

III. SPAUDŽIANTYS ATVAIZDŽIAI

3.1. Spaudžiantys atvaizdžiai metrinėse erdvėse

Tarkime, kad X – metrinė erdvė. Paprastai funkciją, apibrėžtą ir įgyjančią reikšmes toje pačioje erdvėje vadinsime *erdvės transformacija*. Transformaciją $f : X \rightarrow X$ vadinsime suspaudžiančiu atvaizdžiu (ateityje trumpai S.A.), jeigu egzistuoja konstanta $0 \leq s < 1$ tokia, kad

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y), \forall x, y \in X.$$

Skaičius s vadinamas sąspūdžio koeficientu (trumpai s.k.).

Teorema 1. *Tarkime, kad f yra S.A. metrinėje erdvėje X . Tada transformacija f yra tolydi.*

Teoremą įrodyti siūlome skaitytojui.

Pavyzdys Transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apibrėžta sąryšiu $f(x) = ax, a \in (0, 1)$ yra spaudžiantis atvaizdis, kurios sąspūdžio koeficientas lygus a , kadangi bet kokiai realiųjų taškų porai x, y atstumas tarp vaizdų

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = a|x - y|.$$

Pavyzdys Tarkime, kad erdvėje $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ apibrėžta Euklidinė metrika. Tada transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, apibrėžta sąryšiu $f(x, y) = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y)$ – yra spaudžiantis atvaizdis, kurios sąspūdžio koeficientas lygus $\frac{1}{3}$, kadangi bet kokiems dviem taškams iš $\mathcal{R}^2(x, y); (u, v)$ atstumas tarp šių taškų vaizdų

$$\rho(f(x, y), f(u, v)) = \frac{1}{3}\sqrt{(x - u + y - v)^2 + (x - u - y + v)^2} = \frac{1}{3}\rho((x, y); (u, v)).$$

Teorema 2. *Sakykite, kad $f : X \rightarrow X$ yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje (X, ρ) . Tada egzistuoja vienintelis nejudamas taškas $x_0 \in X$, kad visiems $x \in X$ seka*

$$\{f^n(x)\} \rightarrow x_0, \text{ kai } n \rightarrow \infty.$$

⊖

Tarkime, kad $x \in X$, o $s \in [0, 1]$ yra transformacijos f , s.k.. Sakykite, kad $n > m$, $m, n = 0, 1, \dots$, tada

$$(1) \quad \rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^m \rho(x, f^{n-m}(x)).$$

Matome, kad remdamiesi trikampio nelygybe, visiems $k = 0, 1, \dots$ gauname tokią nelygybę:

$$\begin{aligned} \rho(x, f^k(x)) &\leq \rho(x, f(x)) + \rho(f(x), f^2(x)) + \dots + \rho(f^{k-1}(x), f^k(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})\rho(x, f(x)) \leq (1 - s)^{-1}\rho(x, f(x)). \end{aligned}$$

Pasinaudoję (1)-ąja nelygybe, iš paskutiniosios gauname

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{m \wedge n} (1 - s)^{-1} \rho(x, f(x)).$$

Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad seka

$$\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

yra Koši seka. Remdamiesi tuo, kad nagrinėjamoji erdvė pilna, tvirtiname, kad Koši seka konverguoja, be to šios sekos riba, tarkime x_0 , priklauso tai pačiai metrinei erdvei. Dar daugiau, nagrinėjamas atvaizdis- spaudžiantysis, taigi jis ir tolydus (Teorema 1), tad visiems $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y) < \epsilon,$$

kai tik $\rho(x, y) < \delta = \epsilon/s$. Vadinasi

$$f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Ar šis taškas vienintelis? Tarkime priešingai. Tuomet egzistuoja taškas $y_0 \in X, x_0 \neq y_0$ toks, kad ir $y_0 = f(y_0)$. Iš nelygybės

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq s\rho(x_0, y_0).$$

išplaukia, kad

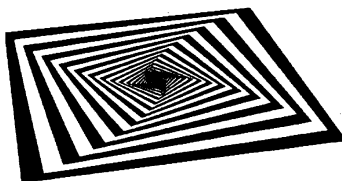
$$(1 - s)\rho(x_0, y_0) \leq 0.$$

Bet tada, $\rho(x_0, y_0) = 0$, ir $x_0 = y_0$.

⊕

Siūlome skaitytojui įrodyti, kad S.A. aibė yra uždara atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu, t.y. S.A. kompozicija yra spaudžiantis atvaizdis.

1 pav. pateikiamas S.A., kuris kvadratą spaudžia ir suka apie tašką. Beje, ribinis taškas yra nejudamas transformacijos taškas.



1 pav.

Pastaba Kokią įdomią išvadą galime padaryti remiantis paskutiniąja teorema? Visų pirma, tai, kad kokį bepaimtumė erdvės tašką ir jį iteruojant (taškui nuosekliai taikant tą pačią S.A.), kai iteracijų skaičių neapribotai didiname, artėjame prie nejudamo taško. Kita išvada, tai, kad jei transformacija spaudžianti, ji negali turėti daugiau negu vieno nejudamo taško. Na ir pagaliau, natūralu tikėtis, kad jei visi taškai iteruojant juos artėja prie nejudamo taško, tai ir bet kokia figūra (taškų aibė) jos taškus iteruojant, bus suspausta į nejudamą tašką. Apie tai kalbėsime sekančioje teoremoje.

Teorema 3. Tarkime (X, ρ) - kompaktiška metrinė erdvė, o $f : X \rightarrow X$ S.A. Tada aibė

$$\{f^n(X), n \in \mathbb{N}\}$$

yra fraktalų erdvės $(H(X), h)$ Koši seka ir be to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X) = \{x_0\},$$

čia x_0 yra transformacijos f nejudamas taškas.

⊖

Primename, kad $f(X) = \{f(x); x \in X\}$. Kitaip tariant $f(X)$ yra visų aibės X taškų, gautų juos atvaizdžius funkcija f aibė. Visų pirma išsiaiškinkime, ar $f(X) \subset H(X)$, t.y. ar $f(X)$ yra kompaktiška aibė? Žinome, kad f tolydi, todėl kompaktiškos aibės tolydus vaizdas yra kompaktiška aibė. Taigi, $f(X)$ kompaktiška aibė, tuo pačiu ir $f(X) \subset H(X)$. Naudodami matematinę indukciją gauname (įrodykite kantrusis skaitytojai!), kad ir bet kokiam n , $f^n(X)$ - kompaktiška ir netuščia aibė. Tuomet $f^n(X) \in H(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Be to pastebėkime, kad kiekvienam n , $x_0 \in f^n(X)$, čia x_0 yra atvaizdžio f nejudamas taškas.

Išitinkinsime, kad ši seka yra fraktalų erdvės elementų Koši seka. Pastebėkime, kad erdvė X yra kompaktiška, taigi ir pilna (kiekviena Koši seka turi ribą). Tą patį galime pasakyti ir apie fraktalų erdvę. T.y. jeigu $\{f^n(X)\}$ Koši seka, tai jos riba priklauso $H(X)$.

Jeigu $m > n$, tai

$$f^m(X) \subset f^n(X)$$

ir tuo pačiu

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x \in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)).$$

Bet šis atstumas ne didesnis už $\text{diam}(f^n(X))$, kuris apibrėžiamas taip:

$$\text{diam}(f^n(X)) = \max_{x, y \in f^n(X)} \rho(x, y).$$

Taigi

$$\text{diam}(f^n(X)) \leq s^n \text{diam} X,$$

čia s transformacijos f , s.k. Parinkime n_0 tokį, kad būtų teisinga nelygybė:

$$s^{n_0} \text{diam} X < \epsilon.$$

Tuo pačiu, mes užtikriname, kad

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x \in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)) \leq s^{n_0} \text{diam} X < \epsilon,$$

kadangi visi atstumai neviršija aibės $\{f^n(X)\}$ diametro. Bet pastarosios nelygybės dėka galime tvirtinti, kad nagrinėjamoji S.A. seka yra Koši seka pilnoje fraktalų erdvėje. Taigi, ši seka turi ribą, kuri priklauso fraktalų erdvei.

Liko parodyti, kad šios sekos riba yra minėtasis teoremos formuluotėje taškas x_0 . Jau žinome, kad $x_0 \in \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X)$. Ar šios ribinės aibės diametras lygus nuliui?

Turime, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} f^n(X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s^n \text{diam}(X) = 0$. Vadinas, jei $y \in \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X)$, tai $\rho(x_0, y) = 0$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $x_0 = y$. Taigi, fraktalų erdvės elementų sekos riba yra kompaktiška aibė, kurią sudaro vienas elementas. Todėl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X) = \{x_0\}.$$

⊕

3.2 Spaudžiantys atvaizdžiai metrinėje fraktalų erdvėje

Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $(H(X), h)$ yra fraktalų aibė. Žinome, kad $H(X)$ elementai yra kompaktiški, netušti, metrinės aibės poaibiai. Teisinga tokia teorema:

Teorema 4. Sakykime, kad $\omega : X \rightarrow X$ yra tolydus atvaizdis metrinėje erdvėje (X, ρ) . Tada šis atvaizdis fraktalų erdvę atvaizduoja į ją pačią.

⊖

Kitaip sakant, kompaktiškos netuščios aibės atvaizduojamos į kompaktiškas netuščias aibes. Sakykime, kad $S \subset X$ erdvės X netuščias kompaktas. Kadangi ω tolydus atvaizdis, tai $\omega(S) = \{\omega(x); x \in S\}$ irgi netuščia ir be to kompaktiška, nes jei $\{y_n = \omega(x_n); x \in S\}$ yra taškų iš S seka, tai $\{x_n\} \subset S$. Bet S kompaktas, tuomet išplaukia, kad galime surasti posekį, x_{N_n} tokį, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{N_n} = x_0 \in S$. Naudodamiesi transformacijos ω tolydumu gauname, kad seka $\{y_{N_n} = \omega(x_{N_n})\}$ yra sekos $\{y_n\}$ posekis, kuris konverguoja į $y_0 = f(x_0) \in \omega(S)$.

⊕

Kitoje teoremoje nurodomas metodas, kurį naudojant galima sukonstruoti spaudžiantį atvaizdį fraktalų erdvėje, kai žinomas S.A. metrinėje erdvėje (X, ρ) . Kai kalbama apie S.A. fraktalų erdvėje tai turime omeny, kad dabar jau elementai bus ne taškai, o bet kokios kompaktiškos aibės.

Teorema 5. Sakykime, kad $\omega : X \rightarrow X$ yra metrinės erdvės (X, ρ) S.A., kurio sąspūdžio koeficientas yra s . Tada S.A., $\omega : H(X) \rightarrow H(X)$, fraktalų erdvėje gali būti apibrėžtas tokiu būdu :

$$\omega(B) = \{\omega(x); x \in B\}, \quad B \in H(X).$$

Pastarojo spaudžiančio atvaizdžio sąspūdžio koeficientas yra s .

⊖

Atvaizdis $\omega : X \rightarrow X$ yra S.A., taigi šis atvaizdis tolydus, be to $\omega : H(X) \rightarrow H(X)$, tai išplaukia iš Teoremos 5. Kitaip tariant, spaudžiantis atvaizdis apibrėžtas metrinėje erdvėje, indukuoja atvaizdį fraktalų erdvėje $H(X)$. Tada, visiems $B, C \subset H(X)$ teisinga nelygybė:

$$\begin{aligned} d(\omega(B), \omega(C)) &= \max\{\min\{\rho(\omega(x), \omega(y)); x \in B; y \in C\} \leq \\ &\max\{\min\{s\rho(x, y); x \in B; y \in C\} = sd(B, C). \end{aligned}$$

Analogiškai galima įrodyti, kad

$$d(\omega(C), \omega(B)) \leq sd(C, B).$$

Tada

$$h(\omega(B), \omega(C)) = d(\omega(B), \omega(C)) \vee d(\omega(C), \omega(B)) \leq s(d(B, C) \vee d(C, B)) \leq sd(B, C).$$

⊕

Teorema 6. Sakykime, kad (X, ρ) metrinė erdvė ir $\{\omega_n, n \in \{1, \dots, N\}\}$ spaudžiančių atvaizdžių aibė erdvėje $(H(X), h)$. Be to tarkime, kad $s_n, n \in \{1, \dots, N\}$, yra šių S.A. sąspūdžio koeficientai, atitinkamai. Apibrėžkime transformaciją $W : H(X) \rightarrow H(X)$ tokiu būdu: visiems $B \in H(X)$,

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B).$$

Tada transformacija W yra spaudžiantis atvaizdis fraktalų metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, be to šios transformacijos s.k. yra lygus tokiam skaičiui: $s = \max_{n=1 \dots N} \{s_n\}$.

⊖

Įrodysime šią teoremą. Tegu $N = 2$. Jeigu $B, C \in H(X)$, tai

$$h(W(B), W(C)) = h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C)) \leq \\ h(\omega_1(B), \omega_1(C)) \vee h(\omega_2(B), \omega_2(C)) \leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \leq sh(B, C).$$

Tarkime, kad nagrinėjamas sąryšis teisingas kokiam nors $k-1$, t.y. $N = k-1$ ir parodykime, kad šis teiginys teisingas ir sekančiam žingniui, t.y. $N = k$ (tokių skaičių aibė netuščia, nes parodėme, kad jei $k-1 = 2$ tai teiginys teisingas). Tada, remdamiesi matematinės indukcijos principu galėsime tvirtinti, kad teiginys teisingas ir visiems $N \in \mathbb{N}$. Sakykime, kad $W(\dots)$ sudaro k transformacijų. Tada

$$h(W(B), W(C)) = h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_k(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_k(C)) \\ = h\left((\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(B)) \cup \omega_k(B), (\omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(C)) \cup \omega_k(C)\right)$$

Iš pradžioje įrodytos nelygybės bei remdamiesi indukcinė prielaida gauname, kad

$$\leq h\left((\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(B)), (\omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(C))\right) \vee h(\omega_k(B) \cup \omega_k(C)) \\ \leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \vee \dots \vee s_k h(B, C) \leq sh(B, C).$$

⊕

3.3 Iteracinės atvaizdžių sistemos (IAS)

Tarkime, kad $f : X \rightarrow X$ ir $A, B \subset X$. Šiame skyrelyje labai dažnai remsimės tokia atvaizdžių savybe, kurią minėjome įvadiniame skyriuje, t.y.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Tarkime, kad (X, ρ) yra pilna metrinė erdvė, o S.A. aibė

$$\{\omega_n, n = 1 \dots N\},$$

kurių sąspūdžio koeficientai $s_n, n \in \mathbb{N}$. Pažymėkime

$$(2) \quad s = \max\{s_n : n = 1, \dots, N\}.$$

Apibrėžimas Iteracinė atvaizdžių sistema (trumpai IAS) vadinsime S.A. šeimą,

$$(3) \quad \{(X, \rho), \omega_n; n = 1, \dots, N, s\},$$

kurios sąspūdžio koeficientas apibrėžtas (2) lygybe.

Kitaip tariant, IAS - tai S.A. aibė, veikianti fiksuotoje metrinėje erdvėje.

Iš (5), (6) teoremų išplaukia tokia

Išvada Tarkime, kad IAS apibrėžta (3) sąryšiu. Tada transformacija

$$W : H(X) \rightarrow H(X)$$

apibrėžta lygybe

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X), \quad (4)$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, kurios s.k. apibrėžtas (2) lygybe. Taigi,

$$h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C), \quad B, C \in H(X).$$

Tada šios transformacijos vienintelis nejudamas taškas

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A)$$

yra tokios sekos riba:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \quad B \in H(X).$$

(4) transformacija yra vadinama *Hutčinsonso transformacija*.

Transformacijos W nejudamą tašką $A \in H(X)$ vadinsime šios transformacijos *atraktoriumi*.

Pastaba Jei duota IAS, tai visada galima apibrėžti Huchinkonso transformaciją ir atvirkščiai, jei turime Hutčinsonso transformaciją, tai galima su šia transformacija susieti iteracinę atvaizdžių sistemą. Kitaip tariant, šių savokų neskirsime.

Sakykime, kad IAS nusakyta tokiu būdu: $\{X; \omega_1, \dots, \omega_N\}$. Tarkime, kad A_0 kokia nors metrinės erdvės kompaktiška aibė. Tegu $W^0(A_0) = A_0$. Pačią kompaktiškų aibių seką, remdamiesi paskutiniąja teorema, skaičiuojame tokia rekurentine formule:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N \omega_j(A_n), \quad n = 1, \dots$$

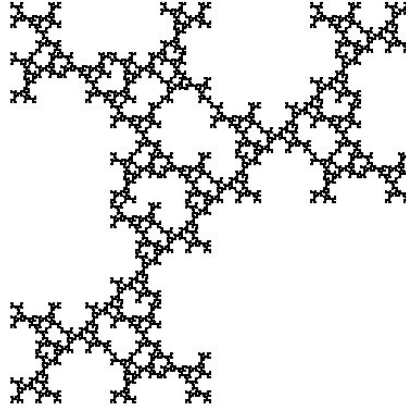
Taip sukonstruotos sekos nariai yra fraktalų erdvės elementai. Be to ši seka konverguoja (hausdorfo metrikos atžvilgiu) į IAS atraktorių.

Pavyzdys Panagrinėkime IAS, apibrėžtą tokiu būdu:

$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \\ \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \\ \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

čia K yra kvadratas.

Šios IAS atraktorius (transformacijos $W(K) = \omega_1(K) \cup \omega_2(K) \cup \omega_3(K)$ nejudamas taškas) pateiktas 2 pav.



2 pav.

Panagrinėkime IAS, kurių atraktoriai yra klasikinės fraktalinės aibės.

Apibrėžkime IAS, kurios atraktoriai yra Kantoro aibė. Tegu pradinė aibė $I = [0, 1]$. Pastebėkime, kad kiekviename iteraciniame žingsnyje esamas intervalas dalinamas į du lygius intervalus iš jo vidurinės dalies išmetant trečdalį atviro esamo intervalo. Tegu

$$\omega_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in I.$$

Iš pastarojo transformacijų apibrėžimo išplaukia, kad $\omega(I) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Tada

$$W(I) = \omega_1(I) \cup \omega_2(I).$$

Suskaičiuokime antrąją iteracinę žingsnį. Turime, kad

$$W(W(I)) = W(\omega_1(I) \cup \omega_2(I)) = \omega_1(\omega_1(I)) \cup \omega_1(\omega_2(I)) \cup \omega_2(\omega_1(I)) \cup \omega_2(\omega_2(I)).$$

Aišku, kad

$$\omega_1(\omega_1(I)) = [0, \frac{1}{9}], \quad \omega_1(\omega_2(I)) = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], \quad \omega_2(\omega_1(I)) = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad \omega_2(\omega_2(I)) = [\frac{8}{9}, 1].$$

Matome, kad ši intervalų seka sutampa su Kantoro aibę aproksimuojančios sekos antruoju nariu. Ir t.t. Taigi, šios IAS nejudamas taškas sutaps su Kantoro aibe.

Naudodami IAS visiškai analogiškai galime modeliuoti ir Kocho kreivę. Tegu pradinė aibė $I = [0, 1]$. Kantoro aibę aproksimuojančios sekos pirmasis narys gali būti aprašytas tokia transformacijų seka:

$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \quad \omega_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tada

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x \in I, y = 0.$$

Šios IAS atraktoriai (nejudamas taškas) bus Kocho kreivė.

3.4 Sankaupos aibės ir sankaupos transformacijos

Sakykime, kad (X, ρ) metrinė erdvė ir $C \in H(X)$ – kompaktiška netuščia aibė. Apibrėžkime transformaciją $\omega_0 : H(X) \rightarrow H(X)$ tokiu būdu:

$$\omega_0(B) = C, \quad B \in H(X).$$

Tokiu būdu apibrėžtą transformaciją vadinsime sankaupos transformacija, o aibę C – sankaupos aibę. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad sankaupos transformacija yra suspaudžiantis atvaizdis metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, kurios sąspūdžio koeficientas $s = 0$.

Apibrėžimas Sakykime, kad duota IAS $\{X; \omega_1, \dots, \omega_n; s \in [0, 1]\}$. Be to tarkime, kad ω_0 kokia nors sankaupos transformacija. Tada IAS $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; s\}$ vadinama sankaupos iteracine atvaizdžių sistema (SIAS) su s.k. s. Žemiau pateiktas teiginys, yra apibendrinimas, skirtas SIAS.

Pastaba Kaip ir IAS-oje taip ir SIAS-oje apibrėžtą transformaciją $W(\cdot)$ yra vadinama Hutčkinso transformacija.

Išvada Tarkime, kad duota SIAS

$$\{X; \omega_n, n = 0, 1, \dots, N; s\}.$$

Tada transformacija $W : H(X) \rightarrow H(X)$, apibrėžta lygybe

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X),$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X), h)$ su tuo pačiu s.k. s. T.y.

$$h(W(B), W(C)) = sh(B, C), \quad B, C \in H(X).$$

Vienintelis nejudamas taškas $A \subset H(X)$ yra lygus

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(A),$$

kuris yra tokios sekos riba:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \quad B \in H(X).$$

Metrinės erdvės elementų seką $\{A_n\}$ vadinsime *didėjančia (mažėjančia)*, jeigu

$$A \subset A_1 \subset \dots \subset A_k \subset \dots (A \supset A_1 \supset \dots \supset A_k \supset \dots).$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad mažėjanti aibių seka yra Koši seka. Be to, jeigu metrinė erdvė kompaktiška tai ir bet kokia didėjanti aibių seka yra Koši seka. Sakykime, kad $\{X; \omega_1, \dots, \omega_n\}$ IAS, su sankaupos aibe C , be to tarkime, kad X kompaktiška. Pažymėkime,

$$W_0(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X)$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B).$$

Tarkime, kad $\{C_n = W_0^n(C), n \in \mathbb{N}_0\}$. Remdamiesi paskutiniąja teorema, gauname, kad seka $\{C_n\}$ yra Koši seka erdvėje $H(X)$, kuri konverguoja į IAS atraktorių. Be to, seka

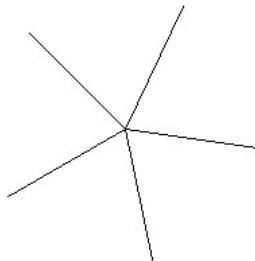
$$C_n = C \cup W(C) \cup W^2(C) \cup \dots \cup W^n(C)$$

yra didėjanti, kompaktiškų aibių seka. Vadinasi, $W_0(A) = A$.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad SIAS kitaip negu IAS išsaugo iteracijos ankstesnius narius ir sekantys sekos nariai yra prijungiami prie buvusių sekos narių. Kitaip tariant praeities informacija yra išsaugoma.

Naudojant SIAS galima kurti įvairias "augančias struktūras" kurios vystosi ant jau susiformavusios struktūros.

Tarkime, kad aibė $C = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5$. Aibės C grafinis vaizdas pateiktas 3 pav.



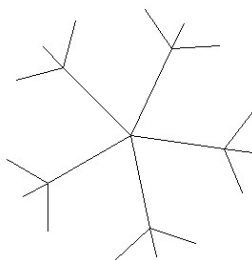
3 pav.

Laikome, kad $\omega_0(X) = C$, bet kokiai aibei X . Tegu

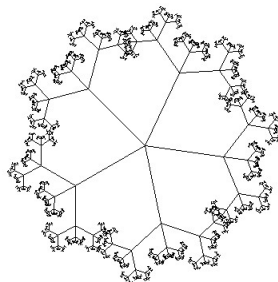
$$W(C) = C \cup \omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \omega_3(C),$$

o transformacijos W reikšmė, interpretuojant ją grafiškai, pateikta 4 pav.

Žemiau pateiktuose paveikslėliuose pateikti pirmasis ir septintasis sekos nariai.



4 pav.



5 pav.

Panagrinėkime šią problemą teoriškai. Nagrinėsime metrinę erdvę (\mathbb{R}^2, ρ_2) , t.y. plokštumą. Tarkime, kad $C \subset \mathbb{R}^2$ yra medžio kamienas, su vienodu simetriškų šakų skaičiumi į abi kamieno puses, stovintis vertikaliai Ox ašiai, kurio pradžia taške $(0, 0)$. Be to kiekvienam $B \in H(X)$, $\omega_0(B) = C$ ir

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Parodysime, kad $(\mathbb{R}^2; \omega_0, \omega_1)$ yra IAS su sankaupos aibe, bei rasime jos sąspūdžio koeficientą. Pažymėkime

$$A_n = W^n(A_0), \quad n \in \mathbb{N}$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(\mathbb{R}^2).$$

Parodysime, kad A_n apima pirmuosius $n + 1$ medžių, skaitant iš kairės į dešinę. Tam, kad parodyti, jog $(\mathbb{R}^2; \omega_0, \omega_1)$ yra IAS, mums pakanka rasti šios IAS s.k..

Visų pirma pastebėkime, kad

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.75 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ir

$$\begin{aligned} \rho(\omega_1(x), \omega_1(y)) &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2\right)^2} = \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{3}{4} \rho(x, y). \end{aligned}$$

Vadinasi, transformacijos ω_1 sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tuo pačiu ir nagrinėjamos IAS sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tarkime, kad pradinė sekos aibė $A_0 = C$. Skaičiuokime $\omega_1^n(A_0)$ naudodami afininę transformaciją

$$(5) \quad A(x - x_f) + x_f,$$

čia x_f yra atvaizdžio f nejudamas taškas. Tada šio taško koordinatės yra tokios:

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \implies x = 1; \quad y = \frac{3}{4}y \implies y = 0.$$

Naudodami gautas reikšmes, (5) reiškini perrašome tokiu būdu:

$$\omega_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{3}{4} \right)^n \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad $\omega_1^n(A_0)$ yra aibės C suspaudimas dydžiu $(3/4)^n$ bei postūmis dydžiu $1 - (3/4)^n$. Kitaip tariant, gauname vis mažesnių medžių seką, išsidėsčiusių vienoje tiesėje, kurie neaprežtai traukiasi į šios aibės atraktorių, kuris tokios pat prigimties. Taigi

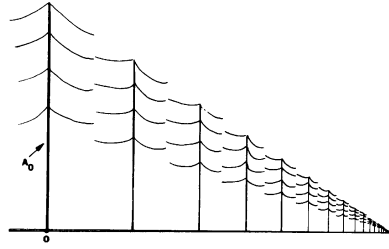
$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(A_0),$$

čia sekos aibės apibrėžiamos taip:

$$A_1 = C \cup \omega_1(C), \quad A_2 = C \cup \omega_1(C \cup \omega_1(C)) = C \cup \omega_1(C) \cup \omega_1^2(C), \dots,$$

$$A_k = \bigcup_{i=0}^k \omega_1^i, \quad k \leq n.$$

6 pav. pateikiama šios iteracijos vaizdinė interpretacija.



6 pav.

Sakykime, kad C – medžio kamienas, kurio pagrindas remiasi į koordinačių pradžios tašką statmenai Ox ašiai, kitaip tariant, kamienas Oy ašyje. 'Apauginkime' šį medį naudodami SIAS. Tarkime, $\omega_0(B) = C$, $B \in H(X)$.

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.8 \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = 20^\circ;$$

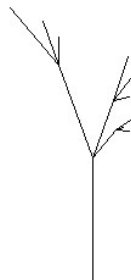
$$\omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = -20^\circ;$$

$$\omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.3 \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = -40^\circ;$$

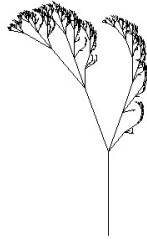
Šios SIAS pirmosios, antrosios bei 8-osios iteracijos grafiniai vaizdai pateikti 7 pav., 8 pav., 9 pav., atitinkamai.



7 pav.



8 pav.

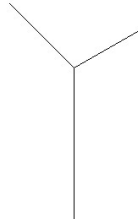


9 pav.

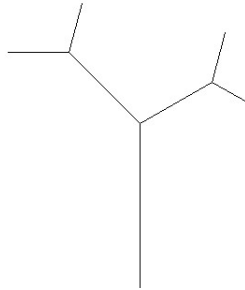
10-12 pav. pateikiama SIAS pirmos, antros bei dešimos iteracijų grafiniai vaizdai, kai SIAS transformacijos yra tokios:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.6 \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = -45^\circ;$$

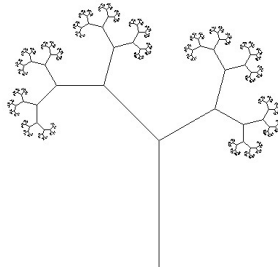
$$\omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = 60^\circ.$$



10 pav.



11 pav.



12 pav.

Kitaip tariant, naudojant transformaciją ω_1 , "kamieną" pasukame kampų ξ , o šios transformacijos sąspūdzio koeficientas yra 0,6. Transformacija ω_2 pasuka "kamieną" kampų ψ , o transformacijos sąspūdzio koeficientas yra 0.5 (kaip ir aukščiau pateiktame pavyzdyje, laikome, kad kamienas yra Oy ašyje).

Tarkime, kad nagrinėjamas fraktalas yra IAS atraktorius, kurios Hutčkinsono transformaciją sudaro lygiai k transformacijų:

$$W(X) = \omega_1(x) \cup \dots \cup \omega_k(X).$$

Sudarysime algoritmą šios transformacijos atraktoriaus grafiniam vaizdui rasti. Bet prieš tai aptarkime šią idėją. Sutapatinkime kompiuterio monitorių su plokštuma, tada pikseliai- šios plokštumos taškai. Šiuos taškus (pikselius) galime koduoti skaičiais ir perrašyti į matricą, kuri kurioje bus saugoma informacija apie pikselius. Jei ekranas tuščias, tai matrica bus lygi nulinėi matricai O . Tarkime, kad X yra kompaktiška aibė (koks nors vaizdas). Tada šios aibės elementus (pikselius) atitinkantys matricos elementai bus žymimi 1, jei kompaktiškai aibei elementas nepriklauso, tai matricos elementas bus lygus 0. Tarkime, kad fraktalas, kurį norime modeliuoti yra vienetinio kvadrato $n \times n$ eilės viduje. Jei kvadratas vienetinis, tai plokštumoje kvadrato taškų koordinatės yra (x, y) , $0 \leq x, y \leq 1$. Susiekime matricos M elementus su plokštumos (šio kvadrato) taškais tokiu būdu: jei

$$m_{ij} = \left(\frac{i-1}{n-1}, \frac{j-1}{n-1} \right)$$

tai plokštumos taškui (x, y) priskiriame $i = [x(n-1)] + 1$, $j = [y(n-1)] + 1$ ($[u]$ yra skaičiaus u sveikoji dalis). Kitaip tariant, matricoje M bus saugomos kvadrato taškų atitiktys pikseliais. Matome, kad šiuo atveju tarp vienetinio kvadrato ir matricos $M = m_{ij}$ taškų egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis. Aišku, kad

$$m_{00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m_{nn} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}.$$

Sekantis žingsnis- perkelti šią matricą M į monitoriaus ekraną. Pastebėsime, kad matricoje M bus saugomi ne viso kvadrato taškai, bet tik kompaktiškos aibės $S \in K$, kuri yra vienetiniame kvadrato, taškai. Visų pirma skaičiuojame transformacijos $W(S)$ reikšmės pagalbinėje matricoje A . Pastebėsime, kad kompaktiškos aibės elementas 1 yra atvaizduojamas į kelis, ne daugiau negu k , matricos M elementų. Šiuos $W(S)$ elementus, saugomus aibėje A grąžiname aibei S ir procesą kartojame. Formalizuokime šį algoritmą.

Algoritmas

Iv. a) $6 \times k$ IAS matrica, kurios i - oje eilutėje yra i - osios afininės transformacijos koeficientai;

b) $n \in \mathbb{N}$ – rezoliucija;

c) $N \in \mathbb{N}$ – iteracijų skaičius;

Vykdymas

$M[n, n] = I$ – matrica reprezentuojanti kompaktišką sritį, kurios visi elementai vienetai;

$A[n, n] = O$ – nulinė matrica kurios elementai priklausys fraktalui;

for(1, n , $i+$)

for(1, n , $j+$)

{

{

(x, y) vienetinio kvadrato taškai, atitinkantys elementą $m_{i,j} \in M$;

if($m_{ij} = 0$);

else

for(1, k , $p+$)

$(x', y') := f^p(m_{i,j})$;

{

Nustatome elemento (x', y') poziciją (koordinates) matricoje M , tarkime ši padėtis (i', j')

$a_{i'j'} := 1$;

$M := A.$

}
}
}

Išv. Išvedame matricą M į ekraną.

3.5 Fraktalų modeliavimas

Teorema 7. Tarkime, kad (X, ρ) - pilna metrinė erdvė. Be to, $L \in H(X)$ kokia nors kompaktiška aibė iš fraktalų erdvės. Tegu $\epsilon > 0$ koks nors laisvai pasirinktas fiksuotas skaičius. Sudarykime IAS (SIAS) tokiu būdu:

$$\{X; (\omega_0), \omega_1, \dots, \omega_n, s\}$$

$s \in [0, 1),$

$$h(L; \bigcup_{k=1, (k=0)}^n \omega_k(L)) \leq \epsilon.$$

Tada

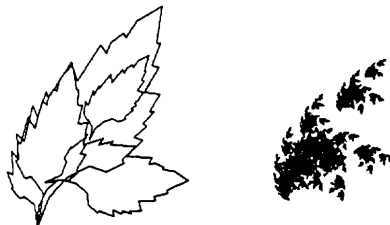
$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s},$$

čia A yra IAS (SIAS) atraktorius. Kitaip tariant,

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h(L, \bigcup_{k=1, (k=0)}^n \omega_n(L)), \forall L \in H(X).$$

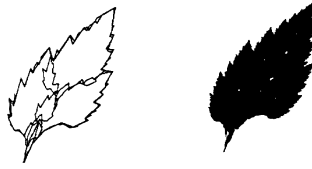
Ši teorema nurodo metodą, kurį naudodami galime rasti IAS, turinčią atraktorių arti kokios nors fiksuotos aibės. Taigi, reikia rasti suspaudžiančių transformacijų seką, apibrėžtų toje pat erdvėje kaip ir duotoji aibė, tokią, kad duotosios aibės vaizdų sąjunga (šios transformacijos atžvilgiu) būtų arti duotosios aibės. Be to, minimos teoremos dėka, mes galime nurodyti kreivių seką, kuria "užpildome" plokštumos sritį. Kiek plačiau šią problemą nagrinėsime vėliau.

Sakykime, kad $L \subset \mathbb{R}^2$ yra medžio lapo projekcija plokštumoje, kurio siena nusakyta kokia nors uždara laužte (lapo projekcija laikykime 13 pav. tamsų lapą). Ši laužtė ir bus mūsų iteracijų sekos pradinė aibė. Sakykime, kad IAS transformacijų aibę sudaro keturios suspaudžiančios transformacijos, kurių sąjunga pavaizduota 13 pav. Šio pav. dešinėje pusėje pavaizduotas šios transformacijų sekos atraktorius. Nesunku matyti, kad atraktorius nėra panašus į originalą, o šio fenomeno priežastis ta, kad atstumas tarp atraktoriaus ir transformacijų sekos per didelis. (Pastebėkime, kad ir šiuo atveju gauname gana įdomų rezultatą!)



13 pav.

14 pav. pavaizduota kita IAS. Hausdorfo atstumas tarp keturių pirmųjų šios spaudžiančių transformacijų sąjungos ir originalo yra žymiai mažesnis, negu sekos, kuri buvo pavaizduota 13 pav. . Skirtumą tarp IAS atraktoriaus ir originalo, 14 pav., pabrėžia baltos dėmelės, pateiktame paveikslėlyje.



14 pav.

Lema Sakykime, kad (H, h) fraktalų erdvė. Tegu $W : H \rightarrow H$ koks nors S.A., kurio s.k. $s \in [0, 1)$. Sakykime, kad šios transformacijos nejudamas taškas yra $A \in H$. Tada teisinga nelygybė:

$$h(X, A) \leq \frac{h(X, W(X))}{1 - s}, X \in A.$$

⊖

Žinome, kad metrika $h(A, X)$, $X \in H$, tolydi kintamojo X funkcija. Todėl

$$\begin{aligned} h(X, A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(X, W^n(X)) \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \leq n} h(W^{m-1}(X), W^m(X)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(X, W(X))(1 + \dots + s^{n-1}) \leq \\ &\frac{1}{s - 1} h(X, W(X)), \quad X \in H. \end{aligned}$$

⊕

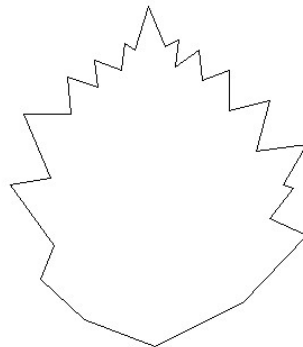
Iš paskutiniosios lemos išplaukia Teoremos 7 įrodymas. ⊕

Modeliuodami kokį nors objektą, mes imame pradinę aibę ir sudarome IAS (SIAS), uždengdami šią aibę transformacijų, kuriomis sudarome Hučkinsono transformaciją, vaizdais nuo šios aibės, o denginių išdėstymą parenkame priklausomai nuo situacijos ir po to iteruojame šios IAS (SIAS) transformaciją $W(\dots)$. Šios transformacijos atraktorius ir bus laikomas nagrinėjamo objekto modeliu. Pateiksime keletą pavyzdžių.

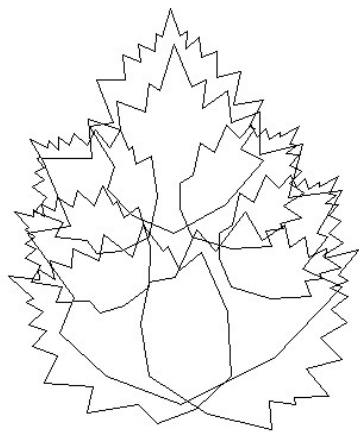
Modeliuosime krūmą. Iš laužčių sudarykime pradinę aibę L , kuri apytiksliai reprezentuotų šio krūmo kontūrus, 15 pav. Sudarome IAS naudodami transformacijas $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$. Šios septynios transformacijos pradinę aibę L suspaudžia įvairiais sąspūdžio koeficientais, pasuka ir "užkloja" aibę L transformacija

$$W(L) = \omega_1(L) \cup \dots \cup \omega_7(L)$$

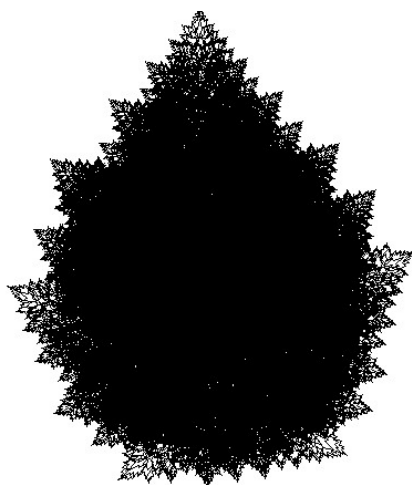
2 pav. ir 3 pav. yra pateiktas transformacijos $W^7(L)$ grafinis vaizdas.



15 pav.

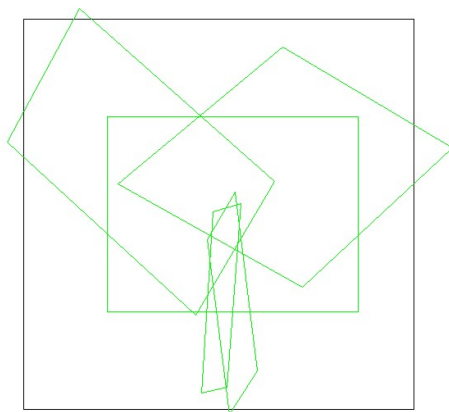


16 pav.

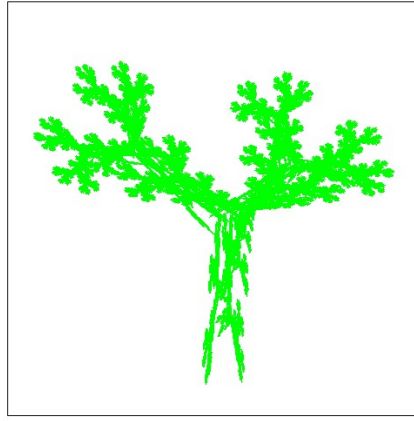


17 pav.

Modeliuosime "atogražų" medį. Tarkime, kad K yra kvadratas. Naudodami keturias transformacijas šį kvadratą transformuojame į keturis keturkampius iš kurių "sudėliojame" "atogražų" medžio pirmąjį artinį (18 pav.). Atlikę aštuonias transformacijas $W^8(K)$, $W(K) = \omega_1(K) \cup \dots \cup \omega_5(K)$ gauname tokį grafinį vaizdą:



18 pav.



19 pav.

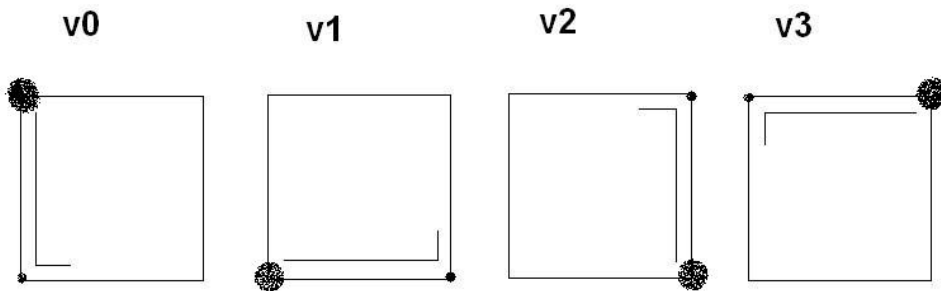
3.6 Simetrijų grupė ir fraktalų modeliavimas

Šiame skyrelyje aptarsime, kaip galima modeliuoti fraktalus, naudojant specialias transformacijas. Šios transformacijos, su tarp jų apibrėžta kompozicijos operacija sudaro struktūrą, kuri vadinama simetrijų grupe, o šios transformacijos vadinamos, simetrijų grupės transformacijomis. Pastebėsime, kad tai tiesinės transformacijos, taigi jos aprašomos matricomis. Modeliuodami fraktalus mes naudosime ne tik jas, bet ir afinines transformacijas gautas iš minėtųjų transformacijų. Priminsime, kad afininės transformacijos tai tiesinės transformacijos su postūmiu.

Tarkime duotas kvadratas v_0 . Žemiau pateiktame 20 pav. pirmas iš kairės. Kad lengviau būtų stebėti šio kvadrato transformacijas, dvi kvadrato viršūnes pažymėjome. Pastebėsime, kad v_1, v_2, v_3 yra kvadrato v_0 transformacijos. Šie kvadratai gaunami pradinį kvadratą sukant $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ kampais, atitinkamai. Tai atlikti galime naudodami posūkio transformaciją:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \xi & -r \sin \xi \\ r \sin \xi & r \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kai $r = 1$.



20 pav.

Raskime transformacijų, kurios pradinį kvadratą v_0 transformuoja į kvadratus v_1, v_2, v_3 analizes išraiškas.

Pažymėkime $T_1 : v_0 \rightarrow v_1$. Kadangi tai posūkio 90° kampu matrica, tai

$$T_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

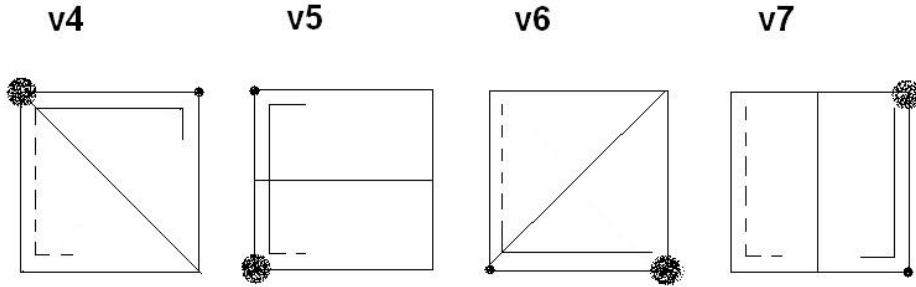
Analogiškai samprotaudami gauname, kad $T_2 : v_0 \rightarrow v_2$.

$$T_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 1 \\ -y + 1 \end{pmatrix},$$

ir $T_3 : v0 \rightarrow v3$

$$T_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + 1 \end{pmatrix}.$$

21 pav. yra pateikiamos dar keturios pradinio kvadrato $v0$ transformacijos, kurios gaunamos šį kvadratą simetriškai vaizduojant 21 pav. nurodytų ašių atžvilgiu.



21 pav.

Raskime transformacijų, kurios pradinį kvadratą $v0$ transformuoja į kvadratus $v4, v5, v6, v7$, matricas A_4, A_5, A_6, A_7 , atitinkamai.

Panagrinėkime, kaip gaunamas $v0$ vaizdas $v4$. Laikykime, kad kvadrato apatinė kairioji viršūnė yra koordinatinių pradžių taške, o kvadratas yra vienetinis. Tada kvadratas $v4$ gaunamas taikant tokią transformacijų seką pradiniam kvadratui:

- atliekame postūmį vektoriaus $(-1, -1)$ kryptimi;
- pasukame teigiama kryptimi 90° kampų;
- atliekame simetrinį vaizdavimą Ox ašies atžvilgiu.

Tada transformaciją $T_4 : v0 \rightarrow v4$ galime aprašyti tokiu būdu:

$$T_4(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}.$$

Raskime transformaciją $T_5 : v0 \rightarrow v5$.

Panagrinėkime kokius veiksmus reikia atlikti, kad gauti norimą rezultatą:

- atliekame postūmį vektoriaus $(0, -1)$ kryptimi;
- atliekame simetrinį vaizdavimą Ox ašies atžvilgiu.

Tada transformaciją $T_5 : v0 \rightarrow v4$ galime aprašyti tokiu būdu:

$$T_5(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Transformacija $T_6 : v0 \rightarrow v6$ bus sudaroma tokiu būdu:

- atliekame simetrinį vaizdavimą Oy ašies atžvilgiu;
- atliekame posūkį 90° kampų, neigiama kryptimi.

Tada transformaciją $T_6 : v0 \rightarrow v6$ galime apibūdinti tokiu būdu:

$$T_6(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Samprotaudami visiškai analogiškai gauname, kad

$$T_7(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}.$$

Visų šių transformacijų matricos (kartu su spaudimo koeficientu 0.5) pateikiamos žemiau.

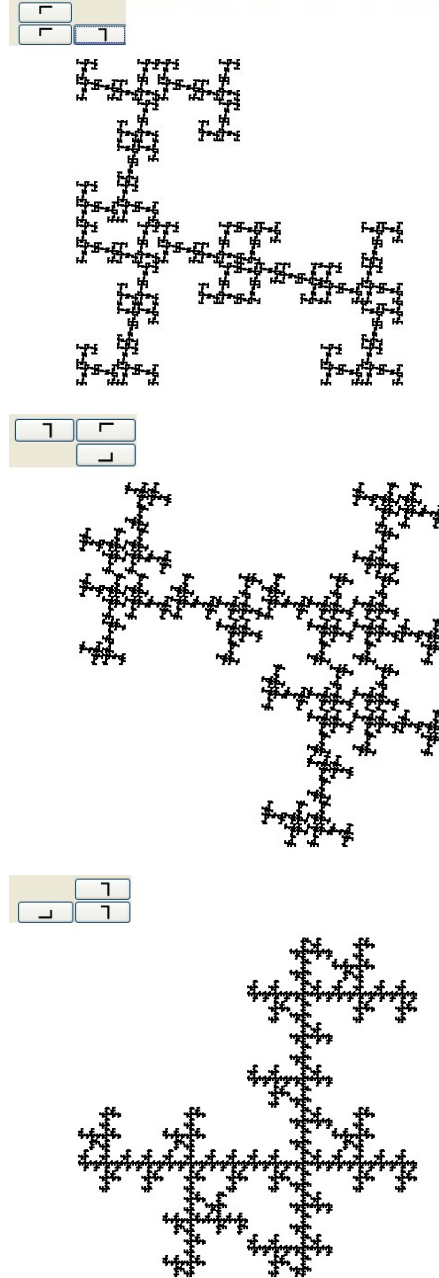
$$v0(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}, \quad v1(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix},$$

$$v2(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$v4(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v5(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$v6(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}, \quad v7(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}.$$

Žemiau pateiktuose pav. yra pateikiamas transformacijų kodas bei IAS atraktorius.



22 pav.

3.7 Modeliavimas naudojant atsitiktinumą. "Chaosas žaidimas"

Šiame skyrelyje aptarsime galimybę modeliuoti fraktalus iteracijoms naudojant tik vieną tašką.

IAS atraktoriui modeliuoti yra naudojamas ir taip vadinamas chaoso žaidimas. Trumpai aprašysime jo esmę. Tarkime, kad duota IAS $\{X; \omega_n : n = 1, \dots, N\}$. Be to tarkime, kad $\{p_i : i = 1, \dots, N\}$ yra tokie skaičiai, kad

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i > 0, i = 1, \dots, N.$$

Tarkime, kad nagrinėjama IAS yra apibrėžta afininėmis transformacijomis, kurių tiesinės dalies matrica yra A_i . Apibrėžkime minėtuosius skaičius tokiu būdu:

$$(6) \quad p_i = \frac{|\det A_i|}{\sum_{i=1}^N |\det A_i|}.$$

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad kartais gali atsitikti taip, kad $|\det A_i| = 0$. Taip atsitiks tada, kad matrica yra išsigimusi. Šiuo atveju nulinį determinatą pakeisime mažu teigiamu skaičiumi.

Tarkime, kad $x_0 \in X$ bet koks, laisvai pasirinktas skaičius. Parinkime $x_n \in \{\omega_1(x_{n-1}), \dots, \omega_N(x_{n-1})\}$ kai $n = 1, 2, \dots$. Tegu skaičiaus $x_n = \omega_i(x_{n-1})$ parinkimo dažnumas apibrėžiamas tikimybe p_i . Tokiu būdu sukonstruojame atsitiktinių skaičių (pikselių) seką $\{x_n\} \in X$. Tarkime, kad duota SIAS $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$. Laikome, kad ir $p_i > 0$ visiems $i = 1 \dots, n$ ir p_i apibrėžti (6) lygybėmis.

Beje, kai reikšmė $\omega_0(x_{n-1}) = x_n$, kokiam nors n , tai tuomet x_n turėtų priklausyti sankaupos aibei. Aišku, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja į SIAS atraktorių. Kaip jau buvo minėta, jei $\det A_i = 0$, tai šiuo atveju parenkama maža $p_i = \delta$, $0 < \delta < \min_{j \neq i} |\det A_j|$ skaičiaus $\omega_i(x_{n-1}) = x_n$ pasirodymo tikimybė.

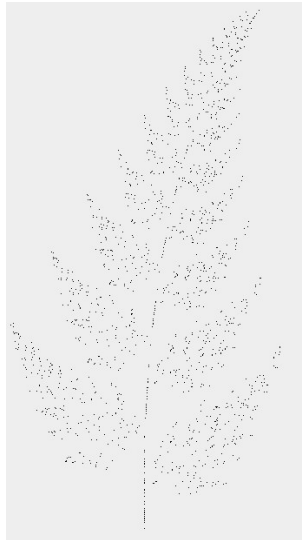
Tad bendru atveju galime tikimybių apibrėžimo formulę užrašyti tokiu būdu:

$$(6) \quad p_i = \frac{\max(\delta, |\det A_i|)}{\sum_{i=1}^N \max(\delta, |\det A_i|)}.$$

4.8 paveikslėlyje iliustruojama, kaip didinant iteracijų skaičių "gimsta" lapas. Buvo naudotos afininės transformacijos

$$\omega_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i x + t_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

p



23 pav.



24 pav.

3.8 Papildomas skyrius. Vaizdo kodavimas naudojant IAS

Tarkime, kad atliekame chaoso žaidimą. Sakykime, kad buvo atlikta k bandymų, o šių bandymų realizacijos yra taškai $z_1, z_2, \dots, z_k \in D$. Pažymėkime

$$h(z_1, z_2, \dots, z_k; A) = |\{z_i \in A, i = 1, \dots, k, A \subset D\}|.$$

čia turime omenyje, kad koduojama aibė A naudojant IAS, $A \subset D$. Chaoso žaidimą susiesime su IAS aukščiau aprašytu būdu. Pastebėsime, kad tikimybės p_i gana tiksliai "paskirsto" taškus priklausomai nuo transformacijos ω_i svorio, t.y. determinanto reikšmės. Skačiuodami santykinį taškų, kurie pateko į atraktorių dažnį, mes apibrėžiame matą atraktoriuje, kuris vadinamas invariantiniu matu. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad mes laikome, kad nagrinėjamas (koduojamas vaizdas sutampa su IAS atraktoriumi).

Panagrinėkime monitoriaus pikselinę matricą, kurią sudaro m eilučių ir n stulpelių. Kiekvienas pikselis P_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ yra susietas su spalvos kodu (pustonių), kurio reikšmę interpretuosime skaičiumi $Q_{ij} \in [0, 1]$ (šie skaičiai gali būti interpretuojami kaip funkcijos reikšmės), 0 bus juodos spalvos reikšmė, o pati didžiausia 1 bus baltos spalvos reikšmė. Pilka spalva, priklausomai nuo ryškumo, bus susieta su skaičiais iš intervalo $(0, 1)$.

Tarkime, kad duota IAS t.y. $\omega_1, \dots, \omega_k$ ir su šiomis transformacijomis susietos tikimybės p_1, \dots, p_k .

Panagrinėkime, kaip atliekant eksperimentą, dažnai yra aplankomas fiksuotas pikselis, t.y.:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(z_1, z_2, \dots, z_k; P_{ij})}{k} = R_{ij}.$$

Šis sąryšis nurodo "apsilankymo" pikselyje P_{ij} santykinio dažnio asimptotiką. Susiekime šį dažnį su pikselio spalvos intensyvumu. Kitaip tariant laikykime, kad spalvos intensyvumas tiesiogiai proporcingas minėtam dažniui ("apsilankymų" skaičiui). Apibrėžkime

$$Q_{ij} = \alpha R_{ij}.$$

$\alpha > 0$.

Vaizdo kodas apima transformacijas $\omega_1, \dots, \omega_k$ ir tikimybes p_1, \dots, p_k . Atlikdami eksperimentą (realizuodami chaoso žaidimą) ir naudodami šią IAS mes paverčiame šią informaciją į pikselių intensyvumo parametrus. Kyla tik klausimas- ar galime gautus intensyvumo parametrus Q_{ij} ,

gautus remiantis IAS, laikyti pakankamu vaizdo artiniu? Tad iškyla toks klausimas- kaip rasti tinkamą vaizdo kodą $\omega_1, \dots, \omega_k$ ir tikimybes p_1, \dots, p_k toki, kad šio kodo pagalba gauti skaičiai R_{ij} kuo tiksliau aproksimuotų vaizdo intensyvumo parametrus Q_{ij} .

Plačiau panagrinėkime vaizdo kodavimo problemą naudojant IAS.

3.9 Vaizdo kodavimas ir spaudimas naudojant IAS

Vaizdas kompiuteryje paprastai saugomas naudojant spalvos kodo informaciją, kuri susijama su kiekvienu pikseliu. Baltos-juodos spalvos monitoriuje kiekvienas pikselis gali būti užkoduotas vienu iš 256 lygių. Taigi, kiekvienas pikselis turi būti koduojamas 8 bitais. Kiekvienas standartinis vaizdo spaudimo metodas gali būti vertinamas pagal jo sąspūdžio koeficientą. Vaizdo spaudimo schemas, kurios naudoja IAS techniką ateityje vadinsime fraktaline spaudimo technika. Ši technika iš esmės skiriasi nuo "pikselinės" spaudimo technikos, kadangi koduojama yra ne informacijos nešėjai pikseliai, bet vaizdo dalių nešėjai - transformacijos, tiksliau kalbant, šias transformacijas apibrėžiantys koeficientai.

Šiame skyrelyje aptarsime 2D vaizdo spaudimo problematiką. Vaizdą mes sugebame išskirti iš aplinkos tik todėl, kad jis nėra homogeninis. Taigi, skirtingos plokštumos dalys turi skirtingą spalvų intensyvumą. Ši taškų intensyvumą galime aprašyti matematine terminologija. Tarkime $z = f(x, y)$ yra dviejų kintamųjų funkcija įgyjanti realias reikšmes. Siekdami konkrečių tikslų funkcijos reikšmes normuokime:

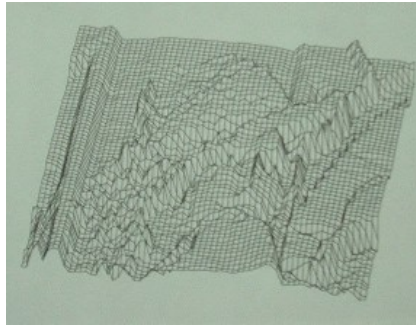
$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad A, B, \in \mathcal{R}.$$

Žinoma, kad ryškumo skalė koduojama skaičiais iš intervalo $[0, 255]$. Pats didžiausias kodas atstovauja baltai spalvai, o mažiausias- juodai. Tad natūralu laikyti, kad jei $z(x, y) = 0$, tai šis pikselis juodas, o jei $z(x, y) = 1$ - baltas. Jei $0 < z(x, y) < 1$, tai pikselis yra pilkas ir jo spalvos intensyvumas nusakomas šios funkcijos reikšme.



25 pav.

Žemiau pateiktame paveiksle yra demonstruojamas Lenos paveikslo (1 pav.) intensyvumo funkcijos grafikas (2 pav.). Nesunku suprasti, kad realaus argumento funkcija nagrinėjamoje srityje įgyja begalo daug reikšmių, taigi dirbdami su baigtine rezoliucija turime arba intervaluose suvidurkinti intensyvumo reikšmes arba kiekvienam pikseliui priskirti konkrečią intensyvumo reikšmę.



26 pav.

Taip apibrėžta funkcija bus mati. Beje, tokiu būdu apibrėžę funkciją mes galime matuoti atstumus ir tarp skirtingų vaizdų tarkime $f(x, y)$ ir $g(x, y)$, naudodami funkcijų (tolydžių) metriką:

$$\rho(f, g) = \sup_{(x, y) \in I^2} |f(x, y) - g(x, y)|.$$

Atkreipsime dėmesį, kad modeliuojant vaizdus mes gauname ne tikslus vaizdus, bet jų aproksimacijas, tad natūraliai kyla klausimas- kaip palyginti originalų vaizdą su modelio vaizdu. Šiam tikslui ir reikalinga atstumo sąvoka. Beje, modeliuojant vaizdus (juos koduojant) mes naudosime "lokalaus panašumo" sąvoką. Šiuo atveju mes lyginsime ne vaizdą -originalą su šio vaizdo modeliu, bet atskiras šių komponentų dalis.

Panagrinėkime konkrečią situaciją: kaip koduoti pateiktą vaizdą?

Tegu $\{D_i, i \in I\}$ yra pradinio vaizdo denginys, t.y. vaizdas $V = \cup_i D_i$. Šį denginį, naudodami afinines transformacijas transformuokime į pradinio vaizdo skaidinį R_i , tenkinantį savybę: $R_i \cap R_j = \emptyset, j \neq i$ ir vaizdo kraštinės mastelis per pusę mažesnis. Turime du pradinio vaizdo denginius, kurių paskirtis skirtinga. Mūsų užduotis, turint šiuos du denginius nustatyti IAS, kurios atraktoriaus būtų duoto vaizdo artinys.

Kitaip tariant, tegu duota IAS $\{\omega_i, i = 1, \dots, N, s\}$. Naudodami šią IAS mes kiekvieną denginio aibę D_i išskaidome į nesikertančių aibių sistemą, $\{\omega_i(D_i)\}$, kurios priklauso aibės V skaidiniui, t.y. $\{\omega_i(D_i)\} = R_j$.

Taigi, jei pradinės aibės vaizdas V , tai šio vaizdo aproksimacija galime laikyti tokią transformaciją:

$$W(V) = \omega_1(V) \cup \omega_2(V) \cup \dots \cup \omega_N(V).$$

Beje, $\omega_i(V) \cap \omega_j(V) \neq \emptyset, i \neq j$.

O kaip gi atrodo šios transformacijos ω_i .

Apibrėžkime transformacijas tokiu būdu:

$$\omega_i(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \\ r_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

čia k_i, r_i yra transformacijos kontrasto ir ryškumo parametrai. Beje, $\omega_i(V) \equiv \omega_i(x, y, f(x, y))$, priminsime, kad funkcija $f(x, y) \in I$ yra taško (x, y) ryškumo funkcija. Remdamiesi funkcijos ω_i apibrėžimu galime tvirtinti, kad šios funkcijos apibrėžimo aibė yra $D_i \times I$.

Jei koeficientas $k_i = 0$, tai ši transformacija dengs vaizdą juodu kvadratu, o jei $k_i = 1$ – tai vaizdas nepakis. Jei $k_i < 1$ – kontrastas sumažės, jei $k_i > 1$ – padidės. r_i yra ryškumo parametras. Jei $r_i > 0$ tai ryškumas padidės, jei $r_i < 0$ – sumažės. Taigi, kiekvienam skaidinio kvadratui (blokui) teks rasti atskirą transformaciją (8 koeficientus).

Pažymėkime:

$$\omega_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ši transformacija nurodo, kaip pradinis denginys $\{D_i\}$ yra vaizduojamas į skaidinį $\{R_j\}$, t.y. $v_j(D_i) = R_j$. Tad modeliuodami vaizdą, mes taikome IAS pradinei aibei (nagrinėjamu atveju

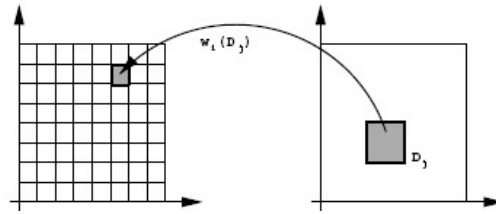
skaidiniui $D = \cup D_i$.) Iteruodami gauname vaizdų seką:

$$V_1 = W(D), V_2 = W^2(D), \dots, V_n = W^n(D).$$

Žinome, kad ši seka yra spaudžianti, jei IAS sąspūdžio koeficientas $0 \leq s < 1$. Taigi, šiuo atveju egzistuoja sekos riba, kuri sutampa su šios transformacijos nejudamu tašku (atraktoriumi). Iš transformacijų ω_i apibrėžimo išplaukia, kad jei naudosime tolydžių funkcijų metriką vaizdų aibėje, tai šiuo atveju tam, kad transformacija W būtų spaudžianti pakanka, kad $\forall k_i < 1$. Taigi, jei $k_i < 1$, tai spaudžiant vaizdą kontrastas mažėja. Kitaip tariant, mažoje aplinkoje vaizdo kontrastas nyksta.

Šiuo atveju pastebėsime, kad hausdorfo metrikos atžvilgiu transformacija W bus nebūtinai spaudžianti. Tuo atveju, kai transformacija W nėra spaudžianti fraktalų erdvėje, bet egzistuoja numeris $m \in \mathcal{N}$, kad transformacija W^m jau spaudžianti, tai tokią transformaciją W vadiname beveik spaudžiančia. Tad natūraliai kyla klausimas- ar pakanka modeliuojant vaizdą, kad IAS būtų beveik spaudžianti. Pasirodo ne, tam, kad išlaikyti kontrastą, reikia išlaikyti skirtingą ryškumą tarp vaizdo sričių R_i , kurios gaunamos spaudžiant vaizdą. Taigi, turi būti, kad transformacijos v_i taip pat būtų spaudžiančios.

Vaizdo kodavimas



27 pav.

Tarkime, kad V yra vaizdas, kurį mes siekiame koduoti. Tad visų pirma mums reikia nustatyti $IAS = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, s\}$ bei sudaryti Hutchinson'o transformaciją $W = \cup_{i=1}^N \omega_i$ tokią, kad jos nejudamas taškas sutaptų su nagrinėjamu vaizdu:

$$V = W(V) = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_N(V).$$

Spręsdami šią problemą mes visų pirma suskaidome vaizdą į dalis, kurioms taikome transformacijas ω_i . Tiksliau kalbant, mes vaizdą V uždengiame nesikertančia aibių sistema, kiekvienai šios sistemos aibei taikome transformacijas ω_i ir jas sujungę gauname vaizdo V aproksimaciją. Dar daugiau, iteruodami šį denginį transformacija W mes gauname $V' = W(V)$ kitaip tariant praktinį atraktorių, kuris nesutampa su tikruoju vaizdu. Kadangi skiriamoji geba nėra begalinė, tad jei atraktoriaus V' vaizdas yra pakankamai artimas tikram vaizdai, tai praktiškai jie nesiskiria, t.y. $V \approx V'$. Tad reikia koku nors pasirinktu būdu mokėti nustatyti skirtumą tarp vaizdų pasirinktose srityse. Kitaip tariant, mūsų tikslas taip parinkti transformacijas ω_i , kad atstumas

$$\rho(V \cap (R_i \times I), \omega_i(V)), \quad i = 1, \dots, \quad (2)$$

būtų minimalus. Akivaizdu, kad šiuo atveju labai svarbu tinkamai susieti skaidinį R_i su kokia nors denginio $\{D_i\}$ aibe.

Detaliau aptarkime šią problemą.

Tarkime, kad nagrinėjama kvadratinės formos vaizdą, kurio užimama sritis (pikseliais) yra 256×256 . Kiekvienam vaizdo pikseliui skiriama 8 bitų informacija. Tarkime, kad šio vaizdo denginį D sudaro kvadratai D_i , kurių eilė (pikselių skaičius) 16×16 . Taigi, denginį D sudaro 256 kvadratai. Apibrėžkime kitą denginį (skaidinį) R , kuris bus transformacijų v_i reikšmių sritis, per pusę trumpesnėmis kraštinėmis. Tokių kvadratų skaičius bus lygus 1024. Turime:

$$R = \{R_1, R_2, \dots, R_{1024}\}.$$

Taigi, šiuo atveju turime IAS, kurią sudaro $N = 1024$ transformacijos. Elgsimės tokiu būdu: kiekvienai denginio aibe R_i ieškome skaidinio aibės D_i tokios, kad (2) atstumas būtų minimalus. Priminsime, kad egzistuoja 8 kvadrato vaizdavimo būdai (prisiminkite simetrines transformacijas). Taigi, kiekvienam D_i turime sukonstruoti 8 transformacijas tam, kad galėtume tikrinti (1) atstumą. Bet kiekvienoje aibėje D_i yra keturis kartus daugiau taškų negu R_i , tad norint palyginti parametrus (pikslio spalvos kodą), remiantis sąryšiu (2) šiose srityse turime:

1) arba pasirinkti kvadrato $D_i \in D$ keturis pikselius reprezentuojantį vieną pikselį ir lyginti su $R_i \in R$ pikseliu;

2) arba suvidurkinti keturių pikslių parametrus srityje D_i ir pastaruosius lyginti su R_i pikseliu naudojantis lygybe (1).

Kaip tinkamai atlikti funkcijos (1) minimizavimą? Visų pirma rasti tinkamą vaizdo V denginį $\{D_i\}$ tokį, kad šis denginys reprezentuodamas vaizdą V būtų panašus į vaizdą R_j , kuris gautas transformavus D_i . Šiuo atveju turėtume naudoti vieną iš 8 simetrinės grupės transformacijų, vi , $i = 0, \dots, 7$, o tinkamiausią randame naudodami hausdorfo atstumą tarp vaizdo $v(D_i)$ ir aibės $R_i \cap V$.

Ir antra, tinkamai parinkti transformacijų ω_i kontrasto ir ryškumo konstantas k_i ir r_i . Kiekvienam denginiui D , šias konstantas galime rasti naudodami mažiausių kvadratų metodą. Kiek detaliau panagrinėkime šią problemą. Tarkime duoti dviejų kvadratų, turinčių po n pikselių, intensyvumai: a_1, a_2, \dots, a_n – denginio D_i intensyvumo (suapvalinti, suvidurkinti ar kitu būdu parinkti, kadangi jų yra 4 kartus daugiau) parametrai ir b_1, b_2, \dots, b_n – yra skaidinio R_j – pikselių intensyvumo parametrai. Šiuo atveju galime laikyti, kad b_i yra R_i kvadratų intensyvumas, o a_i – yra kvadratų D_i keturių pikselių suvidurkinti intensyvumai.

Minimizuokime tokį skirtumą:

$$S = \sum_{n=1}^n (k \cdot a_i + r - b_i)^2.$$

Žinoma, kad minimali S reikšmė bus įgyjama toje taškų (k, r) poroje, kai

$$\begin{cases} S'_k = 0 \\ S'_r = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname, kad

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{n \sum_{i=1}^n a_i^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)^2} \quad (3)$$

ir

$$r = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n b_i - k \sum_{i=1}^n a_i \right). \quad (4)$$

Tada minimali S reikšmė:

$$S = \frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + k \left(k \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + 2r \sum_{i=1}^n a_i \right) \right) + r \left(rn - 2 \sum_{i=1}^n b_i \right) \right).$$

Pastebėsime, kad jei $k = 0$, tai $r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i$.

Žinoma, mus domina ne minimali S reikšmė, o parametrų k, r įverčiai gauti (3) ir (4) lygybėse. Transformacijos v_i parametrus $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ parenkame pagal tai, kokią simetrinę transformaciją tenka naudoti sutapatinant $v_i(D_i)$ su "geriausiai" tinkančia R_j . Parenkant konstantas k_i, r_i remiantis denginio aibėmis D_i , mes tuo pačiu apibrėžiame ir transformaciją ω_i .

Kitaip tariant, pasirinktai aibei $R_i \in R$, koduojant yra ieškoma skaidinio aibė D_i (paieška atliekama tikrinant sąlygą (1)) taip, kad $\omega_i(D_i) \approx R_i$.

Kai turime visas transformacijas ω_i , $i = 1, \dots, N$, tuo pačiu apibrėžiame ir transformaciją W , kurios atraktorius ir laikomas vaizdo dekodavimu.

Pateiksime vaizdo spaudimo pseudo-kodą.

Algoritmas

a. Denginio tikslumo nustatymas.

♣ Parenkame pradinio vaizdo V ir šio vaizdo artinio V' tikslumo parametą ϵ .

♣ Apibrėžiame vaizdo V denginį D bei skaidinį R .

ciklo pradžia {

♣ Denginyje D surandame aibę D_i ir su ja susiejame transformaciją ω_i , kuri geriausiai dengia pasirinktą skaidinio aibę R_i . "Geriausiai" čia suprantama, kad atstumas (1) yra mažesnis negu ϵ .

♣ Jei

$$\rho(V \cap (R_i \times I), \omega_i(V)), \quad i = 1 \leq \epsilon, \quad \text{arba} \quad |R_i| < r_{\min},$$

tai R_i yra tinkamai uždengtas ir fiksuojame transformaciją ω_i ,

♣ kitu atveju

♣ skaidinį R smulkiname ir senąjį R keičiame naujuoju (smulkesniu) ciklo pabaiga.

b. IAS transformacijų paieška.

♣ Pasirenkame IAS transformacijų skaičiaus parametą N .

♣ Apibrėžiame vaizdo V denginį D bei skaidinį R .

Ciklo pradžia

♣ kiekvienai skaidinio aibei $R_i \in R$ nustatome denginio aibę $D_i \in D$ ir ω_i kuri geriausiai (a. atvejis) dengia sritį ir išsaugome transformacijos koeficientus bei uždengtą aibę R_i .

♣ Skaidinio sąrašė randame aibę $R_j \in R$, $|R_i| > r_{\min}$ tokią, kad atstumas

$$\rho(V \cap (R_j \times I), \omega_j(V))$$

yra didžiausias.

♣ Jeigu skaidinio aibių skaičius $|R| < N$, tai

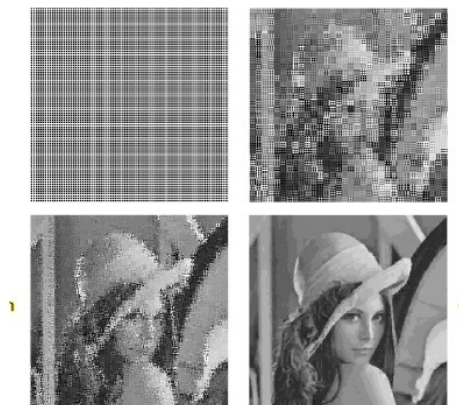
♣ R_j yra skaidoma į smulkesnes aibes ir veiksmą kartojame, prieš tai saugomus transformacijos ω_j bei srities D_j duomenis pašaliname iš saugomų sąrašo.

♣ kitu atveju tęsiame ciklą

ciklo pabaiga .

♣ Išsaugome transformacijų ω_i , $i = 1, \dots, N$ duomenis.

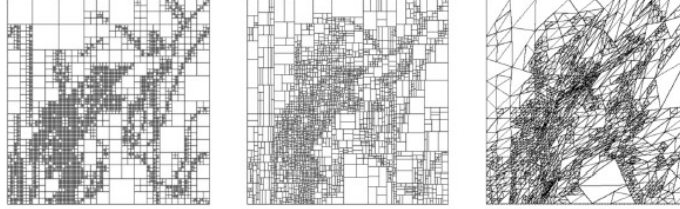
Išspaudžiant vaizdą elgiamasi tokiu būdu. Visų pirma į kompiuterio buferį yra patalpina mas tolygus vaizdas (žr. pav. kairės pusės viršuje). Atliekama pirmoji iteracija, t.y. kiekvieno (range) bloko pikseliai yra skaičiuojami visomis transformacijomis ω_i . Ir taip elgiamasi kiekvienos iteracijos metu. x pav. yra pateiktos pirmoji, antroji ir dešimtoji iteracijos.



28 pav.

Pastaba Detaliau šio fakto nenagrinėsime, bet atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad vaizdo skaidinys gali būti ir nehomogeninis, t.y. skaidinio dalys gali būti ir ne vienodos. Jei kvadrato kurioje nors dalyje, nėra nagrinėjamo vaizdo detalių, tai šią dalį galima skaidyti maksimalaus dydžio kvadratais.

Antra vertus, tiek denginys, tiek skaidinys gali būti ir ne kvadratai, bet stačiakampiai arba trikampiai. Žr. pav.



29 pav.

3.10 Plevenimas vėjyje. Fraktalai priklausantys nuo parametro

Paskutinioji teorema suteikia tokią galimybę - apversti priartinimo problemą. Tarkime, kad duotoje aibėje L , apibrėžėme IAS, kurios atraktorius yra fiksuota aibė. Tada teisinga tokia teorema.

Teorema 8. Tarkime, kad

$$(Y, \rho_y), (X, \rho_x)$$

dvi metrinės erdvės ir S.A. šeima

$$f : Y \times X \rightarrow X,$$

kurios s.k. $s \in [0, 1)$, t.y. visiems

$$y \in Y, f(y, \circ)$$

yra spaudžiantis atvaizdis erdvėje X , be to šis atvaizdis yra tolydus parametro y atžvilgiu. Jei $x_f(y)$ yra nejudamas šios transformacijos taškas, tai atvaizdis $x_f : Y \rightarrow X$ yra tolydi funkcija.

Kitaip tariant, nejudamas taškas nuo parametro priklauso tolydžiai.

⊖

Turime, kad bet kokiam fiksuotam y , $x_f(y)$ atvaizdžio f nejudamas taškas, erdvėje X . Simboliškai, tai galime užrašyti taip: visiems $y \in Y$ S.A. $f(y, \circ)$ turi nejudamą tašką $x_f(y)$. Tarkime, kad $\epsilon > 0$, bet koks laisvai pasirinktas fiksuotas realus skaičius. Tada visiems $y_1 \in Y$ teisingos tokios nelygybės:

$$\begin{aligned} \rho(x_f(y), x_f(y_1)) &\leq \\ \rho(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y_1))) &\leq \\ \rho(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y))) + & \\ \rho(f(y_1, x_f(y)), f(y_1, x_f(y_1))) &\leq \\ \rho(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y))) + s & \\ \rho(x_f(y), x_f(y_1)), & \end{aligned}$$

Iš pastarųjų nelygybių gauname

$$\rho(x_f(y), x_f(y_1)) \leq$$

$$(1-s)^{-1}\rho(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y))).$$

Matome, kad paskutiniosios nelygybės dešinioji pusė gali būti kiek norimai maža, kai y_1 yra kiek norimai arti y . Taigi $x_f(y) \rightarrow x_f(y_1)$, kai tik $y \rightarrow y_1$.

⊕

Pavyzdžiui, transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \frac{x}{2} + p$, yra S.A., kuris yra tolydus parametro p atžvilgiu.

Tarkime, kad IAS parametrizuota parametrų aibės P , elementais, t.y. $\{X; \omega_{1_p}, \dots, \omega_{N_p}\}$. Tegu visiems $\epsilon > 0$, egzistuoja $\delta > 0$ tokie, kad

$$\rho_p(p, q) < \delta \implies h(\omega_p(B), \omega_q(B)) < \epsilon.$$

Sakykime, kad bet kokiam $p \in P$, $\omega_{i_p}(\circ)$ yra tolydi funkcija aibėje X . Tarkime, kad egzistuoja $k > 0$, nepriklausantis nuo x ir p toks, kad visiems $x \in X$ ir ω_{i_p} teisinga nelygybė

$$\rho(\omega_{i_p}(x), \omega_{i_q}(x)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Ši nelygybė vadinama Lipšico sąlyga. Pastarosios nelygybės dėka galime gauti įvertį, nepriklausanti nuo kintamojo x . Mes siekiame gauti analogišką nelygybę ir fraktalų erdvėje. Turėdami šį įvertį, 4.10 Teoremą galėtume perrašyti ir fraktalų erdvėje. Norint tai atlikti, mums pakanka įrodyti, kad visiems $B \in H(X)$ teisinga nelygybė:

$$h(\omega_{i_p}(B), \omega_{i_q}(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Žinome, kad

$$h(\omega_p(B), \omega_q(B)) = \rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) \vee \rho(\omega_p(B), \omega_q(B)),$$

kur

$$\begin{aligned} \rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) &= \max_{x \in \omega(B)} \rho(x, \omega_q(B)), \\ \rho(x, \omega_q(B)) &= \min_{y \in \omega(B)} \rho(x, y). \end{aligned}$$

Tarkime, kad $x \in \omega_p(B)$. Tada išplaukia, kad egzistuoja $x_0 \in B$, kuriam teisingas sąryšis: $x \in \omega_p(x_0)$. Beto, egzistuoja taškas $\omega_p(x_0) \in \omega_q(B)$ toks, kad

$$\rho(x, \omega_q(x_0)) \leq k\rho_p(p, q) \implies \min_{y \in \omega_q(B)} \rho(x, y) \leq$$

$$\rho(x, \omega_q(x_0)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Iš pastarųjų sąryšių išplaukia, kad

$$\rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Visiškai analogiškai samprotaudami, gauname

$$\rho(\omega_q(B), \omega_p(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Iš paskutiniųjų dviejų nelygybių išplaukia, kad

$$h(\omega_p(B), \omega_q(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Remdamiesi pastarąja nelygybe galime tvirtinti, kad 'nežymus' parametro kitimas, esant fiksuotam atvaizdžiui ω_p , 'nežymiai' keičia aibės $B \in H(X)$ vaizdą. Baigtinei atvaizdžių šeimai

$$\omega_{i_p}, \dots, \omega_{N_p}$$

ir šiuos atvaizdžius atitinkančioms konstantoms k_1, \dots, k_N , kai $k = \max_{i=1, \dots, N} k_i$ gauname, kad

$$h(\omega_{i_p}(B), \omega_{i_q}(B)) \leq k \rho_p(p, q).$$

Galime padaryti išvadą, kad tokių aibių vaizdų sąjungos pokytis, keičiant parametą vieną kitu, skirsis ne daugiau negu

$$h(W_p(B), W_q(B)) \leq k \rho_p(p, q).$$

Taigi:

$$h(A_p, A_q) \leq (1-s)^{-1} h(W_p(A_p), W_q(A_p)) \leq (1-s)^{-1} k d_p(p, q)$$

Perrašykime 3.10 Teoremą fraktalų erdvėje.

Teorema 9. *Sakykite, kad (X, ρ) pilna metrinė erdvė ir be to $\{X; \omega_1, \dots, \omega_N\}$ IAS, kurios s.k. s. Tarkime, kad $\omega_n, n \in \{1, 2, \dots, N\}$ yra transformacijų seka, priklausanti nuo parametro $p \in (P, \rho_p)$, tenkinanti sąlygą -*

$$\rho(\omega_{n_p}(x), \omega_{n_q}(x)) \leq k \rho_p(p, q)$$

, visiems $x \in X$, be to k nepriklauso nuo n, p ir x . Tada atraktorius $A(p) \in H(X), p \in P$ yra tolydus Hausdorfo metrikos prasme, parametro $p \in P$ atžvilgiu.

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad mažai pakeitus parametą, mažai pakinta atraktorius ir taip, kad IAS nėra pažeidžiama. Taigi, mes žinome, kad duotosios IAS atraktorių galime 'tolygiai' kontroliuoti. Tuo pačiu tarpines atraktoriaus padėtis galime interpoliuoti (dėl tolydumo), o tai praktiškai gali būti naudojama animacijoje, priverčiant figūras judėti.

Tarkime,

$$\{\mathbb{R}^2; \omega_1, \dots, \omega_n\}$$

kuri nors IAS. Parinkime bet kokią kompaktišką aibę $A_0 \subset \mathbb{R}^2$. Sudarykime kompaktiškų aibių seką $A_n = W^n(A_0)$, tokiu būdu:

$$(6) \quad A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N \omega_j(A_n), j=1, 2, \dots$$

Tokiu būdu, mes fraktalų erdvėje konstruojame kompaktiškų aibių seką:

$$\{A_n : n=0, 1, \dots\} \subset H(\mathbb{R}^2).$$

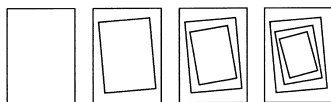
Be to, žinome, kad paskutinioji aibių seka konverguoja (hausdorfo metrikos prasme) į IAS atraktorių.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Nurodykite suspaudžiančią transformaciją, kuri iteruojama vienetinį apskritimą, kurio centras taške $(2, 2)$, suspaustų į tašką $(2, 2)$.

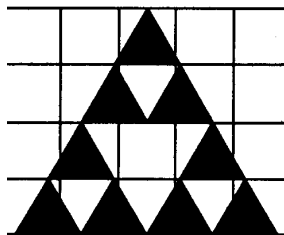
2. Raskite transformacijos $f_p(x) = \frac{x}{2} + p$ nejudamą tašką.

3. Tarkime, kad A yra stačiakampis, žr. pav. žemiau, kurio matmenis pasirenkate patys. Tarkime, kad kiekviename iteraciniame žingsnyje, transformacija suspaudžia prieš tai buvusio stačiakampio 10% ilgio ir tiek pat pločio bei pasuka 10^0 kampų teigiamąja kryptimi. Raskite šią transformacijų seką. Sudarykite programą, generuojančią šią seką.



3.

a) Raskite afininių transformacijų seką, kuri generuotų Sierpinskio trikampį. Šios iteracijos antrasis žingsnis pateikiamas paveikslėlyje žemiau.



4. Apibrėžkite IAS, kuri generuotų Kocho kreivę, pavaizduotą 1.7 pav.

5. Tarkime, kad duotas vienetinis apskritimas, kurio centras taške $(0, 1)$. Nurodykite transformacijų seką, kuri šį apskritimą ridentų Ox ašimi. (Posūkio kampą pasirinkite savo nuožiūra).

6. Tarkime, kad duotas vienetinis apskritimas, kurio centras taške $(0, 1)$ ir apskritimas, kurio spindulys $r=0.25$, o centras taške $(0, 0.25)$. Raskite transformaciją, kuri mažesnę apskritimą ridentų vienetinio apskritimo vidine lanko dalimi.

7. Apibrėžkite transformacijų seką, kuri vienetinį apskritimą esantį plokštumoje xy , kurio centras taške $(0, 1)$ suktų apie tašką $(0, 0)$.

8. Apibrėžkite transformaciją, kurios iteracinė seka apskritimą

$$y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

vartytų Ox ašimi.

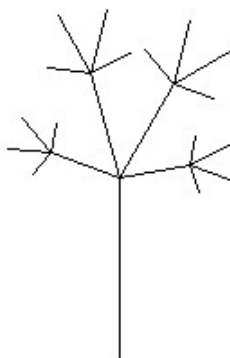
9. Nurodykite transformacijų seką, kuri sferą

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

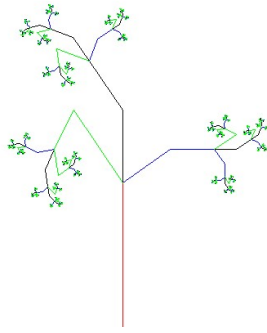
ridentų tiese

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

10. Sudarykite SIAS, kurios transformacijos $W(\cdot)$ antrasis sekos narys yra pateiktas žemiau paveiksle. Kampus bei atkarpų ilgius pasirinkite patys.

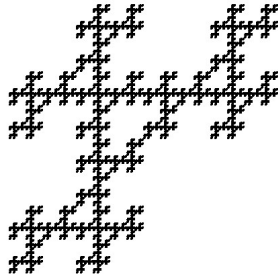


11. Sumodeliuokite pateiktą medį:



12. Aprašykite algoritmą, kurį realizuojant medis, sudarytas 8. užduotyje, "svyruotų vėjyje." Kaip reiktų papildyti apibrėžtas transformacijas, kad tai būtų įmanoma realizuoti, vykdant programą.

13. Naudodami simetrines transformacijas sumodeliuokite pateiktą aibę:



14. Tarkime, kad duota transformacija $f(x_1x_2\dots)=1x_2x_3\dots$ $x_i \in \{0,1\}$ apibrėžta begalinių sekų aibėje Σ , kuri metrizuota metrika

$$\rho_\sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i-y_i|}{3^i}.$$

Patikrinkite, ar ši transformacija yra S.A. metrinėje erdvėje (Σ, ρ_Σ) . Raskite šios transformacijos nejudamą tašką.

15. Duota IAS:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Be to tarkime, kad $A_0=\{(0,5,y); 0 \leq y \leq 1\}$ ir $W^n(A_0)=A_n$. Raskite šios IAS atraktorių.

16. Įrodykite, kad Miobuso transformacija metrinėje erdvėje $(\mathbb{C}, \rho_{\bar{c}})$ nėra spaudžianti.

17. Nurodykite sąlygas, kada Miobuso transformacija

$$\omega(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0,$$

yra S.A. skritulyje $X=\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$

18. Sakykite, kad (Σ, ρ_Σ) begalinių sekų, virš $N=\{0,1,2\}$, aibė. Tegų $\omega_i : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $i=1,2$ apibrėžtos lygybėmis

$$\omega_1(x)=0x_1x_2\dots, \quad \omega_2=2x_1x_2\dots$$

Įrodykite, kad šie atvaizdžiai yra spaudžiantys ir raskite sąspūdžio koeficientus. Koks IAS $\{(\Sigma, \rho_\Sigma), \omega_1, \omega_2\}$ atraktorių.

19. Nurodykite IAS, kurios atraktorius būtų Sierpinskio trikampis.

20. Tarkime, kad duotas apskritimas, kurio spindulys lygus 1, o centras taške $(0,1)$. Be to, tegų kito apskritimo centras taške $(0,0.25)$, o spindulys $r=0.25$. Realizuokite mažesniojo apskritimo "riedėjimo" didesniojo apskritimo vidumi ir besispaudžiančio į tašką, uždavinį.

21. Tarkime, kad IAS apibrėžta tokiu būdu:

$$\{[0,1], 0.5x, 0.5x+0.5\}.$$

Raskite šios IAS grafinį vaizdą. Programoje turi būti nurodyta galimybė įvedus iteracijos numerį, rasti šios iteracijos generuotų intervalo galų koordinatas (kodus), bei nurodžius bet koki kodą, atstatyti šį kodą turintį tašką, nurodant kokiam iteracijos sekos nariui šis taškas priklauso. Koduokite dvejetainiu kodu.

22. Nurodykite IAS, kuri modeliuotų Sierpinskio trikampį. Raskite šios IAS grafinį vaizdą. Programoje turi būti nurodyta galimybė įvedus iteracijos numerį, rasti šios iteracijos generuotų Sierpinskio trikampio taškų koordinatas (kodus), bei nurodžius bet koki kodą, atstatyti šį kodą turintį tašką, nurodant kokiam iteracijos sekos nariui šis taškas priklauso. Koduokite trejetainiu kodu.

23. Raskite IAS atraktoriaus grafinį vaizdą, jei $\{\mathbb{C}; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$$\omega_i = s_i z + (1 - s_i) a_i, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

o koeficientai apibrėžti lentelėje:

i	s_i	a_i
1	0.6	$0.45 + 0.9i$
2	0.6	$0.45 + 0.3i$
3	$0.4 - 0.3i$	$0.6 + 0.3i$
4	$0.4 + 0.3i$	$0.3 + 0.3i$

24. Raskite IAS atraktoriaus grafinį vaizdą, jei IAS apibrėžta tokiu būdu: $\{\mathbb{R}^3; \omega_i, i=1, 2, 3, 4\}$ ir

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_2(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_3(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_4(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Skyriaus klausimai

1. Spaudžiantys atvaizdžiai metrinėje erdvėje
2. Teorema apie nejudamą tašką
3. Spaudžiantys atvaizdžiai fraktalų erdvėje
4. Iteracinės atvaizdžių sistemos
5. Sankaupos iteracinės atvaizdžių sistemos
6. Klasikinių fraktalų konstravimas naudojant IAS
7. Fraktalų modeliavimo teorema
8. Simetrijų grupė ir fraktalų modeliavimas

9. Fraktalai priklausantys nuo parametro
10. Chaoso žaidimas

Pasikartokite teorinius klausimus ir žinokite šias sąvokas

1. Spaudžiantis atvaizdis yra tolydus. Teorema apie nejudamą tašką pilnoje metrinėje erdvėje. Hutchinsono atvaizdis $W : H(X) \rightarrow H(X)$ yra spaudžiantis atvaizdis metrinėje erdvėje. Kondensacijos aibės ir kondensacijos transformacija. Modeliavimo teorema. Atraktoriai priklausantys nuo parametro. Fraktalų modeliavimo deterministinis ir stochastinis algoritmai.

Literatūra :

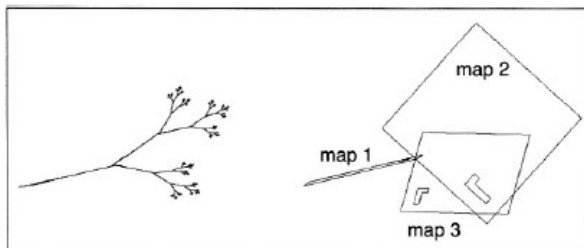
1. Michael F. Barnsley; Fractals, Spectrum 1993
2. Peitgen, H.O., ; Jurgens, H.; Saupe, D. Chaos and Fractals London (Springer)
3. Paskaitų konspektas.

Bendra pastaba Realizuojant praktinę užduotį, kartu su užduotimi turi būti pateikiamas ir formaliai aprašytas algoritmas ir ginantis programą visų pirma bus aptariamas algoritmas. Darbų gynimas vyks "gyvai", auditorijoje.

Privalomos užduotys

3.1 Užduotis

- a) Teorinė užduotis. Įrodykite, kad spaudžianti transformacija yra tolydi.
- b) Praktinė užduotis. Sudaryti programą, kuria būtų galima modeliuoti "šakelę" su pateiktu IAS kodu:



3.2 Užduotis

- a) Teorinė užduotis. Sakysime, kad (\mathbb{R}, ρ_2) . Aišku, kad $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$. Apibrėžkime spaudžiančias transformacijas tokiu būdu:

$$\omega_1[0, 1] = [0, \frac{1}{2}], \quad \omega_2[0, 1] = [\frac{1}{2}, 1], \quad \omega_1 = \frac{x}{2}, \quad \omega_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Šių transformacijų atraktorius yra intervale $[0, 1]$. Jis yra savo dviejų mažesnių kopijų sąjunga. Raskite šios IAS ribą.

- b) Praktinė užduotis. Sudaryti "universalų" medį. Programos lange parinkus nurodytą šakų skaičių ir atitinkamą kampų skaičių, turi būti rekursyviai modeliuojamas medis.

3.3 Užduotis

- a) Teorinė užduotis. Apibrėžkite transformacijų seką, kuri bet koki objektą esantį plokštumoje xy , kuriam priklauso koordinačių taškas $(0, 1)$, suktų apie šį tašką, kiekvieną kartą kampu α .
- b) Praktinė užduotis. Sudaryti universalią programą simetrinės grupės fraktalams simuliuoti.

3.4 Užduotis

- a) Teorinė užduotis. Nurodykite transformacijų seką, kuri sferą

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

ridentų tiese

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurią naudojant simetrinės grupės transformacijas būtų galima šifruoti-dešifruoti informaciją.

3.5 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Tarkime, kad duota transformacija $f(x_1x_2\ldots) = 1x_2x_3\ldots$ $x_i \in \{0,1\}$ apibrėžta begalinių sekų aibėje Σ , kuri metrizuota metrika

$$\rho_\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i}.$$

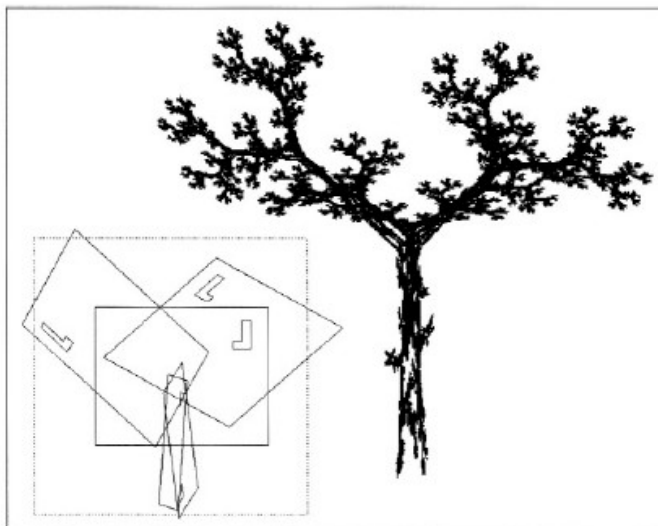
Patikrinkite, ar ši transformacija yra S.A. metrinėje erdvėje (Σ, ρ_Σ) . Raskite šios transformacijos nejudamą tašką.

b) Praktinė užduotis. Sudaryti "universalų" parametrizuotą medį. Programos lange parinkus keturias šakas ir keturis kampus turi būti rekursyviai modeliuojamas medis. "Priverskite" jį svyruoti vėjyje, keisdami parametą.

3.6 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Nurodykite IAS, kuri modeliuotų "Velnio laiptų" kreivę.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite IAS, kurios paveikslas ir atraktorius yra pateiktas paveiksle:



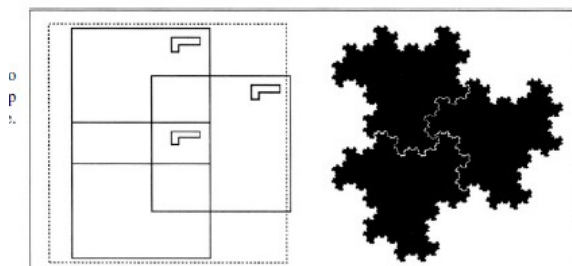
3.7 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Tarkime, kad duota transformacija $f(x_1x_2\ldots) = 0x_2x_3\ldots$ $x_i \in \{0,1\}$ apibrėžta begalinių sekų aibėje Σ , kuri metrizuota metrika

$$\rho_\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i}.$$

Patikrinkite, ar ši transformacija yra S.A. metrinėje erdvėje (Σ, ρ_Σ) . Raskite šios transformacijos nejudamą tašką.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite IAS, kurios paveikslas ir atraktorius yra pateiktas paveiksle:

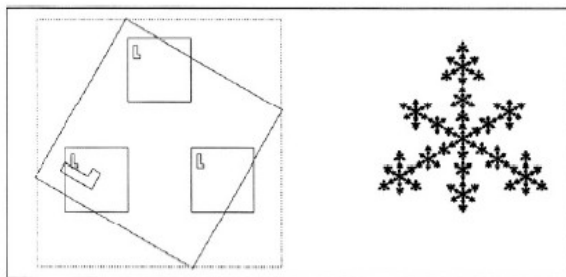


Tą patį fraktalą sumodeliuokite naudodami "chaoso žaidimo" metodą.

3.8 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Raskite transformacijų $f(x) = x^2 - 2$ ir šios transformacijos antros iteracijos $f^2(x)$ nejudamus taškus ir nustatykite jų pobūdį (pritraukiantis, atstumiantys ar neutralūs taškai).

b) Praktinė užduotis. Sudarykite IAS, kurios paveikslas ir atraktorius yra pateiktas paveiksle:



3.9 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Duota IAS:

$$\left\{ \mathcal{R}^2; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Be to tarkime, kad $A_0 = \{(0, 5, y); 0 \leq y \leq 1\}$ ir $W^n(A_0) = A_n$. Raskite šios IAS atraktorių.

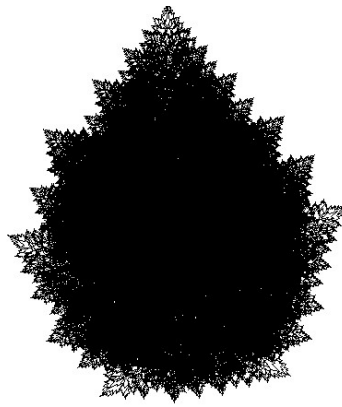
b) Praktinė užduotis. Naudodami "chaoso žaidimo" metodą sumodeliuokite pateiktą "papartį."



3.10 Užduotis

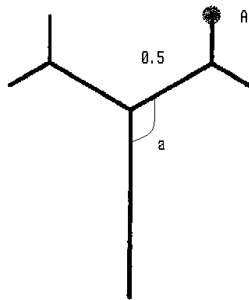
a) Teorinė užduotis. Nurodykite kokią nors suspaudžiančią transformaciją, kuri iteruojama vienetinį apskritimą, kurio centras taške $(2, 2)$, suspaustų į tašką $(2, 2)$ jį sukdamą apie tašką $(2; 1)$.

b) Praktinė užduotis. Naudodami "chaoso žaidimo" metodą sumodeliuokite pateiktą "krūmą."



3.11 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Raskite taško A koordinates, jei kampas $a = 135^\circ$, o medžio antroji iteracija pateikta pav. apačioje

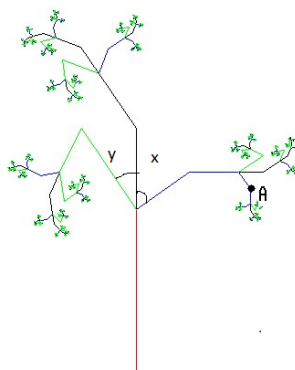


Pastaba Initiatorius yra atkarpa jungianti taškus $(0,0)(0,1)$.

b) Praktinė užduotis. Nurodykite IAS, kuri modeliuotų Kocho kreivę. Raskite šios IAS grafinį vaizdą. Programoje turi būti nurodyta galimybė įvedus iteracijos numerį, rasti šios iteracijos generuotų Kocho kreivės taškų koordinates (kodus), bei nurodžius bet kokį kodą, atstatyti šį kodą turintį tašką, nurodant kokiam iteracijos sekos nariui šis taškas priklauso. Koduokite trejetainiu kodu.

3.12 Užduotis

a) Teorinė užduotis. Raskite taško A (pav. apačioje) koordinates, jei $x = 45^\circ$, $y = 30^\circ$ skaičiuojant nuo vertikalės.



Pastaba Initiatorius yra atkarpa jungianti taškus $(0,0)(0,1)$.

b) Praktinė dalis. Naudodami "chaoso žaidimo" metodą sumodeliuokite teorinėje dalyje a) pateiktą "medį."

3.13 Užduotis

a) Teorinė dalis. Aprašykite algoritmą, kaip naudojant IAS būtų gali koduoti fraktalų taškus.

b) Praktinė dalis. Naudodami IAS sudarykite medžio modelį (pavyzdžiui iš 3-jų šakų) iki 4-os iteracijos ir po to realizuokite "plevenimo vėjyje" uždavinį.

3.14 Užduotis

a) a) Teorinė dalis. Aprašykite algoritmą, kaip naudojant pavyzdžiui Kantoro IAS būtų gali paslėpti informaciją pasirinktame paveiksle.

b) Praktinė dalis. Sudarykite programą, kurioje naudojant kokią nors IAS būtų gali paslėpti informaciją pasirinktame paveiksle ir po to vaizdą persiuntus šią informaciją dekoduoti, su ta pačia IAS.