II. TRANSFORMACIJOS

Skyriaus klausimai

1. Transformacija. Transformacijų kompozicija (iteracinė seka.
2. Atvirkštinė transformacija. Iteracinės sekos atvirkštinė transformacija.
3. Spaudžianti transformacija. 4. Transformacija erdvėje $\overline{\mathbb{C}}$.
5. Rymano sferos ir erdvės $\overline{\mathbb{C}}$ homeomorfizmas. Taškų stereogafiniai vaizdai.
6. Miobuso transformacija erdvėje $\overline{\mathbb{C}}$.
7. Trijų taškų vaizdavimas TTT (tiesine trupmenine transformacija). Šios transformacijos taikymai.
8. TTT Eilerio formoje. Formulė, kuria tris taškus atvaizduojame į tris pasirinktus taškus.
9. Bendra tiesinės transformacijos forma (matricinė forma) erdvėje $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$.
10. Specialūs tiesinių transformacijų atvejai (posūkiai, spaudimas, postūmiai, simetrijos).
11. Bendros koordinačių keitimo formulės.
11. Kvarterionai. Kvarterionų aritmetika.
12. Kvarterionai ir posūkiai trimatėje erdvėje.

2.1 Transformacijos realiųjų skaičių aibėje

Apibrėžimas *Tarkime, kad* (X,ρ_1), (Y,ρ_2) *metrinės erdvės. Tuomet funkciją* $f: X \to Y$ *vadinsime erdvės transformacija tarp metrinių erdvių. Jei* $X = Y$, *tai* f *vadinsime erdvės* X *transformacija į save pačią.*

Apibrėžimas *Tarkime, kad* f *ir* g *yra dvi transformacijos, apibrėžtos metrinėje erdvėje* X *įgyjančios reikšmes šioje pat erdvėje. Tada transformaciją*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

vadinsime transformacijų f *ir* g *kompozicija.*

Pastaba Literatūroje funkcijų f ir g kompozicija kartais yra žymima ir taip: $g \circ f(x) = f(g(x))$.

Bet kokia animacija arba tiesiog judesys erdvėje- tai transformacijų kompozicijos praktinis taikymas. Šiuos taikymus plačiai aptarsime kituose šio skyriaus skyreliuose.

Erdvės transformaciją $f: X \to X$ vadinsime *tapačiąja*, jeigu visiems $x \in X$, $f(x) = x$. Ateityje tapačiąją transformaciją žymėsime $f^{\circ}(x) = x$.

Apibrėžimas *Tarkime, kad* $f: X \to X$. *Tada transformacijų seką*

$$f^{(\circ)}(x) = x, f^{(1)}(x) = f(x),$$

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)), \ldots, f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \ldots$$

vadinsime iteracine transformacijų seka. Transformacijos $n-$ *ąją iteraciją vadinsime* $n-$ *uoju iteracijos (sekos) nariu.*

Pavyzdys Sakykime, kad transformacija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = ax, a > 0, x \in \mathbb{R}$. Suraskime $f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$. Nesunku matyti, kad $f^{(n)}(x) = a(a \ldots (ax)) = a^n x$.

Jeigu transformacija turi atvirkštinę (ši transformacija turi būti bijekcija), tai tada *atvirkštinę transformacijų seką* apibrėžiame tokiu būdu:

$$f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x), \ldots$$
$$f^{(-n)}(x) = (f^{(n)})^{-1}(x),\ m = 1, 2, \ldots.$$

Kitaip tariant, norint rasti transformacijos $n-$ os iteracijos atvirkštinę reikia rasti nagrinėjamos transformacijos $n-$ ąją iteraciją $g(x) = f^n(x)$, o po to rasti funkcijos $g(x)$ atvirštinę, t.y. $E(g^{(-1)}) = D(g(x))$ ir $g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$. Atkreipsime dėmesį, kad atvirkštinės transformacijos reikšmių sritis sutampa su pradinės funkcijos apibrėžimo sritimi.

Pavyzdys Tarkime duota transformacija:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Šios transformacijos apibrėžimo sritis $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, o reikšmių aibė $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Randame šios transformacijos antrąją iteraciją:

$$f^2(x) = g(x) = \frac{5x+1}{x+2}.$$

Tarkime, kad šią funkciją nagrinėjame tolydumo intervale $x \in (1, \infty)$. Tada $D(g) = (1, \infty)$, o reikšmių aibė $E(g) = (2, 5)$. Matome, kad funkcijos g atvirkštinė apibrėžta intervale $(2, 5)$ ir egzistuoja šiame intervale (nes tai griežto monotoniškumo intervalas) ir yra tokia:

$$f^{-2}(y) = g^{(-1)}(y) = \frac{2y-1}{5-y} = x.$$

Aišku, kad

$$D(g^{(-1)}) = (2, 5), \text{ o } E(g^{-1}) = (1, \infty).$$

Pavyzdys Tarkime, kad duota transformacija $f(x) = 2x+1$. Šios transformacijos apibrėžimo sritis yra $D(f) = \mathbb{R}$ ir šiuo atveju $E(f) = \mathbb{R}$. Šioje apibrėžimo srityje transformacija turi atvirkštinę, nes ji griežtai monotoninė. Raskime trasformaciją $y = f^3(x)$ bei $f^{-3}(x) = z$.

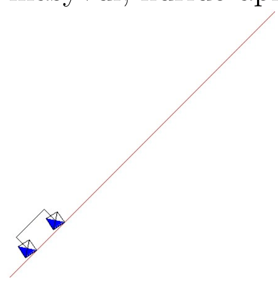
Turime, kad

$$y = f(f^2(x)) = 2f^2(x) + 1 = 2(2f(x)+1)+1 = 2\big(2(2x+1)+1)+1\big) = 8x+7.$$

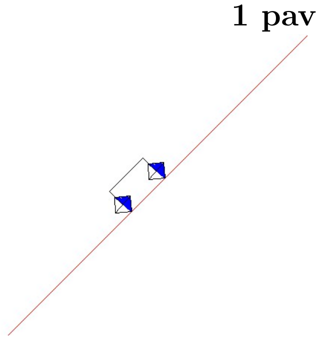
Tada

$$f^{-3}(x) = \frac{x-7}{8}.$$

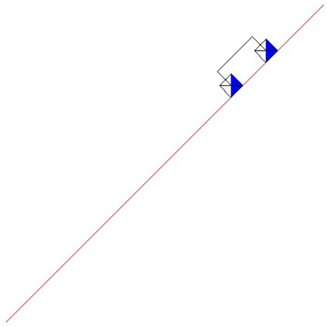
Žemiau pateiktuose 1-3 pav. iliustruojamas kompozicijos veikimas, kai kažkokia tiesinė transformacija taikoma taškų masyvui, kuriuo apibrėžtas "dviratis":



1 pav.



2 pav.



3 pav.

Apibrėžimas *Transformaciją $f : X \to X$, vadinsime spaudžiančia metrinėje erdvėje (X, ρ), jei bet kokiai elementų porai $x, y \in X$ egzistuoja skaičius $s \in [0, 1)$ toks, kad*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y).$$

Apibrėžimas *Tašką $x_0 \in X$ vadinsime transformacijos $f : X \to X$ nejudamu tašku, jeigu $f(x_0) = x_0$.*

Pavyzdys Transformacija $y = f(x) = x^2$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Šios transformacijos nejudamus taškus randame spręsdami lygtį $x^2 = x$. Išsprendę šią lygtį gauname $x(x-1) = 0$. Ši lygtis turi du sprendinius 0 ir 1. Šie sprendiniai ir yra transformacijos nejudami taškai. Įdomu tai, kad skaičiuodami šios transformacijos iteracijų reikšmes minėtuose taškuose gautume tas pačias reikšmes. T.y. transformacija šių taškų "neperkelia" erdvėje.

Pasirodo, norint rasti transformacijos nejudamus taškus tenka spręsti lygtį:

$$f(x) = x.$$

Pavyzdys Raskime transformacijos

$$f(x) = x^2 + 5x - 5,$$

apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje, nejudamus taškus.

Sprendžiame lygtį:

$$f(x) = x^2 + 5x - 5 = x.$$

Iš pastarosios gauname, kad

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Tad transformacijos nejudami taškai yra 1 ir -5.

2.2 Transformacijos erdvėje $\overline{\mathbb{C}}$.

Kompleksinių skaičių aibė nėra uždara. Papildžius ją vienu tašku, kurį žymėsime ∞ ir vadinsime *begaliniu tašku* mes gausime uždarą aibę, kurią ir vadinsime išplėstine kompleksine plokštuma. Šią aibę žymėsime simboliu $\overline{\mathbb{C}}$.

Trimatėje erdvėje, kurioje apibrėžta ortogonali Dekarto koordinačių sistema, koordinatinių ašių (Ox, Oy, Oz) kintamuosius žymėsime raidėmis

$$\xi, \eta, \zeta,$$

atitinkamai. Bet kokį erdvės tašką žymėsime simboliu (ξ, η, ζ). Tarp kompleksinių skaičių ir plokštumos taškų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. Dėl šios priežasties kompleksiniai skaičiai ir plokštumos taškai gali būti tapatinami (bijekcijos prasme), beje panašiai kaip ir realieji skaičiai tapatinami su tiesės taškais.

Tarkime duota sferos lygtis:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

Erdvės taškų aibę, aprašytą šia lygtimi, vadinsime Rymano sfera. Nesunku įsitikinti, kad Rymano sferos centro koordinatės $(0, 0, \frac{1}{2})$, o spindulys lygus $\frac{1}{2}$. Pabandykime išsiaiškinti taško ∞ prasmę, tiksliau sakant vietą, kompleksinių skaičių aibėje. Rymano sferos tašką $S(0, 0, 0)$ pavadinkime pietų poliumi, o tašką $N(0, 0, 1)$ šiaurės poliumi. Tarp erdvės $\overline{\mathbb{C}}$ elementų (tuo pačiu ir tarp plokštumos taškų) ir Rymano sferos taškų apibrėžkime bijekciją, tokiu būdu: bet kokį plokštumos tašką $Z(x, y)$ sujunkime tiese su sferos tašku N. Šios tiesės ir sferos susikirtimo tašką P_Z vadinsime taško $Z(x, y)$ stereografiniu vaizdu. Užrašykime tiesės, kuriai priklauso taškai N, Z lygtį:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Iš pastarosios lygties gauname, kad

$$\begin{cases} \xi = xk, \\ \eta = yk, \\ \zeta = 1 - k, \end{cases}$$

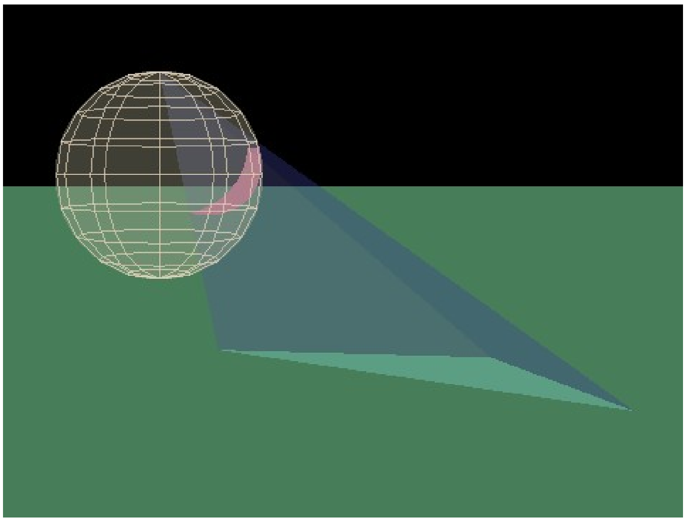
čia $k \in \mathbb{R}$. Įrašę šias reikšmes į sferos lygtį, nesunkiai suskaičiuojame, $k_1 = 0$, ir $k_2 = 1/(1 + x^2 + y^2)$. Aišku, kad $k_1 = 0$ tai gauname šiaurės polių atitinkančio taško koordinates, o antroji parametro k_2 reikšmė atitinka susikirtimo taško P_z koordinates. Naudodamiesi k_2 reikšme, iš paskutiniosios sistemos gauname, kad

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{x^2+y^2+1}, \\ \eta = \frac{y}{x^2+y^2+1}, \\ \zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}, \end{cases}$$

o iš pastarųjų išplaukia, kad

$$\begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

Šie sąryšiai ir nusako abipus vienareikšmę atitiktį, tarp plokštumos ir sferos taškų. Tačiau kaip jau pastebėjome, taškui N nėra priskiriama jokio plokštumos $\mathbb{C}$ taško. Priskirkime šiam taškui abstraktų simbolį ∞, kurį vadinsime begaliniu tašku. Papildykime kompleksinę plokštumą šiuo tašku: $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tokiu būdu papildytą kompleksinę plokštumą ir vadinsime išplėstine plokštuma. Kompleksinės plokštumos apskritimų bei tiesių stereografiniai vaizdai yra apskritimai. Beje, tiesių stereografiniai vaizdai yra apskritimai, kuriems priklauso taškas N. 4 pav. yra pateikiamas trikampio plokštumoje, stereografinis vaizdas.



4 pav.

2.3 Miobuso transformacija

Apibrėžimas *Transformaciją* $T : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, *apibrėžtą tokiu būdu:*

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \frac{-d}{c}, \\ \infty, & z = \frac{-d}{c}, \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, \end{cases}$$

vadinsime tiesine trupmenine arba Miobuso transformacija. Nesunku matyti, kad ši transformacija tolydi visoje išplėstinėje plokštumoje, išskyrus tašką $-d/c$. Be to

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \; c \neq 0.$$

Miobuso transformacijos atvirkštinė transformacija nusakoma lygybe:

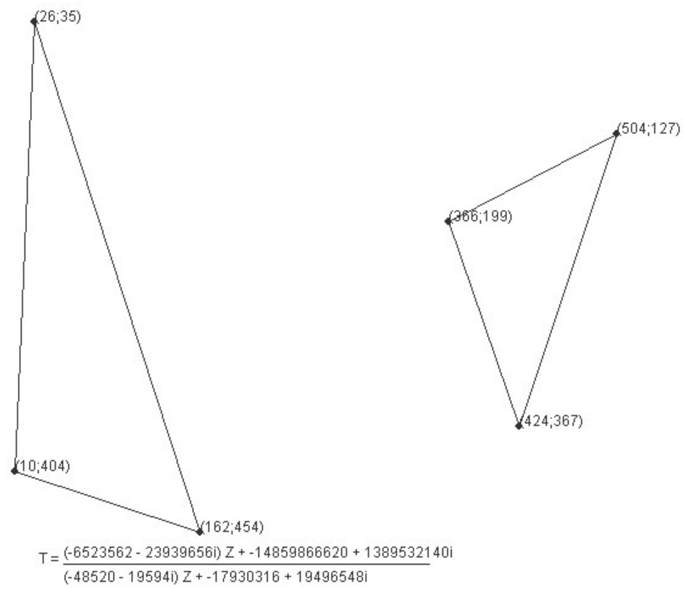
$$z = T^{-1}(w) = \begin{cases} -\frac{dw+b}{cw-a}, & w \neq \frac{a}{c}, \\ \frac{-d}{c}, & w = \infty, \\ \infty, & w = \frac{a}{c}, \end{cases}$$

kuri taip pat tiesinė trupmeninė transformacija. Pastebėsime, kad jeigu

$$\Delta = ad - bc = 0,$$

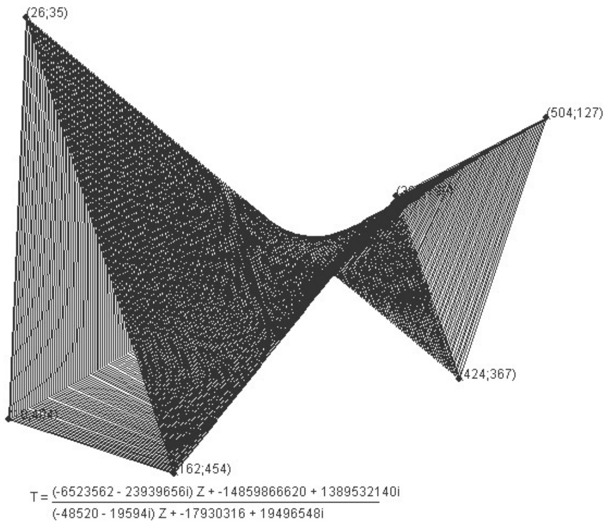
tai $T(z)$ transformacija visą išplėstinę plokštumą atvaizduoja į tašką.

Žemiau pateiktame 5 pav. pasirenkami du trikampiai ir sudaroma tiesinė trumpeninė transformacija $T_1(z)$, kuri vieną trikampį tranformuoja į dešiniau esantį trikampį (koordinatės pikselinės).



5 pav.

6 pav. pateikta transformacijų seka, kurios pirmasis narys sutampa su transformacija $T(z) = z$, o paskutinis sekos narys su minėtąja transformacija $T_1(z)$.



6 pav.

Aptarkime tokių vaizdų modeliavimo klausimą. Tarkime duotas trikampis $A \subset \mathbb{C}$. Norėtume, kad šio trikampio vaizdas būtų kitas trikampis B.

Apibrėžkime transformaciją

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

čia a_n, b_n, c_n, d_n, $n = 0, \dots, k$ yra laisvai pasirenkami skaičiai. Tarkime, kad pradinio trikampio transformuotą vaizdą B norime gauti po $k+1$ žingsnio. Vadinasi turi būti $T_k(A) = B$. Laikykime, kad esame suskaičiavę konstantas a, b, c, d ir gavę transformacijos išrašką

$$T_k(A) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Sudarome transformacijų seką T_n, pradiniame žingsnyje laikydami, kad $a_0 = 1$ ir $b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Laisvai parinkime koeficientų sekas taip, kad

$$\lim_{n=1,\dots,k} a_n = a, \quad \lim_{n=1,\dots,k} b_n = b, \quad \lim_{n=1,\dots,k} c_n = c, \quad \lim_{n=1,\dots,k} d_n = d.$$

Išvedant į ekraną $T_n(z)$ reikšmes, visoms reikšmėms $n = 0, 1, \dots, k$, gauname vaizdą panašų į 6 pav. pateiktą vaizdą.

Pavyzdys Sudarykime transformaciją, kuri trikampį $(0,1), (0,0), \ (1,0)$ (aibė A), transformuotų į trikampį $(0,0), \ (0,1), \ (0,2)$ (aibė B), atitinkamai.

Sudarome sistemą, transformacijos

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + 1}$$

koeficientams rasti. Turime:

$$\begin{cases} \frac{ai+b}{ai+1} = 0, \\ b = i, \\ \frac{a+b}{c+1} = 2. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname, kad

$$T(z) = \frac{-2z + 2i}{(i-3)z + 2}.$$

Tuo atveju, kai $c = 0$ tiesinė trupmeninė transformacija tampa tokia: $\omega = T_0(z) = az + b$. Ši transformacija vadinama *tiesine transformacija*. Kiek plačiau panagrinėkime šios transformacijos poveikį metrinės erdvės taškams. Aišku, kad šią transformaciją galima apibrėžti tokiu būdu:

$$\omega = |a|\mathrm{e}^{i\arg(a)}z + b.$$

Pastebėsime, kad $t(z) = |a|z$ yra panašumo transformacija (homotetija) su panašumo centru taške $z = 0$ ir panašumo koeficientu $|a|$. Kitaip tariant, ši transformacija objektą visomis kryptimis vienodai "išpučia" arba "suspaudžia." Tada atvaizdis

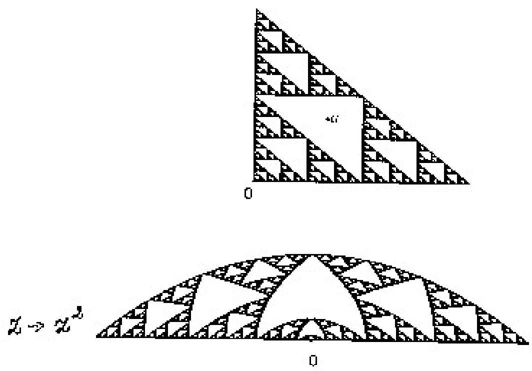
$$\omega = e^{i\arg(a)}t(z) + b$$

yra, posūkio apie tašką 0 kampu $\arg(a)$ ir postūmio trasformacijos vektoriaus a kryptimi, atstumu $|b|$, kompozicija.

Pavyzdys Transformacija $f(z) = 4z + 1$, $z \in \mathcal{C}$, yra panašumo transformacija. Ji apskritimą, kurio centras taške z_0, atvaizduoja į apskritimą, kurio centras taške $4z_0 + 1$, o spindulys keturis kartus didesnis.

Pavyzdys Trasformacija $f(z) = (3 + 3i)z + (1 - 2i)$, apskritimą pasuka 45^0 kampu, be to padidina (kiek?) ir atlieka postūmį vektoriaus $(1, -2)$ kryptimi.

7 pav. yra demonstruojama, kaip transformacija $f(z) = z^2$ atvaizduoja sierpinskio trikampį:



7 pav.

Panagrinėkime atvejį, kai $d = a = 0$. Tada iš tiesinės trupmeninės transformacijos gauname transformaciją

$$T_1 = \frac{b}{z},$$

kurią vadinsime *trupmenine transformacija*.

Tiesinė trupmeninė turi išvestinę, bet kokiame išplėstinės plokštumos taške, kuri baigtinė ir nelygi nuliui, išskyrus tašką $-d/c$. Ši išvestinė lygi

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Transformaciją, apibrėžtą kompleksinės plokštumos srityje D, vadinsime *konforminiu atvaizdžiu*, jeigu kampai tarp vaizdo taškus jungiančių atkarpų ir šių taškų pirmvaizdžių yra tokie patys, be to visuose taškuose panašumo koeficientas (iškreipimo koeficientas) yra toks pat. Pastebėsime, kad atstumas (tarp vaizd0 taškų ir šių taškų pirmvaizdžių) nebūtinai išlaikomas.

Yra žinoma, kad analizinė funkcija yra konforminis vaizdavimas srityje D, jeigu visuose šios srities taškuose šios funkcijos išvestinė nelygi nuliui. Taigi, tiesinė trupmeninė transformacija yra komforminis vaizdavimas, beje, ji konforminis vaizdavimas netgi taškuose ∞ ir $-d/c$.

Pateiksime dar kai kurias tiesinės-trupmeninės transformacijos savybes.

1) Transformacija T, bet kokią išplėstinės plokštumos tiesę arba apskritimą atvaizduoja į tiesę arba apskritimą atitinkamai. Dar daugiau, yra išlaikoma ir apėjimo kryptis.

Tiesinės trupmeninės transformacijos, kai žinomi trys taškai ir jų vaizdai, formulė:

2) Tarkime, kad $T(z_1) = w_1,\ T(z_2) = w_2,\ T(z_3) = w_3$. Tada teisingas sąryšis

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Pastaroji savybė dažnai naudojama, kai norime rasti transformacijos analizinę formą, žinodami trijų taškų vaizdus. Pastaroji transformacija tris taškus z_1, z_2, z_3 transformuoja į tris taškus w_1, w_2, w_3 ir apskritimą, kuriam priklauso transformacijos pirmvaizdžiai į apskritimą, kuriam priklauso vaizdai.

Išsprendę šią lygybę $w = T(z)$ atžvilgiu gauname, kad

$$T(z) = \frac{w_1(z - z_2)A - w_2(z - z_1)B}{(z - z_2)A - (z - z_1)B},$$

kai

$$A = \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1},\ \ B = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Pavyzdys Pateiksime pavyzdį, kaip žinant tris pirmvaizdžius ir tris vaizdo taškus rasti tiesinę trupmeninę transformaciją, kuri atliktų minėtą vaizdavimą.

Tarkime duoti taškai $z_1 = 2 + i,\ \ z_2 = 2i,\ \ z_3 = 1 + i$. Raskime transformaciją, kuri šiuos taškus atvaizduotų į taškus $w_1 = 2 + 4i,\ \ z_2 = 5 + 4i,\ \ z_3 = 1 + 3i$.

Įrašę į formulę, kuri sieja vaizdus ir pirmvaizdžius gauname:

$$\frac{w - (2 + 4i)}{w - (5 + 4i)} \cdot \frac{(1 + 3i) - (5 + 4i)}{(1 + 3i) - (2 + 4i)} = \frac{z - (2 + i)}{z - 2i} \cdot \frac{(1 + i) - 2i}{(1 + i) - (2 + i)}.$$

Išsprendę šią lygybę w atžvilgiu gauname:

$$w = \frac{(14 + 26i)z - 34i + 24}{(6 + i)z - (2 + 10i)}.$$

Taigi, ši transformacija atlieka minėtą vaizdavimą.

Pavyzdys Tarkime duota transformacija

$$f(z) = (1 + i)z^2 + 1.$$

Kokią erdvės transformaciją atlieka ši funkcija? Kadangi kintamojo laipsnis 2, tai remdamiesi formule

$$f(z) = |z|^2 e^{2i\arg z}$$

galime teigti, kad jei šią transformaciją taikysime bet kokiam plokštumos taškui, tai vektoriaus, kurio pabaiga šiame taške argumentas bus padvigubintas, be to, dėl daugiklio $1 + i$ jis bus papildomai pasuktas 45 laipsnių kampu ir pailgintas dydžiu $\sqrt{2}$ ir pagaliau bus atliktas postūmis vektorius $(1, 0)$ kryptimi.

Pavyzdžiui stačiakampį, kurio koordinatės $z_1 = -1,\ \ z_2 = -1 + i, z_3 = 1 + i,\ \ z_4 = 1$ ši transformacija atvaizduoja į stačiakampį $z_1 = 2 + i,\ \ z_2 = 3 - 2i, z_3 = -1 + 2i,\ \ z_4 = 2 + i$. Patikrinkite!

3) Tarkime, kad taškai z ir z^* yra simetriški tiesės arba apskritimo atžvilgiu. Tada taškai $T(z)$ ir $T(z^*)$ simetriški tiesės arba apskritimo, kur pastarieji yra tiesės ir apskritimo vaizdai, atitinkamai.

Miobuso transformacija tiesę, kuriai nepriklauso koordinačių pradžios taškas, atvaizduoja į apskritimą, kuriam priklauso minėtasis taškas. Tuo tarpu jei tiesei priklauso koordinačių pradžios taškas, tai jos vaizdas irgi tiesė, kuriai priklauso koordinačių pradžios taškas.

Pastebėsime, kad tiesinės trupmeninės transformacijos nejudamus taškus randame spręsdami lygtį:

$$z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Jei $c \neq 0$, tai transformacija turi du nejudamus taškus

$$z_1 = \frac{a - d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c},$$

$$z_2 = \frac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Jei $z_1 = z_2$, tai nejudamas taškas yra vadinamas kartotiniu.

Tuo atveju, kai $c = 0$ nejudamas transformacijos taškas yra toks:

$$z_3 = \frac{b}{d - a}.$$

Tarkime, kad $\omega = f(z)$ yra analizinė transformacija. Vadinasi ši transformacija turi išvestinę kiekviename taške. Naudodamiesi transformacijos išvestine mes charakterizuosime transformacijos nejudamus taškus.

Apibrėžimas *Sakysime, kad analizinės transformacijos nejudamas taškas x_0 yra pritraukiantis, jei $|f'(x_0)| < 1$, atstumiantis, jei $|f'(x_0)| > 1$ ir neutralus, jei $|f'(x_0)| = 1$.*

Pastaba Remdamiesi aukščiau išdėstytomis mintimis galime teigti, kad susijusias aibes, kurių sienas galime aproksimuoti atkarpomis arba apskritimais (apskritimų dalimis), galime konformiškai atvaizduoti vienas į kitas, naudojant tiesines - trupmenines transformacijas.

Tarkime, kad $\omega = f(z)$ yra analizinė transformacija. Vadinasi ši transformacija turi išvestinę kiekviename taške. Naudodamiesi transformacijos išvestine mes charakterizuosime transformacijos nejudamus taškus.

2.4 Afininės transformacijos

Apibrėžimas *Stačiakampę realiųjų skaičių lentelę, kurioje m eilučių bei n stulpelių vadinsime $m \times n$ eilės matrica ir žymėsime,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricą vadinsime *kvadratine*, jeigu jos eilučių ir stulpelių skaičius sutampa.

Sakysime, kad dvi matricos lygios, jeigu yra tos pat eilės ir atitinkami jų elementai lygūs. Matricas žymėsime arba didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, arba simboliais $A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Beje, kai žinome kokios eilės matricas nagrinėjame, arba kai eilė nesvarbi, tai indeksų i, j kitimo aibės nenurodysime.

Tos pat eilės matricų aibėje apibrėšime daugybos iš skaičiaus, bei sudėties operacijas. Tarkime, kad $r \in \mathbb{R}$. Tada skaičiaus ir matricos sandauga yra tokia matrica :

$$r(a_{ij}) = (ra_{ij}).$$

Matricų (a_{ij}) ir (b_{ij}) suma vadinsime matricą

$$(a_{ij} + b_{ij}).$$

Matricą O vadinsime *nuline*, jeigu visi jos elementai lygūs nuliui.

Sakysime, kad transformacija neišsigimusi, jeigu jos matricos determinantas nelygus nuliui. Ateityje nagrinėsime tik neišsigimusias transformacijas.

Apibrėžimas *Transformaciją, apibrėžtą tokiu būdu*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$u_i \in \mathbb{R}$, *o A yra $n-$ os eilės matrica, vadinsime afinine* transformacija.

Paminėsime kelias afininių transformacijų savybes. Visų pirma tai, kad bet kokia afininė transformacija lygiagrečias tieses atvaizduoja į lygiagrečias tieses. Kitaip tariant lygiagretainį atvaizduoja į lygiagretainį, nors bendru atveju ir kitokį. Tačiau afininė transformacija išlaiko atkarpų santykį. Taigi, bet koks trijų taškų santykis nepriklauso nuo transformacijos. Ši savybė labai svarbi, kadangi ji iš esmės naudojama transformacijai apibrėžti. Transformacija nusakyta, jeigu trys vektoriai nesantys vienoje tiesėje atvaizduojami vėl į tris vektorius nesančius vienoje tiesėje. Iš pastarosios savybės galime padaryti išvadą, kad $n-$kampis taip pat atvaizduojamas į $n-$kampį. Jau esame minėję, kad lygiagretainis atvaizduojamas į lygiagretainį, bet to paties pasakyti apie stačiakampį bendru atveju negalime. Taigi, afininių transformacijų kompozicija - afininė transformacija.

Aptarkime dar vieną tiesinės transformacijos atvejį - homotetiją. *H*omotetija vadinama tokia plokštumos arba erdvės transformacija, kai vienas taškas (sakykime O) lieka vietoje, o bet kuris kitas taškas A atvaizduojamas į tašką A' esantį tiesėje OA tokiu būdu, kad $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$; čia k pastovus skaičius. Taškas O vadinamas homotetijos centru, k homotetijos koeficientu. Jeigu $k > 0$ tai taškas A' yra iš tos pat pusės nuo taško O, tokia homotetija vadinama tiesiogine, kai $k < 0$ - tai priešingose pusės, ji vadinama atvirkščiąja.

Atkreipsime dėmesį, kad homotetija, tiesė atvaizduojama į jai lygiagrečią tiesę. Homotetinės figūros paprastai vadinamos *p*anašiomis.

Apibrėžimas *Transformaciją $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vadinsime tiesine, jei*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (u_1,\ldots,u_n)$$

tada ir tik tada, kai egzistuoja kvadratinė $n-$ os eilės matrica A tokia, kad

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Tiesinė transformacija yra atskiras afininės transformacijos atvejis. Ši transformacija lygiagretainį atvaizduoja į lygiagretainį. Apie tiesinės transformacijos spaudžiamąjį arba tempiamąjį pobūdį galima spręsti iš jos determinanto reikšmės. Jeigu determinanto absoliutinė skaitinė reikšmė didesnė už vienetą, tai vaizdo plotas didesnis už pirmvaizdžio plotą, jeigu determinanto absoliutinė reikšmė mažesnė už vienetą tai vaizdo plotas mažesnis negu pirmvaizdžio. Vaizduojama figūra apverčiama, jei determinanto reikšmė neigiama. Jreeri cdeterminanto reikšmė lygi vienetui, atvaizduojama figūra nesikeičia, tik ji gali būti pasukama arba apverčiama. Kalbant formaliai, tiesinės transformacijos matricą sudaro bazės keitimo matrica. Kitaip tariant matricos koeficientai parodo senos bazės vektorių koordinates naujoje bazėje. Tuo pačiu ši matrica nurodo metodą, kaip atlikti bet kokio objekto vaizdavimą. Žinant tiesinės transformscijos matricą, tereikia objekto koordinates (vektorius) padauginti iš matricos ir gausime vaizdo koordinates.

Erdvės tiesinės transformacijos turi analogiškas savybes kaip ir plokštumos, todėl atskirai jų nenagrinėsime, palikdami tai skaitytojui, tik paminėsime, kad tiesinė transformacija apibrėžta erdvėje, jeigu duotieji keturi taškai nesantys vienoje plokštumoje atvaizduojami į keturius taškus nesančius taip pat vienoje plokštumoje. T.y. šiuo atveju transformacijos matricos determinantas bus nelygus nuliui.

Tiesinės transformacijos, plokštumoje, matricą visuomet galima užrašyti taip:

$$W(x,y)=\begin{pmatrix} r_1\cos\xi_1 & r_2\sin\xi_2\\ r_1\sin\xi_1 & r_2\cos\xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x+a_2y\\ b_1x+b_2y\end{pmatrix},$$

kur (r_1,ξ_1) taško (a_1,b_1) polinės koordinatės, o $(r_2,\xi_2+\frac{\pi}{2})$ taško (a_2,b_2) polinės koordinatės. Skaičiai r_1,r_2 vadinami sąspūdžio koeficientais, ξ_1,ξ_2 posūkio kampais.

Siūlome skaitytojui panagrinėti paskutiniąjį reiškinį ir nustatyti, kokias sąlygas turi tenkinti dydžiai r_1,r_2,ξ_1,ξ_2, kad transformacija būtų posūkis, homotetija arba suspaudžiančioji (ištempiančioji).

Žemiau mes nagrinėsime šios transformacijos specialius atvejus.

Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad jei transformacija, tris taškus nesančius vienoje tiesėje, atvaizduoja į taškus, kurie yra vienoje tiesėje, tai ši transformacija yra išsigimusi, t.y. jos determinantas lygus nuliui.

Naudodami tiesinę transformaciją, be jau minėtų erdvės taškų operacijų (atliekamų su tiesine transformacija), galime atlikti ir erdvės taškų postūmį.

Tarkime, kad reikia rasti trasformaciją, kuri tris plokštumos taškus

$$(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)$$

atvaizduotų į pasirinktus tris taškus $(x_1',x_2'),(y_1',y_2'),(z_1',z_2')$ kitaip tariant, trikampį į trikampį.

Sudarome sistemas, transformacijos koeficientams rasti

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+e=x_1',\\ ay_1+by_2+e=y_1',\\ az_1+bz_2+e=z_1',\end{cases}\qquad \begin{cases} cx_1+dx_2+f=x_2',\\ cy_1+dy_2+f=y_2',\\ cz_1+cz_2+f=z_2'.\end{cases}$$

Išsprendę šias dvi sistemas randame transformaciją, kuri atlieka nurodytą veiksmą.

PastabaAfininė transformacija kartu yra ir tiesinė, bet ne atvirkčiai. Tiesinė transformacija yra afininės transformacijos apibendrinimas.

Pavyzdys Raskime afininę transformaciją, kuri trikampį $(0,1),(0,0),(1,0)$ atvaizduotų į trikampį: $(4,4),(8,7),(1,3)$.

Sudarome sistemas, transformacijos koeficientams rasti

$$\begin{cases} b+e=4,\\ e=8,\\ a+e=1,\end{cases}\qquad \begin{cases} d+f=4,\\ f=7,\\ c+f=3.\end{cases}$$

Išsprendę gauname: $e=8,\ \ a=-7,\ \ b=-4$, ir $f=7,\ c=-4,\ d=-3$.

Tada afininę transformaciją $T(x,y)$, atliekančią nurodytą vaizdavimą, galime užrašyti tokiu būdu:

$$A=T(x,y)=\begin{pmatrix} -7 & -4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8\\ 7\end{pmatrix}.$$

Teorema 1. *Tarkime kad afininė transformacija $W=AX+B$ atvaizduoja plokštumos sritį S, kurios plotas P_s į sritį S', kurios plotas $P_{s'}$. Tada teisinga lygybė:*

$$P_{s'}=|detA|P_s,$$

čia A yra afininės transformacijos tiesinės dalies matrica, $B-$ postūmio vektorius.

Šio skyrelio pabaigoje atkreipsime dėmesį į tai, kad remdamiesi afininės transformacijos tiesinės dalies matricos determinanto reikšme galime nustatyti vaizdo santykį su pirmvaizdžiu, būtent vaizdas spaudžiamas (plotas mažėja), jei determinanto reikšmė mažesnė negu 1, plečiamas- jei determinanto reikšmė didesnė negu 1. Jei determinantas neigiamas- vaizdas apverčiamas.

2.5 Bendrosios koordinačių keitimo formulės

Kuomet nagrinėjame laisvai pasirinktą metrinę erdvė, tai apie taškų padėtį erdvėje nelabai ką tegalime pasakyti. Tiesa, metrika sudaro galimybes nustatyti taškų tarpusavio padėtį, tačiau jei atstumas tarp kurių nors taškų vienodas, faktiškai šie skaičiai nieko nepasako apie taškų tarpusavio padėtį. Šis trūkumas pašalinamas apibrėžus koordinačių sistemą erdvėje.

Koordinačių sistema erdvėje vadinsime bijektyvią erdvės X transformaciją θ, į kokią nors erdvę $X_k \subset \mathbb{R}^k$, t.y. $\theta : X \to X_k$. Kitaip tariant, bet kokiam metrinės erdvės elementui priskiriame $k-$matį vektorių. Metrinės erdvės elemento koordinatėmis vadiname jo vaizdo (vektoriaus) koordinates. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad metrinė erdvė X ir jos vaizdas X_k yra homeomorfinės, todėl šias erdves homeomorfizmo atžvilgiu galime sutapatinti.

Pavyzdžiui erdvėje $X = [0, 1]$ bet kokio taško koordinates galime nusakyti taip: $\theta(x) = x$. Tuo tarpu kompleksinių skaičių erdvėje galime naudoti jau mums žinomą Dekarto koordinačių sistemą. Aukščiau esame nagrinėje erdvę $\overline{\mathbb{C}}$. Šioje erdvėje galime naudoti sferos taškų koordinates kurios, savo ruožtu, nusakomos tokiu būdu:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\alpha \\ y = r\sin\beta\cos\alpha \\ z = r\cos\alpha. \end{cases}$$

Kadangi Rymano sfera ir išplėstinė plokštuma homeomorfinės, tai suprantama, Rymano sferos taško koordinatę galime laikyti jį atitinkančio išplėstinės plokštumos taško koordinate aukščiau užrašytoje sistemoje paėmę $r = 1$. Taigi, šiuo atveju taško $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ koordinatės yra lygios $(0, 0, 1)$.

Nesunku suprasti, kad toje pat erdvėje galima apibrėžti ne vieną koordinačių sistemą. O kaip koordinačių sistemą galima apibrėžti fiksuotoje erdvėje? Ar galima suformuluoti koordinačių keitimo problemą bendru atveju? Panagrinėkime šį klausimą.

Tarkime, kad $g : X_k \to X_k$ kuri nors erdvės, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, bijektyvi transformacija. Vadinasi, $X_k = g(X_k)$. Jeigu transformacija g netapačioji, tai $\exists x' \in g(X_k)$ kad $x' \neq x$. Tad šis atvejis netrivialus. Tarkime X_0- erdvės taškas. Sakykime, kad x jo koordinatė pradinėje koordinačių sistemoje, o x' jo naujoji koordinatė, kitaip tariant $x' = g(x)$. Sakykime, kad $f : X \to X-$ kita bijektyvi erdvės transformacija į save. Tuomet ši transformacija naujoje bazėje bus žymima $f'(x')$. Pastebėsime, kad $g(f(x)) = f'(x')$. Taigi

$$f' : g(X) \to g(X)$$

arba,

$$g \circ f(x) = f'(x').$$

Bet $x' = g(x)$, todėl $x = g^{-1}(x')$. Tada tašką x transformacija f veikia tokiu būdu:

$$f(x) = f \circ g^{-1}(x'), \Longrightarrow g \circ f(x) = f'(x').$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia tokios lygybės:

$$f(x) = (g^{-1} \circ f' \circ g)(x), \; f'(x') = (g \circ f \circ g^{-1})(x').$$

Priminsime, kad $g-$ koordinačių sistemos transformacija.

2.6 Specialūs tiesinių transformacijų atvejai

Primename, kad transformaciją $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ apibrėžtą sąryšiu $Y = AX$, čia A yra kvadratinė $n-$ os eilės matrica, X, Y yra vektorinės erdvės $\mathbb{R}^n$ vektoriai stulpeliai, vadinsime tiesine transformacija. Matrica A bus vadinama tiesinės transformacijos matrica.

Tiesinę transformaciją, su matrica A, vadinsime *išsigimusia*, jeigu šios transformacijos matricos determinantas yra lygus nuliui. Tapačiosios transformacijos matrica yra vienetinė.

Pastebėsime, kad jei transformacijos f matrica yra F, o transformacijos g matrica yra G, tai kompozicijos $f \circ g$ matrica yra FG, o šios matricos determinantas yra lygus šių matricų determinantų sandaugai.

Panagrinėkime trasformacijas dvimatėje bei trimatėje erdvėse.

1. Atspindžio transformacijos

Apibrėžimas *Tiesinę transformaciją vadinsime atspindžio transformacija, jeigu bet kokiam vektoriui ši transformacija priskiria vektorių, simetrišką tiesės arba plokštumos atžvilgiu.*

Pateiksime transformacijų, kurios atlieka atspindį koordinatinių ašių atžvilgiu plokštumoje, matricas.

Tiesinė transformacija atlieka atspindį koordinatinės ašies Ox atžvilgiu, jei jos matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogiškai, transformacija atlika atspindį koordinatinės ašies Oy atžvilgiu, jei jos matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad tiesinės transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad ši matrica gali būti gauta sudauginus pirmąsias dvi matricas. Taigi, transformacija su šia matrica vaizduoja simetriškai koordinatinių ašių atžvilgiu.

Dabar nurodysime transformacijų trimatėje erdvėje matricas, kurios vaizduoja simetriškai koordinatinių plokštumų atžvilgiu.

Atspindį xy plokštumos atžvilgiu atlieka trasformacija, kurios matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

xz plokštumos atžvilgiu-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

yz plokštumos atžvilgiu-

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas *Tegu $X \in \mathbb{R}^n$ ir $k > 0$. Tada transformaciją $f(X) = kX$ vadinsime suspaudimu, jeigu $k < 1$ ir ištempimu, jei $k > 1$.*

Šios transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

2. Ortogonaliosios projekcijos

Apibrėžimas *Transformaciją vadinsime ortogonaliąja, jeigu bet kokiam vektoriui ši trasformacija priskiria šio vektoriaus ortogonaliąją projekciją tiesėje arba plokštumoje.*

Transformacijos, atliekančios ortogonaliąją projekciją į: xy plokštumą matrica yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

xz plokštumą-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

yz plokštumą-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesunku suprasti, kad projektuojant į koordinatines ašis Ox, Oy, Oz teks naudoti transformacijas, kurių matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atitinkamai.

3. Posūkiai

Apibrėžimas *Posūkiu plokštumoje xy, kampu θ, vadinsime tiesinę transformaciją f_θ, kuri kiekvieną vektorių šioje plokštumoje pasuka kampu θ, prieš laikrodžio rodyklę.*

Taigi, transformacijos f_θ, matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nesunku suprasti, kad norint atlikti posūkį kampu θ priešinga kryptimi (pagal laikrodžio rodyklę) teks naudoti tokią transformacijos matricą:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys Sudarykime transformaciją, kuri atliktų stačiakampio, kurio koordinatės

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$$

posūkį neigiama kryptimi 45^0 kampu apie viršūnę B, o po to simetriškai atvaizduotų tiesės $y - x = 1$ atžvilgiu.

Pastebėsime, kad posūkį atliekanti transformacija yra taikoma tik tada, kai taškas apie kurį yra sukama figūra yra koordinačių pradžioje. Tad pirmas veiksmas kurį turime atlikti- tai "perkelti" tašką B į koordinačių pradžios tašką. Tai atliksime naudodami erdvės postūmio transformaciją

$$P(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

Galime įsivaizduoti, kad taškas B po šio postūmio yra sutapatintas su koordinačių pradžios tašku. Dabar atliekame erdvės posūkį 45^0 kampu. Tai realizuosime naudodami transformaciją

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

Po šio veiksmo tašką B grąžiname į pradinę padėtį. Visus šiuos veiksmus atliekame transformacija:

$$T(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(x,y) \\ y_1(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Kitaip tariant, įrašydami stačiakampio koordinates į (1) gauname stačiakampio vaizdo koordinates.

Dabar atliksime tokius veiksmus:

1) tiesę "perkelsime" į koordinačių pradžią atlikdami postūmį vektoriaus $(0;-1)$ kryptimi;

2) pasuksime $\phi = 45^0$ kampu, kad ji sutaptų su koordinatine ašimi Ox (pastebėsime, kad tiesė su Ox ašimi sudaro kampą ϕ;)

3) atliksime figūros simetrinį vaizdavimą tiesės atžvilgiu;

4) pasuksime tiesę priešinga kryptimi, t.y. kampu $-\phi$ ir atliksime postūmį vektoriaus $(0,1)$ kryptimi.

Aprašykime šį procesą naudodami transformacijas.

1)

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

2)

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

3)

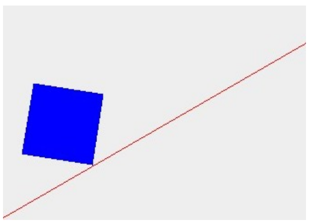
$$SM(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

4)

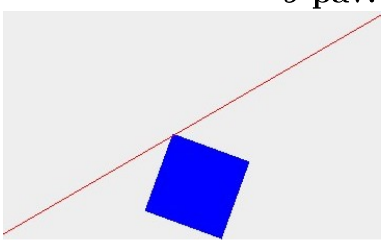
$$TS(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kintamųjų vietoje įrašę stačiakampio koordinates gausime jos simetrinį vaizdą tiesės atžvilgiu.

Žemiau pateikti "riedančio" stačiakampio tiese simetrinio vaizdavimo tiesės atžvilgiu po to kai, stačiakampis pasisuka 90^0 kampu, du epizodai.



9 pav.



10 pav.

Apibrėžimas *Tarkime, kad l yra tiesė trimatėje erdvėje, ir šiai tiesei priklauso taškas* $(0,0,0)$. *Tarkime, kad $\overrightarrow{u}$ yra vektorius tiesėje l. Tada posūkiu vektoriaus $\overrightarrow{u}$ kryptimi vadinsime posūkį, kuris atliekamas naudojant dešinės rankos taisyklę (posūkis atliekamas sukant bet kokį vektorių dešinės rankos sulenktų pirštų kryptimi, kai nykštys nukreiptas vektoriaus $\overrightarrow{u}$ kryptimi).*

Transformacijos, kurios atlieka posūkius, kampu θ, apie koordinatines ašis x, y, z apibrėžtos matricomis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atitinkamai.

Tuo tarpu, kai žinomas tiesės vienetinis vektorius (kaip jį rasti?) $\overrightarrow{u} = (a,b,c)-$ tai transformacijos, kuri atlieka posūkį nurodyto vektoriaus kryptimi, kampu θ, matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & cb(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix};$$

Pateiksime dar vieną algoritmą, kaip galima sudaryti transformacijos, kuri atlieka erdvės $\mathbb{R}^3$ posūkį, kampu ϕ vektoriaus $u = (a,b,c)$ kryptimi, matricą.

1. Papildome vektorių u iki erdvės $\mathbb{R}^3$ bazės u, v, w;
2. Ortonormuojame šią bazę- naują ortonormuotą bazę žymėsime u_0, v_0, w_0;
3. Sudarome matricą

$$C = (u_0^T | v_0^T | w_0^T)$$

;

4. Randame ieškomosios transformacijos matricą A :

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ 0 & -\sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} C^T$$

Pavyzdys Atlikime posūkį 45^0 laipsnių kampu tiesę

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

arba kitaip tariant, vektoriaus $(1,2,2)$ kryptimi.

Sudarome ortonormuotą bazę, kurios pirmasis vektorius $\alpha_0 = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Imkime bet kokį vektorių statmeną duotąjam, pavyzdžiui $\beta = (0,1,-1)$. Ortonormavę šį vektorių turime: $\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Sudarome vektorių statmeną vektorių α ir β sistemai: $\gamma = (x,y,z)$ toks, kad $\alpha \circ \gamma = 0$ ir $\beta \circ \gamma = 0$. Taigi

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Ši sistema yra trapecinė, kurioje dvi lygtys ir trys nežinomieji, vadinasi vienas nežinomasis yra laisvas. Pasirinkę laisvą nežinomąjį, tarkime $x = 4$ gauname, kad $y = z = 1$. Tad ieškomasis vektorius $\gamma = (4,1,1)$. Šio vektoriaus vienetinis vektorius $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{18}}(4,1,1)$.

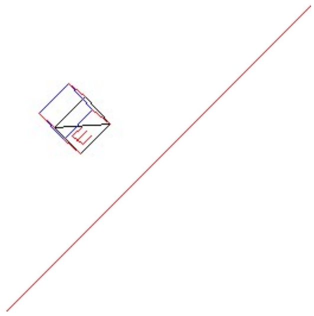
Sudarome matricą C, kurios elementai yra šios ortonormuotos bazės vektoriai:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}.$$

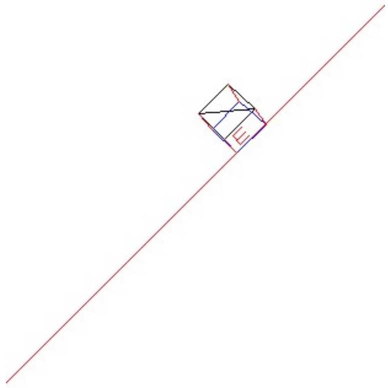
Sudarome posūkį atliekančios transformacijos matricą:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

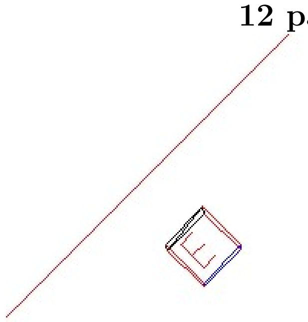
Žemiau pateiktas grafinis šios transformacijos veikimo pavyzdys:



11 pav.



12 pav.



13 pav.

2.7 Kvaternionai. Kvaternionų aritmetika

Mes aptarėme, kokiu būdu kompleksinių skaičių aritmetika bei savybės yra naudojami plokštumos taškų transformacijoms. Analogišką problemą galima spręsti ir trimatėje erdvėje, naudojant keturmatės erdvės skaičius, kurie paprastai vadinami kvaternionais.

Tarkime, kad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ yra objektai, turintys savybę; $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Be to, tarkime, kad $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Apibrėžimas *Tada realaus skaičiaus ir vektoriaus porą*

$$a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} =: a + \alpha = \mathcal{K}$$

vadinsime kvaternionu. Realius skaičius a, b, c, d vadinsime kvaterniono komponentėmis. Komponentė a vadinama kvaterniono skaliarine dalimi, o vektorius α, kvaterniono vektorine dalimi.

Sakysime, kad du kvaternionai yra lygūs, jeigu atitinkamos kvaternionų komponentės yra lygios.

Pažymėkime:

$$\mathcal{K}_n = a_n + ib_n + jc_n + kd_n := a_n + \alpha_n = \big(a_n|(b, c, d)\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

čia kaip ir aukščiau a_n yra kvaterniono skaliarinė dalis, o $\alpha_n = ib_n + jc_n + kd_n$ yra kvaterniono vektorinė dalis. Kvaternioną, kurio skaliarinė dalis lygi nuliui vadinsime grynuoju kvaternionu ir žymėsime $\mathcal{K}_n^0$. Grynąjį kvaternijoną, kurio vektorinė dalis yra nulinis vektorius, žymėsime simboliu $\mathcal{O}$, o kvaternijoną, kurio vektorinė dalis yra nulinis vektorius, o skaliarinė dalis yra lygi 1, vadinamas vienetu kvaternionų aibėje ir žymimas $\mathcal{I} = (1|\mathcal{O})$. Nesunku suprasti, kad realiuosius bei kompleksinius skaičius galime reikšti kvaternionais $\mathcal{K} = (a|\mathcal{O})$, ir $\mathcal{K} = (a|(b, 0, 0))$ atitinkamai.

Apibrėžkime kvaternionų aritmetinius veiksmus.

Tarkime, kad a yra realusis skaičius, o $\mathcal{K}_1$ kvaternionas. Tada kvaterniono ir realaus skaičiaus sandauga vadinsime kvaternioną:

$$a\mathcal{K}_1 = aa_1 + iab_1 + jac_1 + kad_1.$$

Tegu $a, b \in \mathcal{R}$. Pateiksime keletą svarbesnių šių veiksmų savybių. Ši operacija tenkina tokias savybes:

1. $a\mathcal{K} = \mathcal{K}a$;
2. $(a + b)\mathcal{K} = a\mathcal{K} + b\mathcal{K}$;
3. $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)a = \mathcal{K}_1 a + k_2 a$

Kvaternionų $\mathcal{K}_1$ ir $\mathcal{K}_2$ suma vadinsime kvaternioną:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Kvaternionų $\mathcal{K}_1$ ir $\mathcal{K}_2$ skirtumu vadinsime tokią šių kvaternionų sumą:

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 := \mathcal{K}_1 + (-1)\mathcal{K}_2.$$

Kvaternionų suma tenkina tokias savybes:

1. $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1$;
2. $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) + \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 + (\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3)$

Tegu α_1 ir α_2 du vektoriai. Tada simboliais $\alpha_1 \circ \alpha_2$ bei $\alpha_1 \times \alpha_2$ žymėsime šių vektorių skaliarinę ir vektorinę sandaugas atitinkamai. Priminsime, kad

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2,$$

ir

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

Apibrėžimas *Kvaternionų $k_1$ir k_2 sandauga vadinsime tokį kvarternioną:*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 := a_1 a_2 - \alpha_1 \circ \alpha_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \times \alpha_2.$$

Kvarternionų sandauga tenkina tokias savybes:

1. $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_1$;
2. $\mathcal{K} * (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) = \mathcal{K} * \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} * \mathcal{K}_2$;
3. $(\mathcal{K} * \mathcal{K}_1) * \mathcal{K}_2 = \mathcal{K} * (\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2)$.
4. $(k_1 + \mathcal{K}_2) * (\mathcal{K}_3 + \mathcal{K}_4) = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_3 + k_1 * \mathcal{K}_4 + k_2 * \mathcal{K}_3 + \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_4$.

Kvaternioną $\overline{\mathcal{K}} = a - \alpha$ vadinsime kvaternionui $\mathcal{K}$ jungtiniu kvaternionu.

Pastebėsime, kad

$$\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}} = (a|\alpha)(a| - \alpha) = a^2 + a\alpha - a\alpha + \alpha \circ \alpha + \mathcal{O} =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Kvarteriono ilgiu (moduliu) vadinsime tokį skaičių:

$$|\mathcal{K}| = \sqrt{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Kvarterioną $\mathcal{K}^{-1}$ vadinsime kvarterionui $\mathcal{K} = a+\alpha$ atvirkštiniu kvarterionu, jei $\mathcal{K} * \mathcal{K}^{-1} = 1$. Apibrėžkime kvarterioną tokiu būdu:

$$\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}} \frac{1}{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}}.$$

Pasirodo, kad $\mathcal{K}'$ yra kvarterionui $\mathcal{K}$ atvirkštinis kvarterionas. Skaitytojui siūlome įrodyti, kad

$$\mathcal{K}^{-1} = \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}}.$$

2.8 Kvarterionai ir posūkiai trimatėje erdvėje

Teorema 2. *Tarkime, kad $\delta = (x; y; z)$ yra koks nors trimatės erdvės vektorius, o $K = (a, (b; c; d)$ yra nenulinis kvarterionas. Tada reiškinys*

$$f_{\mathcal{K}}(\delta) = \mathcal{K}^{-1} * \delta * \mathcal{K}$$

yra vektorius. Be to

$$f_{\mathcal{K}}(\delta) = \Big(0, (x(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2y(ad + bc) + 2z(bd - ac)); 2x(bc - ad) +$$

$$y(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2z(ab + cd); 2x(ac + bd) + 2y(cd - ab) + z(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\Big)$$

Kitaip tariant funkcija $f_{\mathcal{K}} : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$, $f(\delta) = \mathcal{K}^{-1} * \delta * \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \neq 0$, yra tiesinė transformacija vektorinėje erdvėje $\mathcal{R}^3$.

Skaitytojui siūlome įsitikinti šio teiginio teisingumu.

Pastebėsime, kad $\forall \delta, \mathcal{K} \neq 0$, $f_{\mathcal{K}}(\delta) = f_{a\mathcal{K}}(\delta)$, $a \in \mathcal{R}$. Dėl šios priežasties, galime nagrinėti normuotus kvarterionus. Ateityje laikysime, kad $|\mathcal{K}| = 1$. Pasirodo, kad jei $|\mathcal{K}| = 1$, tai tiesinė transformacija $f_{\mathcal{K}}$ yra ortogonali. Ortogonaliosios transformacijos nekeičia koordinačių sistemos orientacijos. Taigi

$$\mathbf{i}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{i} * \mathcal{K}; \quad \mathbf{j}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{j} * \mathcal{K}; \quad \mathbf{k}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{k} * \mathcal{K}.$$

Skaitytojui siūlome parodyti, kad $\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = -\mathbf{j}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{k}'$, $\mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = -\mathbf{k}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{i}'$, $\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = -\mathbf{i}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{j}'$.

Kaip atrodys šie veiksmai, jei operacijos ženklą $\times$ pakeisime ženklu $*$?

Sakysime, kad kvarterionas yra vienetinis (vienetinis kvarterionas literatūroje dažnai vadinamas unimoduliariniu.) Priminsime, kad $\mathcal{K} = a+\alpha$. Kadangi kvarterionas $\mathcal{K}$ yra unimoduliarinis, tai remdamiesi ilgio apibrėžimu gauname, kad

$$a^2 + b^2 + c^2 + c^2 = 1.$$

Bet $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Taigi, $a^2 + |\alpha|^2 = 1$. Turime, kad dviejų skaičių kvadratų suma lygi 1. Remdamiesi trigonometrinių funkcijų apibrėžimu darome išvadą, kad egzistuoja kampas θ toks, kad $\sin\theta = |\alpha|$ ir $\cos\theta = a$.

Matome, kad

$$\mathcal{K} = \cos\theta + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin\theta.$$

Pažymėkime $\alpha_0 = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ ir be to tegu β_0, bet koks vienetinis vektorius, statmenas vektoriui α_0. Apibrėžkime vektorių $\gamma_0 = \alpha_0 \times \beta_0$.

Trimatėje erdvėje generuojame ortonormuotą bazę, kurios vektoriai α_0, β_0, γ_0. Panagrinėkime, kokiu būdu veikia transformacija

$$f_{\mathcal{K}}(u) = \mathcal{K}^{-1} * u * \mathcal{K}$$

šiuos bazinius vektorius.

Skaičiuojame:

$$f_{\mathcal{K}}(\alpha_0) = \mathcal{K}^{-1} * \alpha_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \alpha_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \alpha_0.$$

Taigi, vektorius α_0 yra nejudamas šios transformacijos taškas.

Panagrinėkime, kaip yra transformuojamas vektorius β_0. Skaičiuojame

$$f_{\mathcal{K}}(\beta_0) = \mathcal{K}^{-1} * \beta_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \beta_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \beta_0\cos(2\theta) - \gamma_0\sin(2\theta).$$

Visiškai analogiškai

$$f_{\mathcal{K}}(\gamma_0) = \mathcal{K}^{-1} * \gamma_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \gamma_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \gamma_0\cos(2\theta) + \beta_0\sin(2\theta).$$

Matome, kad šios transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Taigi, ši transformacija atlieka erdvės posūkį kampu -2θ apie vektorių α_0.

Trumpai apibendrinkime gautą rezultatą. Tarkime, kad erdvės vektorių δ, suksime kampu φ apie vektorių α. Tai galime atlikti transformacija $f_{\mathcal{K}}(\delta) = \mathcal{K}^{-1} * \delta * \mathcal{K}$;

čia

$$\mathcal{K}_0 = \cos(-\frac{\varphi}{2}) + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin(-\frac{\varphi}{2}).$$

Ir atvirkščiai, jei turime unitarųjį kvarterioną

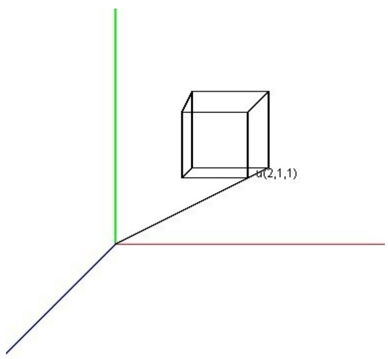
$$\mathcal{K}_0 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

tai transformacija

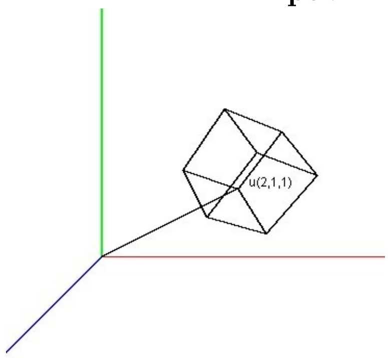
$$f_{\mathcal{K}_0}(x) = \mathcal{K}_0^{-1} * x * \mathcal{K}_0$$

atlieka erdvės posūkį apie vektorių $\alpha = (b, c, d)$ kampu $-\varphi = 2\text{arccos}\, a$.

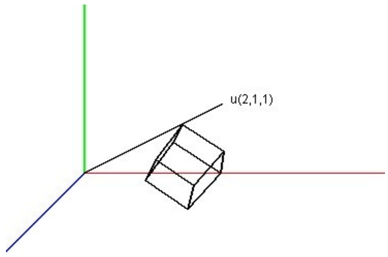
Žemiau pateiktuose pav. demonstruojami vaizdai, gauti sudarius posūkio transformacijas naudojant kvarterionus. 3D kūbas yra spaudžiamas ir sukamas apie tiesę.



14 pav.



15 pav.



16 pav.

Pavyzdys Sudarykime kvarterioną, kuris atliktų ϕ erdvės posūkį apie tiesę

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Turime, kad tiesę lydintis vektorius yra $\overrightarrow{\alpha} = (l, m, n)$. Tada $\varphi = -\frac{\phi}{2}$.
Sudarome vektoriaus α vienetinį vektorių. Gauname, kad

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}(l, m, n) =: (l_0, m_0, n_0).$$

Sudarome vienetinį kvarterioną

$$\mathcal{K}_0 = \cos\varphi + \alpha_0 \sin\varphi.$$

Šiam kvarterionui atvirkštinis (tuo pačiu ir jungtinis) yra kvarterionas

$$\mathcal{K}_0 = \cos\varphi - \alpha_0 \sin\varphi = (\cos\varphi; (u, v, t)),$$

čia $u = l_0 \sin\varphi,\ v = m_0 \sin\varphi,\ t = n_0 \sin\varphi$.

Sudarome erdvės $\mathcal{R}^3$ transformaciją, kuri atlieka nurodytą posūkį:
$f_{\mathcal{K}_0}(\delta) = \mathcal{K}_0^{-1} * \delta * \mathcal{K}_0$ čia $\delta(x, y, z)$ yra bet koks trimatės erdvės vektorius ir

$$\mathcal{K}_0 = (\cos\varphi; (-u, -v, -t)),$$

Randame sandaugą $\rho := \delta * \mathcal{K}_0$. Taikydami kvarterionų sandaugos apibrėžimą gauname, kad $\rho = (a; (x_1, y_1, z_1))$,

$$a = xu + yv + zt,\quad x_1 = x\cos\varphi + yt - zv,\quad y_1 = y\cos\varphi + zu - xt,\quad z_1 = z\cos\varphi + xv - yu.$$

Skaičiuojame sandaugą

$$\mathcal{K}_0^{-1} * \rho = (\cos\varphi; (u, v, t)) * (a; (x_1, y_1, y_1)) = (0, (A, B, C)),$$

$$A = -u(xu + yv + zt) + \cos\varphi(x\cos\varphi + yt - zv) + v(z\cos\varphi + xv - yu) - t(y\cos\varphi + zu - xt);$$

$$B = -v(xu + yv + zt) + \cos\varphi(y\cos\varphi + zu - xt) + u(z\cos\varphi + xv - yu) - t(x\cos\varphi + yt - zv);$$

$$C = -t(xu + yv + zt) + \cos\varphi(z\cos\varphi + xv - yu) + v(x\cos\varphi + yt - zv) - u(y\cos\varphi + zu - xt).$$

Gauname, kad

$$f_{\mathcal{K}_0}(\delta) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Naudodami polinominę transformaciją

$$y = a(\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} + 1),$$

keisdami koeficientą $-2 \leq a \leq 2$ realizuokite "šokinėjimo per virvutę" uždavinį, kai "virvutės " galai pritvirtinti taškuose $(0, 1)$, $(4, 1)$. Plotas tarp lanko ir Ox ašies spalvotas su užrašu. Simuliaciją atlikite plokštumoje.

2. Tarkime, kad duota polinominė transformacija

$$y = ax(x - 2)(x - 4), \quad 0 \leq x \leq 4.$$

"Apsukite" šią kreivę apie Ox ašį, keisdami parametro a reikšmę, kai plotai sričių yra skirtingų spalvų ir su raidėmis. Simuliacija atliekama plokštumoje.

3. Naudodami kompiuterinę grafiką pademonstruokite, kaip transformacija $f^{-1}(z) = z^2 + 1$ atvaizduoja aibės S_4 elementus. Pastebėsime, kad S_4 aibė, tai Sierpinskio trikampio dalis, likusi po keturių iteracinių žingsnių, generuojant Sierpinskio aibę.

4. Naudodami kompiuterinę grafiką pademonstruokite, kaip transformacijos:
a)$f(z) = az^2$
b) $f(z) = az^2 + b$
atvaizduoja Kocho kreivę;
a)$f(z) = az^2$
b) $f(z) = az^2 + b$
atvaizduoja Sierpinskio trikampį;
a)$f(z) = az^2$
b) $f(z) = az^2 + b$
atvaizduoja Velnio laiptus.
Programoje turi būti pateikta galimybė įvesti parametrus bei nurodžius kreivės kurį nors iteracinį narį bei realizavus transformaciją gauti transformuotą vaizdą.

5. Tarkime, kad ant Ox ašies yra vienetinis skritulys, kurio kiekvienas 90^0 sektorius nuspalvintas skirtingomis spalvomis. Sakykime, kad ratas buvo pastumtas ir nuriedėjęs iki taško $(4, 0)-$ parkrito. Realizuokite šį uždavinį naudodami afinines transformacijas.

6. Realizuokite "pulsuojančio" kvadrato idėją. T.y. pasirinkite kvadratą ir sukdami bei spausdami suspauskite jį į tašką (iki tam tikros pasirinktos ribos), o po to atsukite jį grąžindami į pradinę padėtį. Kvadrato viduryje užrašykite trumpą žodį, pavyzdžiui "Sala."

7. Naudodami transformacijas, sumodeliuokite kamuolio judesį, kai jis laisvai krenta, atsitrenkia į pagrindą, deformuojasi ir atšoka ir t.t., kol sustoja.

8. Grafiškai realizuokite, apskritimo

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

riedėjimą tiese $x + 6y = 6$, o po to Ox ašimi, uždavinį. Apskritimo (rato) startinė padėtis yra $(0, 1)$, o galutinė- $(9, 0)$. Šiame taške apskritimas (ratas) nuvirsta.

9. Ant Rymano sferos tolygiai "uždėkite" trikampį $(6, 6), (0, 6), (6, 0)$. Tą pačią užduotį atlikite sukdami trikampį apie tašką $(6, 6)$.

10. Sferą, ant kurios užrašytas žodis "*sala*", "meskite" erdvėje pasirinkto vektoriaus kryptimi.

11. "Paridenkite" Rymano sferą, nuspalvintą dviem spalvom, iš koordinačių pradžios taško Ox ašimi, iki taško $(4, 0)$.

12. Tarkime, kad priešingos kūbo kraštinės nuspalvintos tokiomis pat spalvomis. Atlikite kūbo sukimąsi apie laisvai pasirinktą tiesę, kai viena viršūnė yra fiksuota.

13. "Meskite" kūbą erdvėje, pasirinkto vektoriaus kryptimi taip, kad kūbas skriedamas suktųsi apie simetrijos centrą.

14. Sudarykite transformacijų seką, kuri užtikrintų primityvaus dviračio "sudaryto iš dviejų ratų ir juos jungiančios trapecijos" judėjimą Ox

15. Nustatykite kokiu būdu yra transformuojamas stačiakampis (koordinates pasirinkite patys) iteruojant jį transformacija $f(z) = (1 + i)z^2 + 1$. Atlikite dvi iteracijas.

16. Duota transformacija:

$$f(x, y) = (2x + y + 1, y + x - 3), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Apskaičiuokite $f^{(3)}(x, y)$. Raskite $f^{-3}(x, y)$.

17. Raskite tiesinę-trupmeninę transformaciją, kuri trikampį $(2, 1),\ (0, 1),\ (1, 1)$ atvaizduoja į trikampį $(2, 4),\ (5, 4),\ (1, 3)$.

18. Raskite tiesinių-trupmeninių transformacijų seką, kuri trikampį: $(0, 1), (0, 0), (1, 0)$ atvaizduotų į trikampį $(4, 4),\ (8, 7),\ (1, 3)$.

19. Tarkime, kad duoti apskritimai

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Raskite šių apskritimų vaizdus transformacijos $T(z) = 1/z$ atzvilgiu.

20. Parodykite, kad jei afininės transformacijos

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

determinantas lygus nuliui, tai ši transformacija tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, atvaizduoja į tiesės taškus. Nurodykite konkrečią transformaciją, realizuojančią šį veiksmą.

21. Parodykite, kad jei afininės transformacijos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

determinantas $detA < 1$, tai ši transformacija yra spaudžianti.

22. Nurodykite transformacijų seką, kuri atkarpą AB, lygiagrečią tiesei $y = \sqrt{3}x$, simetriškai atvaizduotų šios tiesės atžvilgiu, o po to apsuktų apie tašką B, 180^0 kampu.

23. Sukonstruokite tiesinių-trupmeninių transformacijų seką, kuri du trikampio taškus $(1, 5); (4, 1)$ palieka vietoje, o tašką $(5, 5)$ transformuoja į ∞, $n \to \infty$.

24. Sudarykite transformacijų seką, kuri keturkampį $(0, 0); (2, 0); (1, 4); (3, 2)$ nuosekliai trasformuotų į keturkampį $(3, 0); (4, 1); (3, 5); (4, 6)$.

25. Tarkime, kad transformacija $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ apibrėžta tokiu būdu: $f(z) = z^2$. Raskite transformaciją $f^{-1}(z) = (v_1(z), v_2(z))$; $f^{-3}(z) = (v_1(z), v_2(z))$. Nurodykite transformacijos $f^(2)(z)$ nejudamus taškus.

26. Raskite transformacijos $f^3(z)$ ir $f^{-3}(z)$ nejudamus taškus, jei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ apibrėžta formule

$$f(z) = \frac{z+2}{4-z}.$$

27. Raskite transformacijos $f^{(2)}(z)$ ir $f^{(-2)}(z)$ nejudamus taškus, jei $f(z) = 3z^2 + 1$. Nustatykite šių taškų pobūdį.

28. Tarkime, kad $z = a + ib$. Raskite šaknų $\sqrt{z}$ išraiškas per realiąją ir menamąją dalis a ir b.

30. Įrodykite, kad spaudimo atvaizdis yra tolydus metrinėje erdvėje.

31. Tarkime, kad transformacijų seka kiekviename žingsnyje stačiakampį suspaudžia 10%, o po to pasuka 30^0 kampu. Raskite šią transformaciją.

32. Tarkime, kad S yra Sierpinskio trikampis, kurio pagrindo kraštinė yra taškuose $(0,0)$, $(1,0)$. Apibrėžkime transformaciją $\omega : S \to S$ tokiu būdu: $\omega(x) = Ax + t$, čia

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 120^0 & -\sin 120^0 \\ \sin 120^0 & \cos 120^0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Įrodykite, kad ši transformacija atvaizduoja aibę S į ją pačią. Raskite šios transformacijos nejudamą tašką.

33. Raskite transformacijų seką, kuri realizuotų posūkį apie tiesę $x = y = \frac{z}{2}$.

34. Nurodykite transformacijų seką, kuri atlieka simetrinį vaizdavimą tiesės

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{2}$$

atžvilgiu.

35. Raskite transformaciją, kuri sferą

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

ridentų tiese

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}$$

36. Sudarykite kvarterioną, kuris realizuotų posūkį 45^0 kampu apie vektorių $(2,1,2)$.

37. Sudarykite programą, kuria būtų demonstruojama, kaip Miobuso transformacija atvaizduoja pasirinktas plokštumos aibes (iš aibių sąrašo).

Skyriaus klausimai

1. Transformacijos. Transformacijų kompozicija, iteracija. Atvirkštinė transformacija ir jos egzistavimas.
2. Trasformacija Rymano sferoje.
3. Miobuso transformacija ir jos savybės.
4. Tiesinės ir afininės transformacijos. Jų skaičiavimas. Ortogonaliosios transformacijos ir įvairios jų formos.
5. Kvarternionų operacijos ir jų savybės. Trimačių objektų transformavimas naudojant kvarterionus.

Bendra pastaba Realizuojant praktinę užduotį, kartu su užduotimi turi būti pateikiamas ir formaliai aprašytas algoritmas ir ginantis programą visų pirma bus aptariamas algoritmas. Darbų gynimas vyks "gyvai", auditorijoje.

Privalomos užduotys

2.1 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Raskite transforacijos $f(x;y) = (x + 2y + 1; 2x - y - 1)$ trečiąją iteraciją $g(x;y) = f^3(x;y)$. Tarkime, kad transformacija $g(x;y) = (u;v)$ atvaizduoja trikampį, kurio viršūnės taškuose $(0;0), (0;2), (1;1)$. Raskite šio trikmampio vaizdą.

b) Praktinė užduotis. Sukonstruokite Sierpinskio trikampį iki pasirinktos (programos lange norimą iteracijos numerį pasirenkame) iteracijos, plokštumoje. Naudodami posūkio transformaciją plokštumoje realizuokite šio trikampio sūkimasį apie pasirinktą tašką (viršūnę), pasirinktu kampu.

2.2 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją kvarterionų pagalba, kuri atliktų 90^0 posūkį apie tiesę

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

Kokia taško $(-1, 3, 1)$ padėtis erdvėje atlikus šią transformaciją.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kuria demonstruojamas transformacijų:

$$f(z) = az(1-z),\ f(z) = \frac{az+b}{cz-d},\quad f(z) = az^2 + b;\quad z, a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

atvaizduoja aibės K_3 elementus. Pastebėsime, kad K_3 aibė, tai 3-os iteracijos Kocho kreivė. Transformacijų parametrai gali būti laisvai pasirenkami programos valdymo lango eilutėje.

2.3 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją (bendrą jos formą) 3-mačių matricų pagrindu, kuriomis būtų atliekamas erdvės posūkis 60^0 kampu apie tiesę

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2}.$$

Kokios bus taškų $(6, 8, 0)$ ir $(7, 12, 3)$ koordinatės po šios transformacijos.

b) Praktinė užduotis. Tarkime, kad ant Ox ašies yra vienetinis skritulys, remiasi į Ox ašį, kurio kiekvienas 90^0 sektorius nuspalvintas skirtingomis spalvomis. Sakykime, kad ratas buvo pastumtas ir nuriedėjęs iki taško $(4, 0)-$ parkrenta. Realizuokite šį uždavinį naudodami afinines transformacijas.

2.4 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją kvarterionų pagalba, kuri atliktų 30^0 posūkį apie tiesę

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

Raskite taško $(2, 3, -3)$ vaizdą.

b) Praktinė užduotis. Realizuokite "pulsuojančio" kvadrato idėją naudodami afinines bei spaudžiančias transformacijas. T.y. pasirinkite kvadratą ir sukdami bei spausdami (apie centro tašką) suspauskite jį į šį tašką (iki tam tikros pasirinktos ribos), o po to atsukite jį grąžindami į pradinę padėtį. Kvadrato viduryje užrašykite trumpą žodį arba raidę, pavyzdžiui "RS."

2.5 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją kvarterionų pagalba, kuri atliktų 60^0 posūkį apie tiesę

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{0}.$$

Raskite taškų $(1; -2; 3)$, $(2; 3; 0)$ koordinates atlikus jų posūkį minėta transformacija.

b) Prakrinė užduotis. Naudodami afinines transformacijas, sumodeliuokite kamuolio (skritulio) judesį, kai jis laisvai krenta, atsitrenkia į pagrindą, deformuojasi ir atšoka ir t.t., kol sustoja.

2.6 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite Miobuso transformaciją, kuri trikampį $(5, 1)$, $(-4, 2)$, $(-1, 0)$ atvaizduoja į trikampį $(1, 4)$, $(-2, -1)$, $(1, 3)$.

b) Praktinė užduotis.Iš primityvų (stačiakampių ir apskritimų) sudarykite "automobilį" kuris taikant ransformacijas judėtų į "kalną".

2.7 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Nurodykite transformacijų seką, kuri atkarpą AB, lygiagrečią tiesei $y = \sqrt{3}x$, simetriškai atvaizduotų šios tiesės atžvilgiu, o po to apsuktų apie tašką B', 180^0 kampu. B' yra taško B simetrinis vaizdas tiesės atžvilgiu.

b) Praktinė užduotis. Apsukite Rymano sferą, nuspalvintą dviem spalvom apie koordinačių pradžios tašką. Posūkiui realizuoti naudojate transformacijas sudarytas kvarterionų pagalba.

2.7 **Užduotis**

a)Teorinė užduotis. Nurodykite transformacijų seką, kuri atkarpą AB, lygiagrečią tiesei $y = \sqrt{3}x$, simetriškai atvaizduotų šios tiesės atžvilgiu, o po to apsuktų apie tašką B, 180^0 kampu.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurioje keičiant trasformacijos $W(x;y)$, parametrus r_1, r_2, ξ_1, ξ_2 (sudarius šių parametrų sekas, kurios būtų parenkamos vartotojo sąsajoje) būtų gaunamas kokio nors objektų (pasirenkate pats) vaizdas. Be to fiksavus transformacijos parametrus, suskaičiuokite iteracinę seką, jos natius išvesdami į ekraną. Čia

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} r_1 \cos \xi_1 & r_2 \sin \xi_2 \\ r_1 \sin \xi_1 & r_2 \cos \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix},$$

kur r_1, r_2 yra spinduliai, o ξ_1, ξ_2 posūkio kampai.

2.9 **Užduotis**

a) Praktinė užduotis. Sudarykite transformaciją (bendrą jos formą) 3-mačių matricų pagrindu, kuriomis būtų atliekamas erdvės posūkis 60^0 kampu apie tiesę

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2}.$$

Į kokią atkarpą atvaizduojama atkarpa AB, $A(6,8,0)$ ir $B(7,12,3)$?

b) Teorinė užduotis. Sudarykite transformacijų seką, bei realizuokite programa, primityvaus dviračio "sudaryto iš dviejų ratų (ratai kvadratai) ir juos jungiančios trapecijos" judėjimą Ox kryptimi.

2.10 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją (bendrą jos formą) 3-mačių matricų pagrindu, kuriomis būtų atliekamas erdvės posūkis 60^0 kampu apie tiesę

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{4}.$$

Kokios bus taškų $(0,2,0)$ ir $(3,2,5)$ koordinatės po šios transformacijos.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurioje pasirinkus Miobuso transformaciją (vartotojo sąsajoje turi būti nurodyta galimybė pasirinkti transformacijos parametrus), būtų atlieka aibės (pavyzdžiui trikampio) iteracinė seka. .

2.11 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Raskite nežinomą kvarterioną X bei jam atvirkštinį kvarterijoną, prieš tai išsprendę lygtį

$$K_1^2 * X * K_2^{-1} + K_1 = I + K_2, \quad K_1 = \big(1; (2,-1,2)\big), \quad K_2 = \big(0; (3,0,-4)\big).$$

b) Praktinė užduotis. Realizuokite programą, kurioje pasirinkus afininės transformacijos koeficientus būtų fiksuojama transformacija ir po to ji būtų taikoma (iteruojant) Kocho kreivei iki 3-os iteracijos.

2.12 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją (bendrą jos formą) 3-mačių matricų pagrindu, kuriomis būtų atliekamas erdvės posūkis 45^0 kampu apie tiesę

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2}.$$

Kokios bus taškų $(6,8,0)$ ir $(7,12,3)$ koordinatės po šios transformacijos.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite transformacijų seką, bei realizuokite programa, primityvaus automobilio, (sudaryto iš primityvų) judėjimą į "kalną."

2.13 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite transformaciją kvarterionų pagalba, kuri atliktų 60^0 posūkį apie tiesę

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}.$$

Raskite taškų $(0;-2;3)$, $(2;3;1)$ koordinates atlikus jų posūkį minėta transformacija.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurioje pasirinkus (programos lange) afininės transformacijos koeficientus (matricos koeficientus) būtų gaunamas pasirinkto trikampio (įvedant trikampio koordinates programos lange) vaizdas, be to pasirinkus kadrų skaičių būtų demonstruojama, kaip pradinis prikampis yra "perkeliamas" į vaizdą. Nurodykite koeficientų reikšmes, kurios vaizdas nepalieka ekrano.

2.14 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Sudarykite Miobuso transormaciją, kuri trikampį $(2;3);(4;0),(-2,1)$ transformuotų į trikampį $(3;0),(2;-2),(-3;1)$.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurioje būtų atliekamas trikampio, esančio plokštumoje, stereografinė projekcija Rymano sferoje. Po to judinant trikampį, turi judėti ir jo stereografinė projekcija.

2.15 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Įrodykite, kad jei tiesinės transformacijos determinantas lygus nuliui, tai ši transformacija bet kokį trikamį atvaizduoja į atkarpą.

b) Praktinė užduotis. Sudarykite programą, kurioje būtų realizuotas "automobilio" su trikampiais ratais judėjimas, pasirinkta tiese.

2.16 **Užduotis**

a) Teorinė užduotis. Raskite Miobuso transformaciją, kuri trikampį $(5,1)$, $(-4,2)$, $(-1,0)$ atvaizduoja į atkarpą $(1,4)$, $(-2,-1)$.

b) Praktinė užduotis. Apsukti Rymano sferą nuspalvintą dviem spalvomis apie koordinačių pradžios tašką. Posūkį realizuoti naudojant tiesines transformacijas (matricas) arba kvarternionus.