Inhoud leereenheid 10

Wetten van de propositielogica

Leereenheid 10

Wetten van de propositielogica

INTRODUCTIE

In deze leereenheid onderzoeken we bepaalde wetmatigheden in de propositielogica. Wat maakt bijvoorbeeld de formule $\neg(p \wedge \neg p)$ zo bijzonder? Dat is vooral het feit dat de formule niet onwaar kan worden, anders gezegd: dat de formule waar is, of p nu waar is of niet. Dit kunnen we aflezen uit de waarheidstabel van de formule. Deze eigenschap komt ook bij (oneindig) veel andere formules voor en is van groot belang, zowel voor de theorie als voor diverse toepassingen.
In de vorige leereenheid zagen we al dat p en $\neg\neg p$ in feite op hetzelfde neerkomen: de twee formules hebben in elke situatie dezelfde waarheidswaarde. Dit kunnen we precies vaststellen door de waarheidstabellen van de formules uit te rekenen en met elkaar te vergelijken. Hetzelfde verschijnsel zien we bij de formules $p \wedge q$ en $\neg\neg(p \wedge q)$, meer in het algemeen bij elk tweetal formules van de vorm φ en $\neg\neg\varphi$. Dit is dus een wet van de propositielogica, die in feite neerkomt op 'dubbele negatie mag weggelaten worden'. Dat is niet zo maar een aardigheidje, maar een nuttig instrument om formules in een eenvoudiger vorm om te zetten, net zoals we in de rekenkunde –(–8) mogen vereenvoudigen tot 8.
Een derde soort wetmatigheid heeft te maken met correcte redeneringen. Een redenering van de vorm 'uit $p \vee \neg q$ en q kan men p afleiden', die we al in leereenheid 9 tegenkwamen, vonden we correct, en we gaan nu uitzoeken welke eigenschap van de waarheidstabellen van de formules in kwestie hiervoor verantwoordelijk is.
Naast het ontdekken van de diverse soorten wetmatigheden willen we er ook graag enige ordening in aanbrengen. Kunnen we misschien bepaalde standaardwetten formuleren waaruit we de andere wetten kunnen afleiden? Dan kunnen we immers zonder de rompslomp van de waarheidstabellen snel inzien dát iets een wet is. Ook willen we graag verbanden tussen de diverse *soorten* wetmatigheden vinden: het kan bijvoorbeeld handig zijn een wet te bewijzen via wetmatigheden van een ander soort.
Samen met de vorige leereenheid vormt deze leereenheid een inleiding in de propositielogica, die we in leereenheden 11 en 12 gaan uitbreiden tot een krachtiger logica.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
– weet wat waarderingen zijn
– de begrippen tautologie, contradictie, contingentie, logische equivalentie en logisch gevolg kent en kunt hanteren
– het begrip standaardtautologie kent
– weet wat $\top$ (verum) en $\bot$ (falsum) zijn en hoe ze gebruikt worden
– standaardequivalenties met betrekking tot de connectieven kent en kunt gebruiken, in het bijzonder voor het normaliseren van een formule tot een DNV dan wel CNV

- standaard logische gevolgen ex falso, modus ponens, contrapositie, reductio ad absurdum, conjunctie-introductie en conjunctie-eliminatie kent en kunt toepassen
- het verband ziet tussen logische equivalenties en bepaalde tautologieën
- het verband ziet tussen logische gevolgen en bepaalde tautologieën.

LEERKERN

10.1 Tautologie, contradictie, contingentie

In deze paragraaf richten we ons op eigenschappen van waarheidstabellen van afzonderlijke formules. Door middel van waarheidstabellen kunnen we onderzoeken in welke situaties, dat wil zeggen: onder welke voorwaarden, een formule waar is. Twee gevallen springen er duidelijk uit: formules die 'altijd' waar zijn (preciezer: bij elke toekenning van waarheidswaarden aan propositieletters), en formules die 'altijd' onwaar zijn.

VOORBEELD 10.1

De formule $p \vee \neg p$ is waar, ongeacht de waarheidswaarde van p. Dit is direct te zien aan de waarheidstabel:

p	p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	1	0	1
0	0	1	1	0
	1	*3*	*2*	*1*

De waarheidswaarden van de hele formule staan in de kolom onder $\vee$, die in stap 3 berekend worden. In deze kolom staan alleen enen, zodat de formule altijd waar is. Elke uitspraak van deze vorm is dus altijd waar, en inderdaad geldt bijvoorbeeld: de propositie 'Verzameling A is leeg of verzameling A is niet leeg' is altijd waar. «

We zullen in het vervolg niet steeds de gebruikte voorbeeldformules illustreren door middel van concrete proposities, maar u kunt zelf steeds uitspraken naar eigen voorkeur voor de propositieletters invullen.

VOORBEELD 10.2

De formule $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ is ook waar, welke waarheidswaarde we ook voor p en q kiezen.

p	q	$(p$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$q))$	$\rightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	0
							$\uparrow$	

Vanaf nu geven we de stappen waarin de waarheidstabel wordt opgesteld niet meer aan. Denk erom dat de waarheidswaarden van de hele formule in de kolom staan onder het connectief met het grootste bereik, hier dus het laatste implicatieteken. Deze kolom is aangegeven met een pijltje. «

Waardering

Om steeds terugkerende, moeizame formuleringen als 'bij elke toekenning van waarheidswaarden aan propositieletters' te vermijden, noemen we een toekenning van waarheidswaarden aan propositieletters een *waardering*. Bij iedere rij in een waarheidstabel hoort dus een waardering. Wiskundig gezien is een waardering w een functie van propositieletters naar waarheidswaarden, dat wil zeggen w: $\{p, q, r, ...\} \to \{0, 1\}$.
De formules in de laatste twee voorbeelden, die voor iedere waardering waar zijn, noemen we tautologieën. De precieze definitie is als volgt.

Tautologie

DEFINITIE 10.1

Een *tautologie* is een formule van de propositielogica die waar is voor elke waardering.

Hoofdkolom

Waarheidswaarden van formule staan in hoofdkolom.

Om te bewijzen dát een formule een tautologie is, of om na te gaan óf iets een tautologie is, dienen we dus een waarheidstabel voor de formule op te stellen, en vervolgens te kijken of de *hoofdkolom* (die staat onder het connectief met het grootste bereik en die dus het laatst berekend wordt) alleen maar voorkomens van het symbool 1 bevat.

OPGAVE 10.1 (Aanw)
Bewijs dat de volgende formules tautologieën zijn:
a $p \to p$
b $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
c $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
d $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

OPGAVE 10.2 (Aanw)
Ga na of de volgende formules tautologieën zijn:
a $\neg(p \to \neg p)$
b $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
c $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
d $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

De tegenhanger van een tautologie is een formule die in elke situatie onwaar is. Dit wordt contradictie genoemd.

VOORBEELD 10.3

De formule $p \wedge \neg p$ is onwaar, ongeacht de waarheidswaarde van p:

p	p	$\wedge$	$\neg$	p
1	1	0	0	1
0	0	0	1	0
		$\uparrow$		

«

In de hoofdkolom van de waarheidstabel verschijnen bij een contradictie dus alleen maar nullen. De definitie van contradictie is een soort spiegelbeeld van die van tautologie.

Contradictie

DEFINITIE 10.2

Een *contradictie* is een formule die onwaar is voor elke waardering.

De formule $p \wedge \neg p$ is dus een contradictie.

OPGAVE 10.3 (Aanw)
Bewijs dat de volgende formules contradicties zijn.
a $\neg(p \to p)$
b $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
c $(p \vee q) \wedge (\neg q \wedge \neg p)$

OPGAVE 10.4 (Aanw)
Ga na welke van de volgende formules contradicties zijn.
a $p \wedge \neg(p \vee q)$
b $\neg(p \to q)$
c $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$

Het is duidelijk dat een formule niet zowel een contradictie als een tautologie kan zijn. Dat volgt meteen uit de definities. Er is overigens wel een eenvoudig verband tussen beide soorten formules.

OPGAVE 10.5
Laat zien dat $\neg\varphi$ een contradictie is als φ een tautologie is, en omgekeerd.
En ook: φ is een contradictie precies dan als $\neg\varphi$ een tautologie is.

Hoewel geen enkele formule zowel een contradictie als een tautologie kan zijn, bestaan er zeker wél formules die geen van beide zijn.

VOORBEELD 10.4 De formule $p \wedge \neg q$ is waar voor één waardering, en onwaar voor de overige waarderingen.

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
			↑		

«

Formules die noch tautologie, noch contradictie zijn, worden contingenties genoemd.

Contingentie

DEFINITIE 10.3 Een *contingentie* is een formule die geen tautologie en ook geen contradictie is.

Een contingentie is dus waar voor minstens één waardering en onwaar voor minstens één andere. Daarom is $p \wedge \neg q$ een contingentie. Andere voorbeelden zijn formules als p, $p \to \neg p$, $(p \vee q) \to p$, enzovoorts.

OPGAVE 10.6
Welke formules in opgaven 10.2 en 10.4 zijn contingenties?

10.1.1 STANDAARDTAUTOLOGIEËN

Standaard-tautologie

Bepaalde vormen van tautologieën keren steeds weer terug. We noemen ze *standaardtautologieën*.
Een tautologie is waar onafhankelijk van de waarheidswaarden van de propositieletters. Dit betekent dat deze waarheid ook niets te maken heeft met de uitspraak waar een propositieletter in een concreet geval voor staat. Het is alleen de *vorm* van de propositie die haar geldig maakt. Daarom zijn naast $p \vee \neg p$ ook $q \vee \neg q$ en $((p \wedge q) \vee r) \vee \neg((p \wedge q) \vee r)$ evenzeer tautologieën. Kortom, alle formules van de vorm $\varphi \vee \neg\varphi$ zijn tautologieën. We kunnen dit een wet van de propositielogica noemen. We kunnen ook direct inzien dat al deze formules tautologieën zijn door een kleine variatie op de waarheidstabel uit het begin van paragraaf 10.1:

Alle formules van de vorm $\varphi \vee \neg\varphi$ zijn tautologieën.

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
1	1	1	0	1
0	0	1	1	0

Principe van de uitgesloten derde

Deze wet moet u kennen!

Deze wet heet het *principe van de uitgesloten derde* (Latijn: tertium non datur, hetgeen letterlijk betekent: een derde wordt niet gegeven). Dit principe houdt verband met het feit dat we slechts twee waarheidswaarden hebben: een formule is in de propositielogica of waar of onwaar, en in het laatste geval is de negatie van de formule waar – andere mogelijkheden zijn er niet.

Het principe van tertium non datur was de oude Grieken ook al bekend, al waren zeker niet allen het er mee eens. Het schijnt dat bijvoorbeeld Herakleitos (ca. 500 v. Chr.) de juistheid van het principe betwijfelde en dat tijdgenoot Parmenides het daarentegen verdedigde. Het afwijzen van het principe heeft direct te maken met het hebben van meer waarheidswaarden, waarover een intermezzo in leereenheid 9 al ging. Als we toestaan dat een formule niet altijd óf waar óf onwaar hoeft te zijn, maar dat de waarheidswaarde ook 'onbepaald' kan zijn, dan hoeft het principe van uitgesloten derde niet meer te gelden. Het is mogelijk waarheidstabellen voor de connectieven te verzinnen die $p \vee \neg p$ voor zekere waardering de waarde 'onbepaald' geven: de formule is dan geen tautologie meer. De logische complicaties van dit soort variaties zijn niet gering en we gaan er hier dan ook verder niet op in.

Generaliseren van tautologieën

Misschien is het al duidelijk dat wat we voor het principe van uitgesloten derde hebben gedaan, we ook voor andere tautologieën kunnen doen: vervang in een tautologie de propositieletters (p, q, ...) door willekeurige formules (respectievelijk φ, ψ, ...). En wel: elk voorkomen van één propositieletter door dezelfde formule. Alle formules van de verkregen vorm zullen dan ook tautologieën zijn. Dit levert standaardtautologieën van een algemene vorm, zoals:

Deze formules hoeft u niet uit het hoofd te leren, maar wel moet u met waarheidstabellen kunnen bewijzen dat ze tautologieën zijn.

a $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
b $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$
c $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$
d $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
e $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
f $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Zo is c verkregen door p en q in de formule van voorbeeld 10.2 te vervangen door respectievelijk φ en ψ.

OPGAVE 10.7
Bewijs met waarheidstabellen dat de formules a en b tautologieën zijn. Ga daarna na uit welke al bewezen tautologieën we formules d, e en f verkregen hebben.

Het voordeel van het gebruiken van dergelijke standaardtautologieën is dat we nu niet meer een omvangrijke waarheidstabel voor bijvoorbeeld $((p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee s)) \leftrightarrow \neg\neg((p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee s))$ hoeven op te stellen; het volstaat om de vorm a van de formule te herkennen.

10.2 **Logische equivalentie**

Het al dan niet een tautologie zijn, is een eigenschap van één formule, maar het kan zin hebben twee formules te vergelijken, ook als dat contingenties zijn. Veel formules blijken, informeel gesproken, op hetzelfde neer te komen.

VOORBEELD 10.5

De formules p en $\neg\neg p$ krijgen voor elke waardering dezelfde waarheidswaarde. Dit blijkt uit de volgende tabel, waar we voor beide waarderingen van p de waarheidswaarden van p en $\neg\neg p$ hebben bepaald.

p	p	$\neg$	$\neg$	p
1	1	1	0	1
0	0	0	1	0
	↑	↑		

De aangegeven kolommen, die de waarheidswaarden van de formules p en $\neg\neg p$ bevatten, zijn identiek. «

Voor deze belangrijke eigenschap voeren we een nieuw begrip in.

Logisch equivalent

DEFINITIE 10.4

Twee formules heten *logisch equivalent* als ze voor iedere waardering dezelfde waarheidswaarden hebben. Als φ en ψ logisch equivalent zijn, dan noteren we dit met $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Het teken $\Leftrightarrow$ gebruiken we dus als een soort afkorting voor ‘heeft voor iedere waardering dezelfde waarheidswaarde als’.
Logische equivalentie stellen we dus vast door waarheidstabellen te vergelijken, ook eventueel voor algemenere formules.

VOORBEELD 10.6

De formules $\varphi \leftrightarrow \psi$ en $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ zijn logisch equivalent:

φ	ψ	φ	$\leftrightarrow$	ψ	$(\varphi$	$\to$	$\psi)$	$\wedge$	$(\psi$	$\to$	$\varphi)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
			↑					↑			

Een concreet geval van deze logische equivalentie zagen we in de casus van dit blok, waarin we twee implicaties (regels voor toegestane poging) combineerden tot één desda-regel. Nemen we p: ‘het rijtje is een poging’, q: ‘de beginletter is goed’, r: ‘het woord komt in de lijst voor’ en s: ‘de poging is toegestaan’, dan ging het hier om de equivalentie met voor φ de formule $(p \wedge q) \wedge r$ en voor ψ de formule s. «

OPGAVE 10.8 (Aanw)
Bewijs de volgende logische equivalenties.
a $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
b $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\psi \vee \neg\varphi$
c $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$

OPGAVE 10.9 (Aanw)
Ga na of er in de volgende gevallen sprake is van logische equivalentie.
a $\neg(p \vee q) \;?\!\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
b $\neg(p \vee q) \;?\!\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

c $\neg(p \leftrightarrow q)$?$\Leftrightarrow$ $p \leftrightarrow \neg q$
d $p \leftrightarrow q$?$\Leftrightarrow$ $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Materiële equivalentie

Wanneer het uit de context voldoende duidelijk is, spreken we vaak gewoon over equivalentie, in plaats van logische equivalentie. Om verwarring te voorkomen, wordt $\varphi \leftrightarrow \psi$ soms ook wel een *materiële equivalentie* genoemd.

$\Leftrightarrow$ versus $\leftrightarrow$

Tussen beide soorten equivalenties bestaat een nauw verband. Kijken we aandachtig naar een aantal eerdere voorbeelden en opgaven, dan openbaart zich een regelmaat. Vergelijk maar per regel de volgende formules links (materiële equivalenties die allemaal tautologieën zijn) met de logische equivalenties rechts:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

Het verband tussen $\leftrightarrow$ en $\Leftrightarrow$

Met de tautologieën links correspondeert steeds een logische equivalentie rechts. Afgezien van het feit dat we rechts $\Leftrightarrow$ in plaats van $\leftrightarrow$ vinden, is het verschil vooral dat er links steeds één formule staat en rechts een bewering over twee formules. Dit verband is volkomen algemeen en we kunnen het ook zonder veel problemen bewijzen.

STELLING 10.1 De formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie precies dan als $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Bewijs
De stelling, en daarmee het bewijs, valt uiteen in twee beweringen:
i als $\varphi \leftrightarrow \psi$ een tautologie is, dan geldt $\varphi \Leftrightarrow \psi$
ii als $\varphi \Leftrightarrow \psi$, dan is $\varphi \leftrightarrow \psi$ een tautologie.

Bewijs van bewering i

Stel $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie. Als φ nu waar is, dan moet ψ ook waar zijn volgens de waarheidstabel van $\leftrightarrow$, anders was $\varphi \leftrightarrow \psi$ geen tautologie. Op dezelfde manier blijkt dat als ψ waar is, φ ook waar moet zijn. Kortom, φ is juist dan waar als ψ waar is, en derhalve $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Bewijs van bewering ii

Stel nu dat $\varphi \Leftrightarrow \psi$, dan betekent dit voor elke waardering dat φ en ψ óf beide waar óf beide onwaar zijn. Maar in elk van deze twee mogelijkheden is de formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ waar, ongeacht de gekozen waardering. □

Het is dus lood om oud ijzer of we de mogelijke equivalentie van φ en ψ onderzoeken door een waarheidstabel voor $\varphi \leftrightarrow \psi$ te maken, dan wel door de waarheidstabellen van φ en ψ direct te vergelijken.

$\Leftrightarrow \neq \leftrightarrow$

Hoewel er dus een nauw verband is tussen beide soorten equivalenties, mogen we de tekens $\Leftrightarrow$ en $\leftrightarrow$ niet door elkaar heen gebruiken. Het cruciale verschil is dat $\leftrightarrow$ een symbool uit de taal van de propositielogica is en $\Leftrightarrow$ niet. Als we twee formules φ en ψ hebben, dan kunnen we er een nieuwe formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ mee opbouwen die waar of onwaar kan zijn; $\varphi \Leftrightarrow \psi$ is daarentegen geen formule uit de propositielogica, maar een uitspraak *over* formules van de propositielogica, namelijk dat φ en ψ logisch equivalent zijn. Omdat we alleen ware uitspraken over de propositielogica willen doen (tenzij we dit expliciet aangeven zoals in bewijzen uit het ongerijmde), brengt dit nog een verschil met zich mee: als we (voor zekere φ en ψ) opschrijven dat $\varphi \Leftrightarrow \psi$, dan bedoelen we dat dit inderdaad *het geval is*, terwijl alleen de formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ opschrijven nog niet de waarheid van die formule inhoudt.

Equivalenties mag u aaneenschakelen.

Verschillende equivalenties kunnen we aaneenschakelen, zoals trouwens in de wiskunde ook heel gebruikelijk is (zelfs met de hier ingevoerde notatie). Bij het oplossen van vergelijkingen gebruiken we immers ook een keten van equivalenties, zoals $x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$. Zo ook in de logica: $\neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg\neg p \vee \neg\neg q \Leftrightarrow p \vee q$.

De laatste serie equivalenties is niet zonder meer in een formule om te zetten door $\Leftrightarrow$ simpelweg door $\leftrightarrow$ te vervangen. Er zijn dan zelfs twee moeilijkheden: ten eerste ontbreken er haakjes, want de uitdrukking $\neg(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg\neg p \vee \neg\neg q \leftrightarrow p \vee q$ is geen correcte formule, en als we haakjes toevoegen dan krijgen we een ander probleem: hoe we die ook om de equivalenties heen zetten, de resulterende formule is geen tautologie.

Alle tautologieën zijn logisch equivalent!

Overigens hebben tautologieën de bijzondere eigenschap dat ze allemaal logisch equivalent zijn. De reden hiervoor is eenvoudigweg dat ze alle alleen maar waar zijn (ongeacht de waardering), dus zijn ze uiteraard voor dezelfde waardering waar. Dit maakt het mogelijk een willekeurige tautologie te kiezen (bijvoorbeeld $p \vee \neg p$) en die een speciaal symbool en een speciale naam te geven: $\top$ (spreek uit: *verum*). Voor contradicties kunnen we een vergelijkbaar verhaal houden. Voor de standaardcontradictie $p \wedge \neg p$ wordt wel het symbool $\perp$ gebruikt (spreek uit: *falsum*). In de propositielogica rekenen we niet met $\top$ en $\perp$ alsof het afkortingen zijn, maar als nieuwe symbolen die altijd waar, respectievelijk onwaar zijn. Naast propositieletters zijn $\top$ en $\perp$ dan tevens kleinste formules.

Verum $\top$

Falsum $\perp$

OPGAVE 10.10

Waarom maakt het niet uit welke contradictie we voor $\perp$ kiezen?

OPGAVE 10.11

a Maak de waarheidstabel van $p \wedge (q \vee \top)$. Met welke formule is $p \wedge (q \vee \top)$ dus equivalent?

b Toon aan dat $\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$.

10.2.1 STANDAARDEQUIVALENTIES

Om met logische equivalenties te werken, is het handig over een aantal standaardequivalenties te beschikken. Deze equivalenties vormen tevens de kern van deze leereenheid: ze maken het bijvoorbeeld mogelijk vrij snel ook van tamelijk ingewikkelde formules te bewijzen dat het tautologieën zijn (als ze dat tenminste zijn). Sommige van deze regels, die we ook wel de wetten van de propositielogica zullen noemen, doen denken aan de middelbare-schoolalgebra waar u wellicht ooit mee te maken hebt gehad. Die indruk is juist: de propositielogica is een bepaald soort algebra, namelijk een zogeheten Boole-algebra ten opzichte van $\neg$, $\wedge$ en $\vee$, opgevat als bewerkingen op waarheidswaarden (zie verder Discrete wiskunde B). Deze algebraïsche eigenschappen maken het mogelijk met formules net zo handig te rekenen als bijvoorbeeld met vergelijkingen of met verzamelingen, zoals we dat in leereenheid 6 hebben gedaan.

Commutativiteit

Commutativiteit is de eigenschap die zegt dat een bewerking op twee uitdrukkingen even goed in omgekeerde volgorde mag worden uitgevoerd. U bent haar in leereenheid 6 al tegengekomen voor de doorsnede en de vereniging van verzamelingen. In de gewone rekenkunde is + commutatief (want $x + y = y + x$), maar – is dat niet (want $x - y \neq y - x$). Zowel conjunctie als disjunctie blijken nu commutatief:

$\wedge$ en $\vee$ zijn commutatief

$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$

We controleren de commutativiteit van $\wedge$:

φ	ψ	φ	$\wedge$	ψ	ψ	$\wedge$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
			$\uparrow$			$\uparrow$	

OPGAVE 10.12
Bewijs de commutativiteit van $\vee$ op dezelfde manier als voor $\wedge$.

VOORBEELD 10.7 Voorbeelden van commutativiteit van $\wedge$ en $\vee$ zijn:

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q)$

De equivalentie van het eerste paar formules kunnen we zien als een abstracte weergave van het feit dat ‘Stefan tennist het liefst en Gabriela speelt het liefst met haar Game Boy’ hetzelfde betekent als ‘Gabriela speelt het liefst met haar Game Boy en Stefan tennist het liefst’. «

In leereenheid 6 bleek dat $\cap$ en $\cup$ ook commutatief waren. Als u nog eens goed naar het bewijs van stelling 6.2 kijkt, zult u zien dat hierin de commutativiteit van $\wedge$ en $\vee$ gebruikt wordt.

OPGAVE 10.13
Welk ander connectief is commutatief? Bewijs dit.

OPGAVE 10.14
Welk connectief is niet commutatief?

Associativiteit

Ook *associativiteit* is bekend uit de rekenkunde en de verzamelingenalgebra: + is associatief, want $x + (y + z) = (x + y) + z$, en $\cup$ en $\cap$ ook (zie stelling 6.3). Ook conjunctie en disjunctie zijn elk op zich associatief: (hierbij gebruiken we de Griekse letter χ (chi, spreek uit: ‘gie’) die weer een willekeurige formule aanduidt)

$\wedge$ en $\vee$ zijn associatief.

$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$
$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

OPGAVE 10.15
Bewijs de associativiteit van $\wedge$ met behulp van waarheidstabellen.

Als we een formule hebben met alleen conjuncties, dan staat associativiteit ons toe om haakjes weg te laten. Of we $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ nu lezen als $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ of als $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ maakt weinig uit. Let wel: het zijn andere formules, maar ze zijn wel logisch equivalent. Hetzelfde geldt voor disjunctie. De haakjes binnen φ, ψ en χ blijven natuurlijk wel staan.

OPGAVE 10.16
Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $\rightarrow$ niet associatief is.

Distributiviteit

Commutativiteit en associativiteit zijn algebraïsche eigenschappen van één connectief. Een eigenschap die twee connectieven met elkaar in verband brengt, is *distributiviteit*. In de rekenkunde is $\times$ distributief over $+$, want $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$, maar $+$ is niet distributief over $\times$, want $1 + (1 \times 0) \neq (1 + 1) \times (1 + 0)$. Daarin verschillen de logische operaties van de rekenkundige: $\wedge$ is distributief over $\vee$, én $\vee$ is distributief over $\wedge$. Vergelijk dit weer met de distributiviteit van $\cap$ over $\cup$ en van $\cup$ over $\cap$ uit stelling 6.4.

$\wedge$ en $\vee$ zijn distributief over elkaar.

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

VOORBEELD 10.8

Een voorbeeld van de distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$ is:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Dit zou kunnen staan voor: 'Marie of zowel Christa als Edith komt op het feestje', wat hetzelfde betekent als 'Zowel Marie of Christa als Marie of Edith komt op het feestje'. Dit lijkt inderdaad juist. «

Deelformule vervangen door equivalente formule.

De voorgaande eigenschappen hebben we alleen besproken voor hele formules en nog niet voor delen daarvan. Maar ze gelden ook voor de deelformules van een formule.

VOORBEELD 10.9

Vanwege de commutativiteit van $\wedge$ geldt er dat $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee r$, want $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$. «

In een formule mag een deelformule dus vervangen worden door een formule die daarmee equivalent is.

De tot nu toe genoemde standaardequivalenties lijken nog veel op gewone rekenkundige eigenschappen. Maar andere equivalenties gelden zeker niet voor de gewone rekenkunde. We noemen enkele kenmerkende regels.

Idempotentie

De eigenschap *idempotentie* zegt dat een bewerking op twee gelijke argumenten weer hetzelfde element oplevert.

$\wedge$ en $\vee$ zijn idempotent.

$$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

Deze eigenschappen gelden niet voor $+$ en $\times$, maar bijvoorbeeld wel weer voor $\cap$ en $\cup$. In feite gelden alle in leereenheid 6 genoemde eigenschappen van ^{c}, $\cap$ en $\cup$ ook voor $\neg$, $\wedge$ en $\vee$! Dat is ook niet vreemd als u zich de definities van complement, doorsnede en vereniging voor de geest haalt.

Absorptie

Een eigenschap waarop we in de leereenheid over Boole-algebra's (Discrete wiskunde B) terugkomen, maar die we hier alvast voor de volledigheid vermelden, is *absorptie* (zie stelling 6.5 voor absorptie voor $\cap$ en $\cup$).

$\wedge$ en $\vee$ voldoen aan de absorptiewetten.

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$
$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$

Veel algebra's hebben speciale elementen waarbij een bewerking geen effect heeft. Bijvoorbeeld $x + 0 = x$ en $x \times 1 = x$ of $A \cup \varnothing = A$ en $A \cap U = A$ (U is het universum en $\varnothing$ de lege verzameling als in leereenheid 6). Zo ook in de propositielogica met de operaties $\vee$ en $\wedge$.

Eigenschappen van $\top$ en $\perp$

$\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$
$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$

OPGAVE 10.17 (Aanw)
Toon met behulp van waarheidstabellen aan dat $\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$ en $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$.

Ten opzichte van de 'verkeerde' operatie zijn $\perp$ en $\top$ heer en meester: (vergelijk $x \times 0 = 0$, $A \cup U = U$ en $A \cap \varnothing = \varnothing$).

Eigenschappen van $\top$ en $\perp$

$\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top$
$\varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$

VOORBEELD 10.10 Uit deze eigenschappen is vrij eenvoudig af te leiden dat dan ook de eigenschap $\perp \wedge \varphi \Leftrightarrow \perp$ geldt. We bewijzen dit, waarbij we alleen van standaardequivalenties gebruikmaken.

$\perp \wedge \varphi$	
$\Leftrightarrow \varphi \wedge \perp$	commutativiteit
$\Leftrightarrow \perp$	$\perp$-eigenschap

Notatie

Bij het logische equivalentiesymbool en de daarop volgende nieuwe (logisch equivalente) formule schrijven we steeds welke eigenschap we gebruikt hebben. «

Een pluspunt is dat wanneer we eenmaal een dergelijke equivalentie hebben afgeleid uit de standaardwetten, we haar ook verder kunnen gebruiken in bewijzen van meer ingewikkelde formules.

OPGAVE 10.18
Bewijs door middel van standaardequivalenties dat $\top \vee \varphi \Leftrightarrow \top$. Geef daarbij steeds aan welke eigenschappen of standaardequivalenties worden gebruikt.

Zoals al gezegd zijn $\top$ en $\perp$ equivalent met respectievelijk elke tautologie en elke contradictie. In het bijzonder geldt dit voor de standaardtautologie $\varphi \vee \neg\varphi$ en de standaardcontradictie $\varphi \wedge \neg\varphi$, waarop we uiteraard ook weer commutativiteit kunnen toepassen:

$\top$ is equivalent met tertium non datur.

$\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \top$
$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \perp$

Ten slotte zijn $\top$ en $\perp$ tot elkaar te herleiden:

$\top$ versus $\perp$

$\neg\top \Leftrightarrow \perp$
$\neg\perp \Leftrightarrow \top$

Dubbele negatie

Al eerder zagen we een eigenschap die gelijkenis vertoont met $--x = x$. De propositielogica kent de wet van de *dubbele negatie* (vergelijk met dubbel complement voor verzamelingen):

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

Wetten van De Morgan

Ook de *wetten van De Morgan* zijn we (in de opgaven 10.8b en 10.9b en ook in stelling 6.6 voor verzamelingen) al verschillende keren tegengekomen.

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Een toepassing van de eerste wet van De Morgan zagen we al in de casus: 'het is niet zo dat én de beginletter goed is én de poging een in de lijst voorkomend woord is' is equivalent met: 'de beginletter is fout (= niet goed) en/of de poging is geen in de lijst voorkomend woord'.

Augustus De Morgan was hoogleraar aan University College London en overleed in 1871. Hij deed eens de (ware) uitspraak: 'in het jaar n^2 was ik n jaar oud'. Wanneer was hij geboren? Als u er niet uitkomt, kunt u terugbladeren naar paragraaf 6.3.

We mogen met de wetten van De Morgan dus (wanneer we die van rechts naar links 'lezen') de negatie 'buiten haakjes halen', mits we dan conjunctie in disjunctie veranderen, en omgekeerd. Hierdoor vereenvoudigt de formule in die zin dat het resultaat minder connectieven bevat. Andersom kunnen we de equivalenties ook van links naar rechts gebruiken om formules in een bepaalde vorm te krijgen. Bijvoorbeeld: $\neg((p \vee \neg q) \wedge r) \Leftrightarrow \neg(p \vee \neg q) \vee \neg r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg r \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee \neg r$, waarbij we tenslotte alleen eventuele negaties direct voor de propositieletters overhouden. Over 'vereenvoudigen' en in 'standaardvorm' brengen van formules volgen verderop nog aparte paragrafen.

Voor een concreet maar kenmerkend geval hebben we in opgave 10.8a (met $\varphi = p$ en $\psi = q$) al gezien dat iedere implicatie equivalent is met een bepaalde disjunctie:

$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

Implicatie-eliminatie

Omdat we equivalenties ook op deelformules mogen toepassen, betekent dit dat we een implicatie altijd kunnen vervangen door een disjunctie met een negatie. We noemen dit *implicatie-eliminatie*.

VOORBEELD 10.11

We kunnen met de gegeven wetten nu op een andere manier (zonder waarheidstabellen) bewijzen dat $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ een tautologie is. We vermelden weer steeds de gebruikte standaardequivalentie of eigenschap, totdat we bij het eindresultaat zijn.

$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \vee \neg q)) \vee p$	associativiteit
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \top) \vee p$	$\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow \top \vee p$	$\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow \top$	$\top$-eigenschap

Merk op dat we in de laatste stap een al (met commutativiteit) afgeleide $\top$-eigenschap gebruiken. Overigens zijn er ook andere bewijzen mogelijk, onder andere door de haakjes in de derde stap anders te zetten. «

OPGAVE 10.19 (Aanw)
Bewijs met standaardequivalenties dat $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.

Equivalentie-eliminatie

Ook equivalenties kunnen we vervangen door negaties, disjuncties en conjuncties, als we de volgende logische equivalentie gebruiken die eenvoudig met bijvoorbeeld een waarheidstabel van $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ is te controleren:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

OPGAVE 10.20
Bewijs met gebruik van deze regel dat $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.

Tot slot van deze paragraaf zetten we alle standaardequivalenties op een rij. Deze standaardequivalenties kunt u gebruiken bij het maken van de opgaven of het leveren van bewijzen. Indien er gevraagd wordt een standaardequivalentie te bewijzen, kunt u natuurlijk niet volstaan met naar deze tabel te verwijzen, maar zult u gebruik moeten maken van andere standaardequivalenties of van waarheidstabellen. We merken nog op dat $\varphi \leftrightarrow \psi$ equivalent is met $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (zie voorbeeld 10.6), maar dat dit *geen* standaardequivalentie is; in plaats hiervan is equivalentie-eliminatie als standaard opgenomen. (Directe gevolgen van commutativiteit zijn in de tabel weggelaten.)

TABEL 10.1 Standaardequivalenties

naam	*equivalentie*	
commutativiteit	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$
associativiteit	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
distributiviteit	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
idempotentie	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
absorptie	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$
$\top$-eigenschappen	$\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$
	$\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top$	$\neg\top \Leftrightarrow \bot$
$\bot$-eigenschappen	$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
	$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
dubbele negatie	$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$	
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
implicatie-eliminatie	$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	
equivalentie-eliminatie	$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	

10.2.2 NORMAALVORMEN

Normaalvorm
Normaliseren

De standaardequivalenties uit de vorige paragraaf maken het mogelijk een willekeurige formule om te zetten in een equivalente formule met een speciale vorm. Zo'n vaste vorm heet een *normaalvorm* en het proces van omzetten heet *normaliseren*. Zulke normaalvormen zijn voor diverse toepassingen, onder andere in de informatica, erg handig. We gaan hier twee normaalvormen van propositielogische formules bespreken.

De eerste normaalvorm die we hier beschouwen, zien we in de formule

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Disjunctieve normaalvorm

DNV: disjunctie van conjuncties

Naar het connectief met het grootste bereik heet dit een *disjunctieve normaalvorm* (DNV). Meer in het algemeen is een DNV een disjunctie van formules die conjuncties zijn van propositieletters en negaties van propositieletters. Een DNV ziet er dus globaal zo uit:

$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee \ldots \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots)$

Anders gezegd: een DNV is een disjunctie waarvan elk disjunct een conjunctie is, en elk conjunct daarvan is weer een (negatie van een) propositieletter. Een paar grensgevallen noemen we nog even apart: ook als er geen disjunctie of conjunctie in een formule aanwezig is, spreken we toch van een DNV wanneer maar aan de overige voorwaarden voldaan is. De volgende formules zijn dus ook in DNV:

$p \wedge q \wedge \neg r$
$p \vee \neg q$

Elke formule is in DNV te brengen, maar het is zeker niet zo dat die DNV eenduidig bepaald is. Zelfs als we afzien van verwisselingen vanwege commutativiteit van $\wedge$ en $\vee$, ligt de DNV niet eenduidig vast. De voorbeeldformule $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ is equivalent met een andere, eenvoudiger DNV: $(q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.

OPGAVE 10.21 (Aanw)
Bewijs met behulp van de standaardequivalenties dat $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ en $(q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ equivalent zijn.

VOORBEELD 10.12 In dit voorbeeld zetten we de formule $\neg(p \rightarrow (q \wedge (p \vee \neg q)))$ stapsgewijs om in een DNV:

$\neg(p \rightarrow (q \wedge (p \vee \neg q)))$	
$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (q \wedge (p \vee \neg q)))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge (p \vee \neg q))$	De Morgan
$\Leftrightarrow p \wedge \neg(q \wedge (p \vee \neg q))$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg(p \vee \neg q))$	De Morgan
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge \neg\neg q))$	De Morgan
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q))$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p \wedge q)$	distributie van $\wedge$ over $\vee$
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\bot \wedge q)$	definitie $\bot$
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \bot$	$\bot$-eigenschap
$\Leftrightarrow p \wedge \neg q$	$\bot$-eigenschap

Al drie stappen voor het einde bereiken we een DNV, maar die kunnen we met behulp van $\bot$ nog aanzienlijk vereenvoudigen. «

Aan dit voorbeeld kunnen we een algemene strategie ontlenen. Om een willekeurige formule in DNV om te zetten, volstaat het om het volgende recept te volgen:

Omzetten naar DNV

– Vervang eerst $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ met behulp van implicatie- respectievelijk equivalentie-eliminatie
– duw vervolgens, met de wetten van De Morgan en de wet van de dubbele negatie, de negaties naar binnen, tot aan de propositieletters
– distribueer $\wedge$ over $\vee$.

Pas deze stappen zo vaak toe als nodig is. U hebt dan een DNV, al kan die in de meeste gevallen nog sterk vereenvoudigd worden. Voor het laatste gebruiken we ook de overige standaardequivalenties: commutativiteit, associativiteit, absorptie, idempotentie en de wetten voor $\top$ en $\bot$. Komen we aldus tenslotte bij $\bot$ uit, dan is de gegeven formule een contradictie; komen we bij $\top$ uit, dan is de gegeven formule een tautologie. Een voorbeeld daarvan zagen we al bij voorbeeld 10.11. Bij de omzetting tot $\top$ en $\bot$ is het soms handig een negatie juist weer 'buiten haakjes' te halen.

VOORBEELD 10.13 Eerst zetten we $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ volgens het vaste recept om, en vereenvoudigen vervolgens zoveel mogelijk:

$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	
$\Leftrightarrow \neg\varphi \vee (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$	associativiteit
$\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \psi)$	distributiviteit
$\Leftrightarrow (\neg\psi \vee \varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi \vee \neg\psi)$	commutativiteit
$\Leftrightarrow (\neg\psi \vee \top) \wedge (\neg\varphi \vee \top)$	$\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow \top \wedge \top$	$\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow \top$	$\top$-eigenschap

Maar het kan ook sneller:

$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	
$\Leftrightarrow \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$	associativiteit
$\Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$	De Morgan
$\Leftrightarrow \top$	$\top$-eigenschap

Uit beide afleidingen blijkt dus dat elke formule van de vorm $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ een tautologie is. «

Met hulp van een DNV kunnen we – ook als de formule meer propositieletters bevat – zonder een gigantische waarheidstabel te maken, aangeven welke waarderingen de formule waar maken: elk disjunct levert een verzameling van zulke waarderingen op.

OPGAVE 10.22 (Aanw)
Welke waarderingen van de propositieletters p, q en r maken de formule $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ waar?

OPGAVE 10.23
In opgave 9.17 constateerden we dat waarheidstabellen voor formules met veel verschillende propositieletters al snel onhanteerbaar groot dreigen te worden. Voor de formules die daar gegeven werden, zouden we in de latere 'compacte' notatie van waarheidstabellen respectievelijk $2^8 \times 19 = 4864$ en $2^3 \times 31 = 248$ waarheidswaarden moeten invullen. Met de DNV kan het veel sneller! Zet de formules uit opgave 9.17 (hier herhaald) zo nodig om in DNV en beschrijf de waarderingen die de formules waar maken.

a $((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_4)) \vee ((p_5 \wedge \neg p_6) \vee (p_7 \wedge \neg p_8))$
b $\neg((\neg(p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge (\neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r)))$

Met een DNV kunnen we laten zien dat een formule een tautologie is of, in het geval van een contingentie, kunnen we aangeven welke waarderingen de formule waar maken. Het omzetten in een DNV is vooral ook handig om vast te stellen of een formule een contradictie is.
Als we even nadenken, blijkt omzetten alleen hier al voldoende, 'vereenvoudigen' hoeft dan niet eens meer. Immers, een DNV is een contradictie wanneer de formule altijd onwaar is, maar een disjunctie is alleen onwaar als al haar disjuncten onwaar zijn. Wil een DNV dus een contradictie zijn, dan moeten al zijn disjuncten dat ook zijn! Maar een disjunct van een DNV kan alleen een contradictie zijn als er een propositieletter (zeg 'p') en een negatie daarvan ($\neg p$) in voorkomt. Conclusie: een DNV is een contradictie dan en slechts dan als elke disjunct een propositieletter en de negatie van die propositieletter bevat.

Conjunctieve normaalvorm

CNV: conjunctie van disjuncties

Voor sommige doeleinden is een *conjunctieve normaalvorm* (CNV) handiger. Een CNV is een conjunctie van disjuncties van (negaties van) propositieletters, zoals $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$. Schematisch kunnen we een CNV weergeven als:

$(\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots)$

Omzetten naar CNV

Opnieuw kunnen we aantonen dat elke propositie in CNV te brengen is: de eerste stappen zijn zelfs gelijk, alleen wordt nu uiteraard $\vee$ over $\wedge$ gedistribueerd.

VOORBEELD 10.14

Omzetten van de formule $\neg(p \rightarrow (q \wedge (p \vee \neg q)))$ in een CNV gaat in het begin (tot de distributie) als in voorbeeld 10.12, maar vervolgt dan met:

$p \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q))$
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)$ distributie van $\vee$ over $\wedge$
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg p)$ $\top$-eigenschappen

De verkregen CNV kan nog worden vereenvoudigd tot $p \wedge \neg q$ (met distributie en $\perp$-eigenschappen), wat immers ook een CNV is. «

OPGAVE 10.24
Zet achtereenvolgens om in zowel DNV als CNV:
a $p \vee \neg q$
b $\neg(p \leftrightarrow q)$
c $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

Voor zuiver logische toepassingen kan de CNV op min of meer dezelfde manier gebruikt worden als de DNV. Om de waarderingen te achterhalen die een contingentie waar maken, ligt de CNV wat minder voor de hand, want zo krijgen we omschrijvingen in de trant van: 'én p is waar of q is onwaar én p is onwaar of r is waar' en dit lijkt minder hanteerbaar dan de uitkomst voor de equivalente DNV ('p en r zijn waar of p en q zijn onwaar of q is onwaar en r is waar'). Wel kunnen we uit de CNV makkelijk aflezen of een formule een tautologie is.

OPGAVE 10.25 (Aanw)
Geef aan wanneer een formule in CNV precies een tautologie is.

Prolog

Maar de CNV heeft ook een aantal informaticatoepassingen. Een daarvan betreft de 'logische' programmeertaal *Prolog*. Een Prolog-programma bestaat uit een aantal feiten, die overeenkomen met propositieletters, en een aantal regels, die we in de propositielogica kunnen voorstellen door een implicatie van de vorm $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to p_0$, waarbij $p_0, p_1, ..., p_n$ propositieletters zijn. In het programma gelden alle feiten en regels, en logisch gezien is zo'n programma gewoon de conjunctie van de feiten en regels. Zo'n Prolog-programma is daarom op te vatten als een CNV, met de beperking dat elke conjunct daarvan een disjunctie is die hoogstens één disjunct bevat die een propositieletter is – alle andere disjuncten zijn negaties van propositieletters. Dus $p \vee \neg q$ en $\neg p \vee \neg q$ zijn wel disjuncties van de vereiste vorm, maar $p \vee q$ is dat niet.

OPGAVE 10.26 (Aanw)

Laat zien dat de feiten en regels van een Prolog-programma equivalent zijn met disjuncties van de hiervoor omschreven vorm.

Leuk is dat we dit resultaat ook kunnen omdraaien. Stel we hebben een logische formule die weergeeft wat we van een bepaald onderwerp weten of belangrijk vinden. Die formule kunnen we nu in CNV brengen. Als elke disjunctie daarin de goede vorm heeft, dan kunnen we de CNV omzetten in een aantal feiten en regels – in principe hebben we zo een Prolog-programma! Omdat Prolog ook materiaal bevat dat niet tot de propositielogica behoort, gaan we er pas later in dit blok wat dieper op in.

Een andere toepassing betreft het bijwerken van informatie in gegevensbanken. Al de informatie in de gegevensbank is samen te brengen in één formule in CNV. Als de nieuwe informatie nu alleen een aanvulling is op de bestaande informatie en daarmee niet in conflict is, dan kunnen we die informatie weer in CNV brengen en eenvoudigweg door een conjunctie aan de CNV van de gegevensbank toevoegen.

10.2.3 VEREENVOUDIGEN EN BEZUINIGEN

Logische equivalenties zijn nuttig voor het zoveel mogelijk vereenvoudigen van een formule, wat ook bij het programmeren van pas kan komen, zelfs bij programmeertalen die niet zoals Prolog direct op logica gebaseerd zijn.

VOORBEELD 10.15

In diverse programmeertalen (zoals Pascal) komen opdrachten voor van de vorm:

```
als zus-of-zo dan dit-of-dat
terwijl zus-of-zo doe dit-of-dat
```

De voorwaarde 'zus-of-zo' is de voorwaarde waaronder de opdracht 'dit-of-dat' wordt uitgevoerd. Bij 'als ... dan' is dit eenmalig, bij 'terwijl' is dit net zo vaak als maar kan. Om uiteenlopende redenen wil de voorwaarde wel eens lang en onnodig ingewikkeld worden, wat de doorzichtigheid en de efficiëntie van het programma niet ten goede komt. Om zowel computertijd als programmeertijd te besparen, doen we er goed aan eerst zoveel mogelijk te vereenvoudigen. Zo kunnen we

```
als niet ((x = 1 of y < 0) en (y < 0 of niet x = 1))
dan x := x + y
```

zonder probleem vervangen door het simpele (>= betekent ≥)

```
als y >= 0 dan x := x + y
```

De notatie ':=' wordt in programmeertalen gebruikt. In programmeertalen kunnen variabelen een bepaalde waarde 'hebben'. Die houden ze totdat er een andere waarde aan wordt toegekend. Met ':=' wordt aangegeven dat er een nieuwe waarde wordt toegekend. In dit voorbeeld betekent $x := x + y$ dat aan de variabele x een nieuwe waarde wordt toegekend, namelijk de som van de waarden die x en y tot op dat moment hadden. «

OPGAVE 10.27
Laat zien dat 'niet (($x = 1$ of $y < 0$) en ($y < 0$ of niet $x = 1$))' vervangen kan worden door '$y >= 0$', waarbij u '$y >= 0$' logisch als de negatie van '$y < 0$' dient op te vatten.

Het kan ook met minder connectieven ...

Een andere weg die we wel eens moeten inslaan, is ons aanpassen aan de mogelijkheden die een specificatietaal of programmeertaal biedt. We weten al dat we $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ kunnen vervangen door de connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$; met andere woorden: dat we met $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ evenveel kunnen 'zeggen' als met $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$. Kan het met nog minder? Ja, we kunnen inderdaad verder bezuinigen, door bijvoorbeeld $\vee$ weg te werken. Dit kan met behulp van de equivalentie $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ die met de wetten van De Morgan en dubbele negatie is af te leiden. Met $\neg$, $\wedge$ en (uiteraard) propositieletters kunnen we inderdaad alles uitdrukken wat we met alle connectieven konden. Hetzelfde geldt voor het stel connectieven $\neg$ en $\vee$, en voor het stel $\neg$ en $\rightarrow$.

OPGAVE 10.28
Van welke equivalentie moeten we gebruikmaken om een conjunctie om te zetten in een equivalente formule die alleen de connectieven $\neg$ en $\vee$ gebruikt? Bewijs dit met behulp van standaardequivalenties.

Ten opzichte van de bekende connectieven kan het niet met minder, bijvoorbeeld $\rightarrow$ alleen is niet voldoende. De in paragraaf 9.4.1 geïntroduceerde connectieven nor en nand kunnen het wel in hun eentje af. Om te laten zien dat nor alleen al voldoende is, volstaat het om $\neg$ en $\wedge$ uit te drukken in nor. Hoe moet dat? We brengen in herinnering dat we nor moesten lezen als 'noch ... noch'. 'Noch p noch q' betekent intuïtief hetzelfde als 'niet p en ook niet q', en dit suggereert de volgende equivalenties:

$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \text{ nor } \varphi$
$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \text{ nor } \neg\psi \Leftrightarrow (\varphi \text{ nor } \varphi) \text{ nor } (\psi \text{ nor } \psi)$

OPGAVE 10.29
Bewijs '$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \text{ nor } \varphi$' en '$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (\varphi \text{ nor } \varphi) \text{ nor } (\psi \text{ nor } \psi)$' met waarheidstabellen.

OPGAVE 10.30
Geef vergelijkbare equivalenties voor nand die aantonen dat dit connectief alleen ook voldoende is om elke propositielogische formule mee weer te geven.

10.3 Logisch gevolg

Naast tautologieën en logische equivalenties is er nog een derde soort logische wetten. Het gaat hier om een speciaal verband tussen twee of meer formules. De bedoeling van dit verband is een formele afspiegeling te geven van wat we intuïtief een correcte redenering noemen. Welke eigenschap van de waarheidstabellen van de betrokken formules is hiervoor verantwoordelijk? Om dit te achterhalen, beschouwen we een eenvoudige redenering: uit 'Jan is een goede schaker en Karin een goede dammer' kan worden geconcludeerd: 'Jan is een goede schaker'. Het *uitgangspunt* is 'Jan is een goede schaker en Karin een goede dammer' en de *conclusie* is 'Jan is een goede schaker'. Hier is geen speld tussen te krijgen: de redenering is correct. Zij nu p: 'Jan is een goede schaker' en q: 'Karin is een goede dammer'. We maken vervolgens de waarheidstabellen van uitgangspunt ($p \wedge q$) en conclusie (p):

Uitgangspunt
Conclusie

p	q	p	$\wedge$	q	p
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0
			↑		↑

Vergelijken we de aangegeven kolommen, dan vallen de volgende punten op:
– uitgangspunt en conclusie zijn niet altijd waar
– uitgangspunt en conclusie hoeven zelfs niet dezelfde waarheidswaarde te hebben
– de conclusie is waar voor de waardering die het uitgangspunt waar maakt, of anders gezegd: als het uitgangspunt waar is, dan is ook de conclusie waar.

In het algemeen kan een conclusie ψ in een correcte redenering natuurlijk ook op meer dan één uitgangspunt gebaseerd zijn, zeg op uitgangspunten $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ (zie ook voorbeeld 10.18 verderop).
Deze eigenschappen geven aanleiding tot een nauwkeurige definitie. In de logica spreken we niet van een 'correcte redenering', maar van *logisch gevolg* (en soms van 'geldige gevolgtrekking').

Logisch gevolg

DEFINITIE 10.5
De formule ψ is een *logisch gevolg* van $\varphi_1, ..., \varphi_n$ als elke waardering die alle $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt, ook ψ waar maakt.

Notatie
$\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi$

VOORBEELD 10.16
De redenering van het begin van deze paragraaf kunnen we nu weergeven als $p \wedge q \Rightarrow p$, dat wil zeggen: p is een logisch gevolg van $p \wedge q$. Immers, er was blijkens de tabel maar één waardering die $p \wedge q$ waar maakte, en die maakt inderdaad de conclusie p ook waar. In dit voorbeeld is dus $n = 1$ en φ_1 de formule $p \wedge q$. «

Merk op dat er in definitie staat: voor élke waardering die de uitgangspunten waar maakt, moet de conclusie waar zijn. Het is in het algemeen niet voldoende dat er een (of één) waardering bestaat die zowel uitgangspunt als conclusie waar maakt. Zeker bij alledaagse redeneringen zijn we wel eens ten onrechte geneigd de redenering voor correct aan te zien, als de conclusie waar is (of lijkt) in de gewone wereld.

VOORBEELD 10.17 Uit ‘Er komen meer wegen in Nederland precies dan als Nederland geasfalteerd raakt’ is het niet correct te concluderen dat er meer wegen in Nederland komen. In formules: $p \leftrightarrow q \not\Rightarrow p$, dat wil zeggen: p is geen logisch gevolg van $p \leftrightarrow q$ (zie opgave 10.31). «

OPGAVE 10.31
Maak de waarheidstabellen van $p \leftrightarrow q$ en p en ga na dat $p \leftrightarrow q \not\Rightarrow p$.

Vandaar dat we in de definitie van logisch gevolg eisen dat de conclusie waar is voor elke waardering die de uitgangspunten waar maakt. Wanneer er meerdere uitgangspunten zijn, moeten we alleen kijken naar die waarderingen die alle uitgangspunten waar maken.

VOORBEELD 10.18 We herhalen de redenering uit de introductie van leereenheid 9:

‘De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed. Maar de tv werkt wel goed. Dus de afstandsbediening is kapot.’

Kiezen we p: ‘De afstandsbediening is kapot’ en q: ‘De tv werkt goed’, dan kunnen we gaan kijken of p een logisch gevolg is van $p \vee \neg q$ en q samen. Dat zien we weer aan de waarheidstabellen:

p	q	p	$\vee$	$\neg$	q	q	p
1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	$\boxed{1}$	1
1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0

Uit de tabel blijkt dat de beide uitgangspunten alleen tegelijk waar (omkaderde enen) zijn als p en q waar zijn. Met andere woorden: we hoeven slechts naar de eerste rij waarheidswaarden te kijken, en daar is de conclusie ook waar. Kortom: $p \vee \neg q, q \Rightarrow p$. In dit voorbeeld is dus $n = 2$, φ_1 de formule $p \vee \neg q$ en φ_2 de formule q in definitie 10.5. «

De logische gevolgen uit de volgende opgave komen regelmatig terug en zijn daarom met fraaie namen gesierd. We komen er in paragraaf 10.3.1 op terug.

Latijnse namen als modus ponens verraden iets van de lange geschiedenis van de logica. In de late Middeleeuwen, zo rond 1200, vond er een opbloei van het vakgebied plaats. In die periode werd getracht diverse vormen (modi) van redeneren te onderscheiden, grotendeels nog naar het voorbeeld van Aristoteles. Uiteraard kregen deze vormen namen in de wetenschappelijke taal van die tijd.

OPGAVE 10.32 (Aanw)
Bewijs de juistheid van de volgende logische gevolgen.

a $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$ (modus ponens)
b $p, \neg p \Rightarrow q$ (ex falso)
c $p \rightarrow q \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (contrapositie)
d $p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$ (hypothetisch syllogisme)

OPGAVE 10.33
De tweede redenering uit de introductie van leereenheid 9 luidt: 'Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is. Het schilderij hangt hier niet. Dus is het gestolen.' Laat zien dat deze redenering niet correct is, dat wil zeggen: $q \rightarrow \neg p, \neg p \not\Rightarrow q$.

OPGAVE 10.34
Ga na in welke gevallen er sprake is van logische gevolgen:
a $p, q \; ?\!\!\Rightarrow p \wedge q$
b $p \rightarrow q, q \; ?\!\!\Rightarrow p$
c $p \wedge q, q \; ?\!\!\Rightarrow p \vee q$
d $p \rightarrow q \; ?\!\!\Rightarrow p \wedge q$

Direct uit de definitie van 'logisch gevolg' kunnen we een verband met logische equivalentie halen:

STELLING 10.2

Er geldt dat $\varphi \Leftrightarrow \psi$ precies dan als $\varphi \Rightarrow \psi$ én $\psi \Rightarrow \varphi$.

Bewijs
Als φ en ψ logisch equivalent zijn, dan hebben ze voor elke waardering dezelfde waarheidswaarde, dus als φ waar is, dan moet ψ waar zijn, en omgekeerd. Wanneer andersom $\varphi \Rightarrow \psi$ en $\psi \Rightarrow \varphi$, dan zijn φ en ψ voor dezelfde waarderingen waar, en dus ook voor dezelfde waarderingen onwaar, zodat $\varphi \Leftrightarrow \psi$. (Een alternatief bewijs gebruikt voorbeeld 10.6 en stellingen 10.1 en 10.3). □

$\Rightarrow$ versus $\rightarrow$

Net als bij de relatie tussen $\Leftrightarrow$ en $\leftrightarrow$, is er ook bij implicatie en logisch gevolg sprake van een nauwe relatie, zonder dat de tekens en de uitdrukkingen door elkaar mogen worden gehaald. Ook hier is het wezenlijke verschil dat $\rightarrow$ deel uitmaakt van de propositielogische taal, en $\Rightarrow$ niet: $\Rightarrow$ is weer een relatie tussen formules. Ook $\Rightarrow$ kunnen we aaneenschakelen, en vanwege stelling 10.2 mogen daar zelfs logische equivalenties tussen zitten. Schrijven we voor zekere formules $\varphi \Rightarrow \psi$, dan stelt dit dat ψ inderdaad volgt uit φ, terwijl als we $\varphi \rightarrow \psi$ opschrijven, deze formule best onwaar kan zijn. Maar ook hier openbaart zich een mooie overeenkomst tussen bepaalde tautologieën (links) en logische gevolgen (rechts):

$\Rightarrow$ mogen we aaneenschakelen

$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$	$p, \neg p \Rightarrow q$
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$
$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p$
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

Dit suggereert een algemeen verband, dat inderdaad bewijsbaar is.

STELLING 10.3

Formule $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ is een tautologie precies dan als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$.

OPGAVE 10.35 (Aanw)
Geef het bewijs van stelling 10.3.

We kunnen dus zowel het probleem of een bepaalde redenering correct is als het probleem of twee formules equivalent zijn, reduceren (terugbrengen) tot het controleren of de overeenkomstige formule een tautologie is. Dit is, zoals we eerder zagen, overigens alleen aan te raden wanneer het aantal propositieletters klein is. Maar wanneer we al een programma tot onze beschikking hebben dat de waarheidstabel van een formule kan uitrekenen, dan biedt een dergelijke reductie wel voordelen.

(Anecdote over het reduceren van problemen van Smullyan uit: What is the name of this book)

Wat is het verschil tussen een wiskundige en een natuurkundige?
Daar is een test voor.

Vraag 1: stel dat u thee wilt maken, hoe gaat u dan te werk? De natuurkundige antwoordt: ‘Ik zet een ketel koud water op het vuur, en als het kookt, haal ik het van het vuur af, schenk het hete water in de theepot en doe er thee bij.’ De wiskundige zegt: ‘Ik doe hetzelfde.’
Goed, tot zover zijn natuurkundigen en wiskundigen gelijk. Maar de volgende vraag maakt wel verschil.
Vraag 2: stel nu dat u een ketel heet water hebt dat net van de kook af is, hoe maakt u dan thee? De natuurkundige antwoordt: ‘Dat is makkelijk, schenk het hete water in de theepot en doe er thee bij.’ De wiskundige zegt: ‘Dat is inderdaad eenvoudig. Ik laat het water afkoelen, waarmee ik dit probleem reduceer tot het vorige!’

10.3.1 STANDAARDGEVOLGEN

Net als bij logische equivalentie is het ook bij logisch gevolg vaak handig om slechts een beperkt aantal standaardregels te gebruiken. Zulke regels liggen bijvoorbeeld ten grondslag aan bepaalde computerprogramma’s die proberen een tautologie of logisch gevolg af te leiden. Voor zo’n programma kan gekozen worden uit een flink aantal in omloop zijnde regels. In tabel 10.2 noemen we de meest gangbare standaardgevolgen. U hoeft de met een sterretje gemarkeerde regels niet te kennen.

TABEL 10.2 Standaardgevolgen

naam	*gevolg*
ex falso	$\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi$
modus ponens	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$
modus tollens*	$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$
contrapositie	$\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
reductio ad absurdum	als $\varphi, \neg\psi \Rightarrow \bot$, dan $\varphi \Rightarrow \psi$
hypothetisch syllogisme*	$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \varphi \rightarrow \chi$
conjunctie-introductie	$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$
conjunctie-eliminatie	$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$

Een aantal van deze regels wordt (vaak stilzwijgend) gebruikt bij wiskundige bewijzen en ziet u daarom in Discrete wiskunde B terug.

Ex falso is een gangbare afkorting van ‘ex falso sequitur quodlibet’ (uit een contradictie volgt alles wat u maar wilt) en hebt u in opgave 10.32b bewezen. Ook modus ponens, contrapositie en hypothetisch syllogisme zijn in opgave 10.32 bewezen. Reductio ad absurdum is (net als stelling 10.2) niet zozeer zelf een logisch gevolg, maar een relatie tussen logische gevolgen. Het bewijs wordt gevraagd in opgave 10.37. De regels voor conjunctie ten slotte zijn weer eenvoudig te bewijzen (zie opgave 10.34a voor conjunctie-introductie).
De regels voor conjunctie lijken wel een beetje flauw, maar zijn zeker niet onbelangrijk: met de regels ex falso, reductio ad absurdum, conjunctie-introductie en conjunctie-eliminatie, aangevuld met de standaard-equivalenties, kunnen we alle logische gevolgen van de propositielogica afleiden, een feit waar we hier verder niet op ingaan. Dat we standaard-equivalenties in afleidingen van logische gevolgen mogen gebruiken, volgt direct uit stelling 10.2. Om die equivalenties te kunnen gebruiken, maken we eerst met conjunctie-introductie van alle uitgangspunten (formules vóór $\Rightarrow$) één formule. We illustreren dit in voorbeeld 10.19.

VOORBEELD 10.19 We bewijzen dat $\neg p \to \neg q, q \Rightarrow p$ door eerst het logisch gevolg conjunctie-introductie toe te passen en vervolgens met standaardequivalenties naar het antwoord toe te werken. Aan het slot wordt het logisch gevolg conjunctie-eliminatie toegepast om op de gewenste conclusie uit te komen.

$\neg p \to \neg q, q$	
$\Rightarrow (\neg p \to \neg q) \wedge q$	conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow (\neg\neg p \vee \neg q) \wedge q$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge q$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)$	distributie
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \bot$	definitie $\bot$
$\Leftrightarrow (p \wedge q)$	$\bot$-eigenschap
$\Rightarrow p$	conjunctie-eliminatie «

OPGAVE 10.36
Bewijs met gebruik van alleen de standaardgevolgen ex falso, reductio ad absurdum, de conjunctie-regels en de standaardequivalenties:
a $p \vee \neg q, q \Rightarrow p$
b $p, p \to q \Rightarrow q$
c $\neg\varphi \to \neg\psi \Rightarrow \psi \to \varphi$
Bij b leidt u modus ponens af uit de aangegeven regels, bij c evenzo contrapositie (ga nog over van φ en ψ op $\neg\varphi$ en $\neg\psi$).

OPGAVE 10.37 (Aanw)
a Bewijs het standaardgevolg reductio ad absurdum.
b Laat zien dat conjunctie-eliminatie afgeleid kan worden uit reductio ad absurdum en conjunctie-introductie (en standaardequivalenties).

SAMENVATTING

Er zijn vier soorten wetten in de (propositie)logica: tautologieën, contradicties, logische equivalenties en logisch gevolgen.

Een *tautologie* is een formule van de propositielogica die waar is voor elke waardering. Een *contradictie* is een formule die onwaar is voor elke waardering. Een formule die geen tautologie en ook geen contradictie is, noemen we een contingentie.
Twee formules zijn *logisch equivalent* als ze voor iedere waardering dezelfde waarheidswaarden hebben (notatie $\varphi \Leftrightarrow \psi$). Een formule (conclusie) ψ is een *logisch gevolg* van een aantal uitgangspunten (φ_1, ..., φ_n) als elke waardering die alle uitgangspunten tegelijk waar maakt, ook ψ waar maakt (notatie $\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi$). Bepaalde tautologieën zijn systematisch verbonden met logische equivalenties en gevolgen: $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie precies dan als $\varphi \Leftrightarrow \psi$, en $(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ is een tautologie precies dan als $\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi$.

Om niet met (mogelijk zeer grote) waarheidstabellen te hoeven rekenen, is het verstandig vaak terugkerende wetten aan hun vorm te kunnen herkennen. Met behulp van de standaardwetten kunnen we vervolgens alle andere wetten afleiden. De standaardwetten zijn er in vier soorten:
i standaardtautologieën: met name de wet van de uitgesloten derde (tertium non datur) $\varphi \vee \neg\varphi$ (afgekort tot $\top$, 'verum')
ii standaardcontradicties, in het bijzonder $\varphi \wedge \neg\varphi$ (kortweg $\bot$, 'falsum').
iii standaardequivalenties: deze vormen de kern van deze leereenheid, en zijn ondergebracht in de volgende tabel:

naam	*equivalentie*	
commutativiteit	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$
associativiteit	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
distributiviteit	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
idempotentie	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
absorptie	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$
$\top$-eigenschappen	$\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$
	$\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top$	$\neg\top \Leftrightarrow \bot$
$\bot$-eigenschappen	$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow \bot$
	$\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
dubbele negatie	$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$	
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
implicatie-eliminatie	$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	
equivalentie-eliminatie	$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	

iv standaardgevolgen: de logica kent een groot aantal standaardlogische gevolgen waarvan u de volgende moet kennen en kunnen toepassen:

naam	*gevolg*
ex falso	$\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi$
modus ponens	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$
contrapositie	$\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
reductio ad absurdum	als $\varphi, \neg\psi \Rightarrow \bot$, dan $\varphi \Rightarrow \psi$
conjunctie-introductie	$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$
conjunctie-eliminatie	$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$

Omdat we in afleidingen van logische gevolgen ook de standaard-equivalenties mogen gebruiken, kunnen we bij logische gevolgen volstaan met slechts vier standaardgevolgen: ex falso, reductio ad absurdum, conjunctie-introductie en conjunctie-eliminatie.

Voor diverse (puur logische en informaticagerichte) toepassingen is het van belang formules in een normaalvorm te brengen. De disjunctieve normaalvorm (DNV) is een disjunctie van conjuncties van (negaties van) propositieletters. De conjunctieve normaalvorm (CNV) is daarentegen een conjunctie van disjuncties van (negaties van) propositieletters.

ZELFTOETS

1 Ga voor elk van de volgende formules na of het een tautologie, contingentie of contradictie is.
a $p \leftrightarrow \neg p$
b $p \to (q \to p)$
c $\neg((p \to q) \to p)$

2 a Bewijs met een waarheidstabel dat $(p \wedge q) \to p$ een tautologie is.
b Leid ook door middel van standaardequivalenties af dat $(p \wedge q) \to p$ een tautologie is.
c Welk logisch gevolg hangt samen met deze tautologie?
d Hoe is dit gevolg ook direct in te zien?

3 a Wat is logische equivalentie?
b Laat met waarheidstabellen zien dat $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$ (de eerste absorptie-eigenschap).
c Leid nu de tweede absorptie-eigenschap $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$ af uit de eerste absorptie-eigenschap, met behulp van distributiviteit en idempotentie.

4 a Zet de formule $(\neg p \to q) \to (r \leftrightarrow \neg s)$ om in disjunctieve normaalvorm (DNV).
b Voor welke waarderingen is deze DNV waar?
c Waarom is de formule uit onderdeel a dan ook voor precies deze waarderingen (uit b) waar?

5 a Toon door middel van waarheidstabellen aan dat $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$.
b Leid dit ook af met behulp van de standaardgevolgen en standaard-equivalenties.
c Bewijs nu uitsluitend met behulp van conjunctie-introductie, reductio ad absurdum en standaardequivalenties dat $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.

TERUGKOPPELING LEEREENHEID 10

Uitwerking van de opgaven

10.1 **a** De waarheidstabel van $p \to p$ is:

p	p	$\to$	p
1	1	1	1
0	0	1	0
		↑	

De hoofdkolom bevat alleen enen, dus $p \to p$ is een tautologie.
b zie de uitwerking van opgave 9.25b.
c zie de uitwerking van opgave 9.23d.
d zie de uitwerking van opgave 9.25c.

10.2 **a** De waarheidstabel van $\neg(p \to \neg p)$ is:

p	$\neg$	$(p$	$\to$	$\neg$	$p)$
1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0
	↑				

De formule is niet voor elke waardering waar en is dus geen tautologie.
b De waarheidstabel van $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ is:

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q)$
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
						↑					

De formule is waar voor elke waardering (zie aangegeven hoofdkolom) en is derhalve een tautologie.
c Zie voorbeeld 9.17; de formule is niet voor elke waardering waar en is dus geen tautologie.
d De waarheidstabel van $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ is:

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$p)$
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
					↑					

De formule is waar voor elke waardering en derhalve een tautologie.

10.3 **a** De waarheidstabel wordt:

p	$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$p)$
1	0	1	1	1
0	0	0	1	0

De formule is inderdaad voor elke waardering onwaar en is daarmee een contradictie.

b De waarheidstabel wordt:

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

De hoofdkolom bevat alleen nullen en dus is de formule een contradictie.

c De waarheidstabel wordt:

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(\neg$	q	$\wedge$	$\neg$	$p)$
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

De hoofdkolom bevat weer alleen nullen en dus is hier sprake van een contradictie.

10.4 **a** De waarheidstabel wordt:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0

De formule is steeds onwaar en is dus een contradictie.

b De waarheidstabel wordt:

p	q	$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0

De formule is voor een waardering waar en is dus geen contradictie.

c De waarheidstabel wordt:

p	q	$\neg$	$(((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$p)$	$\to$	$p)$
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
		↑							

De formule is voor elke waardering onwaar en is dus een contradictie.

10.5 Als φ een tautologie is, dan is φ waar voor elke waardering, maar dan is $\neg\varphi$ onwaar voor elke waardering, en dus een contradictie. En omgekeerd, als $\neg\varphi$ een contradictie is, dan is $\neg\varphi$ onwaar voor elke waardering, en dus is φ waar voor elke waardering, kortom φ is een tautologie. De tweede overeenkomst gaat precies zo.

10.6 De formules in 10.2a en 10.2c zijn contingenties, alsmede 10.4b.

10.7 Formules in a en b zijn tautologieën, want de waarheidstabellen zijn:

φ	φ	$\leftrightarrow$	$\neg$	$\neg$	φ
1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0
		↑			

φ	ψ	$(\varphi$	$\wedge$	$\neg$	$\varphi)$	$\to$	ψ
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0
						↑	

Wanneer we p en q vervangen door respectievelijk φ en ψ, krijgen we formule d uit opgave 10.1d, e uit 10.2b en f uit 10.2d.

10.8 **a** Er geldt $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, want de waarheidswaarden in de aangegeven kolommen stemmen overeen:

p	q	p	$\to$	q	$\neg$	p	$\vee$	q
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0
			↑				↑	

b Er geldt: $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\psi \vee \neg\varphi$, want de aangegeven kolommen zijn gelijk:

φ	ψ	$\neg$	$(\varphi$	$\wedge$	$\psi)$	$\neg$	ψ	$\vee$	$\neg$	φ
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
		↑						↑		

c Er geldt: $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$, want de aangegeven kolommen zijn gelijk:

φ	ψ	φ	$\rightarrow$	ψ	$\neg$	ψ	$\rightarrow$	$\neg$	φ
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
			↑				↑		

10.9 **a** Er geldt: $\neg(p \vee q) \not\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, want de hoofdkolommen zijn ongelijk:

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
		↑						↑		

b Er geldt: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, want:

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
		↑						↑		

c Er geldt: $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q$, want:

p	q	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	p	$\leftrightarrow$	$\neg$	q
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
		↑					↑		

d Er geldt: $p \leftrightarrow q \not\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, want:

p	q	p	$\leftrightarrow$	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
			↑					↑			

10.10 Elke contradictie is onwaar voor alle mogelijke waarderingen, en heeft dientengevolge dezelfde waarheidswaarde als $\perp$, en is daarmee dus equivalent.

10.11 **a** De waarheidstabel van $p \wedge (q \vee \top)$ is:

p	q	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\top)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1
			↑			

Dus $p \wedge (q \vee \top) \Leftrightarrow p$.

b De waarheidstabellen om $\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$ aan te tonen zijn:

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ	$\top$
1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
		↑			↑

10.12 De commutativiteit van $\vee$, ofwel de logische equivalentie $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, volgt uit de waarheidstabellen:

φ	ψ	φ	$\vee$	ψ	ψ	$\vee$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
			↑			↑	

10.13 De materiële equivalentie $\leftrightarrow$ is ook commutatief, dat wil zeggen $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \psi \leftrightarrow \varphi$:

φ	ψ	φ	$\leftrightarrow$	ψ	ψ	$\leftrightarrow$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0
			↑			↑	

10.14 Blijkens zijn waarheidstabel is $\rightarrow$ duidelijk niet commutatief. Omdat negatie geen bewerking op twee formules is, is de term commutativiteit niet van toepassing op $\neg$.

10.15 Het bewijs van $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ gaat met een paar flinke waarheidstabellen:

φ	ψ	χ	$(\varphi$	$\wedge$	$\psi)$	$\wedge$	χ	φ	$\wedge$	$(\psi$	$\wedge$	$\chi)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						↑			↑			

10.16 Een voorbeeld waaruit blijkt dat $\to$ niet associatief is: $p \to (p \to p) \not\Leftrightarrow (p \to p) \to p$. Met een waarheidstabel kunt u dit nagaan. Ook $\bot \to (\bot \to \bot) \not\Leftrightarrow (\bot \to \bot) \to \bot$ voldoet, en er zijn nog oneindig veel andere tegenvoorbeelden.

10.17 De waarheidstabellen waarin $\top$ en $\bot$ voorkomen, worden:

φ		φ	$\wedge$	$\top$		φ	$\vee$	$\bot$
1		1	1	1		1	1	0
0		0	0	1		0	0	0
$\uparrow$			$\uparrow$				$\uparrow$	

10.18 $\top \vee \varphi$
$\Leftrightarrow \varphi \vee \top$ commutativiteit
$\Leftrightarrow \top$ $\top$-eigenschap

10.19 $p \to q$
$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow q \vee \neg p$ commutativiteit
$\Leftrightarrow \neg\neg q \vee \neg p$ dubbele negatie
$\Leftrightarrow \neg q \to \neg p$ implicatie-eliminatie

10.20 $\varphi \leftrightarrow \psi$
$\Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ equivalentie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$ commutativiteit
$\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$ dubbele negatie
$\Leftrightarrow \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$ equivalentie-eliminatie

10.21 $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ commutativiteit $\vee$
$\Leftrightarrow (q \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ commutativiteit $\wedge$
$\Leftrightarrow ((q \wedge \neg r) \wedge (p \vee \neg p)) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ distributiviteit
$\Leftrightarrow ((q \wedge \neg r) \wedge \top) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ $\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ $\top$-eigenschap

10.22 De verschillende disjuncten sluiten elkaar uit, dus er zijn precies drie waarderingen (die we w_1, w_2 en w_3 noemen) die de formule waar maken:
$w_1(p) = 1, w_1(q) = 1, w_1(r) = 0$
$w_2(p) = 1, w_2(q) = 0, w_2(r) = 1$
$w_3(p) = 0, w_3(q) = 1, w_3(r) = 0$.

10.23 **a** De formule is al in DNV en is waar voor elke waardering w waarvoor $w(p_1) = 1$ en $w(p_2) = 0$, of $w(p_3) = 1$ en $w(p_4) = 0$, of $w(p_5) = 1$ en $w(p_6) = 0$, of $w(p_7) = 1$ en $w(p_8) = 0$. Een aardig vervolgvraagje als u Combinatoriek al achter de kiezen hebt: hoeveel van de 256 waarderingen van $p_1, ..., p_8$ maken nu de formule waar?
b We gebruiken achtereenvolgens een paar keer De Morgan en ten slotte dubbele negatie om een DNV te vinden:

$\neg((\neg(p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge (\neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r)))$
$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge \neg r)) \vee \neg(\neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r))$
$\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q \wedge r) \vee \neg\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg\neg(p \wedge \neg q \wedge r) \vee \neg\neg(\neg p \wedge q \wedge r)$
$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Er zijn dus vier waarderingen die de formule waar maken: $w_1(p) = w_1(q) = w_1(r) = 1$; $w_2(p) = w_2(q) = 1$ en $w_2(r) = 0$; $w_3(p) = 1$, $w_3(q) = 0$, $w_3(r) = 1$; $w_4(p) = 0$, $w_4(q) = 1$, $w_4(r) = 1$.

10.24 **a** De formule $p \vee \neg q$ is al zowel een DNV als een CNV. Immers, $p \vee \neg q$ kan opgevat worden als een disjunctie van twee conjuncties, indien p en $\neg q$ als grensgevallen van conjuncties worden opgevat. Of $p \vee \neg q$ kan opgevat worden als een grensgeval van een conjunctie, met maar één conjunct, namelijk $p \vee \neg q$ dat een disjunctie is.

b $\neg(p \leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	equivalentie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ [een CNV!]	dubbele negatie
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge q)$ [een DNV]	distributiviteit
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$	$\perp$-eigenschappen

De DNV die we na distributie verkregen, is nog wat vereenvoudigd.

c $(p \to q) \leftrightarrow (q \to r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \vee r)$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg q \vee r))$	equivalentie-eliminatie
$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee ((\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg\neg q \wedge \neg r))$	De Morgan
$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg\neg p \wedge (\neg q \wedge \neg\neg q) \wedge \neg r)$	associativiteit
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ [een CNV]	$\perp$-eigenschappen
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ [een DNV]	distributiviteit en $\perp$

10.25 Een CNV is een tautologie dan en slechts dan als elk conjunct een propositieletter en de negatie van die propositieletter bevat.

Bewijs

Een CNV is een tautologie (precies dan) wanneer hij voor elke waardering waar is, maar een conjunctie is alleen waar als alle conjuncten waar zijn, dus moet elk conjunct een tautologie zijn. Elk conjunct van een CNV is een disjunctie van propositieletters en negatie van propositieletters: die is dan en alleen dan altijd waar als er een propositieletter en haar negatie in voorkomen. Immers, als dit niet zo is, dan kunnen we altijd een waardering kiezen die deze disjunctie onwaar maakt: laat de waardering maar elke propositieletter die zonder negatie optreedt, onwaar maken, en elke propositieletter die met negatie optreedt, waar (bijvoorbeeld voor $p \vee \neg q \vee r$: $w(p) = 0$, $w(q) = 1$ en $w(r) = 0$).

10.26 Een Prolog-feit is gewoon een propositieletter, en voldoet daarmee aan de eis: net als bij de definitie van DNV en CNV beschouwen we dit als een grensgeval van een disjunctie. Een Prolog-regel is van de vorm $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to p_0$. Met de standaardequivalenties kunnen we deze formule in de gewenste vorm brengen:

$(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to p_0$	
$\Leftrightarrow \neg(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \vee p_0$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg p_1 \vee ... \vee \neg p_n \vee p_0$	$(n - 1)$ maal De Morgan

10.27 Noem p: '$x = 1$' en q: '$y < 0$'. Dan kunnen we de voorwaarde formuleren als $\neg((p \vee q) \wedge (q \vee \neg p))$ en dit vereenvoudigt tot $\neg q$ (hier volgt een snel bewijs, het kan uiteraard ook via de omweg van een DNV):

$\neg((p \vee q) \wedge (q \vee \neg p))$	
$\Leftrightarrow \neg((q \vee p) \wedge (q \vee \neg p))$	commutativiteit
$\Leftrightarrow \neg(q \vee (p \wedge \neg p))$	distributiviteit
$\Leftrightarrow \neg(q \vee \bot)$	$\bot$-eigenschap
$\Leftrightarrow \neg q$	$\bot$-eigenschap

10.28 Voor een conjunctie $\varphi \wedge \psi$ geldt: $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. In de rechterformule komen alleen $\neg$ en $\vee$ als connectieven voor. Bewijs:

$\varphi \wedge \psi$	
$\Leftrightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	De Morgan

10.29 De waarheidstabellen van $\neg\varphi$ en φ nor φ zijn:

φ	$\neg$	φ	φ	nor	φ
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0

De aangegeven kolommen zijn gelijk, dus $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ nor φ.
Ook de waarheidswaarden van (φ nor φ) nor (ψ nor ψ) en ($\varphi \wedge \psi$) zijn gelijk:

φ	ψ	(φ	nor	φ)	nor	(ψ	nor	ψ)	(φ	$\wedge$	ψ)
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

10.30 De uitwerking van opgave 9.26 geeft aanleiding tot de volgende equivalenties: '$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ nand φ' en '$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow$ (φ nand ψ) nand (φ nand ψ)'.

10.31 Met waarheidstabellen is direct te zien dat $p \leftrightarrow q \not\Rightarrow p$:

p	q	p	$\leftrightarrow$	q	p
1	1	1	$\boxed{1}$	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	0	$\boxed{1}$	0	0

De eerste en laatste waardering maken het uitgangspunt waar (omkaderde enen), maar voor de laatste is de conclusie onwaar.

10.32 **a** We maken de waarheidstabellen voor $p \rightarrow q$, p en q.

p	q	p	$\rightarrow$	q	p	q
1	1	1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	1
1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0

Alleen in de eerste rij zijn beide uitgangspunten waar, en dan is de conclusie dat ook, dus $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$.

b We maken de waarheidstabellen voor p, $\neg p$ en q:

p	q	p	$\neg$	p	q
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0

We zien hier een bijzonder geval: de uitgangspunten zijn nooit tegelijk (dat wil zeggen: voor dezelfde waardering) waar, dus maakt elke waardering die de uitgangspunten waar maakt (dat zijn er dus geen!), de conclusie waar.

c We maken de waarheidstabellen voor $p \rightarrow q$ en $\neg q \rightarrow \neg p$.

p	q	p	$\rightarrow$	q	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	p
1	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1	0
0	0	0	$\boxed{1}$	0	1	0	1	1	0

De eerste, derde en laatste waardering maken het uitgangspunt waar, en in die gevallen is de conclusie ook waar, dus $p \rightarrow q \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$.

d We maken de waarheidstabellen voor $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ en $p \rightarrow r$:

p	q	r	p	$\rightarrow$	q	q	$\rightarrow$	r	p	$\rightarrow$	r
1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1	1
0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0

In alle vier gevallen waarin beide uitgangspunten waar zijn, is de conclusie ook waar, dus $p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$.

10.33 We kunnen natuurlijk een waarheidstabel maken, maar het is niet verboden even na te denken: $q \to \neg p, \neg p \not\Rightarrow q$ als er een waardering w is waarvoor de uitgangspunten waar zijn en de conclusie onwaar. Dus vanwege het tweede uitgangspunt zal dan moeten gelden $w(p) = 0$ en vanwege de onware conclusie $w(q) = 0$. Omdat dan inderdaad het eerste uitgangspunt waar is, vormt dit het bewijs dat q geen logisch gevolg is van $q \to \neg p$ en $\neg p$.

10.34 **a** De waarheidstabellen worden:

p	q	p	q	p	$\wedge$	q
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Alleen in de bovenste rij zijn beide uitgangspunten waar, maar dan is de conclusie dat ook, dus $p, q \Rightarrow p \wedge q$.

b De waarheidstabellen worden:

p	q	p	$\to$	q	q	p
1	1	1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	0
0	0	0	1	0	0	0

In de derde rij zijn de uitgangspunten waar, maar de conclusie niet, dus $p \to q, q \not\Rightarrow p$.

c De waarheidstabellen worden:

p	q	p	$\wedge$	q	q	p	$\vee$	q
1	1	1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dus $p \wedge q, q \Rightarrow p \vee q$.

d De waarheidstabellen worden:

p	q	p	$\to$	q	p	$\wedge$	q
1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1
0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0

De derde en vierde rij laten een waar uitgangspunt en een onware conclusie zien, derhalve $p \to q \not\Rightarrow p \wedge q$.

10.35 We bewijzen hier slechts één helft, de andere gaat net zo. Als ψ geen logisch gevolg is van $\varphi_1, ..., \varphi_n$, dan is er een waardering w die $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar. Maar dan is volgens de waarheidstabel $(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ onwaar voor w, en dus geen tautologie.

10.36 **a** $p \vee \neg q, q$

$\Rightarrow (p \vee \neg q) \wedge q$	conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)$	distributiviteit
$\Leftrightarrow p \wedge q$	$\perp$-eigenschappen
$\Rightarrow p$	conjunctie-eliminatie

b $p, p \rightarrow q$

$\Rightarrow p \wedge (p \rightarrow q)$	conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q)$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$	distributiviteit
$\Leftrightarrow p \wedge q$	$\perp$-eigenschappen
$\Leftrightarrow q \wedge p$	commutativiteit
$\Rightarrow q$	conjunctie-eliminatie

c $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

$\Leftrightarrow \neg\neg\varphi \vee \neg\psi$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi$	dubbele negatie
$\Leftrightarrow \neg\psi \vee \varphi$	commutativiteit
$\Leftrightarrow \psi \rightarrow \varphi$	implicatie-eliminatie

10.37 **a** $\varphi, \neg\psi \Rightarrow \perp$ betekent dat iedere waardering die φ en $\neg\psi$ waar maakt, ook $\perp$ waar maakt. Aangezien geen enkele waardering $\perp$ waar maakt, volgt er dat geen enkele waardering φ en $\neg\psi$ waar maakt. Een waardering die dus φ waar maakt, moet $\neg\psi$ wel onwaar maken, ofwel ψ waar maken. Maar dit betekent precies dat $\varphi \Rightarrow \psi$.

b We moeten aantonen dat $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ en gaan hiertoe met reductio ad absurdum aantonen dat $\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \Rightarrow \perp$, waarbij we uitsluitend conjunctie-introductie en standaardequivalenties gebruiken:

$\varphi \wedge \psi, \neg\varphi$

$\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\varphi$	conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \psi$	commutativiteit; associativiteit
$\Leftrightarrow \perp \wedge \psi$	$\perp$-eigenschap
$\Leftrightarrow \perp$	$\perp$-eigenschap

Uit $\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \Rightarrow \perp$ volgt nu dat $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

2 Uitwerking van de zelftoets

1 **a** De waarheidstabel wordt:

p	p	$\leftrightarrow$	$\neg$	p
1	1	0	0	1
0	0	0	1	0
		$\uparrow$		

De aangegeven kolom bevat slechts nullen, dus $p \leftrightarrow \neg p$ is een contradictie.

b De waarheidstabel wordt:

p	q	p	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
			↑			

De aangegeven kolom bevat slechts enen, dus $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ is een tautologie.

c De waarheidstabel wordt:

p	q	$\neg$	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
		↑					

De aangegeven kolom bevat niet slechts enen of nullen, dus de formule $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ is een contingentie.

2 **a** De waarheidstabel van $(p \wedge q) \rightarrow p$ is:

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	p
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0
					↑	

De aangegeven kolom bevat slechts enen, dus $(p \wedge q) \rightarrow p$ is een tautologie.
b Een afleiding met standaardwetten is:

$(p \wedge q) \rightarrow p$	
$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p$	implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$	De Morgan
$\Leftrightarrow \neg q \vee (p \vee \neg p)$	associativiteit en commutativiteit
$\Leftrightarrow \neg q \vee \top$	$\top$-eigenschap
$\Leftrightarrow \top$	$\top$-eigenschap

c Deze tautologie hangt volgens stelling 10.3 samen met een logisch gevolg als $p, q \Rightarrow p$.
d Dit is natuurlijk ook direct te zien: als p en q immers waar zijn, is p zeker waar.

3 **a** De logische equivalentie $\varphi \Leftrightarrow \psi$ geldt, als φ en ψ voor iedere waardering dezelfde waarheidswaarden hebben.

b De waarheidstabellen van $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ en φ zijn:

φ	ψ	φ	$\wedge$	$(\varphi$	$\vee$	$\psi)$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
			↑				↑

De aangegeven kolommen zijn gelijk, dus geldt $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$.

c $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$
$\Leftrightarrow (\varphi \vee \varphi) \wedge (\varphi \vee \psi)$ distributiviteit
$\Leftrightarrow \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ idempotentie
$\Leftrightarrow \varphi$ absorptie

4 **a** $(\neg p \to q) \to (r \leftrightarrow \neg s)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg p \vee q) \vee (r \leftrightarrow \neg s)$ implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg p \vee q) \vee (r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge \neg\neg s)$ equivalentie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$ dubbele negatie
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$ De Morgan

Hiermee is de formule in DNV gebracht.

b Elke waardering waarvoor p en q onwaar zijn, of waarvoor r en s verschillende waarheidswaarden hebben, maakt de formule waar.

c De oorspronkelijke formule is immers logisch equivalent met haar DNV, en is daarom precies voor dezelfde waarderingen waar.

5 **a** De waarheidstabellen voor $p \to q$, $\neg q$ en $\neg p$ zijn:

p	q	p	$\to$	q	$\neg$	q	$\neg$	p
1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$	0	1	0

Alleen in de laatste rij zijn beide uitgangspunten waar, maar dan is de conclusie dat ook, dus $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$.

b $p \to q, \neg q$
$\Rightarrow (p \to q) \wedge \neg q$ conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$ implicatie-eliminatie
$\Leftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$ commutativiteit
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$ distributiviteit
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee \bot$ $\bot$-eigenschap
$\Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$ $\bot$-eigenschap
$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ commutativiteit
$\Rightarrow \neg p$ conjunctie-eliminatie

c We bewijzen dat $(p \to q) \wedge \neg q, \neg(\neg p) \Rightarrow \bot$, dan volgt met reductio ad absurdum dat $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$, wat we moesten bewijzen.

$(p \to q) \wedge \neg q, \neg(\neg p)$	
$\Rightarrow ((p \to q) \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p)$	conjunctie-introductie
$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \wedge p$	implicatie-eliminatie; dubbele negatie
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$	commutativiteit; associativiteit
$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow \bot$	$\bot$-eigenschap