall y\ (V(y) \rightarrow y \preccurlyeq x))$
c $\exists x\ (V(x) \wedge \forall y\ ((V(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \neg(x \preccurlyeq y)))$

3 **a** $\forall x\ \forall y\ \underline{\exists z\ y + z = x}$: geen vrije variabelen, dus formule gesloten.
b $\forall y\ \underline{\exists z\ y + z = x}$: x is vrij, formule dus open.
c $\forall y\ \underline{\exists z\ y < z} \wedge y > x$: x en laatste voorkomen van y zijn vrij, formule derhalve open.
d $P(y) \rightarrow \forall y\ \underline{\exists z\ y < z}$: eerste voorkomen van y is vrij, formule daarom open.

4 **a** De substituties $[y^2/x]\forall x\ \forall y\ \exists z\ y + z = x$ en $[x \times y/x]\forall x\ \forall y\ \exists z\ y + z = x$ hebben geen effect, want x is gebonden. De formule blijft $\forall x \forall y\ \exists z\ y + z = x$.
b De uitkomst van $[y^2/x]\forall y\ \exists z\ y + z = x$ is $\forall y\ \exists z\ y + z = y^2$.
De uitkomst van $[x \times y/x]\forall y\ \exists z\ y + z = x$ is $\forall y\ \exists z\ y + z = x \times y$.
c De uitkomst van $[y^2/x]\forall y\ \exists z\ y < z \wedge y > x$ is $\forall y\ \exists z\ y < z \wedge y > y^2$.
De uitkomst van $[x \times y/x]\forall y\ \exists z\ y < z \wedge y > x$ is $\forall y\ \exists z\ y < z \wedge y > x \times y$.
d De substituties $[y^2/x]$ en $[x \times y/x]$ hebben geen enkel effect, het resultaat blijft $P(y) \rightarrow \forall y\ \exists z\ y < z$.

5 **a** Ja, de formule is waar. Als $k < m$ en $m < n$, dan zeker ook $k < n$, voor alle natuurlijke getallen k, m en n.
b Nee, want kies maar $x = 2$, $y = 1$ en $z = 0$. Dan geldt $2 \preccurlyeq 1$ en $1 \preccurlyeq 0$, maar $2 \not\preccurlyeq 0$.
c Ja, er zijn dus zeker geen drie objecten nodig om de formule waar te laten zijn op een model! $R(x, y) \wedge R(y, z)$ kan alleen maar waar zijn in twee gevallen: (i) $x = 1$ en $y = z = 2$ en (ii) $x = y = z = 2$. In beide gevallen is dan ook $R(x, z)$ waar, zodat de implicatie waar is, welke objecten we ook voor x, y en z kiezen.
d Nee, een model met twee objecten waarop de formule onwaar is, is bijvoorbeeld



FIGUUR 11.8

Dan behoren (1, 2) en (2, 1) wel tot de pijlrelatie, maar (1, 1) niet. Dus kiezen we voor x en z object 1, en voor y object 2, dan is de implicatie onwaar.

6 **a** Er bestaat een lege verzameling.
b Geen verzameling is element van zichzelf.
c Twee verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen bezitten.