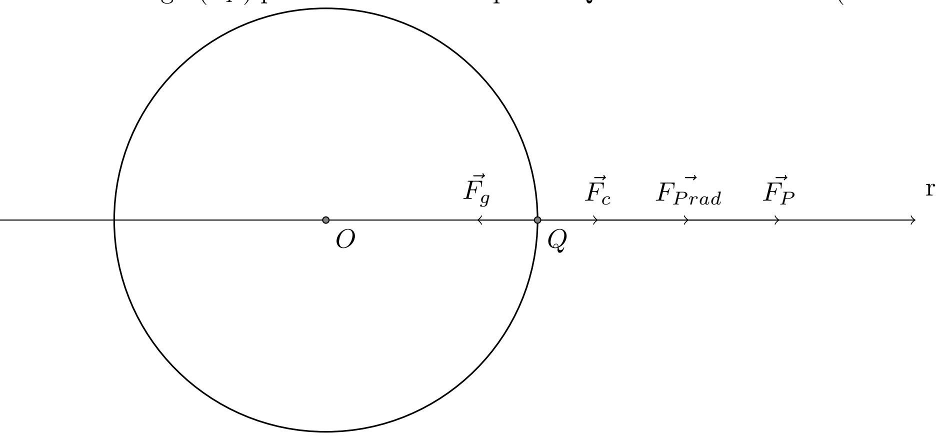
1 El sentido de las fuerzas gravitatoria($\vec{F_g}$), centrífuga($\vec{F_c}$), debida al gradiente de presión de radiación($\vec{F_{Prad}}$) y del gas($\vec{F_P}$)que accionan en el punto Q situado al radio r (en coordenadas esféricas, suponiendo simetría esférica):



Por la simetría esférica las variables ρ, P, T, .. no dependen de los ángulos θ y ϕ
$\nabla_r f = \frac{df}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r}$
$\nabla_\theta f = \nabla_\phi f = 0$
(solo la componente en la dirección $\vec{e_r}$ del gradiente es diferente de 0)
Notamos F_g, F_c, F_{Prad}, F_P los módulos de estas fuerzas por unidad de masa (acceleraciones)
La ecuación de equilibrio hidrostático:
$F_g = F_P + F_c + F_{Prad}$
donde
$F_g = \frac{GM_r}{r^2}$
$F_P = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$
$F_{Prad} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial Prad}{\partial r}$
$Prad = \frac{4\sigma T^4}{3c}$
$\Longrightarrow$
$F_{Prad} = -\frac{16\sigma T^3}{3c\rho}\frac{\partial T}{\partial r}$
Los gradientes de temperatura y presión son negativos lo que justifica el signo -
$F_c = \frac{v_r^2}{r}$ donde v_r es el módulo de la velocidad de rotación (la dirección es tangente a la esfera en Q)
$v_r = \frac{2\pi r}{A}$ donde A es el periodo de rotación de 27 días(A = 27 * 24 * 3600 s) $\Longrightarrow$
$F_c = \frac{4\pi^2 r}{A^2}$
Si despreciamos F_c y F_{Prad} la ecuación del equilibrio hidrostático:
$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2}$
Usamos las notaciones y valores:

$M_S = 1.9891 \cdot 10^{30} kg$ para la masa del sol

$R_S = 0.7 \cdot 10^9 m$ para el radio del sol

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}$ para la constante de Stefan-Boltzmann

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ para la constante de gravitación universal

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ para la velocidad de la luz

Notamos $q = \frac{r}{R_S}$ y $m_f = \frac{M_r}{M_S}$ y podemos considerar las variables P, ρ, T, m_f de la tabla del modelo estándar como funciones de q

Hay que estimar los valores de F_c, F_g y F_{Prad} para $q \in \{0.1, 0.3, 1\}$
$F_c = \frac{4\pi^2 R_S}{A^2} q$
$F_g = \frac{GM_S}{R_S^2}\frac{m_f}{q^2}$
$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{1}{R_S}\frac{\partial T}{\partial q} \Longrightarrow$
$F_{Prad} = -\frac{16\sigma}{3cR_S}\frac{T^3}{\rho}\frac{\partial T}{\partial q}$
En la tabla tenemos n + 1 valores discretos de q: $q_0 = 0, q_1, ..q_n = 1$ y de las funciones f(q), con f que quede ser T, ρ, m_f,..

Para calcular los valores de estas funciones y de las derivadas $\forall q \in [0, 1]$:

caso1:

$\exists i \in \{0, ..n\} | q = q_i$

$$f(q) = f(q_i)$$
$$i < n \implies \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_{i+1}) - f(q_i)}{q_{i+1} - q_i}$$
$$i = n \implies \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_n) - f(q_{n-1})}{q_n - q_{n-1}}$$

caso2:

$$\exists i \in \{1, ..n\} | q \in (q_{i-1}, q_i)$$

$$f(q) = f(q_{i-1}) + \frac{(q - q_{i-1})(f(q_i) - f(q_{i-1}))}{q_i - q_{i-1}}$$

(interpolación lineal)

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{f(q_i) - f(q_{i-1})}{q_i - q_{i-1}}$$

En el caso del problema: $q \in \{0, 0.3, 1\}$

```
q=1.0e-01
mf=7.8184e-02
rho=8.7594e+04 kg/m3
T=1.3073e+07 K
dT/dq=-3.7875e+07 K
dT/dr=-5.4107e-02 K/m
Fg=2.1182e+03 m/s2
Fc=5.0781e-04 m/s2
Fc/Fg=2.3974e-07
Fprad=1.3910e+00 m/s2
Fprad/Fg=6.5670e-04

q=3.0e-01
mf=6.0629e-01
rho=1.2288e+04 kg/m3
T=6.8316e+06 K
dT/dq=-2.1250e+07 K
dT/dr=-3.0357e-02 K/m
Fg=1.8251e+03 m/s2
Fc=1.5234e-03 m/s2
Fc/Fg=8.3472e-07
Fprad=7.9396e-01 m/s2
Fprad/Fg=4.3503e-04

q=1.0e+00
mf=1.0000e+00
rho=2.5120e-04 kg/m3
T=5.7780e+03 K
dT/dq=-2.4630e+07 K
dT/dr=-3.5186e-02 K/m
Fg=2.7092e+02 m/s2
Fc=5.0781e-03 m/s2
Fc/Fg=1.8744e-05
Fprad=2.7236e-02 m/s2
Fprad/Fg=1.0053e-04
```

En los 3 casos $\frac{F_c}{F_g} < \frac{F_Prad}{F_g} \approx 0$

2 $\epsilon = 2.54 \cdot 10^4 \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \frac{erg}{g \cdot s}$

S.I.:

$1erg = 10^{-7} J$,

$1g = 10^{-3} kg$

$\epsilon = 2.54 \cdot \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \frac{J}{kg \cdot s}$

$E_{nuc} = 2.54 \cdot \rho X^2 T_9^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3.37}{T_9^{\frac{1}{3}}}} \cdot M_S \cdot mf_{nuc}$ W (1W = 1J/s)

Calculamos para el núcleo: $\frac{r}{R_S} \leq 2.0130e-01$ y $\frac{r}{R_S} \leq 2.3760e-01$

```
rfNuc= Rnuc/RS = 2.0130e-01
mfNuc= Mnuc/MS = 3.3880e-01
T=1.3114e+07 K
T9=1.3114e-02 K
rho=9.7816e+04 kg/m3
X=5.0200e-01
Enuc = 4.717933e+29 W
```

```
rfNuc= Rnuc/RS = 2.3760e-01
mfNuc= Mnuc/MS = 4.4520e-01
T=1.2579e+07 K
T9=1.2579e-02 K
rho=8.9590e+04 kg/m3
X=5.2333e-01
Enuc = 5.195219e+29 W
```

3 $\mu = \frac{1}{\sum_j \frac{X_j}{\mu_j}}$ donde X_j es la abundancia de cada elemento

$\mu_j = \frac{A_j}{N_j}$ donde N_j es el número de partículas / núcleo ($N_j = 1$ núcleo + núm. electrones libres) y A_j es la masa atómica del elemento($A_j =$ núm protones + num. neutrones del núcleo)

Para los elementos completamente ionizados(todos los electrones libres) $\mu_j = \frac{A_j}{1+Z_j}$ donde $Z_j =$ núm protones del núcleo(núm atómico) y en este caso para los metales $\mu_j \approx 2$

Hay que considerar para cado estado de ionización un término en la suma con abundancia $p_{j_i} \cdot X_j$ donde p_{j_i} es la proporción de estos iones de todos los átomos de este elemento (A_j va a ser el mismo, pero N_j va a ser diferente para cada estado de ionización)

Consideramos $A_{met} = 17$

Considerando n elementos con números atómicos: $Z_1, ..Z_n$ de las ecuaciones de Saha tenemos:

$p_{j_i} = f(N_e, T, \rho) \forall j \in \{1, ..n\}, \forall i \in \{1, ..Z_j\}$

donde N_e es el número total de electrones:

$N_e = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{Z_j} p_{j_i} \cdot i$

De este sistema de ecuaciones podemos determinar p_{j_i}

El grado de ionización de un elemento es la proporción de todos los iones de un elemento de los átomos del elemento: $\eta_j = \sum_{i=1}^{Z_j} p_{j_i}$

H, He estado neutro

$\mu_H = \frac{1}{1} = 1$ ($N_H = 1$ núcleo, $A_H = 1$)

$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4$ ($N_{He} = 1$ núcleo, $A_{He} = 4$)

$\mu = \frac{1}{X + \frac{Y}{4}}$

H, He totalmente ionizados

$\mu_{H^+} = \frac{1}{2}$ ($N_H = 1$ núcleo + $1e^- = 2$, $A_H = 1$)

$\mu_{He^{+2}} = \frac{4}{3}$ ($N_{He} = 1$ núcleo + 2 $e^- = 3$, $A_{He} = 4$)

$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4}}$

H, He y metales en estado neutro

$\mu_H = \frac{1}{1} = 1$ ($N_H = 1$ núcleo, $A_H = 1$)

$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4$ ($N_{He} = 1$ núcleo, $A_{He} = 4$)

$\mu_{met} = \frac{17}{1} = 17$ ($N_{met} = 1$ núcleo, $A_{met} = 17$)

$\mu = \frac{1}{X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17}}$

H, He totalmente ionizados y una fracción 50% de metales totalmente ionizados(si 50% representaba el grado de ionización se hizo la suposición que solo se encontraban en el estado de ionización con todos los electrones libres sin tener en cuenta otros estados)

$\mu_{H^+} = \frac{1}{2}$ ($N_H = 1$ núcleo + $1e^- = 2$, $A_H = 1$)

$\mu_{He^{+2}} = \frac{4}{3}$ (N_{He} = 1 núcleo + 2 e^- = 3, A_{He} = 4)

$\mu_{met} = \frac{17}{1} = 17$ (N_{met} = 1 núcleo , A_{met} = 17)

$\mu_{met^{+Z_{met}}} \approx 2$

$\mu = \frac{1}{2X+\frac{3Y}{4}+0.5\cdot\frac{Z}{17}+0.5\cdot\frac{Z}{2}} = \frac{1}{2X+\frac{3Y}{4}+\frac{19Z}{68}}$

X = 0.7346, Y = 0.2485, Z = 0.0169

Para los casos de arriba:

H,He y metales en estado neutro: $\mu = 1.2536$

H,He totalmente ionizados y metales ionizados totalmente 50%: $\mu = 0.6023$

μ está creciendo con el radio porque a radio menor donde la temperatura es mas alta los elementos están mas ionizados y los electrones libres se suman a N_j y μ_j es mas pequeño

Mirando en la tabla del modelo estándar intentamos a encontrar valores de $\mu \in [0.611, 1.247]$ (X = 0.735) y los valores de los 2 casos de arriba no cuadran

$\mu_H = \frac{1}{1} = 1$ (N_H = 1 núcleo, A_H = 1)

$\mu_{H^{+1}} = \frac{1}{2}$ (N_H = 1 núcleo + 1 e^- = 2, A_H = 1)

$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4$ (N_{He} = 1 núcleo, A_{He} = 4)

$\mu_{He^{+1}} = \frac{4}{2} = 2$ (N_{He} = 1 núcleo + 1 e^- = 2, A_{He} = 4)

$\mu_{met} = \frac{17}{1} = 17$ (N_{met} = 1 núcleo, A_{met} = 17)

$\mu_{met^{+1}} = \frac{17}{2}$ (N_{met} = 1 núcleo + 1 e^- = 2, A_{met} = 17)

Considerando metales una vez ionizados en proporción p y H y He solo en forma de átomos neutros:

$\mu = \frac{1}{(X+\frac{Y}{4}(1-p)\frac{Z}{17}+2p\frac{Z}{17}}$

$X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17} + p\frac{Z}{17} = \frac{1}{\mu}$

$p = \frac{17}{Z}(\frac{1}{\mu} - X - \frac{Y}{4} - \frac{Z}{17})$

$p(\mu = 1.247) = 4.2303 > 1$ lo que implica que hay que considerar mas estados de ionización

Intentamos encontrar una solución considerando H, He y metales una vez ionizados en la misma proporción p

$\mu = \frac{1}{(1-p)X+2pX+(1-p)\frac{Y}{4}+p\frac{Y}{2}+(1-p)\frac{Z}{17}+2p\frac{Z}{17}}$

$X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17} + p(X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{17}) = \frac{1}{\mu}$

$p = \frac{\frac{1}{\mu}-X-\frac{Y}{4}-\frac{Z}{17}}{X+\frac{Y}{4}+\frac{Z}{17}}$

$p(\mu = 0.611) = 1.05168 > 1, p(\mu = 1.247) = 5.2719e-03, \mu(p = 1) = 6.2679e-01$ lo que implica que con un grado pequeño de ionización ($p \geq 5.2719e-3$) de todos los elementos (solo consideramos una vez ionizados) obtenemeos valores de μ coherentes con la tabla con $\mu = 1.247$ en la superficie hasta llegar a $\mu = 0.6267$ y $p = 1$, pero si queremos tener valores mas pequeños de μ (a radio menor, hasta $\mu = 0.611$) hay que considerar los elementos mas veces ionizados.

En realidad habría que considerar el caso general con p_{j_i} nenulos y distinctos para obtener valores coherentes con las ecuaciones de Saha

Tenemos de las ecuaciones de Saha p la proporción de hidrógeno ionizado y q_1, q_2 las proporciones de helio ionizado (una vez y 2 veces ionizado)

$\mu_H = \frac{1}{1} = 1$ (N_H = 1 núcleo, A_H = 1)

$\mu_{H^{+1}} = \frac{1}{2}$ (N_H = 1 núcleo + 1 e^- = 2, A_H = 1)

$\mu_{He} = \frac{4}{1} = 4$ (N_{He} = 1 núcleo, A_{He} = 4)

$\mu_{He^{+1}} = \frac{4}{2} = 2$ (N_{He} = 1 núcleo + 1 e^- = 2, A_{He} = 4)

$\mu_{He^{+2}} = \frac{4}{3}$ (N_{He} = 1 núcleo + 2 e^- = 3, A_{He} = 4)

$\mu = \frac{1}{(1-p)X+2pX+(1-q_1-q_2)\frac{Y}{4}+q_1\frac{Y}{2}+q_2\frac{3Y}{4}}$

$\mu = \frac{1}{X(1+p)+Y(\frac{1}{4}+\frac{q_1}{4}+\frac{q_2}{2})}$

https://github.com/beevageeva/fsol/