Hoofdstuk 3

Eindige en oneindige verzamelingen

3.1 Eindigheid en oneindigheid

Intuïtief gesproken is een eindige verzameling een verzameling die de eigenschap heeft dat we de elementen van die verzameling kunnen tellen, en wel zo dat dat telproces op een gegeven ogenblik is afgerond. Let wel: het gaat er hier om dat het telproces *in principe* kan worden afgesloten. Eindige verzamelingen kunnen welhaast onvoorstelbaar groot zijn, zonder dat dit iets toe of af doet aan hun eindigheid.

Volgens het Boeddhisme kost het doorlopen van de cirkel van wedergeboorten, nodig om de Verlichting te bereiken, aeonen van tijd. Vraag aan de Boeddha: hoe lang duurt een aeon? Antwoord: "Stel je een machtige rotsformatie voor van vier mijlen hoog, breed en diep, een volkomen massief blok zonder een barst of scheurtje. Stel dat er aan het eind van iedere eeuw een man zou komen die met een doek van Benares eenmaal langs de rots zou strijken. Die bergrots zou dan eerder zijn weggesleten dan er een aeon voorbij is." Zie [Humphreys 1951].

Bevat een aeon nu oneindig veel seconden? Nee. Wel onvoorstelbaar veel, maar dat is niet hetzelfde. Het aantal seconden in een aeon is eindig, want hoewel een aeon onvoorstelbaar lang duurt, hij is op een gegeven moment verstreken. Dus: er bestaat een natuurlijk getal (zij het astronomisch groot) dat dat aantal seconden van een aeon aangeeft.

Goed, u heeft nog wel even tijd om aan logica en formele taalkunde te besteden voordat u de Verlichting bereikt. Een formele definitie van *eindigheid* en *oneindigheid* maakt gebruik van het begrip *bijectie* (zie § 2.9).

Een bijectie of één–één-correspondentie tussen een verzameling A en een verzameling B is een functie f zo dat bij iedere $a \in A$ precies een $b \in B$ zo dat $f(a) = b$, en bij iedere $b \in B$ precies een $a \in A$ zo dat $b = f(a)$. Door middel van een bijectie kunnen we nu een *willekeurige* eindige verzameling in verband brengen met een *speciaal* soort eindige verzameling. Voor elke verzameling met n elementen is er immers een 1–1-correspondentie met de verzameling $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Een dergelijke verzameling wordt wel een *echt beginstuk* van $\mathbf{N}$ genoemd. Een meer exacte en algemene notatie hiervoor is $\{x \in \mathbf{N} \mid x < n\}$.

Definitie 3.1 *Verzameling A heet* **eindig** *wanneer er een $n \in \mathbf{N}$ te vinden is zo dat er een bijectie bestaat tussen $\{x \in \mathbf{N} \mid x < n\}$ en A.*

Voorbeeld 3.1 $\emptyset$ is eindig. Waarom? Omdat er een bijectie bestaat tussen de verzameling $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 0\}$ en de lege verzameling.

Voorbeeld 3.2 De verzameling $\{a, b, c\}$ is eindig. De volgende functie is immers een bijectie tussen $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 3\}$ en $\{a, b, c\}$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{a} \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{b} \\ 2 & \longrightarrow & \mathrm{c} \end{array}$$

Voorbeeld 3.3 De verzameling $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ is eindig. De volgende functie is een bijectie tussen de verzameling $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\}$ en deze verzameling:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 5 \\ 3 & \longrightarrow & 7 \\ 4 & \longrightarrow & 9 \end{array}$$

Het zal duidelijk zijn dat het aanbrengen van een bijectie tussen een verzameling A en een beginstuk van de natuurlijke getallen niets anders is dan wat wij in het alledaagse taalgebruik 'tellen' noemen.

De definitie van *oneindige verzameling* is nu simpel:

Definitie 3.2 *Verzameling A heet* **oneindig** *wanneer A niet eindig is.*

Het is gemakkelijk in te zien dat de verzameling van natuurlijke getallen $\mathbf{N}$ oneindig is volgens deze definitie. Ook de verzameling van alle zinnen van het Nederlands is oneindig. Datzelfde geldt voor de verzameling van alle zinnen van het Nederlands die met 'Ik' beginnen.

Opdracht 3.1 *Wat is er mis met de volgende redenering: "Als je een willekeurige Nederlandse bijzin 'B' neemt, en je zet daar 'dat Jan dacht dat' voor, dan krijg je een nieuwe Nederlandse (bij)zin. Hieraan kun je zien dat er Nederlandse zinnen zijn die je met behulp van dit recept altijd weer langer kunt maken. Daaruit volgt dat er in het Nederlands oneindig lange zinnen bestaan."*

Als twee *eindige* verzamelingen even groot zijn, kunnen we dat ook uitleggen in termen van bijecties. Twee eindige verzamelingen A en B zijn *even groot* wanneer er een getal n is zo dat er een bijectie is van $\{x \in \mathbf{N} \mid x < n\}$ naar A en een bijectie van $\{x \in \mathbf{N} \mid x < n\}$ naar B. Maar dan is er ook een directe bijectie van A naar B (ga na).

Is het nu zo dat alle oneindige verzamelingen even groot zijn? Het ligt voor de hand om de bijectie-uitleg van 'even groot zijn' ook op oneindige verzamelingen te gaan toepassen. Daarbij stappen we—om de associatie met *eindigheid* te vermijden—over op een andere terminologie. In plaats van over *even groot als* zullen we het nu hebben over *gelijkmachtig met*. Gelijkmachtigheid is een begrip dat zowel op eindige als op oneindige verzamelingen van toepassing is. Hier is de definitie van *gelijkmachtigheid* (Engels: equipollence):

Definitie 3.3 *Verzameling A heet* **gelijkmachtig met** *verzameling B (notatie: $A =_1 B$) wanneer er een bijectie van A naar B bestaat.*

De definities van 'eindig' en 'oneindig' waren nogal prozaïsch. Het begrip *gelijkmachtigheid* maakt echter een meer opwindende blik op het oneindige mogelijk. De definitie van 'gelijkmachtigheid' heeft namelijk als merkwaardig gevolg dat bij voorbeeld de verzameling $\mathbf{N}$ en de verzameling $\mathbf{N} - \{0\}$ gelijkmachtig ('even groot') zijn. Immers, de functie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} - \{0\}$ gedefinieerd door $f(n) = n + 1$ is een bijectie (zie het plaatje).

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 5 \\ & \vdots & \end{array}$$

We zien aan dit voorbeeld dat de oneindige verzameling $\mathbf{N}$ een echte deelverzameling heeft van dezelfde machtigheid. Het kan worden bewezen dat *elke* oneindige verzameling echte deelverzamelingen heeft van dezelfde machtigheid.

Aan de andere kant zal het u niet lukken een eindige verzameling te vinden die gelijkmachtig is met een van zijn echte deelverzamelingen. Dat dit geen toeval is blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 3.1 *Als A een eindige verzameling is, dan is er geen echte deelverzameling van A waarmee A gelijkmachtig is.*

Bewijs: We gebruiken inductie naar het aantal elementen van A.

- Basisstap. A heeft 0 elementen. In dit geval is A gelijk aan $\emptyset$, en $\emptyset$ heeft geen echte deelverzamelingen. De stelling is dus waar voor het basisgeval.

- Inductiestap. De inductie-hypothese luidt: als A hoogstens n elementen heeft, dan is er geen echte deelverzameling van A waarmee A gelijkmachtig is. Veronderstel dat A een verzameling is met $n + 1$ elementen.
  We doen een *reductio ad absurdum*. In een *reductio ad absurdum*, ook wel een bewijs uit het ongerijmde genoemd, veronderstellen we datgene wat we willen weerleggen, en leiden we vervolgens uit die veronderstelling een contradictie af. Daarmee is de veronderstelling weerlegd.
  Stel dat B een echte deelverzameling van A is waarmee A gelijkmachtig is. Dit wil zeggen: $B \subset A$, er is minstens één element a van A dat niet in B zit, en er is een bijectie f van A naar B. Noem het element van B waarop a door f wordt afgebeeld b. Beschouw nu de functie van B naar B die ontstaat door het domein van de functie f te beperken tot B. De gebruikelijke notatie hiervoor is $f\lceil B$. De functie $f\lceil B$ is een injectie van B naar B. Het bereik van deze functie is de verzameling $f[B] = \{f(x) \mid x \in B\}$. Deze bereik-verzameling is uiteraard een deelverzameling van B, maar het kan geen *echte* deelverzameling zijn van B. Dat zou in strijd zijn met de inductie-hypothese, die op B van toepassing is omdat B hoogstens n elementen heeft. Dus $f[B] = B$. Hieruit volgt dat $b = f(a')$ voor zeker element a' van B. Omdat f een bijectie is moet a' gelijk zijn aan a; dus: $a \in B$. Hiermee zijn we in tegenspraak geraakt met de veronderstelling die we over a hadden gemaakt. ∎

Opmerking tussendoor: hier en in het vervolg zullen we een bewijs steeds afsluiten met het symbool ∎.

Omdat elke oneindige verzameling gelijkmachtig is met echte deelverzamelingen van zichzelf, terwijl geen enkele eindige verzameling dat is, kunnen we—als we dat willen—*oneindige verzameling* definiëren als: verzameling die gelijkmachtig is met een van zijn echte deelverzamelingen.

3.2 Aftelbaar en overaftelbaar

De definitie van *gelijkmachtigheid* uit § 3.1 had als merkwaardig gevolg dat de verzameling $\mathbf{N}$ en de verzameling $\mathbf{N} - \{0\}$ gelijkmachtig ('even groot') zijn.

Het kan nog gekker: de verzameling van alle natuurlijke getallen $\mathbf{N}$ is 'even groot' als de verzameling $\mathcal{O}$ van de oneven natuurlijke getallen. Immers, $f : \mathbf{N} \to \mathcal{O}$, gedefinieerd door $f(n) = 2n + 1$, is een bijectie. Zie het plaatje:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 5 \\ 3 & \longrightarrow & 7 \\ 4 & \longrightarrow & 9 \\ & \vdots & \end{array}$$

Net zo zijn er bijecties te vinden tussen de verzameling van natuurlijke getallen en de verzameling van even natuurlijke getallen, tussen de verzameling van even natuurlijke getallen en de verzameling van oneven natuurlijke getallen, tussen de verzameling van natuurlijke getallen en de verzameling van priemgetallen (getallen die alleen deelbaar zijn door zichzelf en door 1), enzovoorts.

Alle oneindige verzamelingen die we tot nu toe gezien hebben waren gelijkmachtig met $\mathbf{N}$. Voor dit soort oneindigheid voeren we een apart begrip in:

Definitie 3.4 *Een verzameling die gelijkmachtig is met* $\mathbf{N}$ *heet* **aftelbaar** *(Engels: denumerable, countably infinite).*

Definitie 3.5 *Wanneer A aftelbaar is en f is een bijectie tussen A en* $\mathbf{N}$, *dan noemen we f een* **aftelling** *van A.*

We geven nog een aantal voorbeelden van verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\mathbf{N}$.

Voorbeeld 3.4 Dat de verzameling $\mathbf{Z}$ van de *gehele getallen* (positieve getallen, negatieve getallen, en het getal 0)

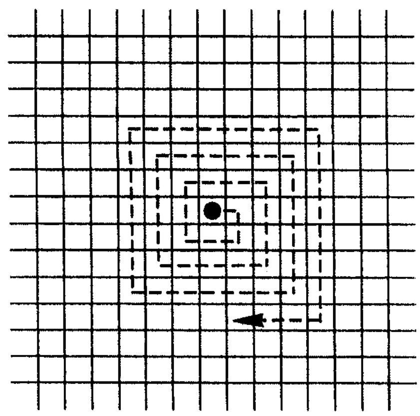
$$\ldots -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

gelijkmachtig is met $\mathbf{N}$ volgt uit het bestaan van de volgende aftelling:

$$
\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & 0 \\
1 & \longrightarrow & 1 \\
2 & \longrightarrow & -1 \\
3 & \longrightarrow & 2 \\
4 & \longrightarrow & -2 \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Opdracht 3.2 *Geef een formele definitie van bijectie uit voorbeeld 3.4.*

Voorbeeld 3.5 Is de verzameling van alle velden van een oneindig schaakbord aftelbaar? Ja, kijk maar:



Voorbeeld 3.6 Moeilijker: is de verzameling van de positieve breuken aftelbaar? Het lijkt op het eerste gezicht van niet: tussen elk tweetal natuurlijke getallen liggen immers oneindig veel breuken. Cantor toonde echter aan dat de positieve breuken aftelbaar zijn, door de volgende fraaie aftelinstructie te geven:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1/1 & \rightarrow & 1/2 & & 1/3 & \rightarrow & 1/4 & & 1/5 & \rightarrow & 1/6 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
2/1 & & 2/2 & & 2/3 & & 2/4 & & 2/5 & & 2/6 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
3/1 & & 3/2 & & 3/3 & & 3/4 & & 3/5 & & 3/6 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
4/1 & & 4/2 & & 4/3 & & 4/4 & & 4/5 & & 4/6 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
5/1 & & 5/2 & & 5/3 & & 5/4 & & 5/5 & & 5/6 & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & \\
6/1 & & 6/2 & & 6/3 & & 6/4 & & 6/5 & & 6/6 & \cdots \\
\text{etc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Dit is nog niet helemaal een bijectie, want bepaalde getallen komen meerdere keren voor, telkens in een andere gedaante, bij voorbeeld $1/1, 2/2, 3/3$, enzovoorts. Sla ze na de eerste keer gewoon over, en je hebt een bijectie.

Opdracht 3.3 *Laat zien dat de verzameling van* **alle** *breuken (positieve breuken, negatieve breuken, en het getal 0) aftelbaar is.*

Voorbeeld 3.7 De verzameling van alle eindige rijtjes letters uit het alfabet is aftelbaar. Immers, deze verzameling kan als volgt worden gerangschikt: eerst de rijtjes van lengte 1 in alfabetische volgorde (dat zijn dus gewoon de letters van het alfabet: $a, b, c, \dots$), dan de rijtjes van lengte twee in alfabetische volgorde ($aa, ab, ac, \dots$), dan de rijtjes van lengte drie in alfabetische volgorde, enzovoort. Deze rangschikking is een aftelling. Merk op dat de grootte van dit (eindige) alfabet er niet toe doet: met 1000 in plaats van 26 letters kunnen we dezelfde redenering gebruiken. Zelfs kunnen we dit resultaat uitbreiden tot de verzameling rijtjes over een *aftelbaar* 'alfabet' A: zie opdracht 3.4.

Opdracht 3.4 *Bewijs dat de verzameling van alle eindige rijtjes symbolen uit een aftelbaar alfabet weer aftelbaar is. (Waarschuwing: U moet nu een andere aftelling maken dan in voorbeeld 3.7 hierboven).*

Opdracht 3.5 *Ergens op een mooi plekje staat een uitzonderlijk groot hotel, een hotel met aftelbaar veel kamers: het Hilbert Hotel. Het hotel is genoemd naar de Duitse logicus en wiskundige David Hilbert. Op zekere dag zijn alle kamers bezet; er zijn dus aftelbaar veel gasten ondergebracht. Dan meldt zich nog iemand bij de receptie. De manager krabt zich even achter het oor, en bedenkt dan een manier om deze extra gast ook nog onder te brengen. Wat moet er gebeuren? (Hint: oneindig veel gasten die al zijn ondergebracht moeten verhuizen.)*

Opdracht 3.6 *We zijn nog steeds bij het Hilbert Hotel, dat helemaal is volgeboekt. Er komt een bus voorrijden; geen gewone bus maar een Hilbert bus: er zitten aftelbaar veel passagiers in. Ook die worden allemaal ondergebracht. Hoe gebeurt dat?*

Opdracht 3.7 *Juist als de portier van het Hilbert Hotel de deur op het nachtslot wil doen (er liggen aftelbaar veel gasten te ronken in aftelbaar veel kamers) komen aftelbaar veel Hilbert bussen voorrijden (elk met ... juist ja). IJlings wordt de manager gewekt. Valt hier nog iets aan te doen? Na enig heen en weer gepraat blijkt dat het Hilbert Hotel groot genoeg is om ook al deze gasten nog onder te brengen. Wat moet er gebeuren?*

Tot nu toe hebben we gelijkmachtigheid van verzamelingen steeds aangetoond door het geven van een bijectief verband tussen die verzamelingen. In een aantal gevallen is het evenwel helemaal niet zo makkelijk die bijectie expliciet te geven. We volstonden bijvoorbeeld met het globaal aanduiden van een aftelling van $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (of equivalent: de verzameling positieve breuken); het is waarachtig niet eenvoudig deze slingerende aftelling in een formule te omschrijven! Toch kunnen we dit soort resultaten zonder wiskundige hoogstandjes bewijzen. We moeten dan echter met *injecties* werken in plaats van met bijecties.

Voor eindige verzamelingen geldt dat als A kleiner is dan B, er een injectie van A naar B bestaat, en ook omgekeerd, als er zo'n injectie is, dan is A hoogstens even groot als B. De volgende definitie ligt nu voor de hand:

Definitie 3.6 *We zeggen dat verzameling A* **kleinere of gelijke machtigheid heeft** *dan verzameling B (notatie $A \leq_1 B$) wanneer er een injectie bestaat van A naar B.*

De nieuw ingevoerde notatie suggereert een nuttig verband tussen de verschillende relaties, namelijk:

als $A \leq_1 B$ en $B \leq_1 A$, dan $A =_1 B$.

Om dit feit, want dat is het, te kunnen bewijzen, is het handig om ook een oneindig aantal verzamelingen te kunnen manipuleren. We generaliseren daarom de operaties *verenigen* en *doorsnijden*. Stel bij voorbeeld dat we de volgende oneindige verzameling van verzamelingen hebben:

$$A = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, \dots\}.$$

Elk van de A_i kan zelf zowel eindig als oneindig zijn, dat doet er nu even niet toe. We definiëren nu de vereniging van A als volgt:

Definitie 3.7 $\bigcup A = \{x \mid \textit{er is een } Y : Y \in A \textit{ en } x \in Y\}$.

Het is niet al te moeilijk in te zien dat dit voor het voorbeeld dat we net hadden neerkomt op het volgende:

$$\bigcup A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup \dots$$

Hiermee kunnen we willekeurig grote collecties van verzamelingen verenigen tot een nieuwe verzameling. Net zo definiëren we de doorsnede van A:

Definitie 3.8 $\bigcap A = \{x \mid \textit{voor alle } Y : \textit{ als } Y \in A \textit{ dan } x \in Y\}$.

Voor het voorbeeld komt dit neer op het volgende:

$$\bigcap A = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap \dots$$

Opdracht 3.8 *Schrijf de volgende verzamelingen uit:*

1. $\bigcup \emptyset$

2. $\bigcup\{\emptyset\}$

3. $\bigcup\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

4. $\bigcup\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

5. $\bigcap\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

6. $\bigcup\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Wanneer we een rij van verzamelingen $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ hebben, dan noteren we de vereniging van de rij ook wel als $\bigcup_n A_n$, en de doorsnede als $\bigcap_n A_n$.

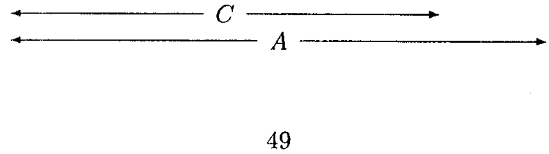
Met dit geschut kunnen we het eerder genoemde feit over de relatie van $A \leq_1 B$ en $A =_1 B$ bewijzen. We herformuleren dit eerst als:

Stelling 3.2 (Cantor-Bernstein) *Als er een injectie bestaat van A naar B, en er bestaat een injectie van B naar A, dan bestaat er een bijectie van A naar B.*

Bewijs: Laat f de injectie van A naar B zijn, en g de injectie van B naar A. Het beeld van B onder g noemen we C. Het is duidelijk dat $C \subseteq A$ en dat g een bijectie van B naar C is. Als we nu kunnen bewijzen dat er een bijectie van A naar C bestaat, dan zijn we klaar. (Waarom? Teken een plaatje.)

Merk op dat we al wel weten dat $g \circ f$ een *injectie* is van A naar C. We zullen nu laten zien dat het mogelijk is uit een injectie tussen A en zijn deelverzameling C een bijectie te fabriceren. De techniek die we daarbij gebruiken is 'naar binnen vouwen van de randjes', en dat een oneindig aantal malen. We noemen $g \circ f$ voor het gemak: j.

Nu is $C \subseteq A$ en $j : A \xrightarrow{i} C$. Laat $A - C = A_0$. We vouwen het randje A_0 naar binnen, door het beeld van A_0 onder j te nemen. j was een injectie van A naar C, dus het beeld van dit randje valt binnen C. Noem het beeld van het randje A_1. Dit nieuwe randje vouwen we opnieuw naar binnen, door er j op los te laten. Het volgende randje heet A_2, enzovoort. In een plaatje zien de eerste drie vouwen naar binnen er als volgt uit:



Algemeen: als we randje nummer n hebben, dat wil zeggen A_n, dan is dit het recept voor verder naar binnen vouwen: $A_{n+1} = j[A_n]$.Tenslotte vegen we alle randjes in één verzameling bij elkaar: $\bigcup_n A_n$.

Deze randjesverzameling is een deelverzameling van C. Wanneer u dacht dat de randjesverzameling 'te groot' zou worden door de oneindig doorgaande vouwpartij, dan laat u zich weer misleiden door de intuïtie van eindigheid: ofwel C is eindig en dan $C = A$ dus $A_n = \emptyset$ (en er is altijd ruimte om *niks* om te vouwen) ofwel C is oneindig groot en dan past de oneindige randjesverzameling er in: j maakt steeds kortere randjes. De bijectie h tussen A en C kan nu als volgt worden gedefinieerd (voor willekeurige $a \in A$):

$$h(a) = \begin{cases} a & \text{als } a \notin \bigcup_n A_n \\ j(a) & \text{als } a \in \bigcup_n A_n. \end{cases}$$

We moeten nu nog laten zien dat $h : A \to C$ een bijectie is:

- Ten eerste: h is inderdaad een *functie* van A naar C. Immers de functiewaarde ligt eenduidig vast en $h(a) \in C$ voor beide gevallen van het functievoorschrift.

- Ten tweede: h is injectief. Met andere woorden: als $a \neq b$ dan $h(a) \neq h(b)$. Neem aan dat $a \neq b$. Drie mogelijkheden:

    1. $a \in \bigcup_n A_n$ en $b \in \bigcup_n A_n$. Nu is $h(a) = j(a)$ en $h(b) = j(b)$. Maar $a \neq b$, en j is een injectie, dus: $j(a) \neq j(b)$.
    2. $a \notin \bigcup_n A_n$ en $b \notin \bigcup_n A_n$. Nu is $h(a) = a$ en $h(b) = b$, en omdat $a \neq b$ hebben we: $h(a) \neq h(b)$.
    3. $a \in \bigcup_n A_n$ en $b \notin \bigcup_n A_n$. Nu is $h(a) = j(a) \in \bigcup_n A_n$ en $h(b) = b \notin \bigcup_n A_n$. Dus $h(a) \neq h(b)$.
    4. $a \notin \bigcup_n A_n$ en $b \in \bigcup_n A_n$. Als in 3.

- Ten derde: h is surjectief, ofwel: voor elke $c \in C$ is er een $a \in A$ zo dat $c = h(a)$. Stel $c \in C$. Dan $c \notin A_0$. Twee mogelijkheden:

    1. $c \in \bigcup_n A_n$, laten we zeggen $c \in A_m$, voor zekere $m \geq 1$ (want c zat niet in A_0). Dus is er een $d \in A_{m-1}$ zo dat $c = j(d) = h(d)$.
    2. $c \notin \bigcup_n A_n$. Nu is $c = h(c)$.

Merk nu tenslotte op dat $g^{-1} \circ h$ een bijectie is van A naar B. ∎

Opdracht 3.9 *In het voorafgaande bewijs werd de indruk gewekt dat de "randjes" steeds verschillend waren, dat wil zeggen dat* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *als* $n \neq m$. *Bewijs dat dit inderdaad zo is. Gebruik dat voor elke injectie* i *geldt dat* $i[X \cap Y] = i[X] \cap i[Y]$.

Voorbeeld 3.8 Een eenvoudige toepassing van de stelling van Cantor-Bernstein zien we bij de aftelbaarheid van $\mathbf{Q}$ (de verzameling van alle breuken). Omdat $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$, is er uiteraard een injectie van $\mathbf{N}$ naar $\mathbf{Q}$: de identieke functie f zodat $f(n) = n$ voor elke n. En voor de injectie g de andere kant op nemen we voor elke uitgedeelde breuk $\frac{m}{n}$ met $m, n \in \mathbf{N}$ de waarde

$$g(\frac{m}{n}) = 2^m 5^n$$

en voor negatieve breuken

$$g(-\frac{m}{n}) = 3^m 5^n.$$

Controleren dat dit injecties zijn en ... klaar.

We hebben tot nu toe gebruik gemaakt van bijecties en injecties om iets te weten te komen over de machtigheid van verzamelingen. De volgende stelling laat zien dat ook surjecties gebruikt kunnen worden om de grootte van verzamelingen te vergelijken.

Stelling 3.3 *Als $f : \mathbf{N} \to A$ een surjectie is, dan is A hoogstens aftelbaar.*

Bewijs: Er zijn twee mogelijkheden: ofwel de verzameling

$$B = \{n \in \mathbf{N} \mid \text{ er is geen } k \text{ in } \mathbf{N}, k < n, \text{ met } f(k) = f(n)\}$$

is eindig, of die verzameling is aftelbaar. In het eerste geval zitten er eindig veel elementen in A, in het tweede geval zijn dat er aftelbaar veel. Immers:

$$g = \{\langle n, f(n)\rangle \mid n \in B\}$$

is een bijectie van B naar A. ∎

Opdracht 3.10 *Laat zien: als A aftelbaar is en B eindig, dan zijn $A \cup B$ en $A - B$ aftelbaar.*

Opdracht 3.11 *Laat zien: als A en B beide aftelbaar zijn, dan is $A \cup B$ aftelbaar.*

Opdracht 3.12 *Laat zien: als A en B aftelbaar zijn, dan is $A \times B$ aftelbaar.*

Het begint er een beetje op te lijken dat alle oneindige verzamelingen gelijkmachtig zijn met $\mathbf{N}$. Dat dat *niet* zo is, is door Cantor aangetoond. Cantor liet zien dat de machtsverzameling van $\mathbf{N}$ niet gelijkmachtig is met $\mathbf{N}$.

Allereerst herinneren we eraan dat in § 2.9 in essentie al bewezen is dat $\mathcal{P}(\mathbf{N}) =_1 \{0,1\}^{\mathbf{N}}$; er was immers een 1-1-correspondentie tussen deelverzamelingen en karakteristieke functies. We redeneren daarom verder met $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ in plaats van $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. Dat $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *minstens* even groot is als $\mathbf{N}$ is gemakkelijk in te zien (zie volgende opdracht).

Opdracht 3.13 *Laat zien dat* $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *minstens even groot is als* $\mathbf{N}$. *U kunt dit doen door het aangeven van een* injectie *van* $\mathbf{N}$ *naar* $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

Cantor bewees dat $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ wezenlijk groter is dan $\mathbf{N}$, met behulp van zijn beroemde diagonaal-argument.

Stelling 3.4 (Diagonaalstelling)

De verzameling $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *is niet aftelbaar.*

Bewijs: Stel dat de verzameling $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ wél aftelbaar zou zijn. Dan zouden we een aftelling $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ hebben van karakteristieke functies. We leiden een tegenspraak af door het construeren van een karakteristieke functie f^* die *niet* in de aftelling voorkomt.

De functies $f_0, f_1, f_2, \ldots$ uit de aftelling waarvan we het bestaan veronderstellen kunnen als volgt worden gerangschikt (dit is natuurlijk maar een voorbeeld; de functies zouden er ook anders kunnen uitzien):

	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
f_0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
f_1	0	1	0	1	0	0	1	$\cdots$
f_2	1	0	0	1	1	0	0	$\cdots$
f_3	0	0	0	0	1	1	0	$\cdots$
f_4	1	0	0	0	0	1	1	$\cdots$
f_5	1	0	0	0	0	1	0	$\cdots$
f_6	1	0	0	0	0	0	1	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Beschouw nu de waarheidswaarde-toekenningen op de oneindige diagonaal van dit plaatje. De functie f^* die je krijgt door deze waarheidswaarden *om te keren* (in het voorbeeld: de functie f^* met $f^*(0) = 0, f^*(1) = 0, f^*(2) = 1, f^*(3) = 1, f^*(4) = 1, f^*(5) = 0$, enzovoort) is *ongelijk* aan elke functie in de aftelling. Immers, hij verschilt van f_i in de waarde die aan het i-de argument wordt toegekend. Hiermee is de veronderstelling dat $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ kan worden afgeteld weerlegd. ∎

Het is hopelijk duidelijk waarom de redeneerwijze uit deze stelling 'Cantor's diagonaal-argument' wordt genoemd. Het diagonaal-argument kan ook worden gebruikt om te laten zien dat de verzameling van de reële getallen (gebruikelijke aanduiding: $\mathbf{R}$) niet aftelbaar is. De reële getallen zijn alle breuken plus alle irrationale getallen. Als u weet dat zo'n reëel getal kan worden geschreven als een decimale breuk die achter de komma oneindig doorloopt, kunt u zelf bedenken hoe het diagonaal-argument hier moet worden gehanteerd. Dat $\mathbf{R}$ niet aftelbaar is, is overigens geen toeval: $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ is gelijkmachtig met de verzameling $\mathbf{R}$ der reële getallen (zie [Van Dalen e.a. 1975] voor het bewijs).

Cantor's diagonaalstelling levert ons een eerste voorbeeld van een verzameling die oneindig is, maar niet aftelbaar. Hiervoor voeren we nieuw jargon in:

Definitie 3.9 *Een oneindige verzameling die niet aftelbaar is heet* **overaftelbaar** *(Engels: non-denumerable, uncountable).*

Opdracht 3.14 *Laat zien dat de verzameling van alle* **eindige** *deelverzamelingen van* $\mathbf{N}$ *aftelbaar is.*

Opdracht 3.15 *Een* **co-finiete** *deelverzameling van* $\mathbf{N}$ *is een deelverzameling* A *van* $\mathbf{N}$ *met de eigenschap dat* $\mathbf{N} - A$ *eindig is (dus: een verzameling met een eindig complement). Laat zien dat de verzameling van alle* co-finiete *deelverzamelingen van* $\mathbf{N}$ *aftelbaar is.*

Cantor's diagonaalstelling is in feite een speciaal geval van een algemenere stelling, die ook door Cantor is bewezen. Deze stelling voert ons via steeds hogere machtigheden binnen in een wiskundig paradijs van steeds grotere oneindige verzamelingen (Cantor's paradijs). We moeten dan nog eerst dit begrip 'groter' precies maken:

Definitie 3.10 *Verzameling* A *heeft* **kleinere machtigheid** *dan verzameling* B *(notatie:* $A <_1 B$*) wanneer* $A \leq_1 B$ *en* $A \neq_1 B$.

Stelling 3.5 (Algemene diagonaalstelling)

Voor elke verzameling A*:* A *heeft een kleinere machtigheid dan* $\mathcal{P}(A)$.

Bewijs: Voor het gemak werken we eerst het geval af dat $A = \emptyset$. In dit geval is $|A| = |\emptyset| = 0$ en $|\mathcal{P}(A)| = |\{\emptyset\}| = 1$, dus de stelling geldt.

Voor niet lege A laten we twee dingen zien. In de eerste plaats: $\mathcal{P}(A)$ heeft minstens dezelfde machtigheid als A. In de tweede plaats: A en $\mathcal{P}(A)$ hebben niet dezelfde machtigheid.

Het eerste is gemakkelijk: de functie $f : A \to \mathcal{P}(A)$ die wordt gedefinieerd door $f(a) = \{a\}$, voor elke $a \in A$, is een injectie. Het tweede gaat weer volgens de strategie van de vorige stelling. We nemen aan dat een bijectie F tussen A en $\mathcal{P}(A)$ gegeven is, en we construeren een deelverzameling B van A die geen F-beeld is van enig element in A. De constructie van $B \subseteq A$ gaat als volgt. Kies

$$B = \{b \in A \mid b \notin F(b)\}.$$

B is geen F-beeld van enig element van A. Veronderstel namelijk van wel. Neem aan dat we hebben: $F(c) = B$, voor zekere $c \in A$. Zit c in B? Stel van wel. Dan volgt uit de definitie van B dat $c \notin B$. Stel van niet. Dan volgt uit de definitie van B dat $c \in F(c)$, dat wil zeggen $c \in B$. Beide mogelijkheden leiden dus tot een tegenspraak. Uit het feit dat B geen F-beeld is van enig element van A volgt dat we mogen concluderen dat er geen bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$ bestaat. ∎

3.3 Beslisbaarheid en opsombaarheid

We beginnen met een paar definities:

Definitie 3.11 *Een deelverzameling X van* **N** *is* **beslisbaar** *wanneer er een mechanische procedure bestaat om bij een gegeven element x van* **N** *uit te maken of $x \in X$ dan wel $x \notin X$.*

Definitie 3.12 *Een deelverzameling X van* **N** *is* **opsombaar** *wanneer er een mechanische procedure bestaat die de elementen van* **N** *in een of andere volgorde opsomt.*

Het is mogelijk het begrip 'mechanische procedure' verder te preciseren, maar we zullen dat nu alleen globaal doen. Globaal gesproken is een mechanische procedure een procedure die precies genoeg is om er een computerprogramma van te maken.

Uiteraard zal een procedure die een oneindig grote verzameling opsomt nooit stoppen. Een computerprogramma dat een oneindige deelverzameling X van **N** opsomt zal tot in lengte van dagen getallen uitbraken, en elke $x \in X$ zal vroeg of laat (na verloop van eindig veel tijd) worden afgedrukt, al weten we natuurlijk niet wanneer.

U vindt het misschien vreemd, maar er bestaan deelverzamelingen van **N** die niet beslisbaar zijn. Dit wil zeggen: er zijn verzamelingen natuurlijke getallen die de eigenschap hebben dat er geen computerprogramma te schrijven valt dat bij invoer van een willekeurig natuurlijk getal uit kan maken of dat getal tot de verzameling behoort of niet. Nog erger: er zijn verzamelingen natuurlijke getallen waarvoor zelfs geen programma te schrijven valt dat de getallen uit de verzameling in een of andere volgorde *opsomt* (zo dat je, als je maar lang genoeg bij de computer blijft staan, elk getal uit de verzameling vroeg of laat te voorschijn ziet komen). Met andere woorden: er bestaan deelverzamelingen van **N** die niet opsombaar zijn.

Wanneer we gebruik maken van ons pas verworven inzicht in de verschillende 'graden van oneindigheid' kunnen we de bewering dat er nietopsombare getallenverzamelingen bestaan aannemelijk maken. We hebben gezien dat de verzameling $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ niet aftelbaar is. We redeneren nu even intuïtief. Een verzameling $X \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ is opsombaar wanneer er een computerprogramma bestaat in een of andere programmeertaal—zeg **Pascal**—dat die verzameling opsomt (dat wil zeggen: de elementen ervan één voor één afdrukt). Programmeertalen zijn altijd gebaseerd op een eindige verzameling schrijftekens, een uitgebreid 'alfabet'. Elk programma is een eindig rijtje schrijftekens uit dat alfabet. Zoals in § 3.2 is aangetoond, is de verzameling van eindige rijtjes over een eindig alfabet aftelbaar. De verzameling mogelijke programma's binnen de gegeven programmeertaal is dus ook aftelbaar. Omdat de verzameling deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ *overaftelbaar* is moeten er wel deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ zijn die door geen enkel programma worden opgesomd.

Strikt genomen dienen beweringen over beslisbaarheid en opsombaarheid allereerst te worden gepreciseerd vooraleer ze kunnen worden bewezen. De logicus Alonzo Church heeft voorgesteld *beslissingsprocedure* te preciseren als *recursieve procedure*, een begrip waarvoor hij een zeer precieze wiskundige definitie beschikbaar had. Alan Turing had het idee om *beslissingsprocedure* te lezen als: 'procedure die, als hij wordt uitgevoerd op een Turingmachine, in eindig veel stappen tot een resultaat leidt.' Bij dat voorstel hoorde natuurlijk weer een precieze—wiskundige—definitie van wat een Turingmachine is. Het werd al gauw duidelijk dat de beide preciseringsvoorstellen voor *beslissingsprocedure* op hetzelfde neerkwamen: de procedures die een Turingmachine in eindig veel stappen kan uitvoeren zijn precies de recursieve procedures.

Het preciseringsvoorstel voor *beslisbaar zijn* van Church wordt wel **de these van Church** genoemd. Die these luidt als volgt:

Hypothese 3.1 (These van Church)

Elke mechanische beslissingsprocedure is een recursieve procedure.

Een bewijs leveren van deze these is natuurlijk niet mogelijk: het is immers een voorstel om het vage en intuïtieve begrip *mechanisch beslisbaar* te lezen als *recursief*. De these van Church is in feite geen echte hypothese maar veeleer een *uitdaging* om met een mechanische beslissingsprocedure aan te komen die niet recursief is (in de precieze zin van de wiskundige definitie). Dit is tot nu toe aan niemand gelukt.

3.4 Equivalentieklassen en kardinaalgetallen

We zullen nu gaan uitleggen hoe de relatie *gelijkmachtig zijn met* kan worden gebruikt om zogenaamde *kardinaalgetallen* te definiëren: getallen die de grootte van (eindige of oneindige) verzamelingen aangeven.