1 f1, f2 gaussian variables $\Longrightarrow$

$P(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} exp(-\frac{f_1^2}{2\sigma_1^2})$

$P(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} exp(-\frac{f_2^2}{2\sigma_2^2})$

$P(f_1, f_2) = \frac{exp(-Q)}{2\pi\sqrt{det(M)}}$

donde

$M = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

y $Q = \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j (M^{-1})_{ij}$ (en el caso general)

$det(M) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2$

$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$

$Q = \frac{1}{2det(M)}(f_1^2\sigma_2^2 - 2f_1f_2\sigma_{12} + f_2^2\sigma_1^2)$

$P(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} exp(\frac{-f_1^2\sigma_2^2 - f_2^2\sigma_1^2 + 2f_1f_2\sigma_{12}}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)})$

$P(f1|f2) = \frac{P(f_1,f_2)}{P(f2)} = \frac{1}{2\pi(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} exp(\frac{-f_1^2\sigma_2^2 - f_2^2\sigma_1^2 + 2f_1f_2\sigma_{12}}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)})\sqrt{2\pi}\sigma_2 exp(\frac{f_2^2}{2\sigma_2^2})$

$\Longrightarrow P(f1|f2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(1-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})^{\frac{1}{2}}} exp(\frac{-f_1^2\sigma_2^2 - f_2^2\sigma_1^2 + 2f_1f_2\sigma_{12}}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_{12}^2)} + \frac{f_2^2}{2\sigma_2^2})$

el argumento del exponente dividido por -2:

$\frac{f_1^2\sigma_2^2 + f_2^2\sigma_1^2 - 2f_1f_2\sigma_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2} - \frac{f_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{f_1^2\sigma_2^4 + f_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2f_1f_2\sigma_{12}\sigma_2^2 - f_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + f_2^2\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)}$

$= \frac{f_1^2\sigma_2^4 - 2f_1f_2\sigma_{12}\sigma_2^2 + f_2^2\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^4(1-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})} = \frac{(f_1\sigma_2^2 - f_2\sigma_{12})^2}{\sigma_1^2\sigma_2^4(1-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})} = \frac{(f_1 - f_2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2})^2}{\sigma_1^2(1-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})}$

Si notamos $\sigma_1' = \sigma_1(1-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})^{\frac{1}{2}}$

observamos que $P(f1|f2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1'} exp(-\frac{(f_1 - f_2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2})^2}{2\sigma_1'^2})$

2 las ecuaciones de continuidad y movimiento linealizadas de los fluidos en coordenadas fijas en el tiempo (las coordenadas comóviles R están relacionadas a las fijas x a través del factor de escala: R = x a) y donde $\vec{v}$ representa la velocidad peculiar :

$\nabla \cdot \vec{v} = -a\dot{\delta}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{a}\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \frac{1}{a}\vec{\nabla}\Phi$

se ha supuesto el background con las variables $\rho_b(t)$, $p_b(t)$ (no son funciones de x $\Longrightarrow$ sin gradientes espaciales) y con el campo de velocidades (peculiares) 0 y la perturbación: $\delta\rho_b, \delta_p p_b$ con $\delta, \delta_p \ll 1$ necesario para hacer la aprox lineal de tal forma que $\rho(x,t) = \rho_b(t) + \rho_b(t)\delta(x,t)$ y $p(x,t) = p_b(t) + p_b(t)\delta_p(x,t)$

Definimos c_s la velocidad de sonido como $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$

hacemos $\nabla \cdot$ de la segunda ec. (de movimiento):

$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{\dot{a}}{a}\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{a}\frac{1}{\rho_b}\nabla^2 p - \frac{1}{a}\nabla^2\Phi$

y reemplazamos $\nabla \cdot \vec{v} = -a\dot{\delta}$, $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\rho\frac{dp}{d\rho} \Longrightarrow \nabla^2 p = c_s^2\nabla^2\rho = c_s^2\rho_b\nabla^2\delta$, $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho_b\delta a^2$

$\Longrightarrow \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta = c_s^2\frac{1}{a^2}\nabla^2\delta + 4\pi G\rho_b\delta$

si consideramos soluciones de ondas en el espacio de forma:

$\delta(x,t) = \delta_k(t) exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$

reemplazamos arriba (observando que $\vec{\nabla}\phi = i\vec{k}\phi$ para ϕ solución de onda monocromática como arriba)

$\Longrightarrow \ddot{\delta_k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta_k = -k^2c_s^2\frac{1}{a^2}\delta_k + 4\pi G\rho_b\delta_k$

$\Longrightarrow \ddot{\delta_k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta_k = (4\pi G\rho_b - k^2c_s^2\frac{1}{a^2})\delta_k$

si $4\pi G\rho_b - k^2c_s^2\frac{1}{a^2} < 0$

δ_k oscila y k para cual el término a la derecha se anula es:

$k^2 = \frac{4\pi G\rho_b a^2}{c_s^2}$

Notamos la longitud de Jeans la longitud de onda correspondiente a este k: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ de donde:

$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{4G\rho_b a^2}}$

(para oscilaciones con longitud de onda menores que λ_J δ_k va a oscilar)

la masa Jeans correspondiente:

$M_J = \frac{4\pi\lambda_J^3}{3}\rho_b(t = t_0)$

(en la ec de la masa de Jeans de arriba evaluamos ρ_b en $t=t_0$ porque las ecuaciones están en las coordenadas fijas)

Para calcular $c_s^2=\frac{dp}{d\rho}$: de la relación $\rho=\rho_c(\Omega_m(\frac{p}{p_b})^{\frac{3}{4}}+\Omega_r\frac{p}{p_b})$

$\frac{d\rho}{dp}=\rho_c(\Omega_m p_b^{-\frac{3}{4}}\frac{3}{4}p^{-\frac{1}{4}}+\frac{\Omega_r}{p_b})$

que evaluamos para $p=p_b$

$\frac{d\rho}{dp}(p=p_b)=\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m p_b^{-\frac{3}{4}}p_b^{-\frac{1}{4}}+\Omega_r p_b{}^{-1})=\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m+\Omega_r)p_b^{-1}$

$\implies c_s^2=p_b(\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m+\Omega_r))^{-1}$

$\implies \lambda_J=\sqrt{\frac{\pi p_b}{4G\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m+\Omega_r)\rho_b a^2}}$

3 Fluctuación tipo top-hat:

background: ρ_b en una esfera de radio R (comóvil)

perturbación: $\rho_b\delta$ en una esfera de radio R(1+a)

condición para hacer la aproximación lineal: $a,\delta\ll 1$

en la aprox. lineal solo guardamos términos de primer orden (términos de forma $a\delta\approx 0$)

universo dominado por la radiación $\implies \rho\propto R^{-4}$ (conservación de la masa)

que aplicamos para el background y para la perturbación $\implies$

$\rho_b R^4=\rho_b(1+\delta)R^4(1+a)^4 \implies$

$(1+\delta)(1+a)^4=1 \implies$ guardando solo térm. de primer orden:

$1+\delta+4a=1 \implies a=-\frac{\delta}{4}$

Ec Friedmann(sin const. cosmológica)- corresp a la conservación de momento:

$\ddot{R}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)R$

para la radiación: $p=\frac{1}{3}\rho \implies$ reemplazando en la ec de arriba:

$\ddot{R}=-\frac{8\pi G}{3}\rho R$

que escribimos para background y fluctuación:

$\ddot{R}=-\frac{8\pi G}{3}\rho_b R$

$(\ddot{R+a})=-\frac{8\pi G}{3}\rho_b(1+\delta)R(1+a) \implies$ guardando solo term de primer orden:

$\ddot{R}(1+a)+2\dot{R}\dot{a}+R\ddot{a}=-\frac{8\pi G}{3}R\rho_b(1+\delta+a)$

$\implies 2\dot{R}\dot{a}+R\ddot{a}=-\frac{8\pi G}{3}R\rho_b\delta=\frac{32\pi G}{3}R\rho_b a(\impliedby a=-4\delta)$

pasamos de a a δ (que tienen una relación lineal) $\implies$:

$\implies 2\dot{R}\dot{\delta}+R\ddot{\delta}=\frac{32\pi G}{3}R\rho_b\delta$

$\implies \ddot{\delta}+2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}=\frac{32\pi G}{3}\rho_b\delta$

Ec Friedmann(sin curvatura y const. cosmológica) - corresp a la conservación de energía:

$(\frac{\dot{R}}{R})^2=\frac{8\pi G}{3}\rho_b$

$\implies \ddot{\delta}+2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}=4(\frac{\dot{R}}{R})^2\delta$

universo dominado por radiación:

$R=R_0(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}}$

$\dot{R}=R_0\frac{1}{t_0}\frac{1}{2}(\frac{t}{t_0})^{-\frac{1}{2}}$

$\implies \frac{\dot{R}}{R}=\frac{1}{2t}$

reemplazamos en la ec de mas arriba $\implies$

$\implies \ddot{\delta}+\frac{1}{t}\dot{\delta}-\frac{1}{t^2}\delta=0$

Buscamos soluciones de forma $\delta=Ct^\alpha$ y después de reemplazar :

$\alpha(\alpha-1)+\alpha-1=0 \implies \alpha=1$ o $\alpha=-1$

la solución general es de forma $\delta=C_1t+C_2t^{-1}$

donde C_1t se llama modo creciente y C_2t^{-1} se llama modo decreciente

Consideramos solo el modo creciente: $\delta\propto t$

la fluctuación en el campo grav: $\delta_\Phi=\frac{G\delta_M}{R}$ donde

$\delta_M=\frac{4\pi R^3}{3}\rho_b\delta=R^2\frac{1}{2G}(\frac{\dot{R}}{R})^2\delta$ ($\impliedby$ ec friedmann de la energía sin curv y const cosm.)

$\implies \delta_\Phi\propto\dot{R}^2t=const$ ($\impliedby$ $\dot{R}\propto t^{-\frac{1}{2}}$ en un universo dominado por radiación)

4 $<\delta_r{}^2>=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty P(k){W_r}^2(k)k^2dk$

donde $W_r(k)$ es la funcion ventana que es la transformada fourier de la función de apartenencia a la esfera de radio r (tiene valor 1 para los puntos dentro de la esfera y 0 para los de afuera)

$W_r(k)=\frac{3}{(kr)^3}(sin(kr)-krcos(kr))$

$\Longrightarrow <\delta_r{}^2>=\frac{9}{2\pi^2r^6}\int_0^\infty \frac{1}{k^4}P(k)(sin(kr)-krcos(kr))^2dk$

$=\frac{9\sigma_8^2 19843}{2\pi^2r^6}\int_0^\infty \frac{1}{k^5}(ln(1+11.14k))^2(1+18.5k+5880k^2+17580k^3+1.04\cdot 10^6k^4)^{\frac{1}{2}}(sin(kr)-krcos(kr))^2dk$

para r $=8$ (en unidades $h^{-1}Mpc$):

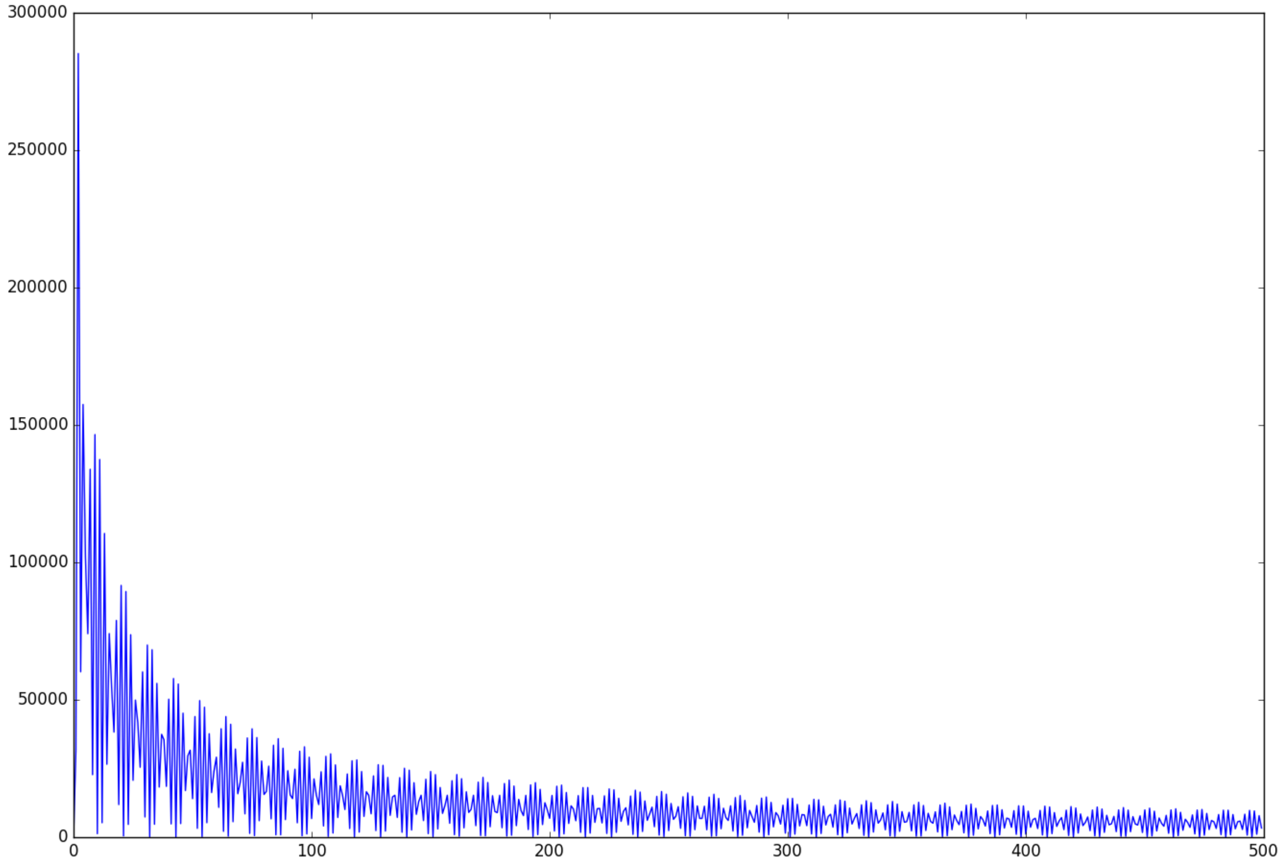

Figure 1: $\frac{1}{k^5}(ln(1+11.14k))^2(1+18.5k+5880k^2+17580k^3+1.04\cdot 10^6k^4)^{\frac{1}{2}}(sin(8k)-8kcos(8k))^2$ *for* $k\leq 500$

Por el caracter oscilatorio de la función a integrar (ver los gráficos de la funcion en los 2 casos) en python la estimación para el error absoluto es bastante grande: para este caso (r=8) el resultado sale 6935998.100369965 y el error estimado es 177016.13453597017 (que representa casi 2% del resultado)

$\frac{9\sigma_8^2 19843}{2\pi^2 262144}6935998.100369965=(0.83)^2 \Longrightarrow \sigma_8^2=2.87784\cdot 10^{-6}$

para r $=10$ (en unidades $h^{-1}Mpc$):

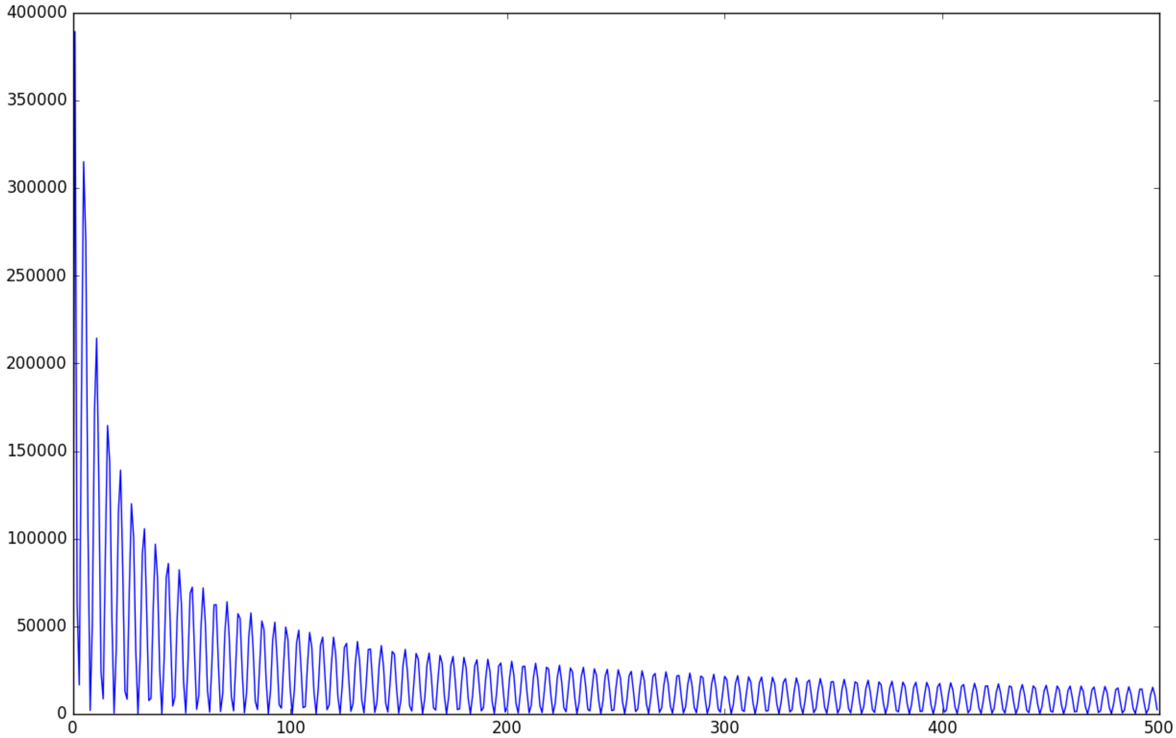

Figure 2: $\frac{1}{k^5}(ln(1+11.14k))^2(1+18.5k+5880k^2+17580k^3+1.04\cdot 10^6k^4)^{\frac{1}{2}}(sin(10k)-10kcos(10k))^2$ $for\ k \leq 500$

el resultado de la integral sale 18504610.63846305 con un error absoluto estimado 13832104.614861604 (casi 74%)

$<{\delta_r}^2>=\frac{9\cdot 2.87784\cdot 10^{-6}\cdot 19843}{2\pi^2 10^6}18504610.63846305 = 0.4818$

5 solución general con A, B constantes:

$\delta = At - \frac{B}{t}$

$\implies \dot{\delta} = A + \frac{B}{t^2}$

condiciones iniciales $\delta_0 = \delta(t=t_0)$ y $\dot{\delta}_0 = \dot{\delta}(t=t_0)$

Consideramos solo la situación $\delta_0 = 0$ y $\dot{\delta}_0 \neq 0$ (la situación $\delta_0 \neq 0$ y $\dot{\delta}_0 = 0$ no es una condición inicial real porque no puede haber una fluctuación sin que haya un cambio)

$\implies At_0 = \frac{B}{t_0} \implies B = At_0^2$

$\implies \dot{\delta}_0 = A + \frac{1}{t_0^2}At_0^2 = 2A \implies A = \frac{1}{2}\dot{\delta}_0$

Consideramos ahora solo el modo creciente:

$\delta = At$

$\dot{\delta} = A \implies \delta = \dot{\delta}t \implies \delta_0 = \dot{\delta}_0 t_0$

$\delta = At = \frac{1}{2}\dot{\delta}_0 t = \frac{1}{2}\delta_0\frac{t}{t_0}$

universo dominado por radiación $\implies t \propto a^2$

si definimos el factor de crecimiento: $D(a) = a^2$

$\delta = \frac{1}{2}\delta_0\frac{D(a)}{D(a_0)}$