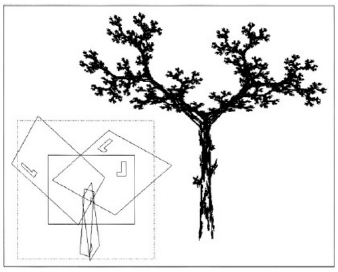
Vilniaus Universitetas
Matematikos ir Informatikos fakultetas

Gintautas Bareikis



Paskaitų konspektas su užduotimis

Vertinimo kriterijai. Semestro metu bus rašomi du atsiskaitomieji koliokviumai (KL_1, KL_2) darbai bei praktiniai darbai (PD_i). Pabaigoje, egzamino metu bus galima perrašyti KL_1, KL_2 darbus.

Bendras pažymys BP sudaromas taip:

$$BP = 0,2 \cdot (KL_1 + KL_2) + 0,6 \cdot \sum_{i=1}^{6} PD_i.$$

Pastaba Rengiant šį paskaitų konspektą buvo remiamasi žemiau pateikta

Literatūra:

1. Helmberg, G. Getting acquainted with fractals, Walter de Gruyter 2007
2. Peitgen, H.O., Jurgens, H. Saupe, D. Chaos and Fractals London (Springer) 2004

Papildoma literatūra:

3. Michael F. Barnsley; Fractals, Spectrum 1993

Vilnius 2019

Turinys

ĮVADAS

1.1 Aibės. Aibių veiksmai

Įvadinėje dalyje pateikiamos pagrindinės matematinės sąvokos, kuriomis bus operuojama visame leidinyje.

Aibe vadinsime bet kokį objektų rinkinį. Objektus sudarančius aibę vadinsime aibės elementais. Aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o elementus- mažosiomis. Priskiriant aibei elementus naudosime lygybės ženklą, elementus nurodydami tarp riestinių skliaustų. Pavyzdžiui, jei aibę A sudaro elementai s, m, a, b, tai šią priklausomybę žymėsime: $A = \{s, m, a, b\}$. Simboliu $A = \{x;\ P(x)\}$ žymėsime aibę, kurią sudaro elementai, tenkinantys savybę $P(x)$. Jeigu elementas a yra aibėje A, tai simboliškai šią priklausomybę žymėsime $a \in A$ ir jei elemento b nėra aibėje B, tai žymėsime $b \notin B$. Simboliniu sakiniu $\forall x \in A \ldots$ trumpinsime tokį sakinį: ”visi aibės A elementai tenkina savybę nurodytą daugtaškio vietoje”, o simbolinis sakinys $\exists x \in A \cdots -$ yra sakinio ”yra aibėje A bent vienas elementas tenkinantis savybę nurodytą daugtaškio vietoje”, trumpinys.

Pavyzdys Simbolinis reiškinys $A = \{x \in (0, 2);\ \sin x = 1\}$ apibrėžia aibę, kurią sudaro elementas $\pi/2$.

Jei aibės A elementai a ir b yra identiški, tik žymimi kitaip, tai norėdami pabrėžti šį faktą rašysime $a = b$. Be to, jei elementai sutampa, tai į aibės A elementų sąrašą įtrauksime tik vieną iš jų. Prisiminkime skaičių aibių žymėjimus. Simboliu $\mathbb{N}$ žymime natūraliųjų skaičių aibę, $\mathbb{N}_0-$ sveikųjų neneigiamų skaičių aibę, $\mathbb{Z}-$ sveikųjų skaičių aibę, $\mathfrak{Q}-$ racionaliųjų skaičių aibę, $\mathbb{I}-$ iracionaliųjų skaičių aibę ir $\mathbb{R}-$ realiųjų skaičių aibę, $\mathbb{C}-$ kompleksinių skaičių aibę.

Aibę turinčią vieną elementą žymime $A = \{a\}$. Aibę $\{x, x \neq x\}$ vadinsime tuščia. Kitaip tariant aibę vadinsime tuščia, jei ji neturi elementų. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Pavyzdžiui $\{x \in \mathbb{R}; |x| < 0\} = \emptyset$, kadangi nėra tokių realiųjų skaičių, kurie tenkina nurodytas salygas.

Sakysime, kad aibė A yra aibės B *poaibis* (žymėsime $A \subset B$), jeigu $\forall x \in A$ išplaukia, kad $x \in B$.

PastabaAtkreipiame dėmesį, kad jei bus kalbama apie skaičių aibes ir papildomų sąlygų nebus keliama, tai apriori laikysi, kad šios aibės yra sudarytos iš realiųjų skaičių.

Tarkime, kad $A = \{1, 2, a, c, 0\}$, o $B = \{a, 0\}$. Tada aibė $B \subset A$. Beje, aibė A yra aibės A poaibis, o tuščia aibė yra visų aibių poaibis. Šios dvi aibės vadinamos netiesioginiais duotosios aibės A poaibiais. Jeigu aibėje yra n elementų, tai iš šios aibės elementų galime sudaryti 2^n šios aibės poaibių (kodėl?).

Sakysime, kad aibės A, B lygios($A = B$), jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$. Pavyzdžiui, aibės $A = \{1\}$ ir $\{x; x - 1 = 0\}$ yra lygios, nes jų elementai sutampa.

Tarkime, kad visos nagrinėjamos aibės yra kokios nors vienos aibės poaibiai. Šią aibę vadinsime universalia, ir žymėsime I.

Nagrinėdami realiuosius skaičius ir šių skaičių įvairias aibes, universaliąja aibe galime laikyti aibę $\mathbb{R}$ arba nagrinėjant tik natūraliuosius skaičius ir aibes sudarytas iš natūraliųjų skaičių, universaliąja aibe laikysime natūraliųjų skaičių aibę. Pastebėsime, kad universaliosios aibės apibrėžimas yra sąlyginis, ir parenkamas priklausomai nuo situacijos. Beje, nėra universalios aibės, kuriai priklausytų visos aibės. Dėl šios priežasties, universaliosios aibės poaibių sistema paprastai vadinama *aibių klase.*

Aibių A ir B *sankirta* (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę

$$\{x, x \in A \text{ ir } x \in B\}.$$

Kitaip tariant, dviejų aibių sankirta yra aibė, kuriai priklauso šių aibių bendri elementai.

Pavyzdys Aibių $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{x; x > 5\}$ $A, B \subset \mathbb{N}$ sankirta yra aibė $\{6\}$.

Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe.

Aibę

$$D = \{x, x \in A \text{ arba } x \in B\}$$

vadinsime *aibių sąjunga*, kurią žymėsime $A \cup B$. Kitaip tariant, bet kuris sąjungą sudarančių aibių elementas priklausanto aibių sąjungai.

Žinoma, kad aibių $\mathbb{I} \cup \mathfrak{Q} = \mathbb{R}$. Tarkime, kad aibės A, B apibrėžtos paskutiniame pavyzdyje. Tada $A \cup B = \mathbb{N}$.

Aibių A ir B skirtumu, kurį žymėsime $A \setminus B$, vadinsime aibę $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.

Aibės A papildiniu, kurį žymėsime $\overline{A}$, vadinsime aibę

$$\overline{A} = \{x \in I, x \notin A\}.$$

Taigi, $\overline{A} = I \setminus A$. Taigi, kalbant apie aibės papildinį, svarbu žinoti universaliąją aibę, kuriai priklauso nagrinėjamoji aibė, kadangi aibės papildinys yra universaliosios aibės, neturinčios bendrų taškų su pradine aibe, papildinys.

Aibės A papildiniu aibės B atžvilgiu, kurį žymėsime $\overline{A}_B$, vadinsime aibę

$$\overline{A}_B = \{x \in B, x \notin A\}.$$

Nesunku suprasti, kad $\overline{A}_B = B \setminus A$.

Tarkime duota aibė A. Tada šios aibės poaibių aibę (kurią vadiname klase) žymėsime simboliu $\mathcal{A}$.

Tarkime, kad $x \in X$, o $y \in Y$. Simbolį (x, y) vadinsime aibių X, Y elementų pora. Pastebėsime, kad aibės X ir Y nebūtinai skirtingos.

Porų aibėje lygybės operaciją apibrėžkime tokiu būdu: dvi poras (a, b) ir (x, y) laikysime lygiomis tada ir tik tada, kai $a = x$ ir $b = y$. Priešingu atveju poras laikysime skirtingomis. Šiuo atveju sakysime, kad porų aibė yra sutvarkyta.

Tarkime A, B dvi aibės, nebūtinai skirtingos. Aibių A, B Dekarto sandauga vadiname tokią sutvarkytų porų aibę $A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$.

Tarkime $\mathbb{N}-$ natūraliųjų skaičių aibė. Tada, bet kokį šios aibės tiesiškai sutvarkytą poaibį $\Lambda \subset \mathbb{N}$, vadinsime *i*ndeksų aibe.

Tarkime, kad apibrėžta taisyklė, vienam natūraliąjam skaičiui priskirianti vieną klasės $\mathcal{A}$ aibę. Tada aibę $\{X_\lambda \in \mathcal{A}, \lambda \in \Lambda\}$, vadinsime klasės $\mathcal{A}$ elementų seka, jeigu aibė Λ begalinė ir aibių rinkiniu, jeigu aibė Λ baigtinė.

Apibrėžkime:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \exists \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}$$

ir

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \forall \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}.$$

Pastebėsime, kad paprastai aibė Λ tiesiog sutampa su natūraliųjų skaičių aibe.

Aptarkime šiuos formalius apibrėžimus. Jei turime aibių rinkinį arba begalinę seką, tai šių aibių sąjungą sudarys elementai, esantys bent vienoje iš išvardintų aibių. Tuo tarpu kalbant apie aibių sankirtą reikia atkreipti dėmesį, kad šiuo atveju sankirtą sudaro elementai esantys visose išvardintose aibės.

1.2 Aibių veiksmų savybės

Aibių A ir B *simetriniu skirtumu* vadinsime aibę $A \nabla B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Teisingos tokios aibių veiksmų savybės:

1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.
2. $A \nabla B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $\left(A^c\right)^c = A$.
4. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Tarkime, kad Λ indeksų aibė ir $\forall \lambda \in \Lambda, D_\lambda \subset \mathcal{D}$, čia $\mathcal{D}$ kokia nors aibės D poaibių klasė. Teisingi tokie teiginiai:

$$8. \qquad D \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

$$9. \qquad D \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

Sakysime, kad aibių seka A_n yra *monotoniškai mažėjanti*, jei

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots A_n \supset \dots.$$

Analogiškai, sakysime, kad aibių seka yra *m*onotoniškai didėjanti, jei

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots A_n \subset \dots.$$

Paprastai mes nagrinėsime aibes, kurias sudaro pikselių rinkiniai, tiksliau kalbant pikselius reprezentuojančių kodų masymai.

Pereinant nuo teorinių prie praktinių taikymų reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad reprezentuoti aibes reikia taip, kad jas supratų dirbtinis intelektas. Vienas iš tokių būdų- aibių reiškimas binariniu kodu, kuriuo koduojama aibė, bei bet koks jos elementas. Pastebėsime, kad praktinėje srityje aibės yra baigtinės. Vadinasi galime laikyti, kad ir sutvarkytos. Sakykime, kad universalioje aibėje yra n elementų. Tada bet kokį šios aibės poaibį, kurį sudaro tik vienas elementas, esantis $i-$ oje universaliosios aibės padėtyje (baigtinė aibė yra tiesiškai sutvarkyta) bus koduojamas seka

$$(0 \dots 1 \dots 0),$$

t.y. $i-$ oje pozicijoje 1, o kitose nulis. Šios aibės bet koks poaibis, kuriame yra k elementų, o šie elementai turi eilės numerius $i_1, i_2, \ldots, i_k$ bus koduojamas rinkiniu, kurio padėtyse $i_1, i_2, \ldots, i_k$ padėtyse yra $k-$ vienetų, o likusiose- nuliai. Visa universalioji aibė koduojama vienetų rinkiniu.

Pavyzdys Tarkime sutvarkytą universaliąją aibę sudaro elementai $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Šios aibės kodas (11111).

Tada kodas (01100) reprezentuoja poaibį $\{3, 5\}$, o kodas (10101) reprezentuoja poaibį $\{1, 5, 9\}$.

Dažnai teks susidurti su aibėmis, kurių elementai yra monitoriaus pikseliai, kitaip tariant baigtinės plokštumos srities, kurios elementai turi sveikareikšmes koordinates, taškai. Kadangi ir šiuo atveju aibė yra baigtinė, tai šią aibę irgi galima sutvarkyti bei jos elementus reikšti minėtu būdu. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad aibes sutvarkyti galima ne vieninteliu būdu! Formalizuokime šią situaciją. Tarkime, kad $U = \{u_1, \ldots, u_n\}-$ kokia nors universali baigtinė aibė. Tada aibę $A \subset U$ galime aprašyti tokiu kodu:

$$C[i] = \begin{cases} 1, \text{ jei } u_i \in A, \\ 0, \text{ jei}, u_i \notin A, \end{cases}$$

$C[i]-$ $i-$ tasis dvejetainio kodo simbolis (kartais vadinamas $i-$ uoju kodo krūviu).

Taigi, aibė A yra koduojama dvejetainiu n ilgio žodžiu

$$C(A) := C[1]C[2] \ldots C[n].$$

Tarkime, kad universalią aibę sudaro aštuoni sunumeruoti elementai, elementų prigimtis nesvarbi. Šią universalią aibę koduojame tokiu žodžiu:

$$C(U) := 11111111.$$

Tada kodas $C(B) = 10001101$ reprezentuoja poaibį $B = \{u_1, u_5, u_6, u_8\}$.

Aibių A ir B sankirtos kodas $C(A \cap B)$ apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \in A_i \text{ ir} A_j, \\ 0; \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Aibių A ir B sajungos kodas C apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \in A_i \text{ arba } A_j, \\ 0; \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Aibės A papildinio kodas apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \notin A, \\ 0; \text{ jei}, u_i \in A, \end{cases}$$

$C[i]-$ $i-$ tasis kodo C elementas.

Tarkime, kad duotas stačiakampis $W \subset \mathbb{R}^2$ (kompiuterio ekranas su sveikareikšmėmis pikselių koordinatėmis), kurio kairiojo apatinio kampo taško koordinatės yra (a, b), o dešiniojo viršutinio kampo koordinatės yra (c, d). Tegu $M \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$x_{p,q} = \left(a + p\frac{(c-a)}{M}; b + q\frac{(d-b)}{M} \right),$$

čia $p, q = 0, 1, \ldots, M$. Pastarieji taškai priklauso kvadratui $W = \{0; 1; \ldots; M\} \times \{0; 1; \ldots; M\}$. Kitaip tariant, šie pasirinkti taškai reprezentuoja aibę W. Ši aibė baigtinė, turinti $(M+1)^2$ elementų, taigi gali būti tiesiškai sutvarkyta, t.y. galima nurodyti aibės elementų eiliškumą.

Sprendžiant praktines problemas, elementų kodavimo būdas priklauso nuo problemos formuluotės. Jei mus domina tik elemento padėtis ekrane, tai elementas (pikselis) bus koduojamas vienaip, jei aibė koks nors vaizdas, tai kartu su elemento padėtimi bus koduojama ir spalva bei jos intensyvumas. Bet kokiu atveju aibė, tai elementų (pikselių) rinkinys, su šiems pikseliams priskirtais kodais. Atliekant paveikslo (aibės) "nuskaitymą" reikia nuskaitytus duomenis išsaugoti masyve, ir kaip jau minėjome, jei reikia su taško padėtimi susiejant šio pikselio spalvos kodą.

1.3 Funkcijos

Apibrėžimas *Tarkime A, B bet kokios aibės. Taisyklę f, kuria remiantis kiekvienam aibės A elementui yra priskiriama po vieną aibės B elementą, vadinsime funkcija (kartais sakoma atvaizdis), apibrėžta aibėje A ir įgyjančia reikšmes aibėje B. Žymėsime $f : A \to B$. Elementui $a \in A$ priskiriamą elementą $b \in B$ žymėsime $f(a)$ arba $b = f(a)$. Sakysime, kad $f(a)$ yra elemento a vaizdas, o a yra elemento $b = f(a)$ pirmvaizdis.*

Funkcijos f pirmvaizdžių aibė paprastai žymima $D(f)$ ir vadinama funkcijos apibrėžimo sritimi. Funkcijos *reikšmių sritis* $E(f)$ yra aibės B poaibis, kurios visi elementai turi pirmvaizdžius, $E(f) = \{f(x); x \in A\}$. Mes žymėsime šią aibę $E(f)$.

Sakykime, kad $X \subset D(f)$, $Y \subset E(f)$. Tada aibę

$$\{f(x);\ x \in X\} =: f(X) \subset Y,$$

vadinsime aibės X vaizdu, o aibę

$$f^{-1}(Y) := \{x \in X;\ f(x) = y \in Y\} \subset X$$

vadinsime aibės Y pirmvaizdžių aibe. Visų funkcijos f pirmvaizdžių aibė sutampa su jos apibrėžimo sritimi $D(f)$.

Funkciją $f : A \to B$ vadinsime abipus vienareikšmiška arba *bijekcija* tarp aibių A ir B, jeigu $f(A) = B$ ir $f^{-1}(B) = A$ ir $\forall x \neq y,\ x, y \in A \to f(x) \neq f(y)$.

Praeitame skyrelyje trumpai aptarėme aibės bei jos elementų interpretaciją informatikoje. Tarkime, kad plokštumos sritis yra stačiakampis K (monitoriaus dalis), kurio koordinatės (pikseliais), laikydami, kad kvadrato viršutinė kairioji viršūnė koordinačių pradžios taške, o taškai "apeinami" pagal laikrodžio rodyklę. Tada stačiakampio K viršūnių koordinatės yra (Full HD)

$$(0; 0),\ (0; 1920),\ (1080; 1920),\ (1080; 0).$$

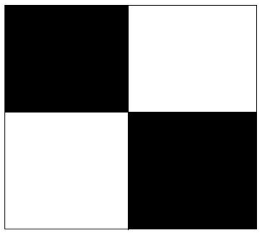
Tegu

$$K = [0; 1080] \times [0; 1920].$$

Apibrėžkime funkciją $f : K \to S$, čia S yra nespalvoto vaizdo pikselių kodų aibė, tokiu būdu:

$$f(p) = \begin{cases} 0, & p \in K_1 \cup K_3, \\ 255, & p \in K_2 \cup K_4, \end{cases}$$

$K_1 = [0; 540] \times [0; 960]$, $K_2 = [0; 540] \times [960; 1920]$, $K_3 = [540; 1080] \times [960; 1920]$, $K_4 = [540; 1080] \times [0; 960]$. Šios funkcijos reikšmių aibė $E(f)$ pavaizduota 1 pav., o kvadratai K_1, K_2, K_3, K_4 išdėstyti neigiama kryptimi, K_1 yra viršutiniame kairiąjame kampe. Laikome, kad $p \in K$ yra pikselis, juoda spalva siejama su skaičiumi 0, o balta su skaičiumi 255.



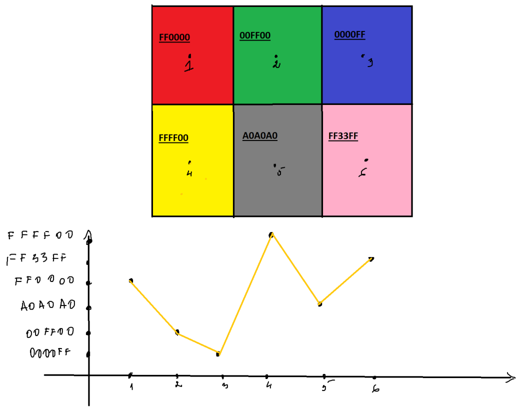
1 pav.

Aibę

$$G(f) := \{(x, y); x \in D(f); y \in E(f)\}$$

vadinsime funkcijos grafiku.

Tarkime, kad funkcija yra apibrėžta pateiktame stačiakampyje ir kiekvienam stačiakampiui, eilės tvarka priskiria jo spalvos kodą 16- ainėje skaičiavimo sistemoje. 1 paveiksle pateiktas šios funkcijos grafikas.

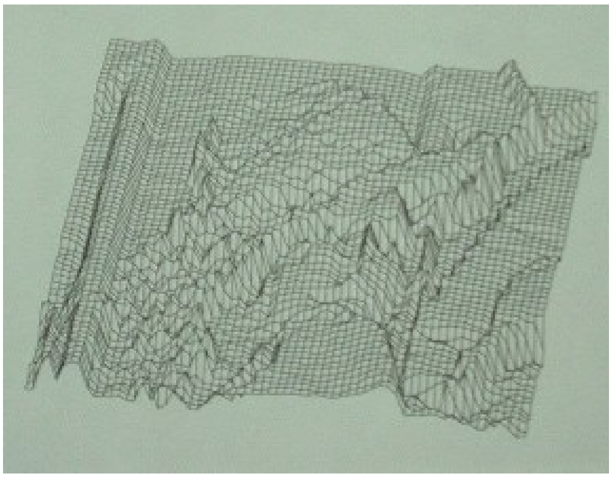


1 pav.

Nesunku matyti, kad tarp funkcijų ir jų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis, t.y., skirtingos funkcijos apibrėžia skirtingus grafikus ir atvirkščiai. Dėl šios priežasties, ateityje, šias sąvokas dažnai tapatinsime, jei tai nesudarys painiavos, kadangi skaitytojas, manome, atkreipė dėmesį į tai, kad funkcija ir jo grafikas yra skirtingos sąvokos.

Žemiau (2 pav.) pateikiame vaizdo ir (3 pav.) funkcijos, priklausančios nuo dviejų kintamųjų, kuri koduoja šį vaizdą grafiką. Funkcijos reikšmė apibrėžia pikselio kodą (ryškumą).

2 pav.



3 pav.

Beje, šis (2 pav.) vaizdas yra vadinamas Lena. Šis vaizdas yra chrestomatinis vaizdų kodavimo teorijoje ir naudojamas lyginant įvairius kodavimo algoritmus.

Sakome, kad funkcija $f : X \to Y$ yra *siurjekcija*, jeigu $D(f) = X$ ir $E(f) = Y$. Jeigu $f : X \to Y$ yra siurjekcija, tai tada žymėsime, $f(X) = Y$.

Sakome, kad funkcija $f : X \to Y$ yra *injekcija*, jeigu skirtingi pirmvaizdžiai turi skirtingus vaizdus ir atvirkščiai. Sakome, kad funkcija $f : X \to Y$ yra *bijekcija*, jeigu ji yra injekcija ir siurjekcija kartu. Šiuio atveju funkcija yra abipus *vienareikšmiška*.

Tarkime, kad funkcija $f : A \longrightarrow B$. Tada funkciją $f^{-1} : B \longrightarrow A$ vadinsime funkcijos f *atvirkštine funkcija,* jeigu $f^{-1}(y) = x$ tada ir tik tada, kai $f(x) = y$. Pastebėsime, kad jei funkcija yra bijekcija tarp aibių A ir B, tai ši funkcija turi atvirkštinę $f^{-1} : B \to A$.

Nesunku suprasti, kad aukščiau apibrėžtoji funkcija $f : K \to S$ nėra bijekcija (1 pav.), taigi ji neturi atvirkštinės. Priežastis yra ta, kad skirtingiems pikseliams priskiria ir tą pačią reikšmę. Pavyzdžiui visiems pirmojo ir trečiojo kvadrato pikseliamas priskiria tą pačią reikšmę 0.

Funkcijų savybės

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Jeigu funkcija yra bijekcija, tai

3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$.

1.4 Metrinės erdvės. Atstumas tarp aibių

Tarkime, kad E netuščia aibė. Jos elementus vadinsime taškais.

Tarkime, kad $\mathcal{R}$ realiųjų skaičių aibė.

Apibrėžimas *Funkciją $\rho : E \times E \to \mathcal{R}$, kuri su bet kokia pora $(x, y) \in E \times E$ tenkina reikalavimus*

1) $0 \leq \rho(x, y) < \infty$,

2) $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$,

3) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$,

4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad x, y, z \in X$,

vadinsime metrika apibrėžta aibėje E.

Vėliau gana dažnai teks naudoti nelygybę:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y),$$

kurios įrodymą paliekame skaitytojui.

Tarkime, kad aibėje E apibrėžta metrika ρ. Tada porą (E, ρ) vadinsime metrine erdve. Metrikos reikšmę, bet kokiai erdvės taškų porai, vadinsime atstumu tarp erdvės taškų. procesą, kai metrinėje erdvėje įvedama metrika, vadinsime erdvės metrizavimu.

Metrinių erdvių pavyzdžiai.

1. Tarkime x, y bet kokie realieji skaičiai. Apibrėžkime metriką tokiu būdu $\rho_1(x, y) = |x-y|$. Tada pora $(\mathbb{R}, \rho_1)$ yra metrinė erdvė.

2. Pažymėkime $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1 \ldots n$. Šią aibę vadinsime $n-$ mate vektorine erdve. Atstumą tarp šios erdvės taškų apibrėžkime tokiu būdu: $\rho_n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Tuomet $(\mathbb{R}^n, \rho_n)$ - metrinė erdvė.

3. Tegu $\mathbb{R}^n-$ vektorinė erdvė. Apibrėžkime metriką taip: $\rho_M(x, y) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$. Gausime dar vieną metrinę erdvę $(\mathbb{R}^n, \rho_M)$. Pastarosios erdvės metrika vadinama Manheteno metrika.

4. Tolydžiųjų funkcijų erdvėje $C := C[0, 1]$ galima tokia metrika:

$$\rho_c(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, f, g \in C$$

. Tada (C, ρ_c) metrinė erdvė.

5. Sakykime, kad E_t kokia nors aibė. Atstumą tarp bet kurių šios aibės elementų apibrėžkime taip:

$$\rho_t(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Tada porą (E_t, ρ_t) vadinsime $d$iskrečiąja metrine erdve.

6. Tegu $\mathbb{C}$ kompleksinių skaičių aibė. Šią aibę galime metrizuoti naudodami pavyzdžiui, metriką ρ_2, kuri apibrėžta 2.

7. Fiksuokime N pirmųjų natūraliųjų skaičių. Sudarykime begalines sekas

$$x = i_1\, i_2\, \ldots\, i_k, \ldots, \quad i_j \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Šių sekų aibę žymėsime simboliu Σ_N. Pastaroje aibėje apibrėžkime metriką tokiu būdu:

$$\rho_\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i},$$

čia $x, y \in \Sigma_N$. Tada (Σ_N, ρ_Σ) yra metrinė erdvė.

Apibrėžimas Sakykime, kad (E_1, ρ_1) ir (E_2, ρ_2) dvi metrinės erdvės. Tuomet bijekciją $f : E_1 \longrightarrow E_2$, vadinsime erdvių izometrija (trumpumo dėlei tiesiog izometrija), jeigu bet kokiai erdvės E_1 elementų porai x, y teisinga lygybė:

$$\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y)).$$

Pastebėkime, kad šiuo atveju atvirkštinis atvaizdis taip pat yra erdvių izometrija. Metrines erdves, tarp kurių galime apibrėžti izometriją, vadinsime izometrinėmis.

Taigi, jei erdvės izometrinės, tai erdvių elementų metrinės savybės nepriklauso nuo erdvės, kurioje jas nagrinėjame (pradinėje ar jai izometrinėje). Dar daugiau, jeigu (E, ρ) metrinė erdvė, o $f : E \longrightarrow E'$, tai mes galime 'pasigaminti' erdvę, izometrinę pradinei, apibrėžę atstumą tarp dviejų elementų erdvėje E', tokiu būdu: $\rho(x', y') = \rho(x, y)$, čia $x' = f(x), y' = f(y)$.

Realiųjų skaičių aibės $A \subset \mathbb{R}$ *viršutiniu* (*apatiniu*) rėžiu vadinsime skaičių $x'(x'')$ tokį, kad visiems $x \in A, x \leq x'(x > x'')$. Pats mažiausias (didžiausias) viršutinis (apatinis) rėžis vadinamas tiksliuoju viršutiniu (apatiniu) rėžiu ir žymimi $M = \sup A$, $(m = \inf A)$. Aibę vadiname aprėžta iš viršaus (apačios), jei ji turi viršutinį (apatinį) rėžį. Realiųjų skaičių aibę vadinsime aprėžta, jeigu pastaroji aprėžta iš viršaus ir apačios. Pastebėsime, kad bet koks metrinės erdvės $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ poaibis yra aprėžta aibė.

Tarkime, kad ρ_1 ir ρ_2 dvi metrikos toje pat erdvėje. Sakysime, kad šios metrikos ekvivalenčios, jeigu egzistuoja konstantos $0 < c_1, c_2 < \infty$ tokios, kad

$$c_1\rho_1(x, y) < \rho_2(x, y) < c_2\rho_1(x, y).$$

Dvi metrines erdves vadinsime ekvivalenčiomis, jeigu egzistuoja bijekcija $f : E_1 \to E_2$ tokia, kad metrika $\overline{\rho}_1(x, y) := \rho_2(f(x), f(y))$ yra ekvivalenti metrikai $\rho_1(x, y)$, visiems $x, y \in E_1$.

Mes nagrinėjame metrinių erdvių savybes, todėl aplinkos, bei atviros aibės sąvokas apibrėšime remdamiesi metrikos apibrėžimu.

Apibrėžimas *Metrinės erdvės E aibę $B(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) < r\}$ vadinsime atviru rutuliu (ateityje tiesiog rutuliu), su centru taške a, o aibę $\overline{B}(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) \leq r\}$ - uždaru rutuliu. Aibė $S(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) = r\}$ vadinama sfera, kurios centras taške a. Bet kokį atvirą rutulį, kuriam priklauso taškas x_0, vadinsime šio taško aplinka.*

Tašką a vadiname *vidiniu* aibės A tašku, jeigu egzistuoja atviras rutulys $B(a, r) \subset A$, kuriam priklauso šis taškas.

Aibę vadinsime atvira, jeigu visi jos taškai yra vidiniai.

Aibės A vidinių taškų aibę, žymėsime A° ir vadinsime aibės vidumi. Aišku, kad $A^\circ \subset A$. Be to, aibės vidus yra didžiausia atvira aibė, kuri yra duotosios aibės poaibis.

Aibę $A' \subset B$ vadinsime uždara, jeigu jos papildinys, iki aibės B, yra atvira aibė.

Pavyzdžiui, bet koks uždaras rutulys yra uždara aibė. Intervalai $[a, +\infty), (-\infty, a]$ yra uždaros aibės realiųjų skaičių aibėje. Beje, intervalas $[a, b)$ yra nei uždaras nei atviras realiųjų skaičių aibėje.

Tarkime, kad (E, ρ) - metrinė erdvė. Sakysime, kad aibė $A \subset E$ yra aprėžta, jeigu egzistuoja rutulys $B(a, r)$ toks, kad $A \subset B(a, r)$. Netuščios aibės A skersmeniu vadinsime aibės $\overline{\mathbb{R}}$ elementą:

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$

Iš skersmens apibrėžimo išplaukia, kad $\delta(A) \in [0, +\infty]$. Naudodami skersmens apibrėžimą galime kiek kitaip charakterizuoti aibės aprėžtumo sąvoką. Taigi, jei aibės skersmuo baigtinis skaičius, tai aibė aprėžta ir jei jos skersmens reikšmė lygi $+\infty$, tai aibė neaprėžta.

Pateiksime algoritmą, aibės skersmeniui nustatyti, o tuo pačiu ir aibės aprėžtumui pagrįsti.

Algoritmas

Įv. Įvedamas vaizdas
Masyve išsaugomos vaizdo pikselių koordinatės

$$\mathbf{array}[n,n] = \{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\};$$

for $(i = 0, i < n, i+)$
{
Proc. rinkti $(\min x_i, \max x_i)$
$u_1 := \max x_i$;
$u_2 := \min x_i$;
};
for$(j = 0, j < n, j+)$
{ **P**roc. rinkti $(\min y_i, \max y_i)$
$v_1 := \max y_j$;
$v_2 := \min y_j$;
};
Proc.atstumas $((u_2,v_1),(u_1,v_2))$(skaičiuojamas atstumas tarp nurodytų taškų);
d:= **atstumas**
Print d;
Procedūra rinkti gali būti suprantama kaip metodo *Proc* klasė, kuri atlieka elementų rūšiavimą. Be to iš masyvo išrenka didžiausią ir mažiausią elementus.

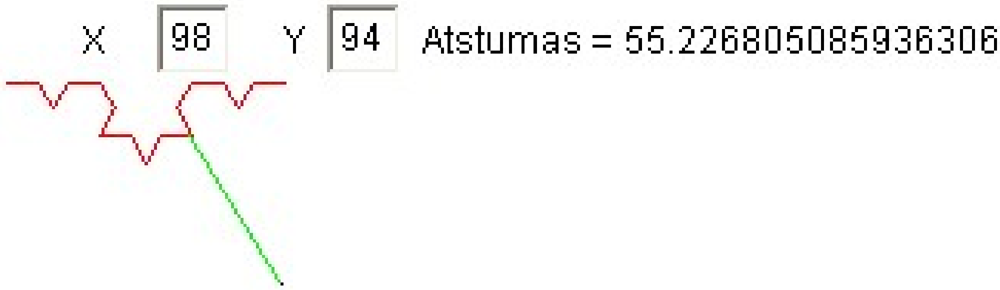
Apibrėžimas *Atstumu tarp aibės $A \subset E$ ir taško $x \in E$ vadiname skaičių*

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} \rho(x,y).$$

Beje, jeigu taškas $x \notin B(a,r)$, tai $d(x,B(a,r)) \geq \rho(a,x) - r$.

Kaip praktiškai reikėtų ieškoti atstumo tarp taško ir aibės. Aibė plokštumoje (erdvėje) tai taškų (pikselių) rinkinys. Tad pats primityviausias būdas rasti atstumą nuo taško iki aibės- rasti visus atstumus tarp taško ir aibės taškų ir iš jų išrinkti minimalų. Šis išrinkimo būdas kartais vadinamas *brutualiu algoritmu*. Tiesa, jei aibė diskreti ir joje taškų nedaug, tai gana efektyvus algoritmas. Pateiksime algoritmą, kaip raskime atstumą tarp taško a ir aibės $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$.

Algoritmas
Įv. $h = 0; d = 0$
$d := \rho(a,a_1)$;
for$(i = 2; i < n; i+)$
{
$d_i := \rho(a,a_i)$
if$(d_i < d) d := d_i$
};
$h := d$
Print h (yra ieškomas atstumas)
end
4 pav. yra pateikiama šio algoritmo realizacija (Java kodo įskiepis):



5 pav.

Pastebėsime, kad jei aibė yra begalinė, tai norint taikyti šį algoritmą reikėtų nagrinėjamą aibę pakeisti baigtine taškų aibe reprezentuojančia originalą. Praktiškai tai ir yra atliekama, kai koks nors tolydus vaizdas yra koduojamas. Tačiau skaičiuojant taško atstumą iki tolydaus vaizdo dažnai pakanka išskirti šio vaizdo kontūrą, kitaip tariant nagrinėjamą aibę susiejame su šios aibės siena (kontūru), o aibės vidiniai taškai bus tiesiog ignoruojami. Kontūrui apibrėžti reikia žymiai mažesnio elementų skaičiaus, tad ir šis elementarus algoritmas veiks gana neblogai.

Tarkime, kad A yra erdvės (E, ρ) aibė. Tašką $x \in E$ vadinsime šios aibės ribiniu tašku, jeigu bet kokia šio taško aplinka kertasi su A. Kitaip tariant, šio taško aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas (gal būt ir jis pats). Visų aibės A ribinių taškų aibė yra vadinama jos *uždariniu* ir žymima A^u. Teigdami, kad $x \notin A^u$ kartu tvirtiname, jog $x \in (E \setminus A)^0$. Taigi, uždarinys - uždara aibė. Nesunku suprasti, kad $A^0 \subset A^u$. Kokia bebūtų aibė A, A^u yra mažiausia uždara aibė tenkinanti savybę: $A \subset A^u$. Taigi, uždaras aibes galime charakterizuoti ir taip: aibė uždara tada ir tik tada, kai $A = A^u$. Verta pastebėti ir tokią, metrinės erdvės savybę - taškas x priklauso aibės A uždariniui tada ir tik tada, kai $d(x, A) = 0$.

1.5 Tolydieji atvaizdžiai. Sekos

Apibrėžimas *Aibių šeimą $\{A_l; l \in L, A_l \in E\}$, vadinsime aibės A denginiu, jeigu $A \subset \cup_{l \in L} A_l$.*

Tarkime, kad aibė

$$A \neq \emptyset.$$

Tada šios aibės denginį, tenkinantį savybes: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ vadinsime aibės skaidiniu.

Tarkime, kad (E, ρ), ir (E', ρ') dvi metrinės erdvės.

Apibrėžimas *Atvaizdį $f : E \longrightarrow E'$ vadinsime tolydžiu taške $a \in E$, jeigu bet kokiai taško $f(a) \in E'$ aplinkai $V_{f(a)}$ galime nurodyti taško a aplinką $V_a \subset E$ tokią, kad $f(V_a) \subset V_{f(a)}$.*

Sakoma, kad atvaizdis f *tolydus aibėje* A, jeigu jis tolydus, bet kokiame šios aibės taške, trumpai tai žymėsime $f \in \mathcal{C}(A)$.

Žemiau pateiktoje teoremoje nurodomos būtinos ir pakankamos sąlygos, metrikos terminais, kad atvaizdis būtų tolydus taške.

Teorema 1. *Tam, kad atvaizdis $f : E \longrightarrow E'$ būtų tolydus taške $a \in E$, būtina ir pakanka, kad visiems $\epsilon > 0$ egzistuotų $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ toks, kad $\rho'(f(a), f(x)) < \epsilon$, kai $\rho(a, x) < \delta$.*

Sakykime, kad $f : E \to E'$. Tada tokie tvirtinimai yra lygiaverčiai:
1) atvaizdis f tolydus aibėje E ;
2) bet kokiai atvirai aibei $A' \subset E, f^{-1}(A')$ yra atviras aibės E poaibis;
3) bet kokiai uždarai aibei $B \subset E, f^{-1}(B)$ uždaras aibės E poaibis;

4) bet kokiai aibei $A \subset E, f(A^u) \subset (f(A))^u$.

Pavyzdys. Funkcija $f(x) = 1/x$ nėra tolydi aibėje $[0,1] \subset \mathbb{R}$, kadangi uždaros aibės $[1,\infty)$ pirmvaizdis $(0,1]$ nėra uždara aibė.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei atvaizdis tolydus, tai atviros aibės vaizdas nebūtinai atvira aibė. Panagrinėkime gerai žinomą funkciją $f(x) = x^2$. Yra žinoma, kad pastaroji funkcija tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje. Nesunku matyti, kad atviros aibės $(-1,1)$ vaizdas yra intervalas $[0,1)$ kuris nei atvira, nei uždara realiųjų skaičių aibė.

Tarkime, kad E, F, G metrinės erdvės, ir $f : E \to F$, $g : F \to G$. Jeigu f tolydus taške $a \in E$, o g tolydus taške $f(a)$, tai atvaizdis $h : E \to G$, kuris apibrėžiamas formule $h = g(f(x))$ ir žymimas $h = g \circ f$, yra tolydus taške a. Atvaizdį h vadinsime atvaizdžių f ir g kompozicija.

Atvaizdis yra funkcijos apibendrinimas, todėl visos atvaizdžių sąvokos yra analogiškai formuluojamos ir funkcijoms.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad jei $A \subset E$ yra netuščia, tai $f(x)$=$d(x, A)$ yra tolydi funkcija.

Tegu $\mathbb{N}$ - natūraliųjų skaičių aibė, (E, ρ) - metrinė erdvė. Tada erdvės E elementų seka vadinsime aibę $\{f(n), n \in \mathbb{N}\}$, čia $f : \mathbb{N} \to E$ yra funkcija. Kitaip tariant, bet kokią sunumeruotą metrinės erdvės elementų, begalinę aibę, vadinsime seka. Naudosime įprastą sekos žymėjimą: $\{x_n\} :=\{x_n \in E; n \in \mathbb{N}\}$.

Sakysime, kad $a \in E$ yra sekos $\{x_n\}$ riba, kai n neaprėžtai auga, jeigu, bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti natūralųjį skaičių n_0, kad kai tik $n > n_0$, tai $\rho(x_n, a) < \epsilon$. žymėsime, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$=$a$.

Beje, naudodami sekos ribos apibrėžimą taipogi galime tikrinti funkcijos tolydumą, t.y. funkcija tolydi taške a, jeigu bet kokiai sekai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$=$a$ gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$=$f(a)$.

Elementų seką $\{x_n\} \subset E$ vadinsime Koši seka, jei visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti n_0, kad visiems $m, n > n_0$ teisinga nelygybė $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Apibrėžimas Metrinę erdvę E vadinsime pilna, jeigu bet kuri šios erdvės Koši seka turi ribą, priklausančią šiai erdvei.

Nesunku parodyti, kad bet kuri konverguojanti seka yra ir Koši seka. Deja, atvirštinis teiginys, bendrai paėmus, neteisingas. Tačiau paminėsime ypač mums svarbią aplinkybę, t.y., jei seka yra Koši seka ir be to papildomai žinome šios sekos kokią nors ribinę reikšmę, tai tada ir pradinė seka turi ribą. Dar daugiau, sekos riba sutampa su minėtuoju ribiniu tašku.

Pavyzdys Aibė $\mathbb{R}$ yra pilna metrinė erdvė. Tai išplaukia iš Heinės - Borelio lemos.

Beje, racionaliųjų skaičių aibė nėra pilna. Kodėl?

Jei seka turi ribą, tai ji vienintelė (įrodykite !).

Kodėl tokios svarbios pilnos metrinės erdvės, kodėl jas išskiriame iš kitų? Iš aukščiau padarytų pastabų tikimės, skaitytojas pastebėjo, jog tam, kad įrodytume sekos konvergavimą metrinėje erdvėje, pakanka įrodyti kad nagrinėjama seka yra Koši seka. Be to, naudojant Koši kriterijų nereikia iš anksto žinoti ribinės reikšmės, kurią paprastai būna sunku nurodyti. Pilnumas šios ribos egzistavimą užtikrina.

Jeigu metrinės erdvės ekvivalenčios (metriškai ekv.), tai šiuo atveju pakanka seką nagrinėti vienoje iš erdvių, t.y., jei seka yra Koši seka vienoje erdvėje, tai šią savybę turi ir antroje, kadangi konvergavimas yra metrinė savybė.

1.6 Kompaktai

Teorema 2. *Sakykime, kad f, g du tolydūs atvaizdžiai apibrėžti metrinėje erdvėje E su reikšmėmis metrinėje erdvėje (E', ρ'). Tada aibė $A = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ yra uždara erdvėje E.*

Tarkime, kad f ir g du tolydūs atvaizdžiai, apibrėžti aibėje E, įgyjantys reikšmes aibėje E'. Tuomet, jeigu $f(x) = g(x)$, visiems $x \in A$ ir aibė A tiršta erdvėje E, tai $f \equiv g$ erdvėje E. Pastarasis pastebėjimas išplaukia iš to, kad $\{x; f(x) = g(x)\}$ yra uždara, taigi, jos uždarinys sutampa su visa erdve.

Pastebėsime, kad jeigu f, g tolydūs atvaizdžiai, tai aibė $\{x \in E; f(x) \leq g(x)\}$ taipogi uždara.

Apibrėžimas *Metrinę erdvę E vadinsime kompaktu, jeigu iš bet kokio jos atvirų aibių denginio $\{U_l, l \in L\}$ galime išskirti baigtinį pošeimį, kuris taip pat dengia erdvę E.*

Pastarasis apibrėžimas remiasi topologinėmis erdvės (aplinkų) savybėmis. Pateiksime kitą kompakto apibrėžimą, naudodamiesi metrinėmis erdvės savybėmis. Sakykime (E, ρ) metrinė erdvė.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinės erdvės aibė $S \subset E$ yra kompaktiška, jeigu iš bet kokios elementų sekos $\{x_n \subset S\}$ galime išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, kurio riba priklauso aibei S.*

Jeigu metrinė erdvė turi šią savybę, tai minimą erdvę vadinsime kompaktu.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinė erdvė E visiškai aprėžta, jeigu visiems $\epsilon > 0$ egzistuoja baigtinė aibė $F \subset E$ turinti savybę: $d(x, F) < \epsilon, x \in E$.*

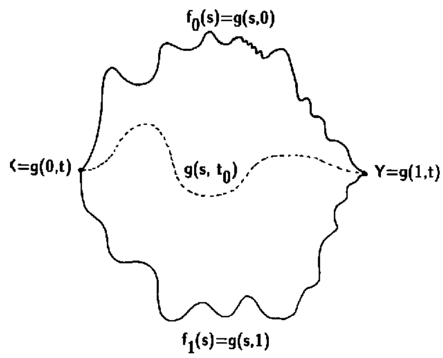
Baigtinė aibė F turinti minėtąją savybę dar vadinama ϵ- *tinklu*. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad visiškai aprėžta pilna metrinė erdvė yra kompaktiška ir atvirkščiai (įrodykite!). Beje, visiškas aprėžtumas yra erdvės metrinė savybė.

1.7 Jungios aibės

Tarkime, kad $S \subset E$ koks nors metrinės erdvės poaibis. Sakysime, kad S yra trajektorijomis jungi, jeigu egzistuoja tolydi funkcija $f : [0, 1] \to S$ tokia, kad visiems $x, y \in S, f(0) = x, f(y) = y$. Kitaip tariant, bet kokius šios aibės taškus galime sujungti tolydžia trajektorija. Auksčiau esame minėję, kad tarp funkcijų ir funkcijų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis (2. skyrelis), todėl ateityje funkciją f tiesiog vadinsime trajektorija, jungiančia aibės S taškus.

Tuo atveju, kai tokia funkcija neegzistuoja, tai sakysime, kad aibė nėra trajektorijomis jungi.

Sakoma, kad aibė S yra vienajungė, jeigu bet kokiems šios aibės taškams ir bet kokioms trajektorijoms jungiančioms šiuos taškus, galime nurodyti tolydžią funkciją, kuri apibrėžta vienos kreivės taškuose, o reikšmes įgyja kitos kreivės taškuose. Tokią funkciją vadinsime *deformacija* (tolydžia deformacija).



5 pav.

Sakykime, kad $x, y \in S$. Be to dvi tolydžios kreivės f_0, f_1 jungia šiuos taškus t.y. $f_0(0) = f_1(0) = x$ ir $f_0(1) = f_1(1) = y$. Tuomet tolydžią deformaciją galime apibrėžti taip:

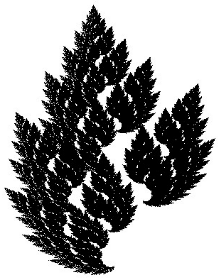
$g = g(x, y)$; $g : [0, 1] \times [0, 1] \to S$ tokia, kad

$$\begin{cases} g(s, 0) = f_0(s), s \in [0, 1]; \\ g(s, 1) = f_1(s), s \in [0, 1]; \\ g(0, t) = x, t \in [0, 1]; \\ g(1, t) = y, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

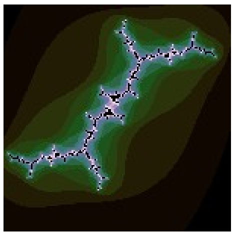
Sakysime, kad du taškai x, y yra susiję, jeigu nagrinėjamoje aibėje bet kokios dvi trajektorijos f_0 ir f_1, jungiančios minėtuosius taškus, priklauso kokios nors deformacijos $g(s, t)$ reikšmių aibei (žr. 5 pav.).

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė yra iškila, jei bet kokius šios aibės taškus galime sujungti atkarpa, kuri priklauso šiai aibei.*

6 pav. yra pateiktas susijusios aibės pavyzdys, o 7 pav. - nesusijusios.



6 pav.



7 pav.

1.8 Fraktalų metrinė erdvė.

Sakykime, kad (E,ρ) pilna metrinė erdvė. Pažymėkime

$$H(E) = \{C \subset E, C \neq \emptyset, C - \text{kompaktiška aibė}\}.$$

Kitaip tariant, $H(E)$ yra metrinės erdvės netuščių, kompaktiškų aibių klasė.

Teorema 3. *Jeigu $X, Y \in H(E)$, tai tada ir $X \cup Y \in H(E)$.*

Pastebėsime, kad jeigu $X, Y \in H(X)$, tai nebūtinai $X \cap Y \in H(E)$. Pastarojo tvirtinimo teisingumas išplaukia iš to, kad dviejų kompaktiškų aibių sankirta gali būti tuščia. Bet tuščia aibė nepriklauso aibei $H(E)$.

Atstumu tarp erdvės elemento $x \in E$ ir aibės $A \subset E$ vadinsime tokį skaičių:

(1) $$d(x, A) = \inf(\rho(x, y); y \in A),$$

čia ρ yra erdvės E metrika.

Teorema 4. *Atstumas, apibrėžtas* (1) *lygybe, yra tolydi funkcija aibėje E, jei aibė $A \neq \emptyset$.*

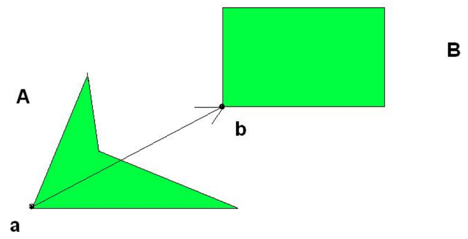
Pastarąjį teiginį siūlome įrodyti skaitytojui.

Tarkime, kad $B \in H(X)$. Kyla pagrįstas klausimas - ar ši apatinė riba yra pasiekiama? Kitaip tariant ar aibėje $H(E)$ atstumas d korektiškai apibrėžtas. Pažymėkime $f(y) = \rho(x, y)$, $P = P(x) = \inf\{f(y); y \in B, x \in E\}$. Matome, kad $f(y) \geq 0$. Sakykim, kad $y_0 \in B$ ir $\rho(x, y_0) = P$. Kadangi aibė B kompaktiška, tai egzistuoja realiųjų skaičių seka, $\{y_n; n \in \mathcal{N}\} \subset B$ tokia, kad $|f(y_n) - P| < 1/n$, visiems n. Bet kompaktiškos aibės elementų seka $\{y_n\}$ turi konverguojantį posekį $\{y_{n_k}\}$, kad $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in B$. Naudodamiesi tuo, kad $f(y)$ tolydi gauname, $f(y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Taigi, tikslus apatinis rėžis egzistuoja ir priklauso aibei B.

Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Tada aibių funkciją

$$d(A, B) = \max\{\rho(x, B) : x \in A\},$$

vadinsime atstumu tarp aibių A ir B. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastaroji aibių funkcija nėra simetriška kintamųjų atžvilgiu, t.y. $d(A, B) \neq d(B, A)$. Jeigu $B \subset C$, tai $d(X, C) \leq d(X, B)$, bet kokiai aibei $X \subset H(E)$. Pažymėkime $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ir $a \vee b = \max\{a, b\}$. Simbolyje $d(A, B)$ tuo pačiu nurodoma kryptis nuo kurios iki kurios aibės šis atstumas yra skaičiuojamas (šiuo atveju nuo A iki B.) 8 pav. yra demonstruojama ši situacija.



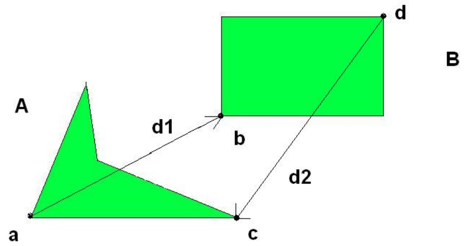
8 pav.

Skaitytojui siūlome įrodyti tokį teiginį:

Teorema 5. *Jeigu $A, B, C, D \subset H(E)$, tai $d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$.*

Apibrėžimas Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Aibių A ir B Hausdorfo atstumu vadinsime aibių funkciją $h : H(E) \times H(E) \to \mathcal{R}$,

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$



9 pav.

Pateiktame 9 pav. Hausdorfo atstumas yra $\max\{d1, d2\}$.

Parodysime, kad funkcija h yra erdvės $H(E)$ metrika. Tarkime $A, B, C \in H(E)$. Nesunku matyti, kad $h(A, A) = d(A, A) \vee d(A, A) = d(A, A) = \max\{d(x, A); x \in A\} = 0$. Kadangi aibės A ir B yra kompaktiškos, tai egzistuoja taškai $a \in A$ ir $b \in B$ tokie, kad $h(A, B) = \rho(a, b)$. Vadinasi, $0 \leq h(A, B) < \infty$. Tarkime, kad $A \neq B$. Tada, egzistuoja $a \in A$, $a \notin B$. Vadinasi $h(A, B) \geq d(a, B) > 0$. Mums liko įrodyti trikampio nelygybę, t.y. $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$. Visų pirma įrodykime, kad $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Bet kokiam $a \in A$ teisinga nelygybė:

$$d(a, B) = \min\{\rho(a, b); b \in B\} \leq \min\{\rho(a, c) + \rho(c, b); b \in B\} =$$

$$\rho(a, c) + \min\{\rho(c, b); b \in B\}, c \in C.$$

Taigi

$$d(a, B) \leq \max\{d(A, c); c \in C\} + \max\{\min(\rho(c, b); b \in B\}; c \in C\} = d(A, C) + d(C, B).$$

Tada

$$d(B, A) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Visiškai analogiškai vertindami gausime, kad

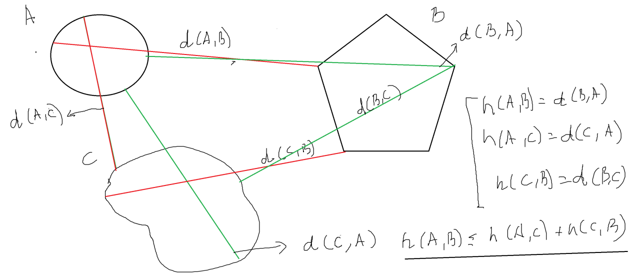
$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A).$$

Iš paskutiniųjų dviejų nelygybių išplaukia, kad

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A) \leq d(B,C) \vee d(C,B) +$$
$$d(A,C) \vee d(C,A) = h(B,C) + h(A,C).$$

Taigi, aibių funkcija $h : H(E) \times H(E) \to \mathbb{R}$ yra metrika. Todėl pora $(H(E), h)$ yra metrinė erdvė, kurią vadinsime fraktalų metrine erdve.

Žemiau pateiktame 10 pav. demonstruojama, kodėl "veikia" trikampio nelygybė ir hausdorfo dimensijos atveju.



10 pav.

Apibrėžimas *Tarkime, kad (X, ρ) kokia nors metrinė erdvė. Tada porą*

$$(H(X), h)$$

vadinsime fraktalų metrine erdve.

Teorema 6. *Tarkime, kad $A, B, C, D \in H(E)$. Tuomet teisinga nelygybė:*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A,C) \vee h(B,D).$$

$\ominus$

Naudodami Hausdorfo metrikos apibrėžimą, rašome

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A \cup B, C \cup D) \vee d(C \cup D, A \cup B).$$

Jeigu

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A \cup B, C \cup D),$$

tuomet arba

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A, C \cup D), \quad \text{arba} \quad h(A \cup B, C \cup D) = d(B, C \cup D).$$

Remdamiesi Hausdorfo metrikos savybėmis, gauname, kad

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(A,C) \leq h(A,C) \leq h(A,C) \vee h(B,D)$$

arba

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(B,D) \leq h(B,D) \leq h(A,C) \vee h(B,D).$$

Bet jeigu

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(C \cup D, A \cup B),$$

tai šiuo atveju

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(C, A \cup B)$$

arba

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(D, A \cup B).$$

Dar kartą pasinaudoję Hausdorfo metrikos savybėmis gauname,

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(C, A) \leq h(A, C) \leq h(A, C) \vee h(B, D).$$

Toliau

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(D, B) \leq h(B, D) \leq h(A, C) \vee h(B, D).$$

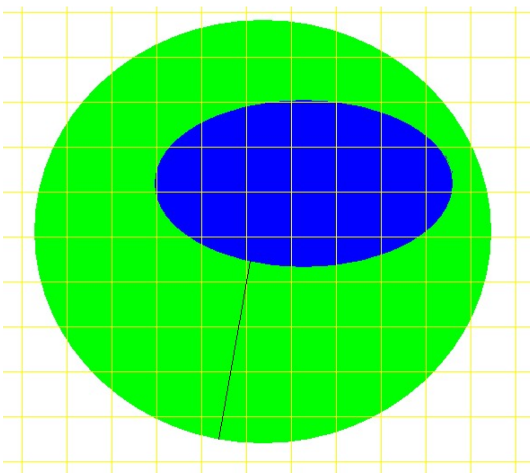
Iš keturių paskutiniųjų nelygybių išplaukia teoremos įrodymas. $\oplus$

Aptarkime algoritmą, kaip rasti hausdorfo atstumą tarp iškilųjų daugiakampių. Visų pirma tarkime, kad duotas $m-$ kampis $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ ir $n-$ kampis $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, čia a_i ir b_j yra šių daugiakampių viršūnės.

Algoritmas
Įv. $A[i]$, $B[j]$
$\rho(a, b)$ yra funkcija, skaičiuojantis atstumą tarp taškų;
$h_1 := \rho(b_1, a_1)$;
for$(j = 1, j < m, j+)$
{
$d_j := \rho(b_j, a_1)$;
for$(i = 1, i < n, i+)$
{
$d_i = \rho(b_j, a_i)$;
if$(d_i < d_j) d_j := d_i$;
};
if$(h_j < d_j) h_{j+1} := d_j$;
$h_{j+1} := h_j$;
};
$h(A, B) := h_j$;
Print $h(A, B)$.

Šio algoritmo sudėtingumo eilė yra $O(n + m)$.

Jeigu aibės neturi bendrų taškų, tai gaunasis $h(A, B)$ yra ieškomasis atstumas. Jei aibių sankirta netuščia, tai dar tenka pakartoti algoritmą, kai aibės A ir B yra sukeistos vietomis. Tiksliau kalbant, sukeisti reikia ciklus. Pastebėsime, kad bet kokią iškilą aibę galime aproksimuoti daugiakampiu, kiek norima tiksliai, taigi šis algoritmas gali būti taikomas ir atstumui, tarp bet kokių aibių, nustatyti. Žemiau pateiktame 11 pav. yra apskaičiuotas atstumas tarp dviejų aibių, kuris lygus 201 pikseliui.



11 pav.

1.9 Klasikiniai pavyzdžiai.

Pateiksime skaitytojui kelių aibių pavyzdžius, kuriuos siūlome kruopščiai panagrinėti ir pačiam pabandyti atsakyti į klausimus, kurie manome, turėtų kilti.

1. **Kantoro aibė (Kantoro dulkės)**

Pažymėkime $I_0(a,b) = [a,b] \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad F uždaras, tiesiškai sutvarkytas aibės I_0 poaibis. Intervalą $I_0(a,b)$ vadinsime pagrindiniu aibės F intervalu, jeigu jis mažiausias uždaras intervalas, kuriam priklauso aibė F. Taigi, šiuo atveju intervalo galai visuomet priklauso aibei F. Priminsime skaitytojui, kad minimali aibių klasė, kuriai priklauso visi realiųjų skaičių intervalai bei kuri uždara, bet kokio skaičiaus sankirtų, sąjungų ir papildinio operacijų atžvilgiu, vadinama Borelio sigma algebra. Matą apibrėžtą šioje algebroje vadinsime Borelio matu. Intervalo ilgis bei intervalo Borelio matas yra tas pat, todėl dažnai jie tiesiog sutapatinami ir Borelio matas vadinamas ilgiu nors, bendrai paėmus, tai ne tas pat. Sakysime, kad aibė yra nulinio mato, jeigu jos Borelio matas lygus nuliui. Tarkime, kad $F = [a,b]$. Tuomet meas$F = b - a$. Tarkime, kad $F \neq [a,b]$, tuomet uždarą aibę gausime iš uždaro intervalo išmetę baigtinę arba skaičią atvirų aibių sąjungą, t.y.

$$F = [a,b] \setminus \cup_n C_n, \tag{1}$$

čia $\{C_n\} \subset [0,1]$, yra kuri nors atvirų aibių šeima. Taigi, taip nusakyta aibė F yra uždara. Nemažindami bendrumo galime sutarti, kad minėtąją atvirų aibių šeimą sudaro nesikertančios aibės. Aibę F vadinsime nulinio mato aibe, jeigu bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti tokią atvirų intervalų šeimą $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$E \subset \bigcup_n U_n \text{ ir } \sum_n L(U_n) < \epsilon.$$

Grįžkime prie (1) aibės. Šios aibės matas yra toks:
meas$F$ = meas$[a,b]-$meas $(\bigcup_n C_n)$. Taigi, F yra nulinio mato, jeigu

$$\sum_n \text{meas} C_n = b - a.$$

Sukonstruosime aibę F, kurios matas būtų lygus 0.

Padalinkime intervalą $[0,1]$ taškais $0, 1/3, 2/3, 1$ į tris lygias dalis (žr. 1.5 pav.). Išmeskime iš intervalo $I_0 = [0,1]$ atvirą aibę $C_1 = (1/3, 2/3)$. Likusi aibė $F_1 = I_0 \backslash C_1 = I_1^1 \bigcup I_1^2$ yra uždara, be to intervalo ilgis $|I_1^j| = 1/3, j = 0,1$. Kitas žingsnis analogiškas pirmajam, t.y. neišmestus intervalus I_1^1, I_1^2 taškais dalijame į tris lygius intervalus, o viduriniuosius intervalus išmetame. Po šio veiksmo liks uždara aibė

$F_2 = \bigcup_{j=1}^4 I_2^j$ ir $|I_2^j| = \Big(1/3\Big)^2$, $j = 1,\ dots, 4$.

Atlikę n žingsnių gausime uždarą aibę

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_n^j, |I_n^j| = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n, \ j = 1, \ldots, 2^n.$$

Aibės F_n ilgis yra toks:

$$\text{meas} F_n = 1 - \frac{1}{3} - 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 - \cdots - 2^{n-1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n.$$

Neaprėžtai didindami šių operacijų skaičių gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \text{meas}(\lim_{n\to\infty}\{I_0 \setminus \bigcup_n C_n\}) = I \setminus C,$$

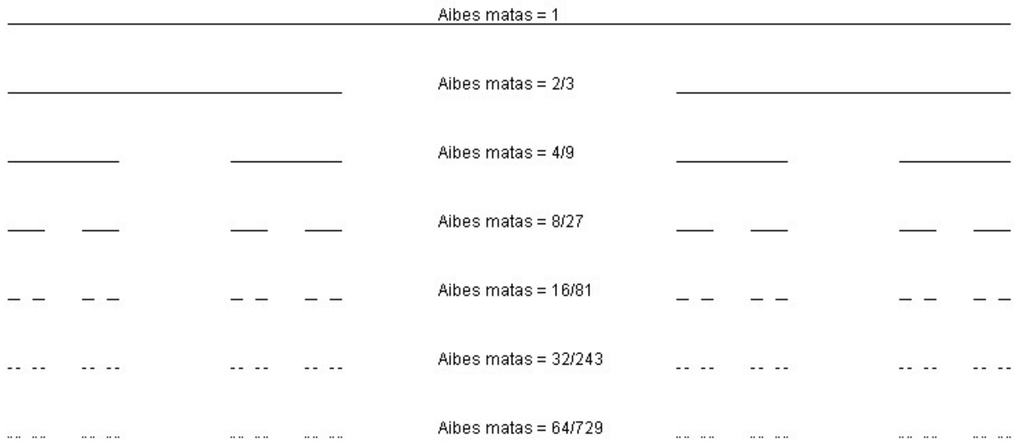
čia C atvira aibė, nes skaiti atvirų aibių sąjunga yra atvira. Be to,

$$\text{meas } F = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Matome, kad ribinės aibės F matas lygus nuliui ir be to ši aibė yra uždara.

Šiek tiek plačiau panagrinėkime šią keistą ir neįprastą aibę. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad aibė F būdama nulinio mato (ją dengiančių intervalų ilgių sumos riba lygi nuliui) tuo pačiu yra diskreti ir tuo pačiu skaiti. Bet šis įspūdis apgaulingas. Pasirodo, kad ši aibė neturi izoliuotų taškų t.y. bet kokioje šios aibės taško aplinkoje yra begalo daug aibės F taškų. Dar daugiau, ši aibė ir neskaiti. Šį fenomeną pailiustruosime tokiu pavyzdžiu. Tarkime, kad uždaros aibės E pagrindinis intervalas yra aibė I_0. Išmeskime iš šio intervalo aibes $(1/(n+1), 1/n), n = 1, \ldots$. Tuomet likusi aibė E yra uždara, be to ją galime nusakyti taip: $E = \{0\} \bigcup_n \{1/n\}$. Nesunku suprasti, kad taškai $1/n, n \in \mathbb{N}$ yra izoliuoti, bet to paties negalime pasakyti apie tašką 0. Taigi, šiuo atveju aibė E nėra diskreti. Aukščiau nagrinėtosios aibės kiekvienas taškas turi analogišką aplinką kaip ir aibės E taškas 0. Tokius taškus vadinsime *akumuliuojančiais*. Aibės, neturinčios izoliuotų taškų, begalinės ir neskaičios yra vadinamos *tobulomis*.

12 pav. pateikti šeši sekos, kuri konverguoja į Kantoro aibę, nariai:



12 pav.

Mes gavome, kad aibės F matas lygus nuliui, be to joks intervalas nėra šios aibės poaibis. Todėl atrodytų kas gi čia keisto, kad jei aibę sudaro ne intervalai, tai šios aibės matas lygus nuliui. Ir vėlgi akibrokštas. Pasirodo tam, kad aibės matas būtų teigiamas visai nebūtina, kad šios aibės poaibiu būtų nors vienas intervalas. Tarkime duotas intervalas $[0, 2]$. Fiksuokime šio intervalo viduriniąjį tašką, šiuo atveju 1 ir iš šio intervalo išmeskime intervalą, kurio centrinis taškas yra 1 ir ilgis lygus $1/3$. Sekančiame žingsnyje elgsimės analogiškai, iš likusių dviejų intervalų, kurių ilgiai po $5/6$ pašalinkime centrinius intervalus, kurių ilgiai $(1/3)^2$. Pastebėkime, kad intervalų pašalinimo algoritmas panašus į jau nagrinėtąjį (aibės F konstrukcija). n- ąjame žingsnyje gausime 2^n nesikertančių intervalų, kurių ilgiai lygūs $(1/3)^n$, o iš jų išmetamų intervalų ilgių eilė vienetu mažesnė t.y. $(1/3^{n+1})$.

Taigi

$$\text{meas } F = 2 - \sum_n \text{meas} C_n = 2 - \sum_n 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

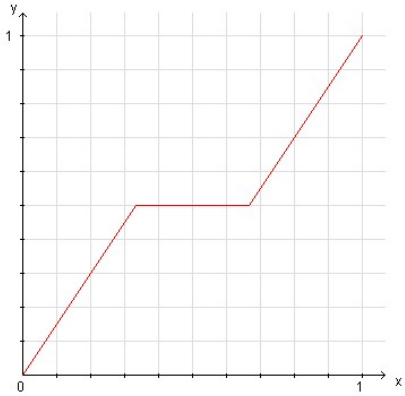
Taigi, likusios aibės matas lygus $\text{mes } F = 1$, nors negalime nurodyti intervalo, kuris būtų aibės F poaibis.

Iš pateiktų pavyzdžių išplaukia, kad realiųjų skaičių aibių klasė žymiai "turtingesnė" už intervalų aibę. Tačiau gal būt skaitytojui liko neaišku, kur čia slepiasi fraktalinės struktūros? Aibės "fraktališkumo" esmė- aibės bet kokio poaibio "panašumas" į pradinę aibę. Šia savybe pasižymi aukščiau apibrėžtos aibės bet kokes poaibis. Juk aišku, kad jei paimsime bet kokį aibės F poaibį, tai šį poaibį sudarys taškai tenkinantys panašias savybes kaip ir aibės F taškai, t.y. taškai nėra įzoliuoti.

2." Velnio laiptai"

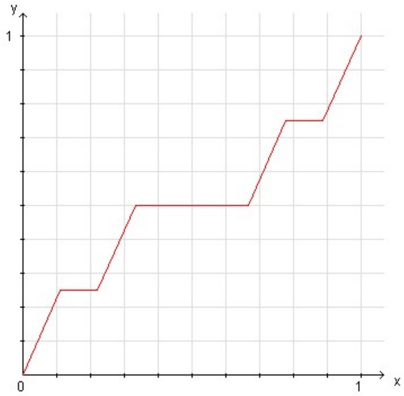
Labai panašiai elgamiesi, kaip ir konstruodami Kantoro aibę, sudarykime dar vieną fraktalinę stuktūrą, kuri, kartais nėra laikoma fraktalu dėl priežaščių, apie kurias kalbėsime žemiau.

Imkime vienetinį kvadratą, kurio viena viršūnė yra koordinačių pradžioje, o kraštinės Ox ir Oy ašyse. Elgsimės tokiu būdu: Ox ašyje konstruojame Kantoro aibę, tuo pat metu, ties kiekvienu išmetamu intervalu brėžiame lygiagrečią atkarpą išmetamam intervalui $y = 0.5$. Šios atkarpos galus jungiame su taškais $(0, 0)$ ir $(1, 1)$.



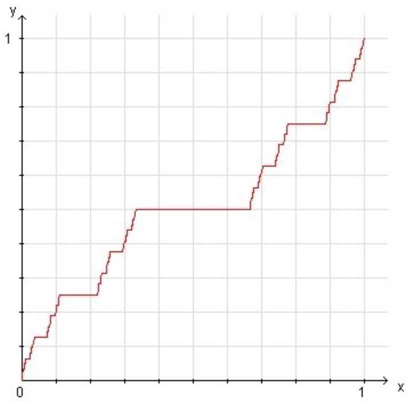
13 pav.

Atlikę antrąjį iteracinį žingsnį gauname tokią kreivę



14 pav.

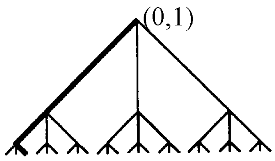
Ir taip toliau. Žemiau pateiktame paveikslėlyje yra pateikiama 6- os iteracijos kreivė. Skaitytojui siūlome rasti ribinės kreivės lanko ilgį bei kokį plotą ši kreivė riboja su Ox ašimi.



15 pav.

3. Binariniai medžiai

Iš praeitame skyrelyje nagrinėtų pavyzdžių (aibės F ir E) buvo galima susidaryti tokį vaizdą: uždarų aibių, kurios lieka išmetant, tam tikra tvarka atviras aibes, topologinės savybės priklauso nuo to kaip realizuojame tą išmėtymą. Pavyzdžiui, aibės E atveju gavome diskrečią aibę su vienu akumuliuojančiu tašku. Jeigu mes tarp dviejų taškų įterpiame trečią, tuomet gauname tobulą aibę. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tokią smulkmeną: - išmetamų intervalų tvarka $C_1, C_2 \ldots$ irgi yra svarbi, kadangi nuo šio proceso priklauso likusios aibės topologinės savybės. Panagrinėsime intervalų išmetimo tvarką. Kaip ir anksčiau tarkime, kad $I_0 = [0, 1]$. Tegu I_1^0 yra pirmasis išmetamas intervalas. Apatinis indeksas nurodo kelintame žingsnyje buvo išmestas minimas intervalas, o viršutinis nurodo to intervalo padėtį kitų intervalų atžvilgiu, kai skaičiuoti pradedame nuo nulio. Taigi, pirmąjame žingsnyje (apatinis indeksas vienas) mes išmetame tik vieną intervalą (jo numeris 0). Kitaip tariant šio išmetamo intervalo adresas (0,1). Sekančiame etape pašaliname dar du intervalus I_2^0, I_2^1, taigi jiems priskiriame adresus $(0, 2), (1, 2)$. Trečiąjame tenka pašalinti keturis intervalus, jų adresai - $(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)$ ir taip toliau. n- ąjame žingsnyje pašalintiems intervalams analogišku būdu suteikiame tokius adresus: $(0, n), (1, n), \ldots, (2^{n-1}, n)$. Taigi, kiekvienas išmetamas intervalas inicijuoja dviejų intervalų sekančiame žingsnyje, išmetimą. Jeigu fiksuosime kokį nors adresą, tarkime $(0, 3)$, tai nesunku suprasti, kad jis inicijuoja adresus $(0, 4)$ ir $(1, 4)$. Arba (m, k) - adresus $(2m, k + 1), (2m + 1, k + 1)$, $m \leq 2^{k-1}$. Naudodamiesi šiais adresais galime nubrėžti medį, iš kurio bet kokios viršūnės (i, j) nubrėžtos dvi šakos į žemiau esančias dvi viršūnes. Kartodami šį procesą neaprėžtai!, gauname medį su viršūne $(0, 1)$ ir begaliniu šakų skaičiumi. Nesunku matyti (16 pav.), kad šis medis turi fraktalinę struktūrą.



16 pav.

4. Kocho kreivė.

Kreivė, kurią nagrinėsime šiame skyrelyje (17 pav.), pavadinta švedų matematiko, kuris ją pirmasis sukonstravo, vardu. Tikėdamiesi suintriguoti skaitytoją, užbėgsime įvykiams į priekį, paminėdami keletą neįprastų šios kreivės savybių. Visų pirma tai, kad jokiame šios kreivės taške negalime nubrėžti liestinės, nors ji tolydi visoje apibrėžimo srityje. Antra, šios kreivės ilgis yra begalinis. Atrodytų kas gi čia keisto, juk daug kreivių ilgiai begaliniai, bet įdomu tai, kad ši kreivė yra, baigtinio ploto plokščios figūros, kontūras. Pradžiai gal tiek. Dabar pateiksime šios kreivės geometrinę konstrukciją. Pradėkime nuo tiesės atkarpos kaip ir konstruodami Kantoro aibę. Ši atkarpa vadinama *i*nitiatoriumi. Padalinkime šią atkarpą, keturiais taškais, į tris lygias atkarpas. Išmeskime viduriniąją atkarpą, o išmestosios vietoje tuštumą užpildome kampu, kurio kraštinių ilgiai lygūs išmestos atkarpos ilgiui. Gauname kreivę (a). Elgdamiesi tokiu pat būdu su kiekviena iš keturių kreivės dalių gauname kreivę (b). Ir taip toliau. Atkarpos trumpėja, o kreivė tampa vis labiau "spygliuota." Kocho kreive yra vadinama ribinė kreivė, kuri gaunama žingsnių skaičių neaprėžtai didinant. 17 pav. yra pateiktas vienas šios sekos narys.

Panagrinėkime šios kreivės ribojamo ploto bei ilgio problemą. Tarkime, kad pradinio intervalo ilgis lygus 1. Atlikę pirmąjį konstrukcinės sekos žingsnį gauname, kad plokščios figūros ribojamas plotas lygus

$$S_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 \cos 30^\circ = A.$$

Atlikus sekantį sekos žingsnį šalia jau esančios trikampės srities atsirodo dar keturios vienodos trikampės sritys (po vieną kiekvienai atkarpai), kurių plotai lygūs

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cos 30^\circ = \frac{1}{9}A.$$

Tuomet visas, ribojamos srities plotas, lygus $S_1 = \frac{4}{9}A + A$ ir taip toliau. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$ gausime, kad šios kreivės ribojamos figūros plotas artėja prie tokio skaičiaus:

$$S = A(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots)) = A\{\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Taigi plotas, kurį riboja ši kreivė ir pradinis intervalas, yra baigtinis. To, beje, negalime pasakyti apie šios kreivės ilgį. Initiatoriaus ilgis kaip jau minėjome lygus 1. Nesunku matyti, kad kreivės ilgis, atlikus pirmąjį konstrukcinį žingsnį, lygus 4/3. Toliau, atlikus antrąjį sekos žingsnį, naujai gautos kreivės ilgis lygus $4/3 + (4/3)^2$ ir taip toliau, atlikus $k-$ atąjį sekos žingsnį gauname, kad sukonstruotos kreivės ilgis yra lygus

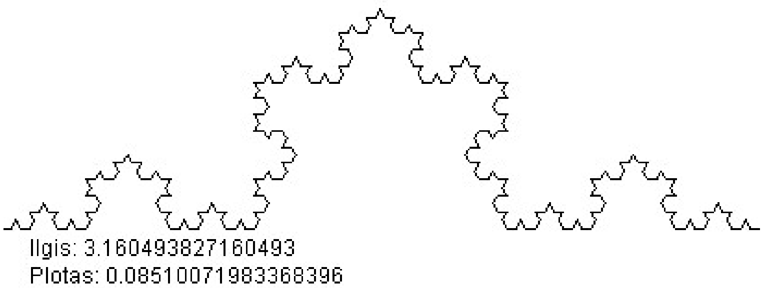
$$\left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Tuomet hipotetinės kreivės ilgis turėtų būti toks:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

Nesunku suprasti, kad ši seka neaprėžta, taigi Kocho kreivės ilgis yra neaprėžtai didelis.

Paveiksle pateikiame ketvirtąjį šios iteracinės sekos narį:

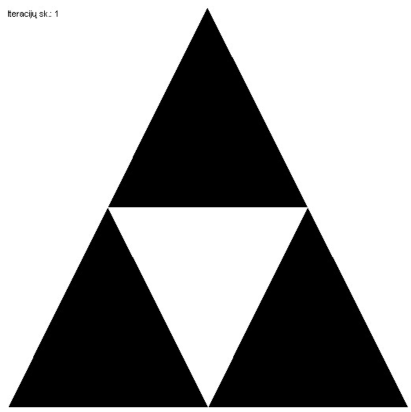


17 pav.

5. Sierpinskio trikampis

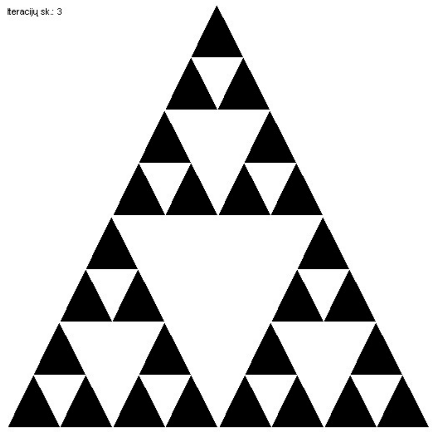
Aibė, kurią apibrėšime žemiau, yra ne ką mažiau įdomi už jau paminėtas.

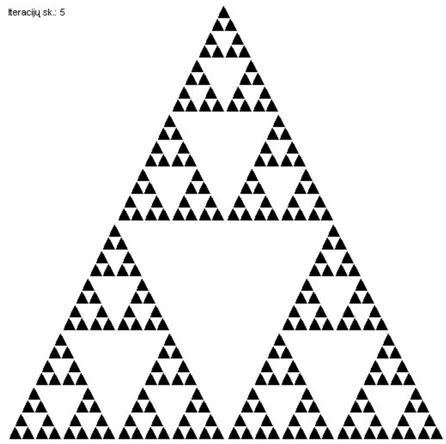
Tarkime duotas lygiakraštis trikampis, kuris yra konstruojamos aibės initiatorius. Trikampio viršūnių taškai priklauso konstruojamai aibei. Pirmąjame žingsnyje sujungę trikampio kraštinių vidurio taškus atkarpomis, padalijame šį trikampį į keturis trikampius ir pašalinę vidinį trikampį prie pradinių trijų taškų prijungiame dar tris šio trikampio vidurio kraštinių taškus. Taigi, po pirmojo žingsnio konstruojamą aibę sudaro šeši taškai.



Sekantys konstrukciniai žingsniai analogiški pirmąjam, t.y. neišmestų trikampių kraštinių vidurio taškus sujungiame atkarpomis, tokiu būdu padalindami kiekvieną trikampį į keturis trikampius. Pašalinę vidinius trikampius ir prie konstruojamos aibės prijungę gautųjų trikampių viršūnių taškus (kiek jų yra!) esame pasiruošę žengti sekantį žingsnį. Minėtoji aibė, kuri vadinama Sierpinskio trikampiu, sutampa su šio proceso ribiniu atveju.

Žemiau pateikiame trečiąją bei penktąją šio iteracinio proceso narius.





Beje, manome kad skaitytojas atkreipė dėmesį, kad metodo prasme šis procesas nedaug kuo skiriasi nuo Kantoro aibės konstrukcijos. Paminėsime vieną svarbią ribinės aibės savybę - šios aibės matas (plotas) lygus nuliui. Tarkime, kad nagrinėjamas trikampis lygiakraštis, kurio plotas S. Suskaičiuokime išmetamų trikampių plotą. Nesudėtingų skaičiavimų dėka gauname, kad šis plotas toks:

$$\frac{S}{4} + \frac{3S}{4^2} + \frac{3^2 S}{4^3} + \frac{3^k S}{4^{k+1}} + \ldots = S.$$

Gauname, kad išmestų trikampių plotas lygus pradinio trikampio plotui, taigi Sierpinskio aibės "plotas" lygus nuliui.

Visi pateikti pavyzdžiai sukelia keistų minčių. Kokios čia aibės, kurių egzistavimui pagrįsti reikalinga ribos sąvoka? O gal tai aibės fikcijos, kurios neegzistuoja. T.y. aibės kurios neegzistuoja, o iteracinių žingsnių seka, kuriais "lipdome " aibę, iš ties niekur neveda? Kitais žodžiais tariant, seka nekonverguoja.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Patikrinkite ar funkcija $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra metrika aibėje $\mathbb{R}$.

$$a) \quad \rho(x,y) = |x||x-y|; \quad b) \quad \rho(x,y) = |x^3 - y^3|;$$

$$c) \quad \rho(x,y) = |\theta||r_1 - r_2|; \quad d) \quad \rho(x,y) = |r_1 - r_2| + |\theta|,$$

čia r_1, r_2 yra taškų $x, y \in \mathcal{C}^*$ atstumai iki koordinačių pradžios, o $\theta-$ kampas tarp vektorių x, y.

$$e) \quad \rho_\Sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}$$

yra metrika begalinių sekų erdvėje Σ, čia $\Sigma-$ begalinių sekų $x = x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ erdvė, sekos koordinatės apibrėžtos $N-$ ainėje skaičiavimo sistemoje.

2. Sudarykite algoritmą aibės A skersmeniui (diametrui) rasti, jei laikysime, kad aibė A yra dvimatis masyvas, kurio elementai yra pikselinės koordinatės. Parašykite programą (Java kodą) ir realizuokite šią užduotį praktiškai.

3. Sudarykite algoritmą atstumui nuo laisvai pasirinkto taško iki aibės aibės rasti. Parašykite programą Java kalba. Įskiepyje turi būti langas taško koordinatėms įvesti bei atsidarius kokį nors vaizdą (brėžinį) turi būti išvedamas suskaičiuotas atstumas nuo pasirinkto taško iki aibės.

4. Nustatykite ar metrikos $\rho(x,y) = |x-y|$ ir $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ yra ekvivalenčios metrinėje erdvėje $X = [0,1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \le 1\}$.

5. Įrodykite, kad funkcija

$$\rho(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$$

yra metrika aibėje $\overline{\mathbb{R}}$, čia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$.

6. Nurodykite binarinį kodą, apibrėžiantį Kantoro aibės taškus.

7. Charakterizuokite Kantoro aibės taškus trejetainėje skaičiavimo sistemoje.

8. Nurodykite Sierpinskio trikampio taškų kordinačių bendrąsias formules.

9. Sudarykite algoritmą atstumui tarp bet kokių dviejų iškilų aibių plokštumoje skaičiuoti. Aibes pasirinkite laisvai. Realizuokite šią užduotį praktiškai.

10. Sudarykite algoritmą atstumui tarp bet kokių dviejų kreivių erdvėje skaičiuoti. Realizuokite užduotį praktiškai.

11. Sudarykite algoritmą, kurio dėka būtų galima koduoti Kocho kreivės taškus. Realizuokite praktiškai.

12. Sudarykite algoritmą, kurio dėka būtų randami taškai, simetriški kreivės $y = x^2 - 3x + 1$ atžvilgiu. Realizuokite užduotį praktiškai, naudodami Java kalbą.

13. Sudarykite algoritmą Hausdorfo atstumui tarp bet kokių dviejų aibių, skaičiuoti. Realizuokite praktiškai naudodami Java kalbą.

14. Tarkime duotas koks nors juodai-baltas paveikslas. Sudarykite dvimatės funkcijos (analogiškai kaip ir 2 pav.) grafiką, kuri koduoja šio paveikslo taškus.

15. Įveskime paveikslą į monitorius ekraną. Sudarykite šio paveikslo denginį iš kvadratų (tai turi matytis ekrane). Apibrėžkite vieno kintamojo funkciją priklausančią nuo parametro y, t.y. $u = f_y(x)$, $c \le y \le d$ čia c ir d yra denginio minimali ir maksimali ordinatės. Įskiepyje pasirinkę kokią nors parametro reikšmę, atliekate vaizdo skanavimą pjūviu, pasirinkta y reikšme. Kiekviename denginio kvadrate nustatę spalvos intensyvumo kodą, šią reikšmę suteikiate funkcijai. Išvedate funkcijos grafiką į ekraną, kiekvienai pasirinktai parametro reikšmei.

16. Parašykite programą įvesto vaizdo (tarkime ...jpg formate) skersmeniui skaičiuoti.

17. Sudarykite algoritmą bei programą, kuriais būtų galima patikrinti ar įvestas vaidas yra susijęs.

18. Naudodami Kantoro aibės konstrukciją, pradinis intervalas yra $[0,2]$, kiekvieno iteracinio žingsnio metu išmetame viduriniąją intervalo dalį, kuri sudaro trečdalį išmetamo intervalo dalį. Naudodami šią konstrukciją sudarykite binarinį medį su lapais, kuriame atsispindėtų su lapu susieto taško kodas. Be to įvedus atsitiktinai pasirinkto taško kodą, turi būti pateikiama informacija apie taško padėtį iteracinėje sekoje, bei jo kilmės taško kodą.

19. Naudodami Sierpinskio aibės konstrukciją, sudarykite Sierpinskio aibę aproksimuojančią seką. Be to koduokite šios aibės taškus trejetainės sk. sistemos skaitmenimis. Programoje turi būti numatyta galimybė, laisvai pasirinkus trejetainį kodą, atstatyti taško, užkoduoto šiuo kodu, padėtį iteracinėje sekoje. Be to turi būti iš karto pateikiamas taško, kuris inicijuoja laisvai pasirinktą tašką, kodas.

20. Sudarykite Kocho keivę aproksimuojančią seką. Be to koduokite šios aibės "lūžio" taškus trejetainės sk. sistemos skaitmenimis. Programoje turi būti numatyta galimybė, laisvai pasirinkus trejetainį kodą, atstatyti taško, užkoduoto šiuo kodu, padėtį iteracinėje sekoje. Be to pasirinkus tašką kreivėje, turi būti nurodomas jo trejetainis kodas.

21. Parašykite programą (algoritmą) atstumui nuo taško $(5,6)$ iki kreivės $x = 1 - \cos t, \;\; y = \sin t$ apskaičiuoti. Kreivę ir tašką pavaizduokite ekrane, be to nurodykite ieškomą trumpiausią atkarpą.

22. Raskite atstumą nuo taško $(-2,3)$ iki Kocho kreivės, kurios initiatorius yra intervalas $[0,1]$. Nurodykite, kokiu tikslumu apskaičiuotas atstumas.

23. Sudarykite programą atstumui tarp bet kokių pasirinktų "Velnio laiptų" taškų rasti. Visų pirma turi būti randamas "Velnio laiptų" bet koks iteracinis narys ir pasirinkus du bet kokius taškus nurodomas atstumas tarp šių taškų.

24. Sudarykite algoritmą atstumui tarp kreivių $y = (x+1)^2$ ir $y = 2 - (x-2)^2$ skaičiuoti.

25. Sudarykite programą dviejų bet kokių pasirinktų vaizdų (importuotų paveikslėlių) sankirtai, skirtumui, simetriniam skirtumuo nustatyti.

26. Sudarykite ir realizuokite algoritmą atstumui, tarp Kocho kreivės (iniciatorius $[0,1]$) ir apskritimo $x^2 + y^2 - 8y - 15 = 0$, rasti.

27. Sudarykite algoritmą, kurio dėka būtų randami taškai, simetriški kreivės $y = x^2 - 3x + 1$ atžvilgiu. Realizuokite užduotį praktiškai.

28. Įrodykite, kad jei $A, B, C \in H(X)$ ir $B \subset C$, tai $d(A,C) \leq d(A,B)$.

29. Sudarykite programą, kurioje pasirinkus įvestą paveikslą bei du jo taškus būtų ekrane nurodomas atstumas tarp šių taškų.

30. Sudarykite programą (aprašydami algoritmą) skaičiuojančią įvestos (importuoto paveikslo) skersmenį.

31. Sudarykite algoritmą bei programą, kurioje būtų nurodomas aibės elementų (įvesto spalvoto paveikslo) pikselių skaičius. Pasirinkę spalvų kodų slenkščius, suskirstykite šios aibės taškus pagal ryškumą į klases ir nurodykite šių klasių elementų skaičių.

32. Sudarykite algoritmą bei programą, kurioje būtų nurodomas aibės elementų (įvesto spalvoto paveikslo) pikselių skaičius. Pasirinkus tašką (spustelėjus pelės rodykle) turi būti nurodomas šio taško eilės numeris.

Skyriaus klausimai

1. Aibės. Aibių veiksmai. Reprezentacija
2. Erdvė
3. Atvaizdis (funkcija). Atvirkštinis atvaizdis
4. Injekcija. Siurjekcija. Bijekcija
5. Atstumo sąvoka metrinėje erdvėje.
Metrika. Metrinė erdvė
6. Metrinių erdvių pavyzdžiai
7. Izometriškos erdvės
8. Aplinkos
9. Atstumas tarp aibių
10. Tolydieji atvaizdžiai
11. Koši seka. Pilnos metrinės erdvės
12. Uždaro-atviros aibės generuotos tolydžių atvaizdžių
13. Kompaktiškos metrinės erdvės
14. Jungios aibės ir jungios erdvės

15. Klasikiniai fraktalai bei jų savybės
16. Fraktalų metrinė erdvė
17. Hausdorfo atstumas ir jo savybės
18. Fraktalų metrinė erdvė.

Privalomos užduotys

Pasikartokite teorinius klausimus ir žinokite šias sąvokas

a. Erdvė, Koši seka, ribinis taškas, uždaros-atviros aibės, skaičios-neskaičios aibės, metrika, metrinė erdvė, pilna metrinė erdvė, atstumas tarp taško ir aibės, atstumas tarp aibių.

b. Kompaktiškos aibės, aprėžtos aibės, atviros aibės, aibės vidus, aibės siena. Jungios aibės.

Bendra pastaba Realizuojant praktinę užduotį, kartu su užduotimi turi būti pateikiamas ir formaliai aprašytas algoritmas ir ginantis programą visų pirma bus aptariamas algoritmas. Darbų gynimas vyks "gyvai", auditorijoje.

1. Klasikiniai fraktalai ir jų savybės (Kantoro aibė, Kocho kreivė, Sierpinskio trikampis, "velnio" laiptai).

a. Žinoti klasikinių fraktalų (Kantoro aibė, Kocho kreivė, Sierpinskio trikampis, "velnio" laiptai) konstrukciją.

b. Mokėti parodyti, kad Kantoro aibės ir Sierpinskio trikampio Lebego matas yra 0, kad Kocho kreivės ilgis begalinis, be to rasti Kocho kreivės ribojamo ploto dydį, parodyti, kad "velnio" laiptų ilgis yra 2.

Literatūra :

1. Michael F. Barnsley; Fractals, Spectrum 1993
2. Peitgen, H.O., ; Jurgens, H.; Saupe, D. Chaos and Fractals London (Springer)
3. Paskaitų konspektas.

1.1 **Užduotis.**

a) Teorinė užduotis. Patikrinkite ar funkcija $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra metrika aibėje $\mathbb{R}$:

$$\rho(x, y) = |x||x - y|;$$

b) Praktinė realizacija (programa). Sudarykite algoritmą atstumui tarp bet kokių dviejų aibių plokštumoje skaičiuoti.

1) Importuojate dvi juodai-baltas aibes, kalbant tiksliau du vaizdus, kurie būtų to paties dydžio (pavyzdžiui savo nuotrauką ir tą pačią nuotrauką kiek "sugadintą");

2) Uždengiate aibes sutvarkytais skaidiniais ir kiekvieną skaidinio elementą susiejate su vidutine šio skaidinio ryškumo reikšme. Tokiu būdu jūs apibrėžiate funkciją, kurios apibrėžimo sritis yra sutvarkytas denginio elementas, o reikšmių sritis- ryškumo parametro reikšmės.

3) Sudarote šios funkcijos grafiką Ox, Oy ašyse;

4) Atstumu tarp aibių vadinsime Hausdorfo atstumą tarp šių funkcijų grafikų (šiuo atveju bus didžiausias atsilenkimas tarp grafikų).

1.2 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Aprašyti algoritmą Hausdorfo atstumui tarp bet kokių dviejų uždarų kreivių kontūrų skaičiuoti.

b) Praktinė užduotis. Realizuokite aprašytąjį algoritmą praktiškai, realizacijoje nurodydami atkarpą jungiančią artimiausius taškus. Paaiškinimas: importuojate du pvz paint-u nupieštus uždarus kontūrus viename paveiksle. Paleidus programą randamas atstumas ir parodomi taškai, tarp kurių šis atstumas skaičiuojamas.

1.3 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Patikrinkite ar funkcija $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra metrika aibėje $\mathbb{R}$:

$$\rho(x, y) = |r_1 - r_2| + |\theta|,$$

čia r_1, r_2 yra taškų $x, y \in \mathcal{C}$ atstumai iki koordinačių pradžios, o $\theta-$ kampas tarp vektorių x, y. Čia $\mathcal{C}$ kompleksinė plokštuma.

b) Praktinė realizacija. Sudarykite algoritmą, kurio dėka būtų randami taškai, simetriški pasirinktos, pavyzdžiui kreivės $y = x^2 - 3x + 1$ atžvilgiu. Ieškant taškui A simetriško taško A' elgiamės taip:

1) randame artimiausią kreivės tašką K, taškui A; 2) Per šiuos taškus, brėžiame tiesę; 3) Šioje tiesėje randame tašką A' kuris nutolęs nuo K tokiu pat atstumu kaip ir A, tik šiuos du taškus turi skirti kreivė.

Taškai A plokštumoje pasirenkami pelės paspaudimu. Pasirinkus kitą tašką, senasis taškas ir jo simetrinis vaizdas pasilieka ekrane. Realizuokite užduotį praktiškai.

1.4 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Patikrinkite ar funkcija $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra metrika aibėje $\mathbb{R}$.

$$\rho_{\Sigma}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}.$$

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą Kantoro aibės elementų sekai konstruoti.

1) Kiekviename žingsnyje į ekraną išveskite atitinkamos sekos narius, nurodydami atitinkamos sekos "likutinio" intervalo matą. Laikome, kad pradinis intervalas (iniciatorius) yra $I_0 = [0, 3]$, o kiekvieno iteracinio žingsnio metu išmetame intervalo $1/6$ dalį.

2) Sudarykite Kantoro aibės taškų masyvą iki 7 iteracijos.

3) Plokštumoje pelės paspaudimu pasirenkame tašką. Programos lange turi būti nurodomas trumpiausias atstumas (atkarpa) iki Kantoro aibės taško. Atstumas matuojamas pateiktos atkarpos mastelio vienetu.

1.5 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Raskite atstumą nuo taško $(0,5; -2)$ iki Kocho kreivės trečios iteracijos artinio, kurios initiatorius yra intervalas $[0, 1]$.

b) Praktinė užduotis. Naudodami Kantoro aibės konstrukciją, pradinis intervalas yra pvz. $[0, 1]$, kiekvieno iteracinio žingsnio metu išmetame viduriniąją intervalo dalį, kuri sudaro trečdalį išmetamo intervalo dalies. Kantoro aibės sekos nariais vadiname šioje konstrukcijoje gautų intervalų galų taškus. Atlikę 6 iteracijas, gautus Kantoro taškus surašykite į masyvą. Šiems taškas priskirkite binarinį kodą. Šio kodo ilgis $|K| = 2^7$.

Programoje turi būti realizuotos tokios operacijos:

1) pasirinkus pele atkarpos bet kokį tašką, būtų rodomas artimiausio taško binarinis kodas;

2) programos lange nurodžius kodą, turi būti nurodomas ("užsidega") Kantoro aibės taškai.

1.6 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis Įrodykite, kad jei $A, B, C \in H(X)$ ir $B \subset C$, tai $d(A, C) \leq d(A, B)$.

b) Praktinė užduotis. Naudodami Sierpinskio aibės konstrukciją, sudarykite Sierpinsio aibę aproksimuojančią seką ("Enter" paspaudimu turi būti realizuojamos Sierpinskio trikampio iteracijos). Be to, koduokite šios aibės taškus trejetainės sk. sistemos skaitmenimis pasirinkta eilės tvarka. Programoje turi būti numatyta galimybė: laisvai pasirinkus trejetainį kodą, bus atstatomas trikampio taškas (rodomas plokštumoje), užkoduotas šiuo kodu. Be to turi būti realizuota galimybė, pasirinkus tašką trikampyje būtų nurodomas jo kodas (monitoriuje). Sierpinskio trikampiu laikysime 5-os iteracijos artinį. Sierpinskio taško kodo ilgis priklauso nuo iteracijos eilės.

1.7 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite algoritmą atstumui tarp bet kokių dviejų iškilų aibių plokštumoje skaičiuoti. Aprašykite algoritmą naudodami pseudo kodą.

b) Praktinė problema. Parašyti programą, kurios dėka importavus paveikslį būtų išskiriamas jo kontūras ir randamas šios aibės skersmuo. Skersmuo nurodomas pikseliais, be to nurodoma atkarpa kuri apibrėžia šį skersmenį. Laisvai pasirinkus taškus ant kontūro, turi būti nubrėžiama atkarpa ir nurodomas jos ilgis.

1.8 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Parodykite, kad $h(AUB, CUD) \leq \max\{h(A,C); h(B,D)\}$, visoms aibėms $A, B, C, D \in H(X)$.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą atstumui nuo bet kokio pasirinkto taško (pelės paspaudimu) iki Kocho kreivės rasti. (Kocho kreivę sukonstruojate iki 5-os iteracijos). Be turi būti išvedama ir atkarpa, kurios ilgis (atstumas iki taško) skaičiuojamas.

1.9 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Raskite ribinės aibės, kuri gaunama iš intervalo $[0, 3]$ iteraciniu būdu išmetant viduriniįjį intervalą, kurio ilgis lygus 1/3, antrame žingsnyje $\frac{1}{9}$ it t.t. k-ąjame žingsnyje - $\frac{1}{3^k}$ ilgio intervalus iš likusių dalių. Koks tokiu būdu gautos ribinės aibės Lebego matas (kokia begalinė išmetamų intervalų ilgių suma)?

b) Praktinė užduotis. Sudaryti Kocho aibę aproksimuojančią seką, kiekvieną iteracinį žingsnį gaunant mygtuko paspaudimu. Sudaryti šios sekos iki 5-ą narį. Pelės paspaudimu fiksuoti plokštumos tašką, o programos pagalba turi būti randamas artimiausias atstumas nuo pasirinktojo taško iki sekos, t.y Kocho kreivės. Atstumas nurodomas atkarpa ir pikselių skaičiumi.

1.10 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Nustatykite atstumus tarp aibių $d(S; K)$ ir $d(K; S)$ tarp keturkampio S : $(1; 2), (2; 4), (0; 3), (0; 8)$ ir kvadrato, kurio dvi priešingos viršūnės yra taškuose K : $(4; 4), (8, 7)$. Koks Hausdorfo atstumas tarp šių aibių?

b) Praktinė užduotis. Sudaryti "Velnio laiptų" aibę aproksimuojančią seką, kiekvieną iteracinį žingsnį gaunant klavišo paspaudimu. Sudaryti šios sekos 5-ą narį (Šios aibė taškais laikomi intervalų galų taškai). Pelės paspaudimu fiksuoti tašką, o programos pagalba turi būti randamas artimiausias šios sekos taškas (kurio nors intervalo galo taškas). Atstumas nurodomas atkarpa ir pikselių skaičiumi.

1.11 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Nustatykite hausdorfo atstumą tarp trikampio $(2; 2), (-2; 4), (0; 3)$ ir stačiakampio, kurio dvi priešingos viršūnės yra taškuose $(3; 1), (10; 6)$.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite Sierpinskio trikampio seką animuotai iki 5 iteracijos (paleidus programą turi matytis visi 5 žingsniai konstruojant seką). Fiksavus penktąją iteraciją ir ją išsaugojus, pelės paspaudimu fiksuojate tašką ir randate atstumą nuo pasirinkto taško iki šio, Sierpinskio trikampio iteracijos nario. Pastebėsime, kad Sierpinskio trikampiu laikome visų trikampių viršūnių taškus (išskyrus pradinius tris taškus).

1.12 **Užduotis**

a) Teorinė dalis. Raskite Hausdorfo atstumą $h(T; L)$ tarp trikampio T : $(1; 2), (2; 4), (0; 3)$ ir uždaros laužtės, kurios taškai eilės tvarka nusakyti taip: L : $(3; 2), (5; 7)., (6; 1), (7; -3), (3; 2)$

b) Praktinė dalis Sukonstuokite Kocho kreivę interaktyviai, t.y. pelės paspaudimu turi būti nurodoma sekanti iteracija. Be to, koduokite šios aibės taškus (intervalo galų taškus) trejetainės sk. sistemos skaitmenimis pasirinkta eilės tvarka. Programoje turi būti numatyta galimybė: laisvai pasirinkus trejetainį kodą, bus atstatomas Koch kreivės taškas (rodomas plokštumoje), užkoduotas šiuo kodu. Be to turi būti realizuota galimybė, pasirinkus tašką trikampyje būtų nurodomas jo kodas (monitoriuje). Kocho keive laikysime 5-os iteracijos artinį. Kocho taško kodo ilgis priklauso nuo iteracijos eilės.

1.13 **Užduotis**

a) Teorinė dalis. Raskite atstumą nuo atkarpos $\{(0,5; -2), (-1; 3\}$ iki Sierpinskio trikampio, kurio initiatorius viršūnės taškuose (0; 0), o kita (1; 0) ir (0,5; 1), o trikampį reprezentuoja ketvirta iteracija.

b) Sudaryti programą, kuria būtų realizuojamas pasirinkto paveikslo (nuotraukos) konvertavimas į 2D grafiką. T.y. yra importuojama nuotrauka, pasirenkamas jos skaidinio dydis (programos lange nurodoma skaidinio kraštinės dydis pikseliais) ir tada programos lange išvedamas grafikas.

1.14 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite algoritmą, kuriuo remiantis būtų galima nustatyti ar aibė yra susijusi. Parašyti peudo kodą.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite algoritmą, o vėliau parašykite programą importuoto paveikslo kontūrui išskirti.