

1 Notaciones:

para p scalar notamos $\vec{\nabla}p = (\frac{\partial p}{\partial x_i})_{i=1,2,3}$ que es un vector

para el vector \vec{f} notamos $\nabla \vec{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ que es un scalar

$$\nabla^2 = \nabla \vec{\nabla}$$

Ondas acústicas: En estado de equilibrio con las variables p_0, ρ_0 (constantes porque el medio es homogéneo) y $\vec{v}_0=0$ producimos perturbaciones p_1, ρ_1, \vec{v} y las variables devienen:

$$p = p_0 + p_1$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$\vec{v}$$

Las perturbaciones p_1, ρ_1, \vec{v} son pequeñas de tal forma que podemos despreciar los términos de orden ≥ 2 en las ecuaciones de conservación de masa y momento que se pueden escribir:

$$\text{ecuación de conservación de masa: } \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ecuación de conservación de momento: } \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 \quad (2)$$

$$\text{ecuación de gas ideal: } p = \rho \frac{k_B}{m} T$$

Las oscilaciones se producen a temperatura constante $\Rightarrow p = c_s^2 \rho$ donde notamos la constante $c_s = \sqrt{\frac{k_B}{m} T}$ (velocidad de sonido en condiciones isotermas)

(el desarrollo y resultado son parecidos al caso adiabático, solo que la velocidad de sonido es diferente)

Tomamos $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación de conservación de masa (1):

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

$\vec{\nabla} p_1 = c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1$ y tomamos ∇ en la ecuación de conservación de momento (2):

$$\rho_0 \nabla \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -c_s^2 \nabla^2 \rho_1 \quad (4)$$

Restamos (4) de (3) y teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{v}) = \nabla \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 p_1 \quad (6)$$

Considerando que las perturbaciones no introducen vorticidad ($\text{rot}(\vec{v}) = 0$) podemos escribir \vec{v} como gradiente de un potencial (scalar)

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$$

y de (2) se obtiene:

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p_1 \Rightarrow \rho_1 = -\frac{\rho_0}{c_s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

introducimos en (1)

$$-\frac{\rho_0}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \Phi \quad (7)$$

(5), (6), (7) \Rightarrow las variables (scalares) p, ρ y Φ verifican la misma ecuación de onda

La ecuación de (7) en coordenadas esféricas (consideramos oscilaciones radiales \Rightarrow ondas esféricas, caso particular de los armónicos esféricos?):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$$

Para k, ω cumpliendo la relación de dispersión: $\omega = c_s k$

La solución compleja de onda monocromática que viaja hacia afuera:

$$\Phi = \frac{1}{r} A_\Phi \exp(i(kr - \omega t))$$

$$p_1 = \frac{1}{r} A_p \exp(i(kr - \omega t))$$

$$\rho_1 = \frac{1}{r} A_\rho \exp(i(kr - \omega t))$$

Las relaciones entre las amplitudes:

$$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} i \rho_0 \omega A_\Phi \exp(i(kr - \omega t)) \Rightarrow A_\Phi = \frac{-i A_p}{\rho_0 \omega}$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_1}{c_s^2} \Rightarrow A_\rho = \frac{A_p}{c_s^2}$$

La solución compleja de onda monocromática que viaja hacia adentro:

$$\Phi = \frac{1}{r} A_\Phi \exp(i(kr + \omega t))$$

$$p_1 = \frac{1}{r} A_p \exp(i(kr + \omega t))$$

$$\rho_1 = \frac{1}{r} A_\rho \exp(i(kr + \omega t))$$

Las relaciones entre las amplitudes:

$$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} (-i) \rho_0 \omega A_\Phi \exp(i(kr + \omega t)) \Rightarrow A_\Phi = \frac{i A_p}{\rho_0 \omega}$$

$$A_\rho = \frac{A_p}{c_s^2}$$

con A, A_Φ, A_ρ complejos

Para determinar las frecuencias propias hay que considerar soluciones de ondas estacionarias.

La solución compleja de onda monocromática estacionaria es una superposición de una onda que viaja hacia afuera y una que viaja hacia adentro que en el caso de la presión y densidad tiene la misma amplitud, pero en el caso de Φ es la amplitud $\cdot (-1)$ (como se ve arriba):

Para la solución real escribimos

$A = a \exp(i\alpha)$ con a real la amplitud(máxima) y δ real la fase inicial de la presión

y tomamos las partes reales de las expresiones. Las soluciones reales de una onda esférica monocromática estacionaria son:

$$p_1 = \frac{a}{r} (\cos(kr + \omega t + \alpha) + \cos(kr - \omega t + \alpha))$$

$$p_1 = \frac{2a}{r} \cos(kr + \alpha) \cos(\omega t)$$

$$p_1(r = 0) \text{ finito} \implies \cos(\alpha) = 0 \implies \alpha = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$\rho_1 = \frac{a}{c_s^2 r} (\cos(kr + \omega t + \alpha) + \cos(kr - \omega t + \alpha))$$

$$\rho_1 = \frac{2a}{c_s^2 r} \cos(kr + \alpha) \cos(\omega t)$$

$$\Phi = \text{Re} \left\{ \frac{-ia}{\rho_0 \omega r} (\cos(kr - \omega t + \alpha) + i \sin(kr - \omega t + \alpha)) + \frac{ia}{\rho_0 \omega r} (\cos(kr + \omega t + \alpha) + i \sin(kr + \omega t + \alpha)) \right\}$$

$$\Phi = \frac{a}{\rho_0 \omega r} \text{Re} \{ -i \cos(kr - \omega t + \alpha) + \sin(kr - \omega t + \alpha) + i \cos(kr + \omega t + \alpha) - \sin(kr + \omega t + \alpha) \}$$

$$\Phi = \frac{a}{\rho_0 \omega r} (\sin(kr - \omega t + \alpha) - \sin(kr + \omega t + \alpha))$$

$$\Phi = \frac{-2a}{\rho_0 \omega r} \cos(kr + \alpha) \sin(\omega t)$$

Notamos $v = |\vec{v}|$ ($\vec{v} = v \vec{e}_r$)

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{-2a}{\rho_0 \omega} \sin(\omega t) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \cos(kr + \alpha) \right)$$

$$v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega} \sin(\omega t) \left(\frac{-k}{r} \sin(kr + \alpha) - \frac{1}{r^2} \cos(kr + \alpha) \right)$$

$$1. \alpha = \frac{4n+1}{2}\pi$$

$$\sin(kr + \alpha) = \cos(kr)$$

$$\cos(kr + \alpha) = -\sin(kr)$$

$$v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega} \sin(\omega t) \left(\frac{k}{r} \cos(kr) + \frac{1}{r^2} \sin(kr) \right)$$

$$2. \alpha = \frac{4n+1}{2}\pi$$

$$\sin(kr + \alpha) = -\cos(kr)$$

$$\cos(kr + \alpha) = \sin(kr)$$

$$v = \frac{-2a}{\rho_0 \omega} \sin(\omega t) \left(\frac{k}{r} \cos(kr) - \frac{1}{r^2} \sin(kr) \right)$$

Condición de reflexión total (onda estacionaria):

$$v(r = R, t) = 0 \forall t \implies$$

para los 2 casos

$$\frac{k \cos(kR)}{R} = \frac{\sin(kR)}{R^2} \implies \tan(kR) = kR$$

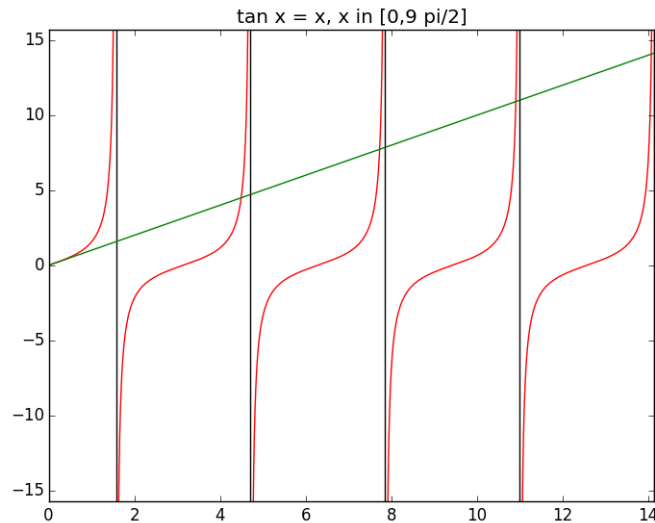
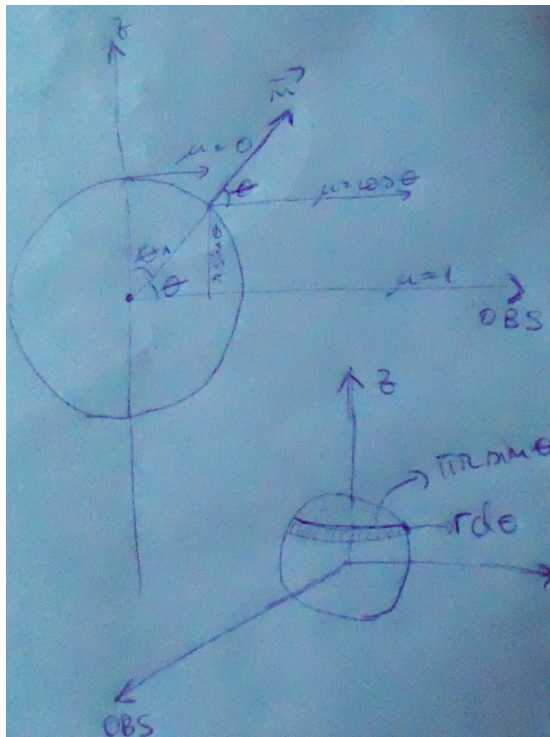


Figura 1: Solución gráfica de la ecuación $\tan x = x$: son los puntos de intersección entre el gráfico dibujado con rojo y $y = \tan x$ y el gráfico dibujado con verde $y = x$ en el intervalo $[0, 9 \pi/2]$

Como se ve también en el gráfico para $kR > 0 \Rightarrow$ las soluciones se pueden aproximar $kR \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow k_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2R}$

$$\omega = c_s k \Rightarrow \omega_n \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{(2n+1)\pi}{2R}$$

2 $I(\mu) = I_1(\frac{2}{5} + \frac{3\mu}{5})$



Para encontrar la intensidad media sobre el disco

hacemos la suposición que los rayos son paralelos a la línea de visión (hacia el observador) y que hacen el mismo ángulo θ como si estuvieran en el plano determinado por \vec{e}_z y la línea de visión (independiente de ϕ)

y luego integramos $I_\nu \cos\theta$ sobre $dA = \pi r \sin\theta r d\theta$ (I_ν solo depende de θ con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y no depende de $\phi \in [-\pi, \pi]$) y dividir por el area total (del disco)

$$I_m = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \pi r \sin\theta I_\nu(\theta) \cos\theta d\theta \frac{1}{\pi r^2}$$

(se puso el factor 2 enfrente y la integral entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ porque $\sin(\theta)$ es negativo entre $-\frac{\pi}{2}$ y 0 que corresponde a la parte de abajo del disco con $z < 0$ que tiene la misma distribución de intensidad que la parte de arriba)

Notando $\mu = \cos\theta$

$$I_m = 2 \int_0^1 I_\nu(\mu) \mu d\mu$$

Reemplazando:

$$I_\nu(\mu) = I_1(\frac{2}{5} + \frac{\mu}{5})$$

$$I_m = 2I_1 \int_0^1 (\frac{2\mu}{5} + \frac{3\mu^2}{5}) d\mu$$

$$I_m = 2I_1 (\frac{\mu^2}{5} + \frac{\mu^3}{5}) \Big|_0^1$$

$$I_m = \frac{4I_1}{5}$$

Comprobación:

1. he comprobado algunos valores del gráfico de la hoja para ver si cumplen la relación
2. he escalado un gráfico aleatorio

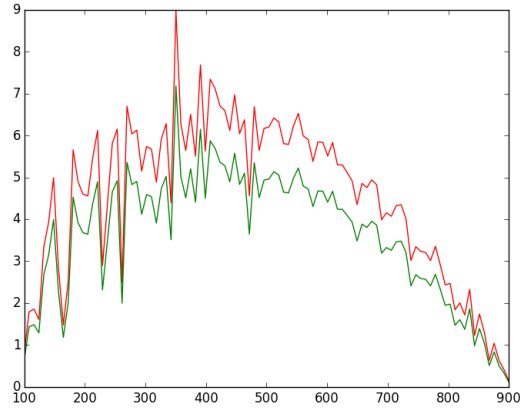


Figura 2: *Intensidad al centro arriba (con rojo) - generada de forma más o menos aleatoria - la intensidad media - abajo (con verde) que es el gráfico de arriba escalado con 4/5 - los gradientes también se escalan*

3 La temperatura efectiva de una estrella con radio R_* y luminosidad L es la temperatura de un cuerpo negro con la misma luminosidad

$$L = F_{rad}(T_{eff})4\pi R_*^2$$

$F_{rad}(T)$ es el flujo radiativo emitido por un cuerpo negro a temperatura T

Hay que encontrar la expresión para $F_{rad}(T)$ empezando con la función de Planck

Definición del flujo radiativo:

La intensidad I_ν se define como la energía de radiación con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ que pasa por el área dA en una dirección a un ángulo θ con respecto a la normal al área en un ángulo sólido $d\omega$ y tiempo dt

$$I_\nu = f(\vec{r}, \cos\theta), \quad \vec{r} = (r, \theta, \phi) \text{ en coordenadas esféricas}$$

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{\cos\theta dt d\nu d\omega dA}$$

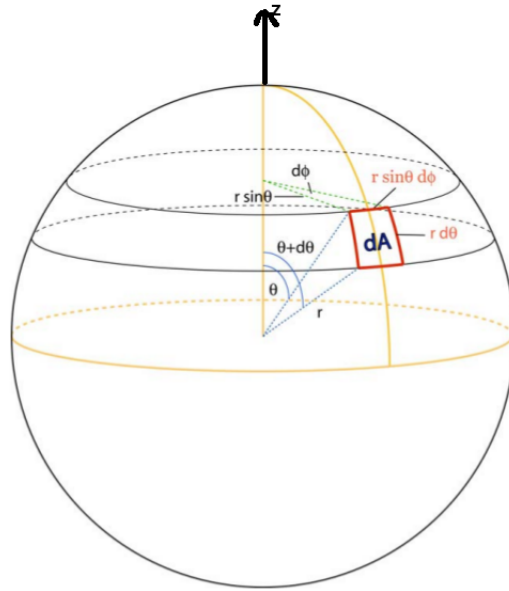


Figura 3: *El ángulo sólido $d\omega$ subtendido por el área dA* http://www.ifa.hawaii.edu/users/kud/teaching_09/3_Radiative_transfer.pdf

El flujo radiativo es la energía de radiación con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ que pasa por el área dA en el tiempo dt . Imaginando el centro de la esfera un punto P situado a radio R en la estrella, con la normal en la dirección \vec{e}_z para determinar el flujo radiativo hay que tener en cuenta las contribuciones de la intensidad en la esfera de radio r (hay que integrar $I_\nu \cos\theta$ sobre el ángulo sólido $d\omega$ para $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$)

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{dA}{4\pi r^2} \implies d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Suponiendo I_ν tiene simetría acimutal (no depende del ángulo ϕ):

$$F_\nu = 2\pi \int_0^\pi I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta$$

Cambio de variable $\cos\theta = \mu$

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu$$

Notamos

$$F_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu \quad (\text{el flujo hacia afuera, } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$$

$$F_\nu^- = 2\pi \int_{-1}^0 I_\nu \mu d\mu \quad (\text{el flujo hacia adentro, } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0])$$

El flujo total:

$$F_\nu = F_\nu^+ + F_\nu^-$$

Suponemos la radiación isotrópica (I_ν no depende de θ)

$$F_\nu^+ = -F_\nu^- = \pi I_\nu$$

$$F_\nu = 0$$

Notamos el flujo radiativo en la superficie de la estrella:

$$F_\nu^{rad} = F_\nu^+(R_*) \quad (\text{en la superficie no hay flujo hacia adentro})$$

En el caso del cuerpo negro la intensidad es **la función de Planck**:

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1}$$

$$F_{rad}(T) = \pi \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu$$

$$F_{rad}(T) = \pi \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu$$

Cambio de variable $u = \frac{h\nu}{kT} \implies \nu = \frac{kT}{h}u$ y $d\nu = \frac{kT}{h}du$

$$F_{rad}(T) = \pi \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du$$

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{de mathematica})$$

y notando $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$

$$F_{rad}(T) = \sigma T^4$$

$$T_{eff} = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R_*^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$4 \quad \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{v}{c} \implies \Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} + v_{mic}^2$$

Teniendo en cuenta que las líneas de FeI se forman a menos altura (15648Å a 20 km y $T \approx 6000\text{K}$ y 6302Å a 170 km y $T \approx 5000\text{K}$) a la diferencia de la línea de $H\alpha$ que se forma en la parte mas alta y más caliente ($\approx 15000\text{K}$) de la atmósfera, $v_{mic} \approx 1000\text{m/s}$ y $m = m_u A$ donde m_u es la masa de un protón y A es la masa atómica (1 para H y 56 para Fe) se calcula el desplazamiento Doppler (para cada velocidad por separado para ver el efecto de cada una: térmica, microturbulencia y total)

Line: Halpha , Lambda (Å): 6563.0, T = 15000.0(K), A = 1, m=1.6605e-27 kg
 vterm=1.1168e+04 m/s, vtot = 1.1212e+04 m/s
 dlTerm = 2.4431e-01 Å, dlMic = 2.1877e-02 Å, dlTot = 2.4529e-01 Å

Line: FeI , Lambda (Å): 6302.0, T = 5000.0(K), A = 56, m=9.2990e-26 kg
 vterm=8.6160e+02 m/s, vtot = 1.3200e+03 m/s
 dlTerm = 1.8099e-02 Å, dlMic = 2.1007e-02 Å, dlTot = 2.7729e-02 Å

Line: FeI , Lambda (Å): 15648.0, T = 6000.0(K), A = 56, m=9.2990e-26 kg
 vterm=9.4384e+02 m/s, vtot = 1.3751e+03 m/s
 dlTerm = 4.9231e-02 Å, dlMic = 5.2160e-02 Å, dlTot = 7.1724e-02 Å

Para las líneas de hierro el efecto Doppler debido a la microturbulencia es parecido al efecto Doppler debido al movimiento térmico(desplazamientos parecidos) , pero en el caso de la línea de emisión de hidrógeno la alta temperatura hace que el efecto térmico domine el efecto de la microturbulencia

<https://github.com/beevageeva/fsol/>