1 **Notaciones**:

para p scalar notamos $\vec{\nabla} p = (\frac{\partial p}{\partial x_i})_{i=1,2,3}$ que es un vector

para el vector $\vec{f}$ notamos $\nabla \vec{f} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ que es un scalar

$\nabla^2 = \nabla \vec{\nabla}$

Ondas acústicas: En estado de equilbrio con las variables p_0, ρ_0 (constantes porque el medio es homogéneo) y $\vec{v_0}$=0 producimos perturbaciones p_1, ρ_1, $\vec{v}$ y las variables devienen:
$p = p_0 + p_1$
$\rho = \rho_0 + \rho_1$
$\vec{v}$
Las perturbaciones p_1, ρ_1, $\vec{v}$ son pequeñas de tal forma que podemos despreciar los términos de orden ≥ 2 en las ecuaciones de conservación de masa y momento que se pueden escribir:
ecuación de conservación de masa: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0$ (1)
ecuación de conservación de momento: $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1$ (2)
ecuación de gas ideal: $p = \rho \frac{k_B}{m} T$
Las oscilaciones se producen a temperatura constante $\implies$ $p = c_s^2 \rho$ donde notamos la constante $c_s = \sqrt{\frac{k_B}{m} T}$ (velocidad de sonido en condiciones isotermas)
(el desarrollo y resultado son parecidos al caso adiabático, solo que la velocidad de sonido es diferente)
Tomamos $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación de conservación de masa (1):
$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \vec{v}) = 0$ (3)
$\vec{\nabla} p_1 = c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1$ y tomamos ∇ en la ecuación de conservación de momento (2):
$\rho_0 \nabla(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) = -c_s^2 \nabla^2 \rho_1$ (4)
Restamos (4) de (3) y teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \vec{v}) = \nabla(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t})$
$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho_1$ (5)
$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 p_1$ (6)
Considerando que las perturbaciones no introducen vorticidad ($rot(\vec{v}) = 0$) podemos escribir $\vec{v}$ como gradiente de un potencial (scalar)
$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$
y de (2) se obtiene:
$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p_1 \implies \rho_1 = -\frac{\rho_0}{c_s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
introducimos en (1)
$-\frac{\rho_0}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla^2 \Phi = 0 \implies$
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \Phi$ (7)
(5), (6), (7) $\implies$ las variables (scalares) p, ρ y Φ verifican la misma ecuación de onda
La ecuación de (7) en coordenadas esféricas(consideramos oscilaciones radiales $\implies$ ondas esféricas , caso particular de los harmónicos esféricos?):
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r})$
Para k, ω cumpliendo la relación de dispersión: $\omega = c_s k$
La solución compleja de onda monocromática que viaja hacía afuera:
$\Phi = \frac{1}{r} A_\Phi rxp(i(kr - \omega t))$
$p_1 = \frac{1}{r} A exp(i(kr - \omega t))$
$\rho_1 = \frac{1}{r} A_\rho exp(i(kr - \omega t))$
Las relaciones entre las amplitudes:
$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} i \rho_0 \omega A_\Phi exp(i(kr - \omega t)) \implies A_\Phi = \frac{-iA}{\rho_0 \omega}$
$\rho_1 = \frac{p_1}{c_s^2} \implies A_\rho = \frac{A}{c_s^2}$
La solución compleja de onda monocromática que viaja hacía adentro:
$\Phi = \frac{1}{r} A_\Phi exp(i(kr + \omega t))$
$p_1 = \frac{1}{r} A exp(i(kr + \omega t))$
$\rho_1 = \frac{1}{r} A_\rho exp(i(kr + \omega t))$
Las relaciones entre las amplitudes:
$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r}(-i) \rho_0 \omega A_\Phi exp(i(kr + \omega t)) \implies A_\Phi = \frac{iA}{\rho_0 \omega}$
$A_\rho = \frac{A}{c_s^2}$
con A, $A_\Phi, A_\rho complejos$
Para determinar las frecuencias propias hay que considerar soluciones de ondas estacionarias.

La solución compleja de onda monocromática estacionaria es una superposición de una onda que viaja hacía afuera y una que viaja hacía adentro que en el caso de la presión y densidad tiene la misma amplitud, pero en el caso de Φ es la amplitud * (-1) (como se ve arriba):

Para la solución real escribimos

$A = aexp(i\alpha)$ con a real la amplitud(máxima) y δ real la fase inicial de la presión

y tomamos las partes reales de las expresiones. Las soluciones reales de una onda esférica monocromática estacionaria son:

$p_1 = \frac{a}{r}(cos(kr + \omega t + \alpha) + cos(kr - \omega t + \alpha))$

$p_1 = \frac{2a}{r}cos(kr + \alpha)cos(\omega t)$

$p_1(r = 0)$ finito $\implies cos(\alpha) = 0 \implies \alpha = \frac{2n+1}{2}\pi$

$\rho_1 = \frac{a}{c_s^2 r}(cos(kr + \omega t + \alpha) + cos(kr - \omega t + \alpha))$

$\rho_1 = \frac{2a}{c_s^2 r}cos(kr + \alpha)cos(\omega t)$

$\Phi = Re\{\frac{-ia}{\rho_0 \omega r}(cos(kr - \omega t + \alpha) + isin(kr - \omega t + \alpha)) + \frac{ia}{\rho_0 \omega r}(cos(kr + \omega t + \alpha) + isin(kr + \omega t + \alpha))\}$

$\Phi = \frac{a}{\rho_0 \omega r}Re\{-icos(kr - \omega t + \alpha) + sin(kr - \omega t + \alpha) + icos(kr + \omega t + \alpha) - sin(kr + \omega t + \alpha)\}$

$\Phi = \frac{a}{\rho_0 \omega r}(sin(kr - \omega t + \alpha) - sin(kr + \omega t + \alpha))$

$\Phi = \frac{-2a}{\rho_0 \omega r}cos(kr + \alpha)sin(\omega t)$

Notamos $v = |\vec{v}|$ $(\vec{v} = v\vec{e_r})$

$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{-2a}{\rho_0 \omega}sin(\omega t)\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}cos(kr + \alpha))$

$v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega}sin(\omega t)(\frac{-k}{r}sin(kr + \alpha) - \frac{1}{r^2}cos(kr + \alpha))$

1. $\alpha = \frac{4n+1}{2}\pi$

   $sin(kr + \alpha) = cos(kr)$

   $cos(kr + \alpha) = -sin(kr)$

   $v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega}sin(\omega t)(\frac{-k}{r}cos(kr) + \frac{1}{r^2}sin(kr))$

2. $\alpha = \frac{4n+1}{2}\pi$

   $sin(kr + \alpha) = -cos(kr)$

   $cos(kr + \alpha) = sin(kr)$

   $v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega}sin(\omega t)(\frac{k}{r}cos(kr) - \frac{1}{r^2}sin(kr))$

Condición de reflexión total (onda estacionaria):

$v(r = R, t) = 0 \forall t \implies$

para los 2 casos

$\frac{kcos(kR)}{R} = \frac{sin(kR)}{R^2} \implies tan(kR) = kR$

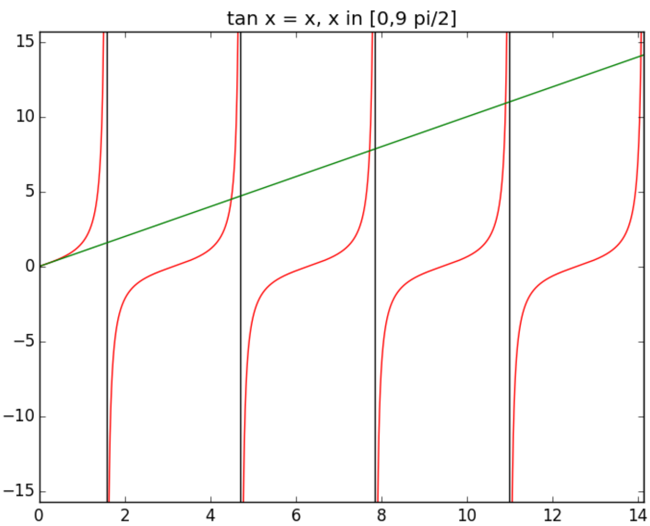
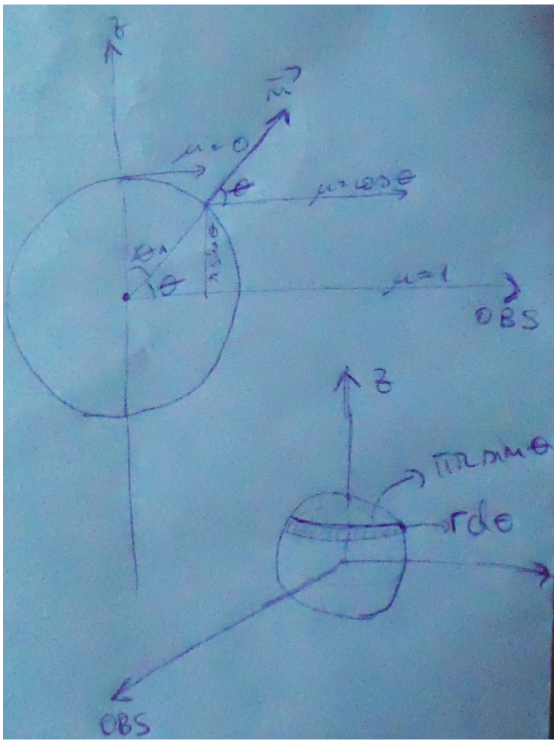


Figura 1: *Solución gráfica de la ecuación tan $x = x$: son los puntos de intersección entre el gráfico dibujado con rojo y $= tan\ x$ y el gráfico dibujado con verde $y = x$ en el intervalo [0,9 pi/2]*

Como se ve también en el gráfico para $kR > 0 \implies$ las soluciones se pueden aproximar $kR \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} \implies k_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2R}$

$\omega = c_s k \implies \omega_n \approx \sqrt{\frac{k_B}{m}T}\frac{(2n+1)\pi}{2R}$

2 $I(\mu) = I_1(\frac{2}{5} + \frac{3\mu}{5})$



Para encontrar la intensidad media sobre el disco hay que integrar $I_\nu cos\theta$ sobre $dA = \pi r sin\theta r d\theta$ (I_ν solo depende de θ con $\theta \in$ [-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] y no depende de $\phi \in$ [-π, π]) y dividir por el area total (del disco)

$I_m = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} rd\theta\pi r sin\theta I_\nu(\theta)cos\theta d\theta\frac{1}{\pi r^2}$

(se puso el factor 2 enfrente y la integral entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ porque el cos es negativo entre -$\frac{\pi}{2}$ y 0 que corresponde a la parte de abajo del disco con la misma distribución de intensidad que la parte de arriba)

Notando $\mu = cos\theta$

$I_m = 2\int_0^1 I_\nu(\mu)\mu d\mu$

Reemplazando:

$I_\nu(\mu) = I_1(\frac{2}{5} + \frac{\mu}{5})$

$I_m = 2I_1\int_0^1(\frac{2\mu}{5} + \frac{3\mu^2}{5})d\mu$

$I_m = 2I_1(\frac{\mu^2}{5} + \frac{\mu^3}{5})|_0^1$

$I_m = \frac{4I_1}{5}$

Comprobación:

1. he commprobado algunos valores del gráfico de la hoja para ver si cumplen la relación

2. he escalado un gráfico aleatorio

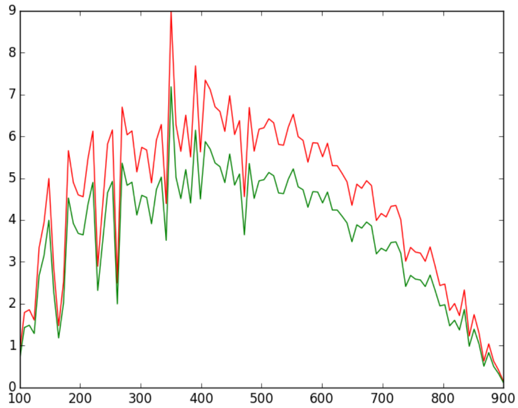


Figura 2: *Intensidad al centro arriba (con rojo) - generada de forma más o menos aleatoria - la intensidad media - abajo (con verde) que es el gráfico de arriba escalado con 4/5 - los gradientes también se escalan!*

3 La temperatura efectiva de una estrella con radio R_* y luminosidad L es la temperatura de un cuerpo negro con la misma luminosidad

$L = F_{rad}(Teff)4\pi R_*^2$

$F_{rad}(T)$ es el flujo radiativo emitido por un cuerpo negro a temperatura T

Hay que encontrar el expresión para $F_{rad}(T)$ empezando con la función de Planck

Definición del flujo radiativo:

La intensidad I_ν se define como la energía de radiación con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ que pasa por el área dA en una dirección a un ángulo θ con respecto la normal al aŕea en en ángulo sólido $d\omega$ y tiempo dt

$I_\nu = f(\vec{r}, cos\theta)$, $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$ en coordenadas esféricas

$I_\nu = \frac{dE_\nu}{cos\theta dt d\nu d\omega dA}$

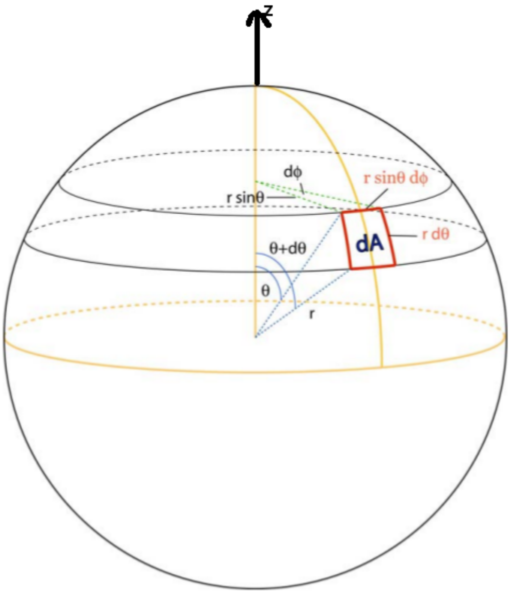


Figura 3: *Geometría esférica*

El flujo radiativo es la energía de radiación con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ que pasa por el área dA en el tiempo dt

Imaginando el centro de la esféra un punto P situado a radio R en la estrella , con la normal en la dirección $\vec{e_z}$

para determinar el flujo radiativo hay que tener en cuenta las contribuciones de la intensidad en una esféra de radio r centrada en este punto

(hay que integrar $I_\nu cos\theta$ sobre el ángulo sólido $d\omega$ para $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$)

$dA = r^2 sin\theta d\theta d\phi$

$\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{dA}{4\pi r^2} \implies d\omega = sin\theta d\theta d\phi$

$F_\nu = \int I_\nu cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_\nu cos\theta sin\theta d\theta d\phi$

Suponiendo I_ν tiene simetría azimuthal (no depende del ángulo ϕ):

$F_\nu = 2\pi \int_0^\pi I_\nu cos\theta sin\theta d\theta$
Notamos $cos\theta = \mu$
$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu$
Notamos
$F_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu$ (el flujo hacía afuera, $\theta \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$, la contribución de la intensidad en el semiespacio caracterizado por el plano tangente en el punto P a la esféra y $z \geq 0$)
$F_\nu^- = 2\pi \int_{-1}^0 I_\nu \mu d\mu$ (el flujo hacía adentro)
El flujo total:
$F_\nu = F_\nu^+ + F_\nu^-$
Suponemos la radiación isótropa (I_ν no depende de θ)
$F_\nu^+ = -F_\nu^- = \pi I_\nu$
$F_\nu = 0$
Notamos el flujo radiativo en la superficie de la estrella:
$F_\nu^{rad} = F_\nu^+(R_*)$ (en la superficie no hay flujo hacía adentro!)
En el caso del cuerpo negro **la función de Planck**:
$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{exp(\frac{hc}{\lambda kT})-1}$
$F_{rad}(T) = \pi \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu$
$F_{rad}(T) = \pi \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{exp(\frac{h\nu}{kT})-1}$
Cambio de variable $u = \frac{h\nu}{kT} \implies \nu = \frac{kT}{h} u$ y $d\nu = \frac{kT}{h} du$
$F_{rad}(T) = \pi \frac{2h}{c^2} (\frac{kT}{h})^4 \int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du$
$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u-1} du = \frac{\pi^4}{15}$
y notando $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$
$F_{rad}(T) = \sigma T^4$
$T_{eff} = (\frac{L}{4\pi\sigma R_*^2})^{\frac{1}{4}}$

4 $\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{v}{c} \implies$
$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{k_B T}{m} + v_{mic}^2}$
Teniendo en cuenta FeI son líneas de absorción y se forman a menos altura (15648A a 20 km y T $\approx$ 6000K y 6302A a 170 km y T $\approx$ 5000K) a la diferencia de la línea de $H\alpha$ de emisión que se forma en la parte mas alta y más caliente ($\approx$ 15000K) de la atmósfera, $v_{mic} \approx 1000 m/s$ y $m = m_u A$ donde m_u es la masa de un protón y A es la masa atómica (1 para H y 56 para Fe) se calcula el desplazamiento Doppler (para cada velocidad por separado para ver el efecto de cada una: térmica, microturbulencia y total)

```
Line: Halpha , Lambda (A): 6563.0, T = 15000.0(K), A = 1, m=1.6605e-27 kg
vterm=1.1168e+04 m/s, vtot = 1.1212e+04 m/s
dlTerm = 2.4431e-01 A, dlMic = 2.1877e-02 A, dlTot = 2.4529e-01 A

Line: FeI , Lambda (A): 6302.0, T = 5000.0(K), A = 56, m=9.2990e-26 kg
vterm=8.6160e+02 m/s, vtot = 1.3200e+03 m/s
dlTerm = 1.8099e-02 A, dlMic = 2.1007e-02 A, dlTot = 2.7729e-02 A

Line: FeI , Lambda (A): 15648.0, T = 6000.0(K), A = 56, m=9.2990e-26 kg
vterm=9.4384e+02 m/s, vtot = 1.3751e+03 m/s
dlTerm = 4.9231e-02 A, dlMic = 5.2160e-02 A, dlTot = 7.1724e-02 A
```

Para las lineas de hierro el efecto Doppler debido a la microturbulencia es parecido al efecto Doppler debido al movimiento térmico(desplazamientos parecidos) , pero en el caso de la línea de emision de hidrógeno la alta temperatura hace que el efecto térmico domine el efecto de la microturbulencia
https://github.com/beevageeva/fsol/