Analiza numeryczna L 2016/2017

Wykład 5

Postać wielomianu

Π_n – zbiór wielomianów stopnia $\leq$ n.

Postać naturalna(potęgowa):

$$w \in \Pi_n : w(x) = sum_{k=0}^{n} a_k x^k, (dane : a_0, a_1, ..., a_n)$$

Schemat Hornera:

$w_1 = a_1$
$w_k = w_{k-1}x + a_k, (k = n-1, n-1, ...0)$
wtedy:
$W(x) = w_0$

Twierdzenie: Algorytm Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Twierdzenie: zachodzi następujące oznaczenie:

$$|\frac{fl(w_0) - w(x)}{w(x)}| \leq E \frac{\sum_{k=0}^{n} |a_x x^k|}{\sum_{k=0}^{n} |a_x x^k|}$$

Uogólniony schemat Hornera

$w_1 = b_1$
$w_k = w_{k+1}(x - x_k) + b_k, (k = n-1, n-1, ..., 0)$
wtedy $w(x) = w_0$

Twierdzenie: Uogólniony schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Postać iloczynowa wielomianu

Definicja: Wielomiany Czebyszewa

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), (k = 1, 2, 3, ...) \end{cases}$$

Własności wielomianu Czebyszewa:
$1^o T_n \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$, czyli T_n jest wielomian dokładnie n-tego stopnia.
$2^o T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ...(n \geq 1)$
3^o Dla $xin[-1;1]$ mamy:

$$T_n(x) = cos(narcos(x))$$

$4^o Miejscazerowe T_n : \alpha_k = cos(\frac{2k+1}{2n}\pi), k = 0, 1, ..., n-1$

Postać Czebyszewa:

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + ... + c_nT_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kT_k$$

Fakt: Każdt wielomian można przedstawić jako kombinację liniową wielomianów Czebyszewa.

Niech dany będzie wielomian $w \in \Pi_n$ podany w postaci Czebyszewa:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kT_k(x)$$

Dla danego $x \in R$ wartość w(x) zaleca się obliczanie za pomocą następującego algorytmu Clenshawa:

$$\begin{cases} B_{n+2} = 0 \\ B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k, (k = n, n-1, ..., 0) \end{cases}$$

wtedy $w(x) = \frac{B_0 - B_z}{z}$

Interpolacja wielomianowa Lagreange'a

Zadanie interpolacyjne Lagreange'a:
Dla danych parami różnych punktów (węzłów) $x_0, x_1, ..., x_n$ oraz odpowiadającym im wartościom $y_0, y_1, ..., y_n$ znaleźć taki wielomian $L_n \in \Pi_n$, że $L_n(x_i) = y_i$.

Fakt 1: zadanie interpolacyjne Lagreange'a ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.
Fakt 2: wielomian L_n wyraża się wzorem:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x)y_k$$

gdzie:

$$\lambda_k(x) = \Pi_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$