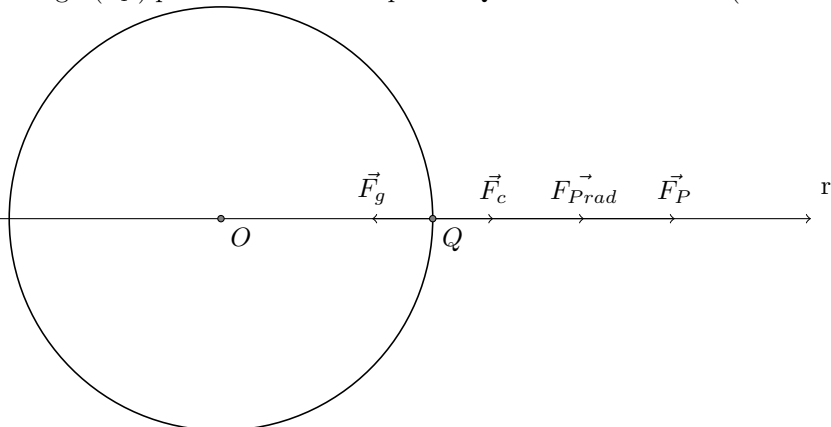


1 El sentido de las fuerzas gravitatoria(\vec{F}_g), centrífuga(\vec{F}_c), debida al gradiente de presión de radiación(\vec{F}_{Prad}) y del gas(\vec{F}_P) que accionan en el punto Q situado al radio r (en coordenadas esféricas, suponiendo simetría esférica):



Por la simetría esférica las variables ρ , P, T, .. no dependen de los ángulos θ y ϕ

$$\nabla_r f = \frac{df}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\nabla_\theta f = \nabla_\phi f = 0$$

(solo la componente en la dirección \vec{e}_r del gradiente es diferente de 0)

Notamos F_g , F_c , F_{Prad} , F_P los módulos de estas fuerzas por unidad de masa (aceleraciones)

La ecuación de equilibrio hidrostático:

$$F_g = F_P + F_c + F_{Prad}$$

donde

$$F_g = \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$F_P = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$F_{Prad} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial Prad}{\partial r}$$

$$Prad = \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

\implies

$$F_{Prad} = -\frac{16\sigma T^3}{3c\rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

Los gradientes de temperatura y presión son negativos lo que justifica el signo -

$F_c = \frac{v_r^2}{r}$ donde v_r es el módulo de la velocidad de rotación (la dirección es tangente a la esfera en Q)

$v_r = \frac{2\pi r}{A}$ donde A es el periodo de rotación de 27 días ($A = 27 \cdot 24 \cdot 3600$ s) \implies

$$F_c = \frac{4\pi^2 r}{A^2}$$

Si despreciamos F_c y F_{Prad} la ecuación del equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

Usamos las notaciones y valores:

$M_S = 1.9891 \cdot 10^{30} kg$ para la masa del sol

$R_S = 0.7 \cdot 10^9 m$ para el radio del sol

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ para la constante de Stefan-Boltzmann

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ para la constante de gravitación universal

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ para la velocidad de la luz

Notamos $q = \frac{r}{R_S}$ y $m_f = \frac{M(r)}{M_S}$ y podemos considerar las variables P, ρ , T, m_f de la tabla del modelo estándar como funciones de q

Hay que estimar los valores de F_c , F_g y F_{Prad} para $q \in \{0.1, 0.3, 1\}$

$$F_c = \frac{4\pi^2 R_S}{A^2} q$$

$$F_g = \frac{GM_S}{R_S^2} \frac{m_f}{q^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{1}{R_S} \frac{\partial T}{\partial q} \implies$$

$$F_{Prad} = -\frac{16\sigma}{3cR_S} \frac{T^3}{\rho} \frac{\partial T}{\partial q}$$

En la tabla tenemos n + 1 valores discretos de q: $q_0 = 0, q_1, \dots, q_n = 1$ y de las funciones f(q), con f que quede ser T, ρ , m_f, \dots

Para calcular los valores de estas funciones y de las derivadas $\forall q \in [0, 1]$:

caso1:

$$\exists i \in \{0, \dots, n\} | q = q_i$$

$$f(q) = f(q_i)$$

$$i < n \implies \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_{i+1}) - f(q_i)}{q_{i+1} - q_i}$$

$$i = n \implies \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_n) - f(q_{n-1})}{q_n - q_{n-1}}$$

caso2:

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} | q \in (q_{i-1}, q_i)$$

$$f(q) = f(q_{i-1}) + \frac{(q - q_{i-1})(f(q_i) - f(q_{i-1}))}{q_i - q_{i-1}}$$

(interpolación lineal)

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_i) - f(q_{i-1})}{q_i - q_{i-1}}$$

En el caso del problema: $q \in \{0, 0.3, 1\}$

q=1.0e-01
mf=7.8184e-02
rho=8.7594e+04 kg/m3
T=1.3073e+07 K
dT/dq=-3.7875e+07 K
dT/dr=-5.4107e-02 K/m
Fg=2.1182e+03 m/s2
Fc=5.0781e-04 m/s2
Fc/Fg=2.3974e-07
Fprad=1.3910e+00 m/s2
Fprad/Fg=6.5670e-04

q=3.0e-01
mf=6.0629e-01
rho=1.2288e+04 kg/m3
T=6.8316e+06 K
dT/dq=-2.1250e+07 K
dT/dr=-3.0357e-02 K/m
Fg=1.8251e+03 m/s2
Fc=1.5234e-03 m/s2
Fc/Fg=8.3472e-07
Fprad=7.9396e-01 m/s2
Fprad/Fg=4.3503e-04

q=1.0e+00
mf=1.0000e+00
rho=2.5120e-04 kg/m3
T=5.7780e+03 K
dT/dq=-2.4630e+07 K
dT/dr=-3.5186e-02 K/m
Fg=2.7092e+02 m/s2
Fc=5.0781e-03 m/s2
Fc/Fg=1.8744e-05
Fprad=2.7236e-02 m/s2
Fprad/Fg=1.0053e-04

En los 3 casos $\frac{F_c}{F_g} < \frac{F_{Prad}}{F_g} \approx 0$

$$2 \quad \epsilon = 2.54 \cdot 10^4 \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \frac{erg}{g \cdot s}$$

S.I.:

$$1erg = 10^{-7} J,$$

$$1g = 10^{-3} kg$$

$$\epsilon = 2.54 \cdot \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \frac{J}{kg \cdot s}$$

$$E_{nuc} = 2.54 \cdot \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \cdot M_S \cdot mf_{nuc} \text{ W (1W = 1J/s)}$$

Calculamos para el núcleo: $\frac{r}{R_S} \leq 2.0130e - 01$ y $\frac{r}{R_S} \leq 2.3760e - 01$

rfNuc= Rnuc/RS = 2.0130e-01
mfNuc= Mnuc/MS = 3.3880e-01
T=1.3114e+07 K
T9=1.3114e-02 K
rho=9.7816e+04 kg/m3
X=5.0200e-01
E_{nuc} = 4.717933e+29 W

rfNuc= Rnuc/RS = 2.3760e-01
mfNuc= Mnuc/MS = 4.4520e-01
T=1.2579e+07 K
T9=1.2579e-02 K
rho=8.9590e+04 kg/m3
X=5.2333e-01
E_{nuc} = 5.195219e+29 W

3 $\mu = \frac{1}{\sum_j \frac{X_j}{\mu_j}}$ donde X_j es la abundancia de cada elemento

$\mu_j = \frac{A_j}{N_j}$ donde N_j es el número de partículas / núcleo ($N_j = 1$ núcleo + núm. electrones libres) y A_j es la masa atómica del elemento ($A_j =$ núm protones + num. neutrones del núcleo)

Para los elementos totalmente ionizados (todos los electrones libres) $\mu_j = \frac{A_j}{1+Z_j}$ donde $Z_j =$ núm protones del núcleo (núm atómico) y para los metales $\mu_j \approx 2$

Hay que considerar para cada estado de ionización un término en la suma con abundancia $p_{j_i} \cdot X_j$ donde p_{j_i} es la proporción de estos iones de todos los átomos de este elemento (A_j va a ser el mismo, pero N_j va a ser diferente para cada estado de ionización)

Consideramos $A_{met} = 17$

H, He estado neutro

$$\begin{aligned}\mu_H &= \frac{1}{1} = 1 \quad (N_H = 1 \text{ núcleo}, A_H = 1) \\ \mu_{He} &= \frac{4}{1} = 4 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo}, A_{He} = 4) \\ \mu &= \frac{1}{X + \frac{Y}{4}}\end{aligned}$$

H, He totalmente ionizados

$$\begin{aligned}\mu_{H^+} &= \frac{1}{2} \quad (N_H = 1 \text{ núcleo} + 1e^- = 2, A_H = 1) \\ \mu_{He^{+2}} &= \frac{4}{3} \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo} + 2e^- = 3, A_{He} = 4) \\ \mu &= \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4}}\end{aligned}$$

H, He y metales en estado neutro

$$\begin{aligned}\mu_H &= \frac{1}{1} = 1 \quad (N_H = 1 \text{ núcleo}, A_H = 1) \\ \mu_{He} &= \frac{4}{1} = 4 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo}, A_{He} = 4) \\ \mu_{met} &= \frac{17}{1} = 17 \quad (N_{met} = 1 \text{ núcleo}, A_{met} = 17) \\ \mu &= \frac{1}{X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17}}\end{aligned}$$

H, He totalmente ionizados y una fracción 50% de metales totalmente ionizados

$$\begin{aligned}\mu_{H^+} &= \frac{1}{2} \quad (N_H = 1 \text{ núcleo} + 1e^- = 2, A_H = 1) \\ \mu_{He^{+2}} &= \frac{4}{3} \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo} + 2e^- = 3, A_{He} = 4) \\ \mu_{met} &= \frac{17}{1} = 17 \quad (N_{met} = 1 \text{ núcleo}, A_{met} = 17) \\ \mu_{met+Z_{met}} &\approx 2 \\ \mu &= \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4} + 0.5 \cdot \frac{Z}{17} + 0.5 \cdot \frac{Z}{2}} = \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4} + \frac{19Z}{68}}\end{aligned}$$

X = 0.7346, Y = 0.2485, Z = 0.0169

Para el caso H, He y metales en estado neutro: $\mu = 1.2536$

Para el caso H, He totalmente ionizados y metales ionizados totalmente 50%: $\mu = 0.6023$

μ está creciendo con el radio porque a radio menor donde la temperatura es mas alta los elementos están mas ionizados y los electrones libres se suman a N_j y μ_j es mas pequeño

Mirando en la tabla del modelo estándar intentamos a encontrar valores de $\mu \in [0.611, 1.247]$ ($X = 0.735$) y los valores de los 2 casos de arriba no cuadran

$$\mu_H = \frac{1}{1} = 1 \quad (N_H = 1 \text{ núcleo}, A_H = 1)$$

$$\mu_{H+1} = \frac{1}{2} \quad (N_H = 1 \text{ núcleo} + 1 e^- = 2, A_H = 1)$$

$$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo}, A_{He} = 4)$$

$$\mu_{He+1} = \frac{4}{2} = 2 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo} + 1 e^- = 2, A_{He} = 4)$$

$$\mu_{met} = \frac{17}{1} = 17 \quad (N_{met} = 1 \text{ núcleo}, A_{met} = 17)$$

$$\mu_{met+1} = \frac{17}{2} \quad (N_{met} = 1 \text{ núcleo} + 1 e^- = 2, A_{met} = 17)$$

Considerando metales una vez ionizados en proporción p y H y He solo en forma de átomos neutros:

$$\mu = \frac{1}{(X + \frac{Y}{4}(1-p)\frac{Z}{17} + 2p\frac{Z}{17})}$$

$$X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17} + p\frac{Z}{17} = \frac{1}{\mu}$$

$$p = \frac{17}{Z}(\frac{1}{\mu} - X - \frac{Y}{4} - \frac{Z}{17})$$

$p(\mu = 1.247) = 4.2303 > 1$ lo que implica que hay que considerar mas estados de ionización

Intentamos encontrar una solución considerando H, He y metales una vez ionizados en la misma proporción p

$$\mu = \frac{1}{(1-p)X + 2pX + (1-p)\frac{Y}{4} + p\frac{Y}{2} + (1-p)\frac{Z}{17} + 2p\frac{Z}{17}}$$

$$X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17} + p(X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17}) = \frac{1}{\mu}$$

$$p = \frac{\frac{1}{\mu} - X - \frac{Y}{4} - \frac{Z}{17}}{X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17}}$$

$p(\mu = 0.611) = 1.05168 > 1$, $p(\mu = 1.247) = 5.2719e - 03$, $\mu(p = 1) = 6.2679e - 01$ lo que implica que con un grado pequeño de ionización ($p \geq 2719e - 3$) de todos los elementos (solo consideramos una vez ionizados) obtenemos valores de μ coherentes con la tabla desde $\mu = 1.247$ en la superficie hasta llegar a $\mu = 0.6267$ y $p = 1$, pero si queremos simular valores mas pequeños de μ (a radio menor, temperatura mayor) (y $\mu \geq 0.611$ por el valor de X) hay que considerar los elementos mas veces ionizados

Tenemos de las ecuaciones de Saha p la proporción de hidrógeno ionizado y q_1, q_2 las proporciones de helio ionizado (una vez y 2 veces ionizado)

$$\mu_H = \frac{1}{1} = 1 \quad (N_H = 1 \text{ núcleo}, A_H = 1)$$

$$\mu_{H+1} = \frac{1}{2} \quad (N_H = 1 \text{ núcleo} + 1 e^- = 2, A_H = 1)$$

$$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo}, A_{He} = 4)$$

$$\mu_{He+1} = \frac{4}{2} = 2 \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo} + 1 e^- = 2, A_{He} = 4)$$

$$\mu_{He+2} = \frac{4}{3} \quad (N_{He} = 1 \text{ núcleo} + 2 e^- = 3, A_{He} = 4)$$

$$\mu = \frac{1}{(1-p)X + 2pX + (1-q_1-q_2)\frac{Y}{4} + q_1\frac{Y}{2} + q_2\frac{3Y}{4}}$$

$$\mu = \frac{1}{X(1+p) + Y(\frac{1}{4} + \frac{q_1}{4} + \frac{q_2}{2})}$$

<https://github.com/beevageeva/fsol/>