H1 p9

$$\int_0^{r_0} 4\pi r^2 n_e(r)dr = Z \quad (1)$$

$n_e(r) = \frac{8\pi}{3h^3}[2m_e(e_F + eV(r))]^{\frac{3}{2}}$ (1.29 apuntes)
$x = \frac{r}{\mu a_0} \implies r = xa_0(\frac{9\pi^2}{128Z})^{\frac{1}{3}}$
$\Phi(x) = \frac{e_F+eV(r)}{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}} \implies$
$e_F + eV(r) = \Phi(x)\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \implies$
$n_e(r) = \frac{8\pi}{3h^3}(2m_e\Phi(x)\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r})^{\frac{3}{2}}$
reemplazando en (1):
$\int_0^{r_0} 4\pi r^2 \frac{8\pi}{3h^3}(\Phi(x)\frac{m_e Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r})^{\frac{3}{2}}dr = Z \implies$
$\frac{32\pi^2}{3h^3}(\frac{m_e Ze^2}{2\pi\epsilon_0})^{\frac{3}{2}}\int_0^{r_0} r^{\frac{1}{2}}\Phi(x)^{\frac{3}{2}}dr = Z$
Cambio de variable r por x
$dr = dxa_0(\frac{9\pi^2}{128Z})^{\frac{1}{3}}$
$\frac{32\pi^2}{3h^3}(\frac{m_e Ze^2}{2\pi\epsilon_0})^{\frac{3}{2}}a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{9\pi^2}{128Z})^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_0} x^{\frac{1}{2}}\Phi(x)^{\frac{3}{2}}dx = Z$
$\Phi(x)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2\Phi}{dx^2} \implies$
$\frac{32\pi^2}{3h^3}(\frac{m_e Ze^2}{2\pi\epsilon_0})^{\frac{3}{2}}a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{9\pi^2}{128Z})^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_0} x\frac{d^2\Phi}{dx^2}dx = Z \implies$
$\frac{32\pi^2}{3h^3}(\frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0})^{\frac{3}{2}}a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{9\pi^2}{128})^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_0} x\frac{d^2\Phi}{dx^2}dx = 1 \implies$
Notamos C = $(\frac{32\pi^2}{3h^3}(\frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0})^{\frac{3}{2}}a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{9\pi^2}{128})^{\frac{1}{2}})^{-1}$
$\int_0^{x_0} x\frac{d^2\Phi}{dx^2}dx = C$
Integrando por partes:
$\int_0^{x_0} x\frac{d^2\Phi}{dx^2}dx = (x\Phi'(x))|_0^{x_0} - \int_0^{x_0}\Phi'(x)dx = x_0\Phi'(x_0) - \Phi(x_0) + \Phi(0) \implies$
$x_0\Phi'(x_0) - \Phi(x_0) = C - 1$ ($\impliedby$ $\Phi(0) = 1$)
$C = 1$ ($\impliedby$ $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$)
$\implies \Phi'(x_0) = \frac{\Phi(x_0)}{x_0}$

H1 p11 all ionized $\implies \frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$
$\mu = 1.3793$ g/mol
eq 1.40, $M = M_\odot = 1.99\cdot 10^{33}g \implies$
$C = 6.65\cdot 10^4\frac{\mu}{Z(1+X)} = 91.7241\cdot 10^4$ erg $s^{-1}K^{\frac{-7}{2}}$
$T_c = (\frac{L}{C})^{\frac{2}{7}}$
$L = 0.03L_\odot = 0.117\cdot 10^{33}$ erg/s $\implies$
$T_c = 2.0697\cdot 10^6$ K
$T_s = (\frac{C}{4\pi R^2\sigma})^{\frac{1}{4}}T_c^{\frac{7}{8}}$
$\sigma = 5.67\cdot 10^{-5}$ erg $cm^{-2}K^{-4}s^{-1}$
$R = R_\odot = 6.96\cdot 10^{10}$ cm
$\implies T_s = 2412.9238$ K
$\kappa_0 = 4.34\cdot 10^{22}Z(1+X)cm^2g^{-1} = 4.34\cdot 10^{21}cm^2g^{-1}$
$\rho_s = (\frac{4}{17}\frac{64\sigma\pi}{3}\frac{GM}{L}\frac{\mu m_H}{\kappa_0 k_B})^{\frac{1}{2}}\cdot T_c^{\frac{13}{4}}$
$k_B = 1.38\cdot 10^{-16}ergK^{-1}, G = 6.6725\cdot 10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}, m_H = 1.6733\cdot 10^{-24}g$
$\implies \rho_s = 21.0285gcm^{-3}$

Notamos ρ_c = densidad en la base de la capa (la temperatura mas abajo de este punto - hasta el centro es constante = T_c, pero la densidad no)

$T_s\rho_s^{-\frac{2}{3}} = T_c\rho_c^{-\frac{2}{3}}$
$\implies \rho_c = \rho_s(\frac{T_s}{T_c})^{-\frac{3}{2}}$
$\implies \rho_c = 528269.89561gcm^{-3}$

H1 p12 $M = 0.6 M_\odot = 1.194 \cdot 10^{33}$ g

$t = 1.4 \cdot 10^{10}$ años $= 4.415 \cdot 10^{17}$ s

$T_0 = 3 \cdot 10^7$ K

carbono $\implies$ A = 12, $\mu = 12$ g/mol, X = Y = 0, Z = 1

$C = 6.65 \cdot 10^4 \frac{M}{M_\odot} \frac{\mu}{Z(1+X)} ergs^{-1}K^{-\frac{7}{2}} = 47.88 \cdot 10^4 ergs^{-1}K^{-\frac{7}{2}}$

$\tau_0 = \frac{3}{2} \frac{Mk_B}{Am_H C T_0^{\frac{5}{2}}}$ s

$\tau_0 = 0.05215 \cdot 10^{17}$ s

$\frac{L}{L_0} = (1 + \frac{5}{2}\frac{t}{\tau_0})^{-\frac{7}{5}} = 0.00055115$

H2 p4 caso no relativista (baja densidad: $\rho << 6 \cdot 10^{15}$ g$/cm^3$)

$\gamma = 5/3$, $K = \frac{3^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2}{5 m_n^{\frac{8}{3}}} = 5.38752 \cdot 10^9$

$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \implies n = \frac{3}{2}$

en la ecuación Lane Emden n = 1.5 igual que en el caso de las enanas blancas de baja densidad $\implies$ tiene la misma resolución: $\xi_1 = 3.65375$ y $|\theta'(\xi_1)| = 0.203302$

polítropos apuntes eq 1.18, 1.19 de cuales resulta la relación masa radio:

$M = 4\pi R^{\frac{n-3}{n-1}} (\frac{(n+1)K}{4\pi G})^{\frac{n}{n+1}} \xi_1^{\frac{n+1}{n-1}} |\theta'(\xi_1)|$

$\implies MR^3 = 0.88 \cdot 10^{13} gcm^3$

Si la masa no dependiera de ρ_c como en el caso de las enanas blancas relativistas(n=3) la masa de la relación 1.19 sería la masa límite.

Pero en este caso M depende de ρ_c (polítropos relación 1.19) $\implies$ no hay masa límite

(este caso de estrellas de neutrones es identico en este problema al de las enanas blancas de baja masa (no relativistas), pero con K diferente (en las ecuaciones de los polítropos))

H3 p2 partícula de masa = 1 parte del reposo de una distancia R

$\implies E = c^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}$

eq 3.6 apuntes: $c^2(1 - \frac{r_s}{r})\frac{dt}{d\tau} = E \implies \frac{d\tau}{dt} = (1 - \frac{r_s}{r})^{\frac{1}{2}}$

apuntes (parte de una distancia R): $\tau(r) = \frac{1}{c}(\frac{R^3}{r_s})^{\frac{1}{2}}[(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} + arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})]$

$r = R\frac{1+cos\eta}{2} \implies \tau(\eta) = \frac{1}{c}(\frac{R^3}{r_s})^{\frac{1}{2}}[(\frac{1+cos\eta}{2} - (\frac{1+cos\eta}{2})^2)^{\frac{1}{2}} + arccos(\sqrt{\frac{1+cos\eta}{2}})]$

$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{1}{c}(\frac{R^3}{r_s})^{\frac{1}{2}}(\frac{\frac{1}{2}\sin(\eta)(\cos(\eta)+1) - \frac{\sin(\eta)}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\cos(\eta)+1) - \frac{1}{4}(\cos(\eta)+1)^2}} + \frac{\sin(\eta)}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}(-\cos(\eta)-1)+1}\sqrt{\cos(\eta)+1}})$

$\frac{d\tau}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = (1 - \frac{r_s}{r})^{\frac{1}{2}} \implies \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{c}(\frac{R^3}{r_s})^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin(\eta)}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}(\cos(\eta)+1)^2}} + \frac{\frac{1}{2}\sin(\eta)(\cos(\eta)+1) - \frac{\sin(\eta)}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\cos(\eta)+1) - \frac{1}{4}(\cos(\eta)+1)^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2r_s}{R(\cos(\eta)+1)}}}$

$\implies t(\eta) = \frac{1}{c}(\frac{R^3}{r_s})^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2(\eta)}\sec^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\sqrt{R}(R\cos(\eta)+R-2r_s) + \sqrt{2}(R+r_s)\csc\left(\frac{\eta}{2}\right)\sqrt{R\cos(\eta)+R-2r_s}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{R}\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{R\cos(\eta)+R-2r_s}}\right)\right)}{4R^{3/2}\sqrt{1 - \frac{2r_s}{R\cos(\eta)+R}}}$

con $csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$ y $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$

(cálculos hechos con mathematica)

singularidad en $r = r_s$ ($R(cos\eta + 1) = 2r_s$ y el denominador se hace 0)

H3 p4 partícula con masa m = 1 parte del reposo desde el infinito $\implies E = c^2$

$\frac{dr}{d\tau} = -c(\frac{r_s}{r})^{\frac{1}{2}} \implies$

$r^{\frac{1}{2}} dr = -c r_s^{\frac{1}{2}} d\tau \implies$

$\tau(r) = C - \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}$

$\tau(R) = 0 \implies C = \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}$

$\tau(r) = \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}$

$\tau(r_s) = \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} r_s^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{-1} r_s$ (tiempo propio(medido con el reloj que viaja con la partícula) para llegar a r_s)

$\tau(0) = \frac{2}{3}c^{-1} r_s^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}$ (tiempo propio para llegar al centro)

velocidad propia $v(r) = \frac{dr}{d\tau} = -c(\frac{r_s}{r})^{\frac{1}{2}}$ (negativa porque va hacía el centro (de coordenadas y del agujero negro)) $\implies v(r_s) = -c$

H3 p9 la energía total de un agujero negro = energía debia a la masa + energía de rotación:

$Mc^2 = M_{irr}c^2 + E_{rot}$

$M = M(A, J)$ la energía(total) es función de A y J y se puede escribir como

$M = \sqrt{\frac{Ac^4}{16\pi G^2} + \frac{4\pi J^2}{c^2 A}}$

donde notamos $M_{irr} = \sqrt{\frac{c^4 A}{16\pi G^2}}$

al final del capítulo de Agujeros negros de los apuntes para determinar la energía de rotación máxima:

se deduce que M_{irr} mínima (cuando la energía de rotación es máxima) es $\frac{1}{\sqrt{2}}M$

la condición que el área resultante no puede dsiminuir $A \geq 2A_1$

conservación de energía (los 2 agujeros que se funden en uno):

$2M_1c^2 = Mc^2$

$\implies$ Los límites de M_{irr} del agujero resultante dependen de E_{rot} (la energía total $M = 2M_1$ fijo)

M_{irr} es mínimo cuando E_{rot} es máximo (ver la explicación de los apuntes) $\implies \frac{M_{irr}}{M} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{M_{irr}}{2M_1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

M_{irr} es máximo cuando E_{rot} es mínimo $= 0 \implies max(M_{irr}) = M = 2M_1 \implies \frac{M_{irr}}{2M_1} \leq 1$

b) $M_{irr} = 2M_1$ (tiene el valor máximo) cuando no hay rotación: $a = 0 \implies J = 0 (J \leq J_{max} \forall J_{max} \geq 0)$.

en general J_{max} es determinado por la condición $a_{max} = \frac{r_s}{2}$

los agujeros iniciales no tienen rotación $\implies M_1 = M_{irr1} \implies M_1 = \sqrt{\frac{c^4 A_1}{16\pi G^2}}$

$J_{max} = Mca_{max} = 2M_1 c\frac{r_s}{2} = \frac{r_s c^3}{4G}\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}$

El área se calcula en los 2 casos $M_{irr} = \sqrt{\frac{c^4 A}{16\pi G^2}} \implies A = \frac{16\pi G^2 M_{irr}^2}{c^4}$

$M_{irr} = 2M_1 \implies A = \frac{64\pi G^2 M_1}{c^4}$

c)agujero en rotación máxima: $M_{irr} = M_1\sqrt{2} \implies A = \frac{32\pi G^2 M_1}{c^4}$

la energía de la masa en reposo se transforma en energía de rotación