1 Uitwerking opgave 16.2.4 - werkcollege Greedy Algoritmen

Het vinden van de oplossing is in dit geval triviaal. De professor moet bij het begin van zijn reis zover mogelijk door rijden, en pas gaan tanken als hij weet dat hij het volgende tankstation niet meer kan halen met zijn tankinhoud. Dit herhaalt hij (waarbij het tanken dus steeds zo ver mogelijk wordt uitgesteld) tot hij bij zijn bestemming is aangekomen. Wanneer de m tankstations worden gegeven in de volgorde waarin de professor er langs rijdt op zijn reis, kun je dus in $O(m)$ tijd bepalen bij welke stations dient te worden gestopt door 1 keer van voor naar achteren door de array te lopen. Wanneer de tankstations in willekeurige volgorde worden gegeven, is $O(m \log m)$ tijd nodig om de tankstations te sorteren.

Het uitdagende van deze opgave zit hem dan ook niet in het algoritme, maar in het bewijs dat het algoritme correct is. Dit is een trend die je bij de greedy strategie vaak terug ziet. We bewijzen dat bovenstaand algoritme (dat we voor het gemak even GreedyTankstops noemen) correct is door gebruik te maken van een *uitwissel argument*. In het bewijs vergelijken we een willekeurige optimale oplossing O, met de oplossing G die door ons greedy algoritme is opgeleverd. We willen nu met behulp van O bewijzen, dat G optimaal moet zijn. Als $O = G$ dan is G per definitie een optimale oplossing, en zijn we dus klaar met het bewijs. Neem daarom aan dat $G \neq O$. We kunnen ons de oplossingen O en G voorstellen als lijsten met de posities waarop gestopt wordt. Dus $O = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ waarbij er in oplossing O dus k keer wordt gestopt, en de i-de stop wordt gemaakt op positie x_i. Onze greedy oplossing representeren we als $G = y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{k'}$. Doel van het bewijs is om te laten zien dat de greedy oplossing G equivalent is aan de oplossing O.

Aangezien $O \neq G$ moet er minstens 1 positie zijn waarop de twee lijsten O en G verschillen. We kijken nu naar de eerste positie j waarop de twee lijsten verschillen. In principe zijn er drie manieren waarop de lijsten van elkaar kunnen verschillen:

- De eerste stukken van de lijsten zijn gelijk, maar lijst O is langer dan G. Nu heeft lijst O dus nog wel j-de stop, maar lijst G niet. Aangezien de oplossing G een geldige oplossing is voor het probleem, zou er in dit geval een oplossing bestaan (namelijk G) die minder stops heeft dan de optimale oplossing O. Dit is een tegenspraak met de aanname dat O een optimale oplossing is. Dus dit geval kan niet voor komen.

- De eerste stukken van de lijsten zijn gelijk, maar lijst G is langer dan O. Nu heeft lijst G dus nog wel een j-de stop, maar lijst O niet. Aangezien we kijken naar de positie j waarop de lijsten O en G voor het eerst verschillen, zijn de twee lijsten tot en met positie $j-1$ gelijk. Uit het feit dat lijst O geen stops meer heeft na de $j-1$-de stop, moet wel volgen dat de professor na die stop in een keer zijn einddoel kan bereiken. Maar in de oplossing G is de professor telkens zo ver als mogelijk doorgereden, alvorens te stoppen. Aangezien beide oplossingen bij tankstation $x_{j-1} = y_{j-1}$ gaan stoppen, en uit O blijkt dat daarna zonder stoppen het einddoel gehaald kan worden, kan het volgens de werking van het greedy algoritme niet gebeuren dat O daarna nog een stop heeft. Dit geval kan dus ook niet voor komen.

- Lijst O en lijst G hebben allebei in ieder geval j stops, maar ze verschillen in het tankstation waar de j-de stop gemaakt wordt.

  Dit is voor het bewijs het belangrijkste geval. Aangezien j gekozen is als het eerste stop nummer waarop O en G verschillen, weten we dat als de professor volgens beide oplossingen van hetzelfde punt is weggereden voor stop $j-1$. De greedy oplossing heeft telkens zo ver als mogelijk doorgereden op een tank (dit volgt uit de definitie van het algoritme). Als er dus een verschil is tussen de plaatsen waar voor de j-de keer gestopt wordt, kan het alleen zo zijn dat oplossing O eerder stopt dan oplossing G. Maar uit het feit dat hun vorige stop-punten gelijk waren, volgt dat de professor in oplossing O na de eerste $j-1$ stops nog genoeg benzine heeft om door te rijden tot de plek y_j waar er volgens G voor de j-de keer gestopt gaat worden. Beschouw de aangepaste oplossing O' die ontstaat door de stop op positie x_j te verplaatsen naar y_j. Claim: O' is ook een geldige oplossing voor het probleem. Aangezien de professor zijn j-de stop pas later in zijn trip maakt, heeft hij na die stop relatief meer benzine over dan voorheen, en is het resterende stop-schema dus nog steeds toepasbaar. Ook weten we dat het aantal stops in O' gelijk is aan het aantal stops in O, en dus dat O' ook een optimale oplossing moet zijn. Belangrijker: oplossing O' heeft in ieder geval de eerste j stops gemeen met oplossing G, en lijkt dus meer op G dan oplossing O op G lijkt. We kunnen deze analyse stap herhalen, waarbij we iedere keer de optimale oplossing veranderen in een andere, maar ook optimale, oplossing die meer op G lijkt. Aangezien de index waarop O van G verschilt telkens groeit, komen we na een eindig aantal stappen uit bij het feit dat oplossing O gelijk is geworden aan oplossing G. We kunnen dus een optimale oplossing O in (een of meerdere) stappen transformeren tot G, waarbij we er bij iedere stap voor zorgen dat als O een optimale oplossing was, de aangepaste oplossing nog steeds optimaal is. Dus deze serie transformaties laat zien dat de oplossing G waar we uiteindelijk uit komen, ook optimaal moet zijn.

Dit bewijst dat de greedy oplossing optimaal is.