

1 f1, f2 gaussian variables \implies

$$P(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{f_1^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$P(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{f_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$P(f_1, f_2) = \frac{\exp(-Q)}{2\pi\sqrt{\det(M)}}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

y $Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j (M^{-1})_{ij}$ (en el caso general)

$$\det(M) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2\det(M)} (f_1^2 \sigma_2^2 - 2f_1 f_2 \sigma_{12} + f_2^2 \sigma_1^2)$$

$$P(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-f_1^2 \sigma_2^2 - f_2^2 \sigma_1^2 + 2f_1 f_2 \sigma_{12}}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}\right)$$

$$P(f_1|f_2) = \frac{P(f_1, f_2)}{P(f_2)} = \frac{1}{2\pi(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-f_1^2 \sigma_2^2 - f_2^2 \sigma_1^2 + 2f_1 f_2 \sigma_{12}}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}\right) \sqrt{2\pi} \sigma_2 \exp\left(\frac{f_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$\implies P(f_1|f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-f_1^2 \sigma_2^2 - f_2^2 \sigma_1^2 + 2f_1 f_2 \sigma_{12}}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} + \frac{f_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

el argumento del exponente dividido por -2:

$$\frac{f_1^2 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2 - 2f_1 f_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} - \frac{f_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{f_1^2 \sigma_2^4 + f_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2f_1 f_2 \sigma_{12} \sigma_2^2 - f_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}$$

$$= \frac{f_1^2 \sigma_2^4 - 2f_1 f_2 \sigma_{12} \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})} = \frac{(f_1 \sigma_2^2 - f_2 \sigma_{12})^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})} = \frac{(f_1 - f_2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2})^2}{\sigma_1^2 (1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})}$$

Si notamos $\sigma_1' = \sigma_1(1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})^{\frac{1}{2}}$

$$\text{observamos que } P(f_1|f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1'} \exp\left(-\frac{(f_1 - f_2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2})^2}{2\sigma_1'^2}\right)$$

2 las ecuaciones de continuidad y movimiento linealizadas de los fluidos en coordenadas fijas en el tiempo (las coordenadas comóviles R están relacionadas a las fijas x a través del factor de escala: $R = x/a$) y donde \vec{v} representa la velocidad peculiar :

$$\nabla \cdot \vec{v} = -a\dot{\delta}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{1}{a} \vec{\nabla} \Phi$$

se ha supuesto el background con las variables $\rho_b(t)$, $p_b(t)$ (no son funciones de x \implies sin gradientes espaciales) y con el campo de velocidades (peculiares) 0 y la perturbación: $\delta\rho_b, \delta_p p$ con $\delta, \delta_p \ll 1$ necesario para hacer la aprox lineal de tal forma que $\rho(x, t) = \rho_b(t) + \rho_b(t)\delta(x, t)$ y $p(x, t) = p_b(t) + p_b(t)\delta_p(x, t)$

Definimos c_s la velocidad de sonido como $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$

hacemos $\nabla \cdot$ de la segunda ec. (de movimiento):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\rho_b} \nabla^2 p - \frac{1}{a} \nabla^2 \Phi$$

$$\text{y reemplazamos } \nabla \cdot \vec{v} = -a\dot{\delta}, \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \rho \frac{dp}{d\rho} \implies \nabla^2 p = c_s^2 \nabla^2 \rho = c_s^2 \rho_b \nabla^2 \delta, \nabla^2 \Phi = 4\pi \rho_b \delta a^2$$

$$\implies \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = c_s^2 \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta + 4\pi G \rho_b \delta$$

si consideramos soluciones de ondas en el espacio de forma:

$$\delta(x, t) = \delta_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

reemplazamos arriba (observando que $\vec{\nabla} \phi = i\vec{k} \phi$ para ϕ solución de onda monocromática como arriba)

$$\implies \ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = -k^2 c_s^2 \frac{1}{a^2} \delta_k + 4\pi G \rho_b \delta_k$$

$$\implies \ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = (4\pi G \rho_b - k^2 c_s^2 \frac{1}{a^2}) \delta_k$$

si $4\pi G \rho_b - k^2 c_s^2 \frac{1}{a^2} < 0$

δ_k oscila y k para cual el término a la derecha se anula es:

$$k^2 = \frac{4\pi G \rho_b a^2}{c_s^2}$$

Notamos la longitud de Jeans la longitud de onda correspondiente a este k: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ de donde:

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{4G \rho_b a^2}}$$

(para oscilaciones con longitud de onda menores que λ_J δ_k va a oscilar)

la masa Jeans correspondiente:

$$M_J = \frac{4\pi \lambda_J^3}{3} \rho_b(t = t_0)$$

(aquí evaluamos ρ_b en $t = t_0$ porque las ecuaciones están en las coordenadas fijas)

Para calcular $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$: de la relación $\rho = \rho_c(\Omega_m(\frac{p}{p_b})^{\frac{3}{4}} + \Omega_r\frac{p}{p_b})$

$$\frac{dp}{d\rho} = \rho_c(\Omega_m p_b^{-\frac{3}{4}} \frac{3}{4} p^{-\frac{1}{4}} + \frac{\Omega_r}{p_b})$$

que evaluamos para $p = p_b$

$$\frac{dp}{d\rho}(p = p_b) = \rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m p_b^{-\frac{3}{4}} p_b^{-\frac{1}{4}} + \Omega_r p_b^{-1}) = \rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m + \Omega_r)p_b^{-1}$$

$$\implies c_s^2 = p_b(\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m + \Omega_r))^{-1}$$

$$\implies \lambda_J = \sqrt{\frac{\pi p_b}{4G\rho_c(\frac{3}{4}\Omega_m + \Omega_r)\rho_b a^2}}$$

3 Fluctuación tipo top-hat:

background: ρ_b en una esfera de radio R (comóvil)

perturbación: $\rho_b \delta$ en una esfera de radio $R(1+a)$

condición para hacer la aproximación lineal: $a, \delta \ll 1$

en la aprox. lineal solo guardamos términos de primer orden (términos de forma $a\delta \approx 0$)

universo dominado por la radiación $\implies \rho \propto R^{-4}$ (conservación de la masa)

que aplicamos para el background y para la perturbación \implies

$$\rho_b R^4 = \rho_b(1+\delta)R^4(1+a)^4 \implies$$

$$(1+\delta)(1+a)^4 = 1 \implies \text{guardando solo térm. de primer orden:}$$

$$1 + \delta + 4a = 1 \implies a = -\frac{\delta}{4}$$

Ec Friedmann(sin const. cosmológica):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)R$$

para la radiación: $p = \frac{1}{3}\rho \implies$ reemplazando en la ec de arriba:

$$\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3}\rho R$$

que escribimos para background y fluctuación:

$$\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3}\rho_b R$$

$$(R + a) = -\frac{8\pi G}{3}\rho_b(1+\delta)R(1+a) \implies \text{guardando solo term de primer orden:}$$

$$\ddot{R}(1+a) + 2\dot{R}\dot{a} + R\ddot{a} = -\frac{8\pi G}{3}R\rho_b(1+\delta+a)$$

$$\implies 2\dot{R}\dot{a} + R\ddot{a} = -\frac{8\pi G}{3}R\rho_b\delta = \frac{32\pi G}{3}R\rho_b a \quad (\Leftarrow a = -4\delta)$$

pasamos de a a δ (que tienen una relación lineal) \implies :

$$\implies 2\dot{R}\dot{\delta} + R\ddot{\delta} = \frac{32\pi G}{3}R\rho_b\delta$$

$$\implies \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta} = \frac{32\pi G}{3}\rho_b\delta$$

Ec Friedmann(sin curvatura y const. cosmológica):

$$(\frac{\dot{R}}{R})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b$$

$$\implies \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta} = 4(\frac{\dot{R}}{R})^2\delta$$

universo dominado por radiación:

$$R = R_0(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{R} = R_0\frac{1}{2}\frac{1}{t_0}(\frac{t}{t_0})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\implies \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{2t}$$

reemplazamos en la ec de mas arriba \implies

$$\implies \ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} - \frac{1}{t^2}\delta = 0$$

Buscamos soluciones de forma $\delta = Ct^\alpha$ y después de reemplazar :

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0 \implies \alpha = 1 \text{ o } \alpha = -1$$

la solución general es de forma $\delta = C_1 t + C_2 t^{-1}$

donde $C_1 t$ se llama modo creciente y $C_2 t^{-1}$ se llama modo decreciente

Consideramos solo el modo creciente: $\delta \propto t$

la fluctuación en el campo grav: $\delta_\Phi = \frac{G\delta_M}{R}$ donde

$$\delta_M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_b\delta = R^2\frac{1}{2G}(\frac{\dot{R}}{R})^2\delta \quad (\Leftarrow \text{ec friedmann de la energía sin curv y const cosm.})$$

$$\implies \delta_\Phi \propto \dot{R}^2 t = \text{const} \quad (\Leftarrow \dot{R} \propto t^{-\frac{1}{2}} \text{ en un universo dominado por radiación})$$

$$4 \quad \langle \delta_r^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) W_r^2(k) k^2 dk$$

donde $W_r(k)$ es la función ventana que es la transformada fourier de la función de pertenencia a la esfera de radio r (tiene valor 1 para los puntos dentro de la esfera y 0 para los de afuera)

$$W_r(k) = \frac{3}{(kr)^3} (\sin(kr) - krcos(kr))$$

$$\implies \langle \delta_r^2 \rangle = \frac{9}{2\pi^2 r^6} \int_0^\infty \frac{1}{k^4} P(k) (\sin(kr) - krcos(kr))^2 dk$$

$$= \frac{9\sigma_8^2 19843}{2\pi^2 r^6} \int_0^\infty k^3 (\ln(1 + 11.14k))^2 (1 + 18.5k + 5880k^2 + 17580k^3 + 1.04 \cdot 10^6 k^4)^{\frac{1}{2}} (\sin(kr) - krcos(kr))^2 dk$$

5 solución general con A, B constantes:

$$\delta = At - \frac{B}{t}$$

$$\implies \dot{\delta} = A + \frac{B}{t^2}$$

condiciones iniciales $\delta_0 = \delta(t = t_0)$ y $\dot{\delta}_0 = \dot{\delta}(t = t_0)$

Consideramos solo la situación $\delta_0 = 0$ y $\dot{\delta}_0 \neq 0$ (la situación $\delta_0 \neq 0$ y $\dot{\delta}_0 = 0$ no es una condición inicial real porque no puede haber una fluctuación sin que haya un cambio)

$$\implies At_0 = \frac{B}{t_0} \implies B = At_0^2$$

$$\implies \dot{\delta}_0 = A + \frac{1}{t_0^2} At_0^2 = 2A \implies A = \frac{1}{2} \dot{\delta}_0$$

Consideramos ahora solo el modo creciente:

$$\delta = At$$

$$\dot{\delta} = A \implies \delta = \dot{\delta}t \implies \delta_0 = \dot{\delta}_0 t_0$$

$$\delta = At = \frac{1}{2} \dot{\delta}_0 t = \frac{1}{2} \dot{\delta}_0 \frac{t}{t_0}$$

universo dominado por radiación $\implies t \propto a^2$

si definimos el factor de crecimiento: $D(a) = a^2$

$$\delta = \frac{1}{2} \dot{\delta}_0 \frac{D(a)}{D(a_0)}$$