

Nociones teóricas

Para una distribución de masa ρ

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto x es:

$$F(x) = G \int \frac{x'-x}{|x'-x|^3} \rho(x') d^3x \text{ y después de hacer cálculos llegamos a}$$

$$\nabla F(x) = -4\pi G \rho(x)$$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x'-x|} d^3x$. Observamos que $F(x) = -\nabla \Phi$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) con simetría esférica (las funciones solo dependen de r y no de la posición en la esfera de radio r : los ángulos θ y φ), así que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$; $\nabla \Phi(r) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$
 La ecuación Poisson: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \text{ (el signo - con } K_1)$

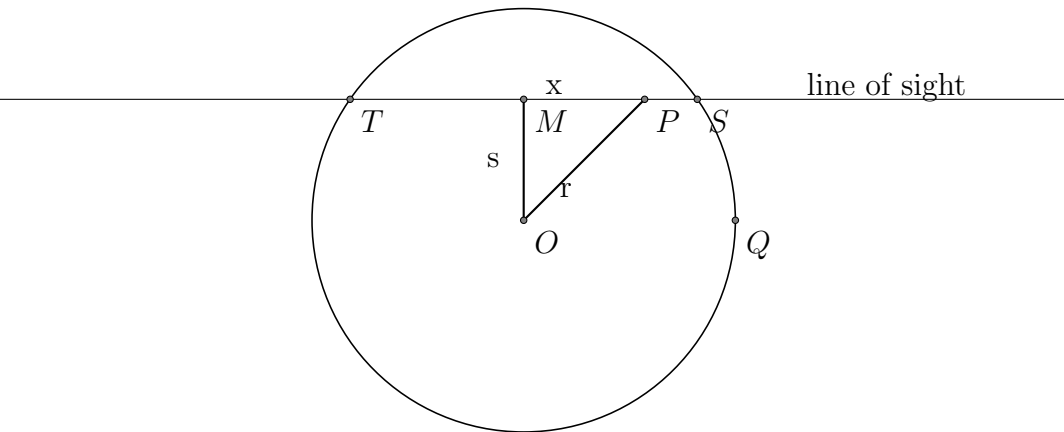
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una partícula en una órbita circular de radio r : $v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función $f(r)$ en el plano y, z (a lo largo de la línea de visión OX) es la función:
 $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$

$$x^2 = r^2 - s^2 \implies dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}} \implies F(s) = 2 \int_s^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr, s^2 = y^2 + z^2 \text{ (s es el radio proyectado) } (\text{http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_transform})$$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2 \int_s^{\infty} \frac{r \rho(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr, s^2 = y^2 + z^2$



Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = Ae^{-Br} = \rho_0 C e^{-\frac{r}{r_0}}$, $A, B > 0$, $\rho_0 C = A$, $r_0 = \frac{1}{B}$ en un sistema con simetría esférica

Determinar $\Phi(r)$, $M(r)$, $M_p(r)$, $v_c(r)$

$$\Phi(r) = 4\pi G A \int \frac{1}{r^2} \left(\int a^2 e^{-Ba} da \right) dr + \frac{K_1}{r} + K_2$$

Para poder calcular las integrales de forma numérica establecemos los límites de integración y cogemos los constantes 0 Miramos el gráfico de la función: $f(r) = \rho_0 C * \exp(-r/r_0)$ observamos que f es continua y $f(0)$

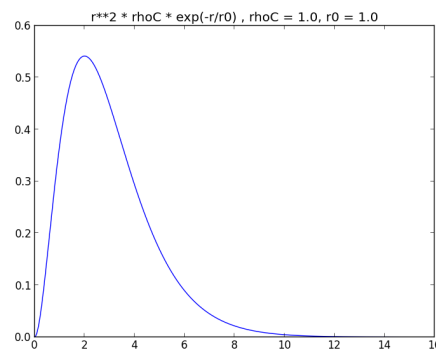


Figura 1: $\rho_0 C * \exp(-r/r_0)$

= 0

$$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$$

Integrando por partes 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx &= -\frac{1}{B} \int_0^r x^2 (e^{-Bx})' dx = -\frac{1}{B} \left((x^2 e^{-Bx}) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-Bx} dx \right) = \\ &= -\frac{2}{B^2} \int_0^r x (e^{-Bx})' dx - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^2} \left((x e^{-Bx}) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-Bx} dx \right) - \\ &= \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^3} e^{-Bx} \Big|_0^r - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = \frac{2}{B^3} - \frac{2}{B^3} e^{-Br} - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \\ &= \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} \end{aligned}$$

Miramos el gráfico de la función $f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$ que no está definida en 0 pero es continua en $(0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

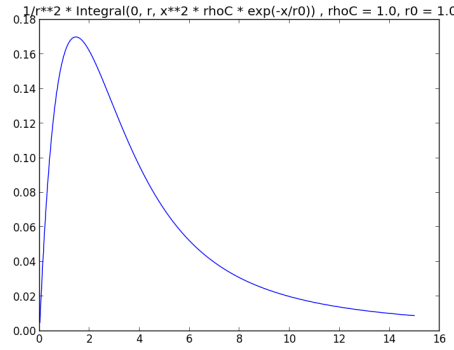


Figura 2: $\rho C * \exp(-r/r_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x y^2 e^{-By} dy \right) dx &= -\frac{1}{B} \left(-\frac{2}{B^2} \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{B^2} \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx + \right. \\ &\left. \frac{2}{B} \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx + \int_{\epsilon}^r e^{-Bx} dx \right) = \frac{1}{B^2} \left(\frac{2}{B} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-Br} - \frac{1}{B} \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - \right. \\ &\left. 2 \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{4\pi GA}{B^2} \left(\frac{2}{B} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-Br} - \frac{1}{B} \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - 2 \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx \right)$$

$$M(r) = 4\pi A \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx = -\frac{4\pi A}{B} \left(\frac{2}{B^2} + \frac{2}{B^2} e^{-Br} + \frac{2}{B} r e^{-Br} + r^2 e^{-Br} \right)$$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2A \int_s^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} e^{-Br} dr$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi GA}{r} \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{4\pi GA}{B} \left(\frac{2}{B^2 r} e^{-Br} + \frac{2}{B} e^{-Br} + r e^{-Br} - \frac{2}{B^2 r} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Los gráficos se realizaron con un programa python (en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial>) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales(sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r . Se muestran los gráficos para la función de densidad $\rho C * e^{\frac{-r}{r_0}}$ variando ρC y r_0 con valores 0.5, 1 y 2

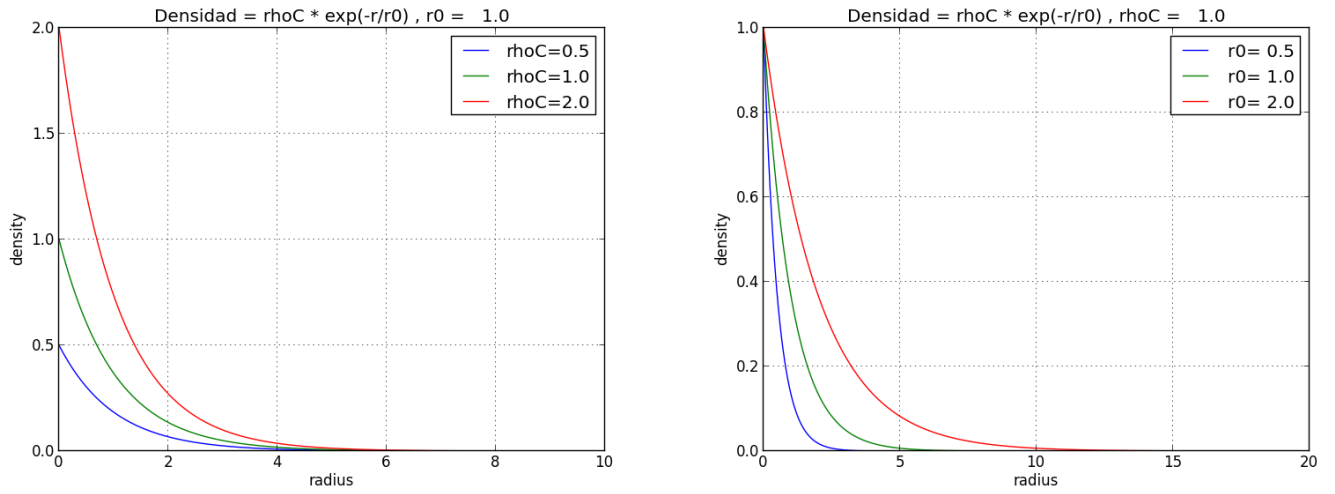


Figura 3: *Densidad*

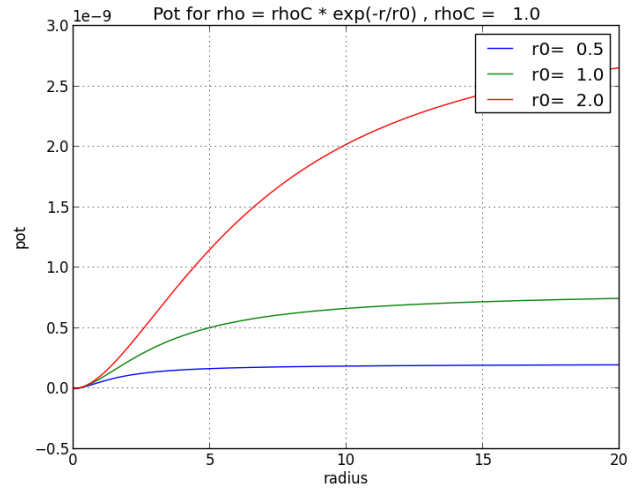
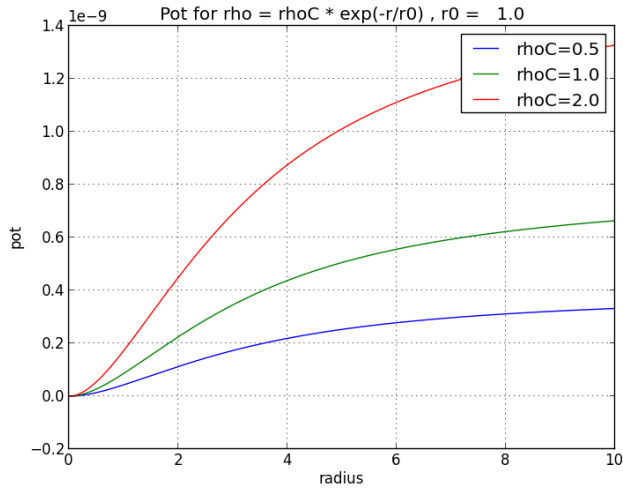


Figura 4: *Potencial*

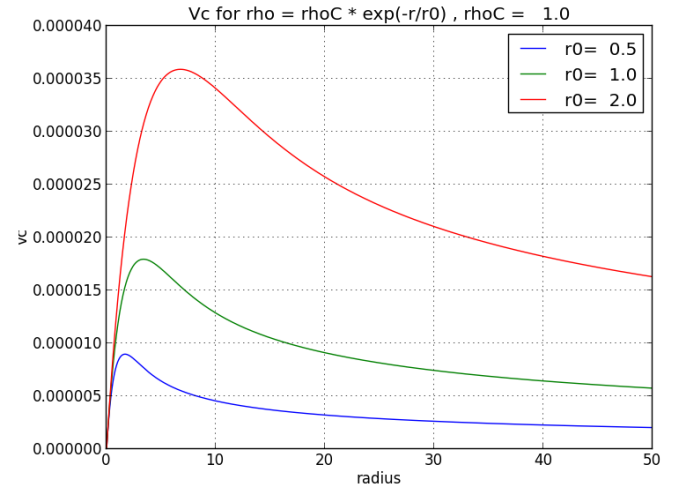
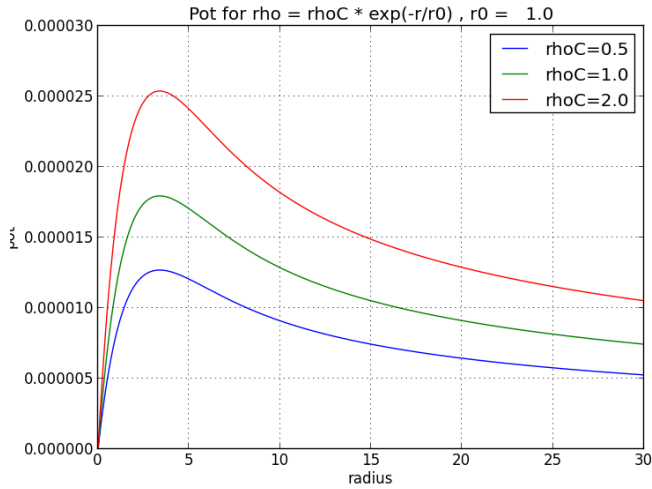
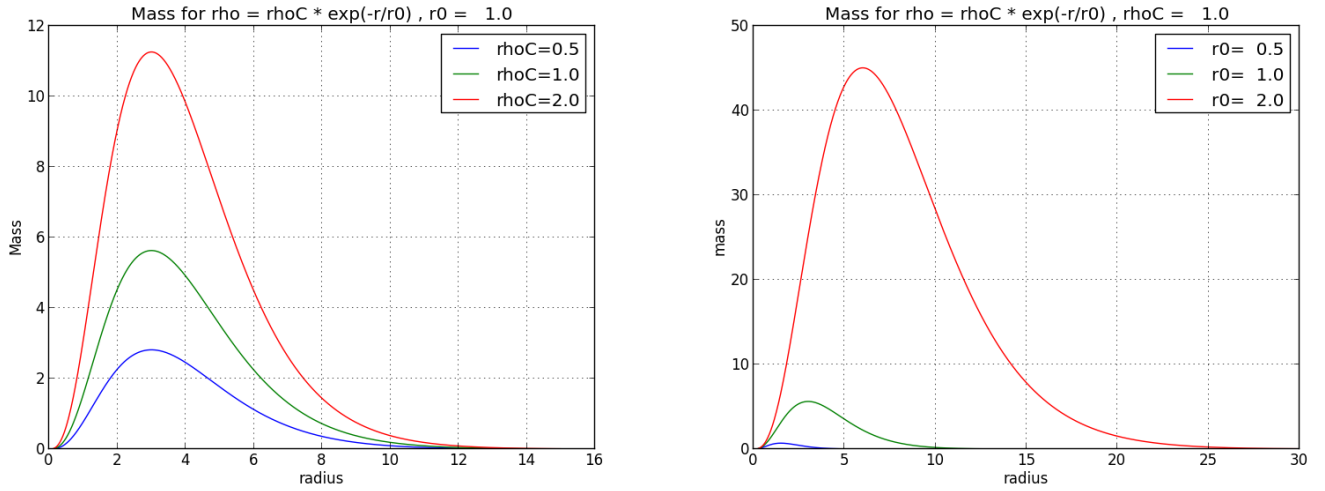
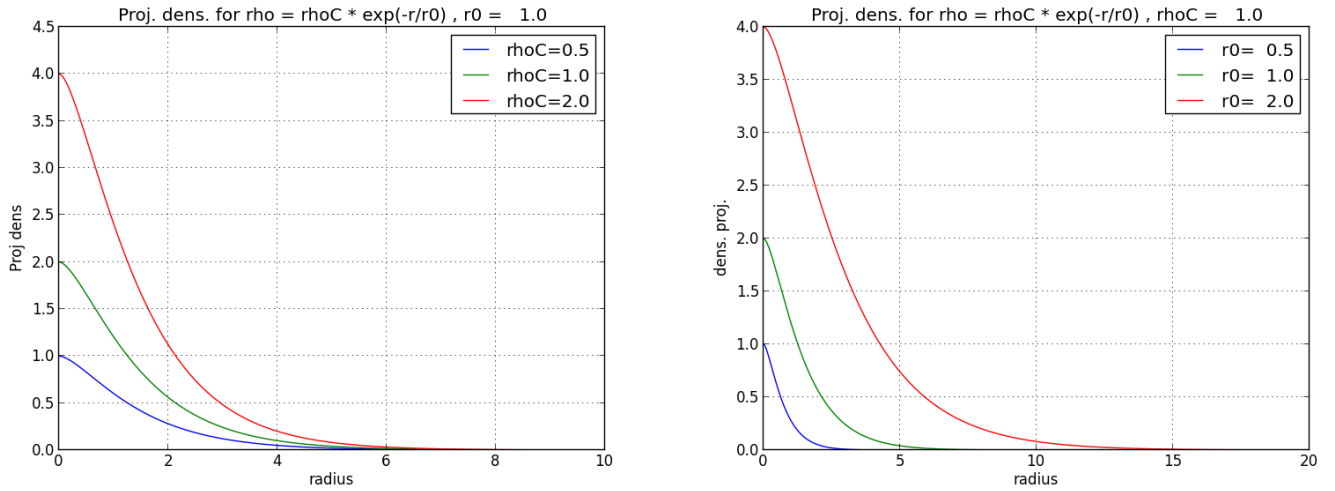


Figura 5: *Velocidad circular*

- Hay otro programa python mas general que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las

Figura 6: *Masa*Figura 7: *Densidad proyectada*

funciones calculadas de modo analítico

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única

constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones (sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar $K1$ en el caso del potencial

- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10^{**1} hasta 10^{**30}
- Se muestran los gráficos en el caso $A = B = 1$ ($\implies r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con las fórmulas de la integración por partes: ver `calc_exp.py`)

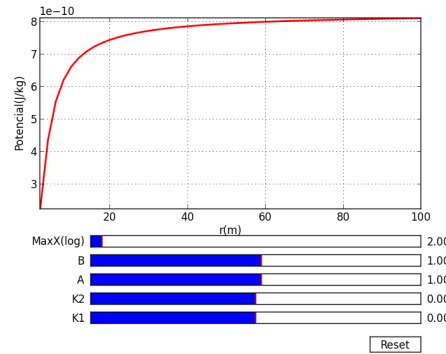


Figura 8: *Potencial*

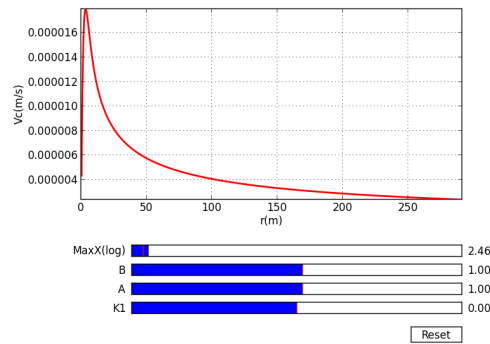
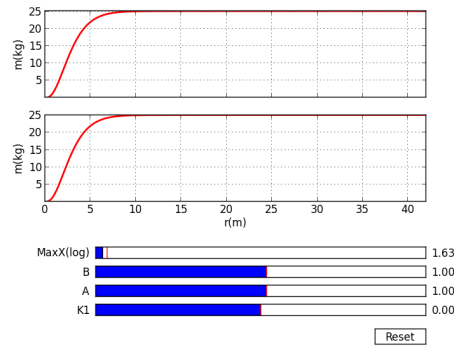
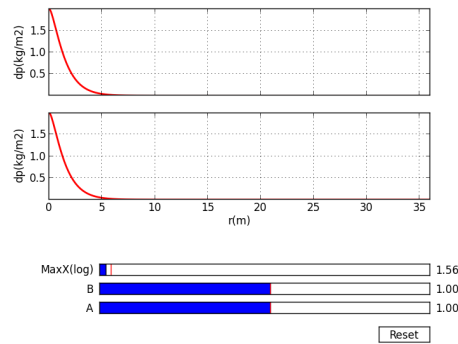


Figura 9: *Velocidad circular*

Figura 10: *Masa*Figura 11: *Densidad proyectada*

- Las figuras son las salidas para el caso $A > 0, B > 0$ - el segundo gráfico es de la función calculada de forma analítica (con las fórmulas de la integración por partes, donde se añadieron las constantes de integración)
- La situación $A < 0, B < 0$ según se verá en los gráficos no tiene sentido físico. Además la función para determinar la distribución de densidad proyectada no es integrable

Potencial

- $K1 \neq 0$ hace que el término $K1/r$ domine

- $K_1=0$, el potencial crece desde 0 de forma asintótica, la forma del gráfico no cambia variando A

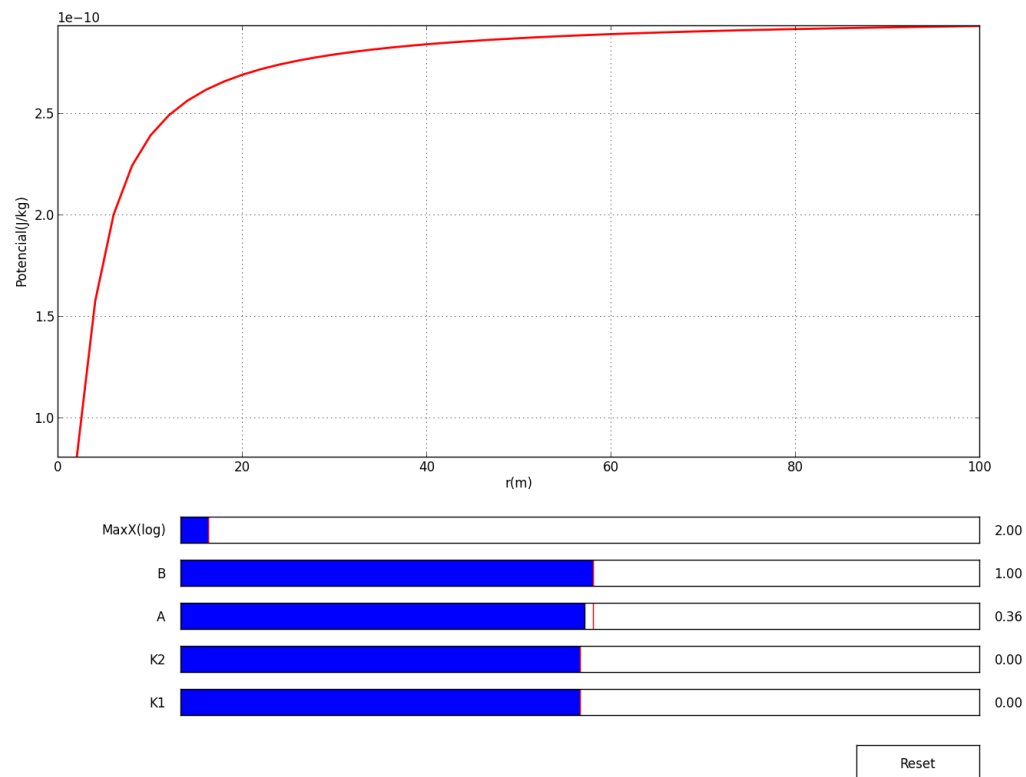


Figura 12: *Potencial A mayor que 0, $B = 1$*

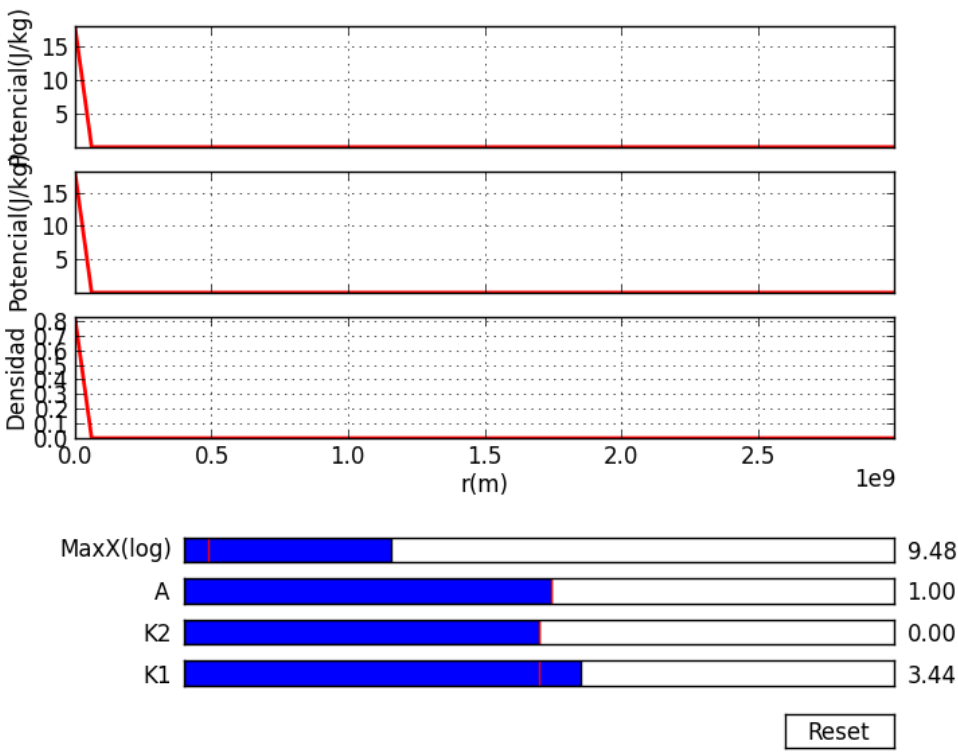


Figura 13: *Potencial $A = 1$, rango del radio hasta $3 \cdot 10^9$*

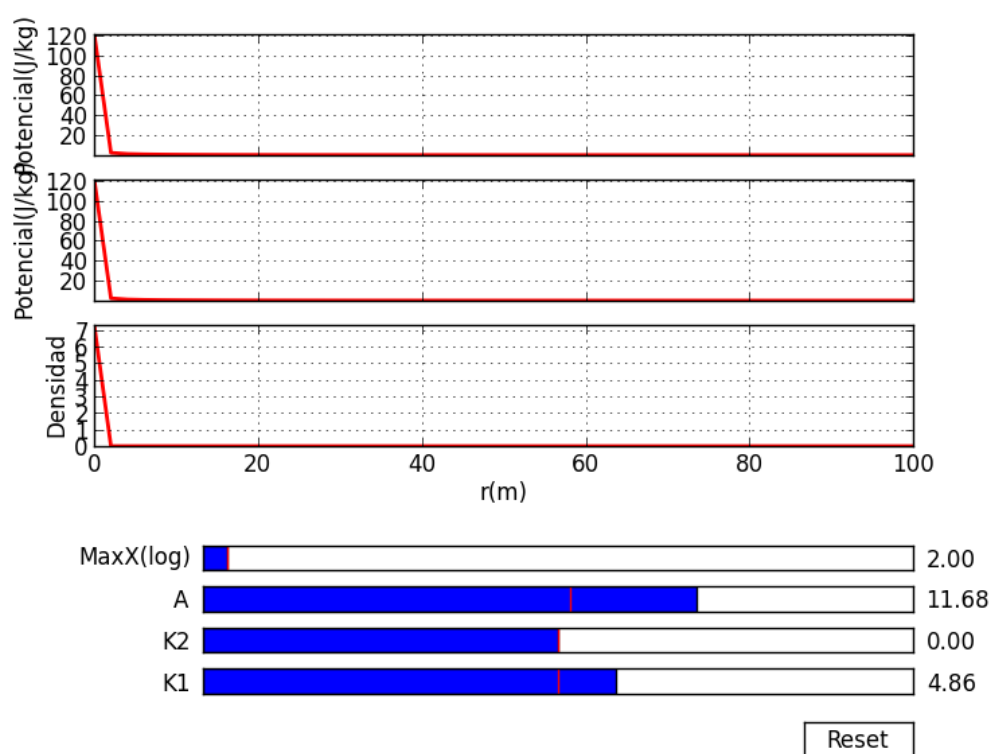


Figura 14: *Potencial A mayor que 1*

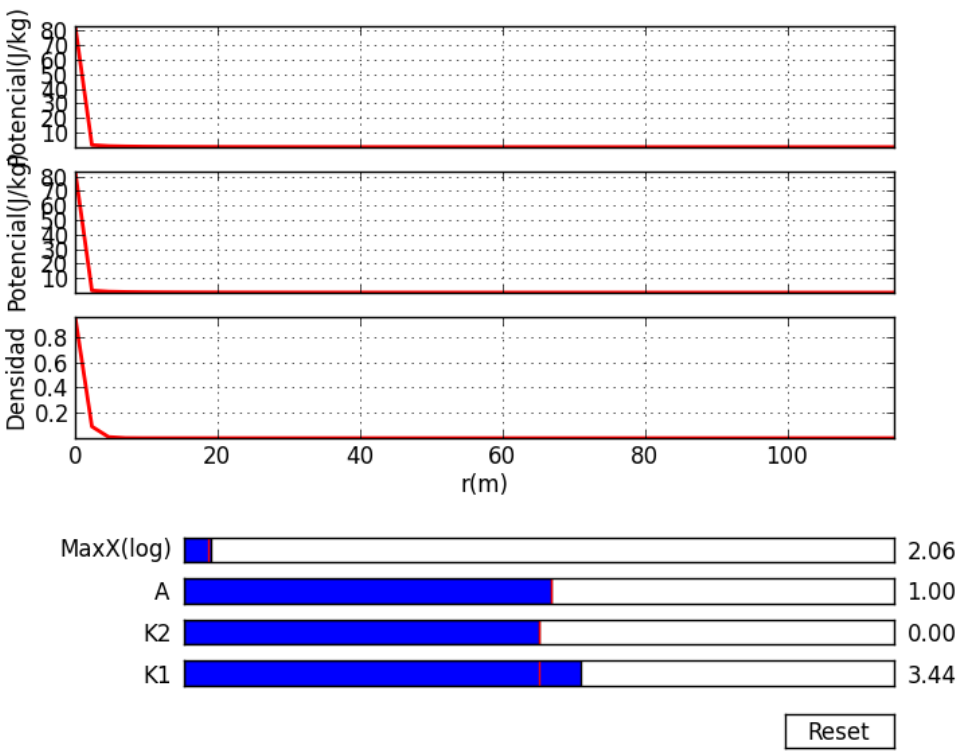


Figura 15: *Potencial* $A = 1$

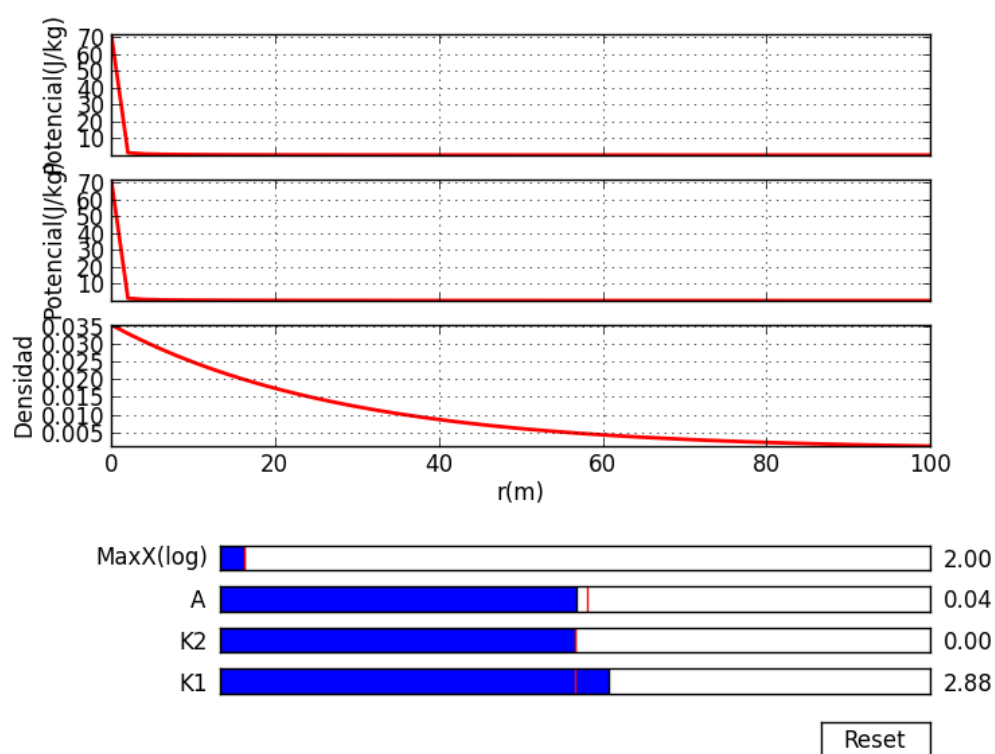


Figura 16: *Potencial A in (0,1)*

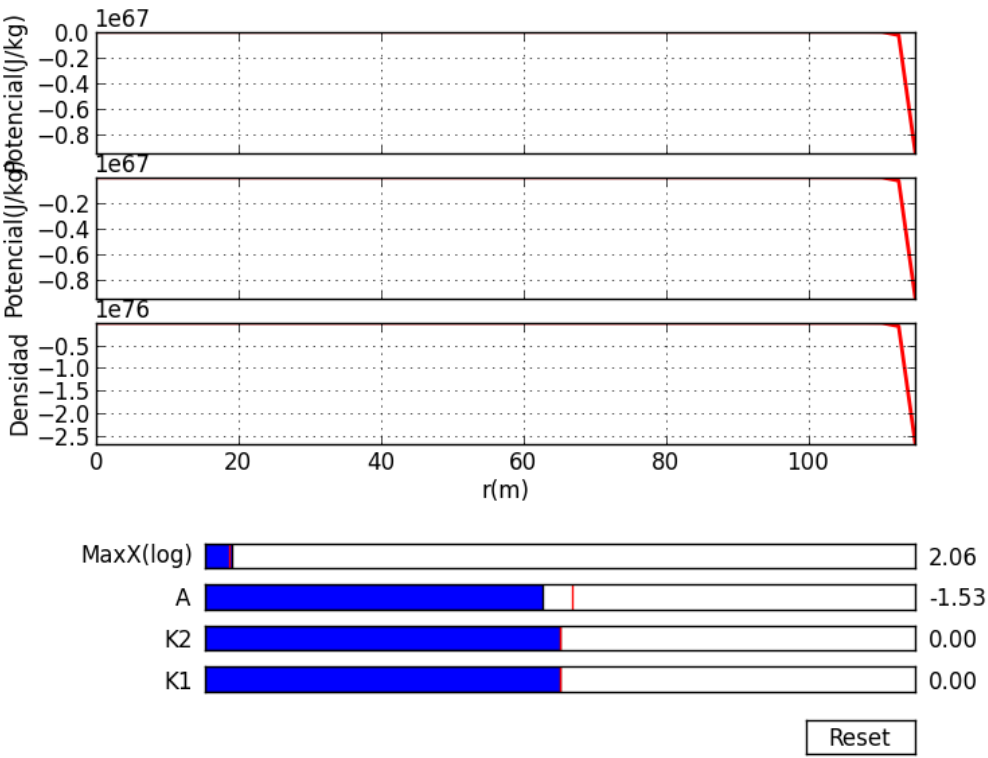
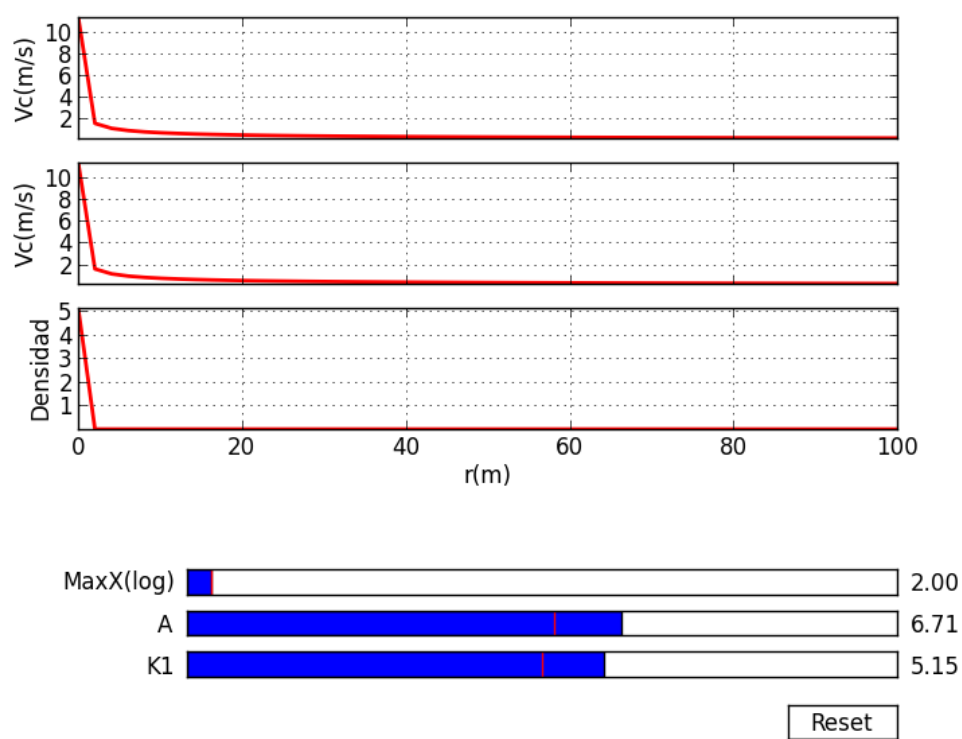


Figura 17: *Potencial A menor que 0*

Figura 18: V_c A mayor que 1

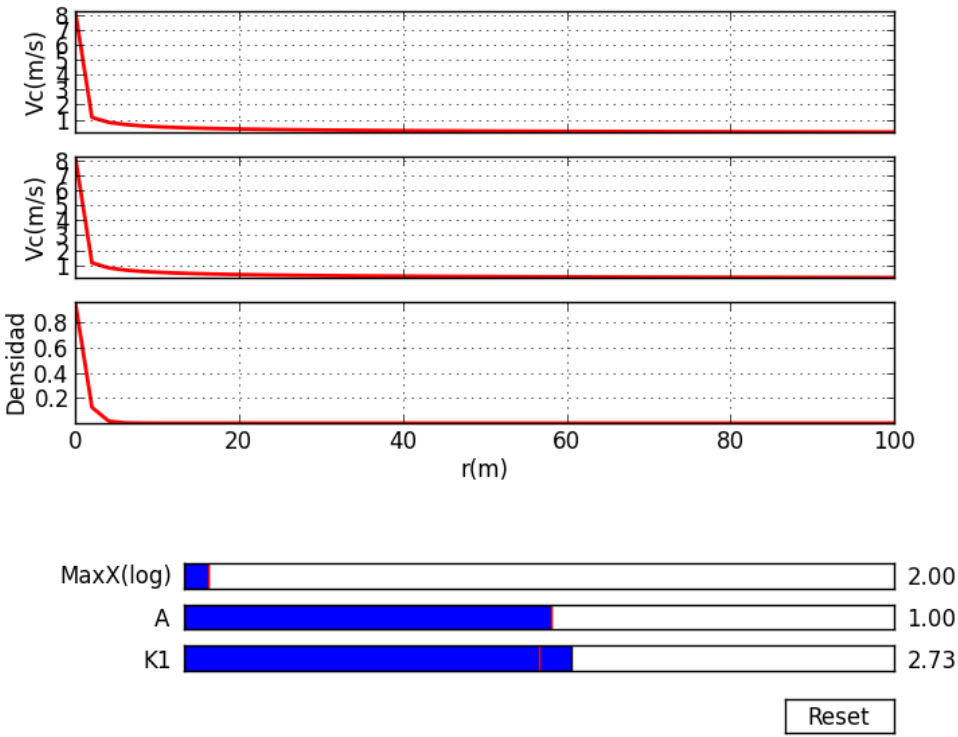


Figura 19: *Velocidad* $A = 1$

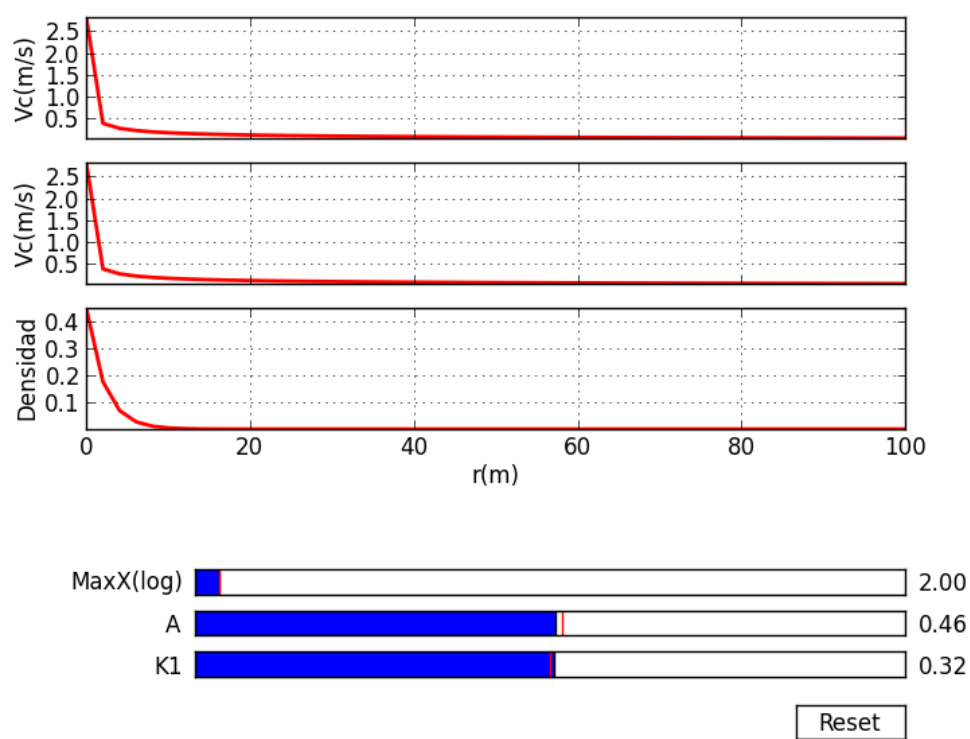


Figura 20: V_c A in $(0,1)$

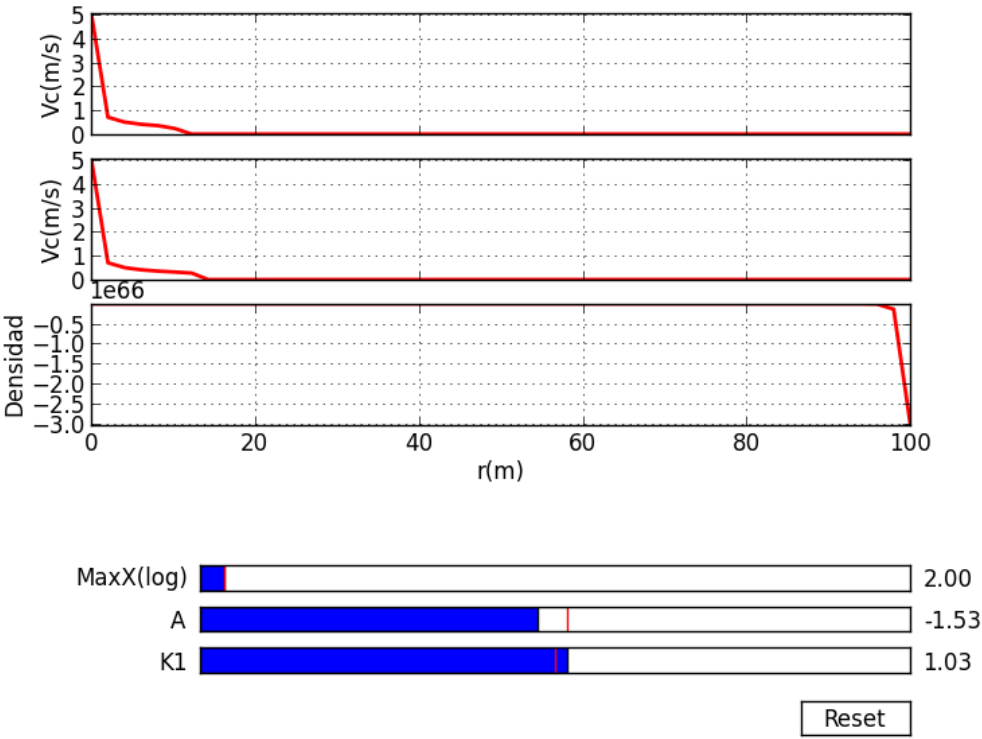


Figura 21: *Velocidad circular A menor que 0*

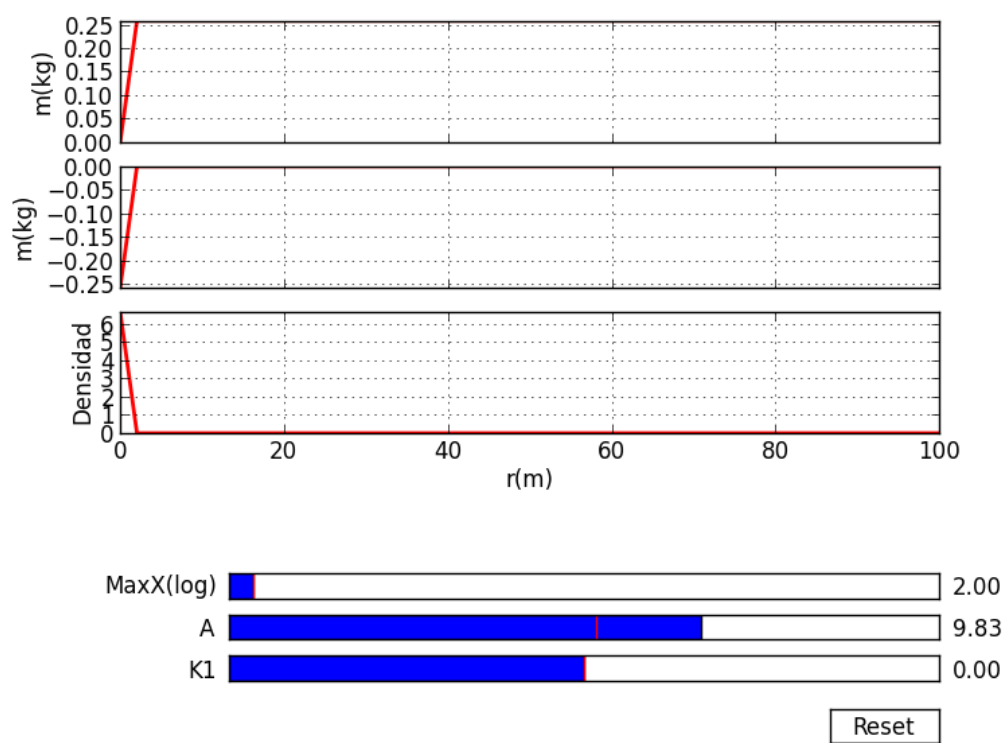


Figura 22: *Masa mayor que 1*

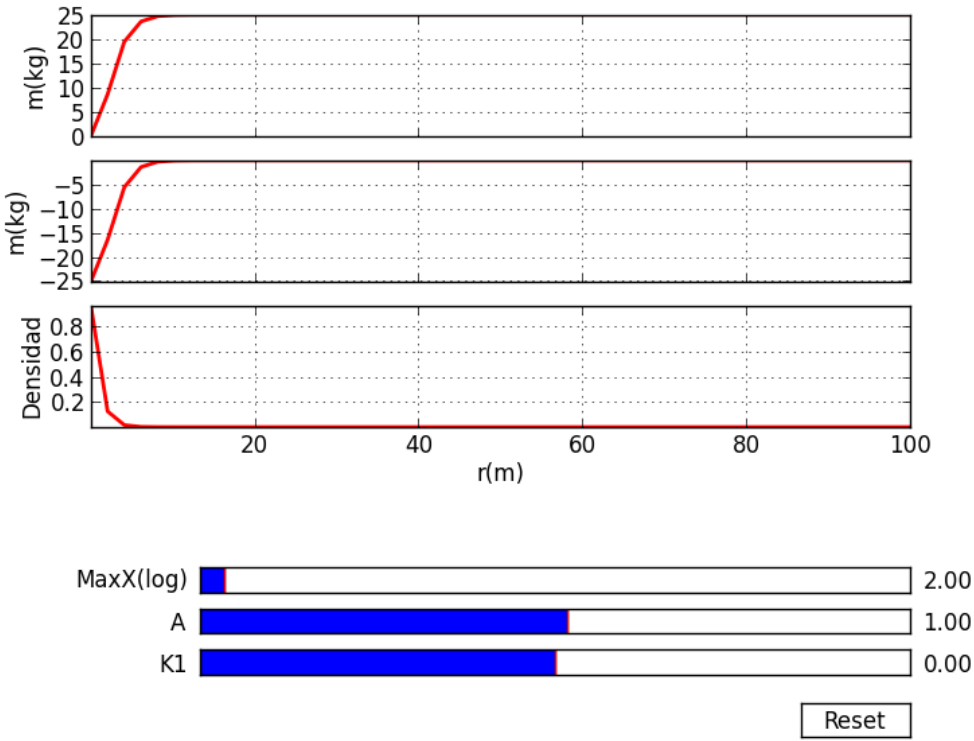


Figura 23: Masa $A = 1$

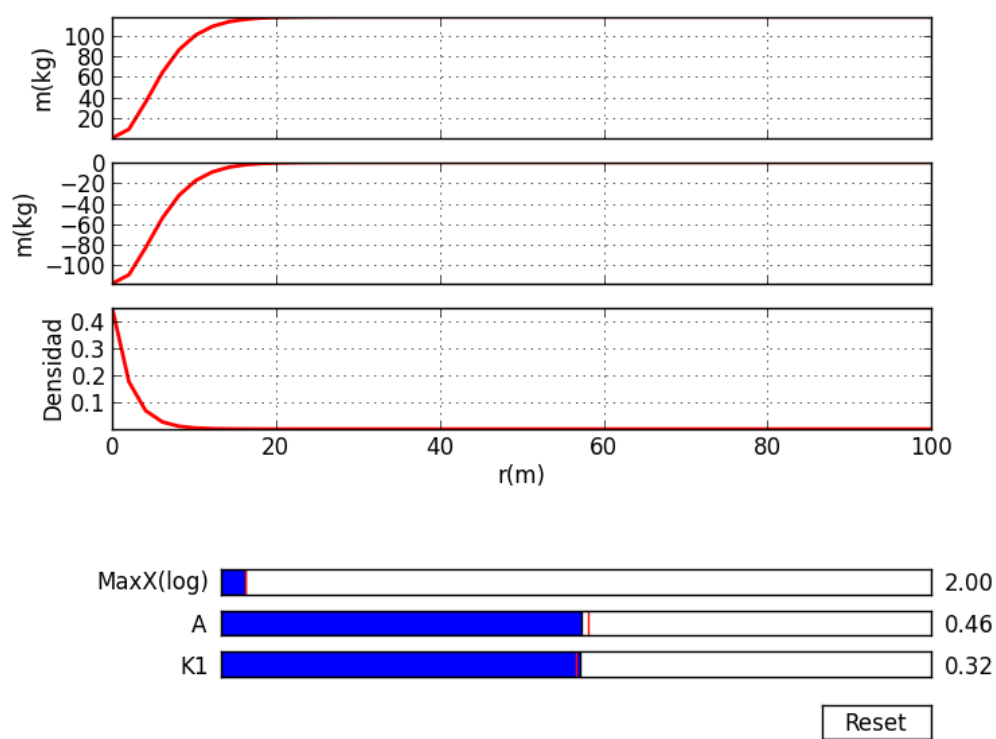


Figura 24: *Masa A in (0,1)*

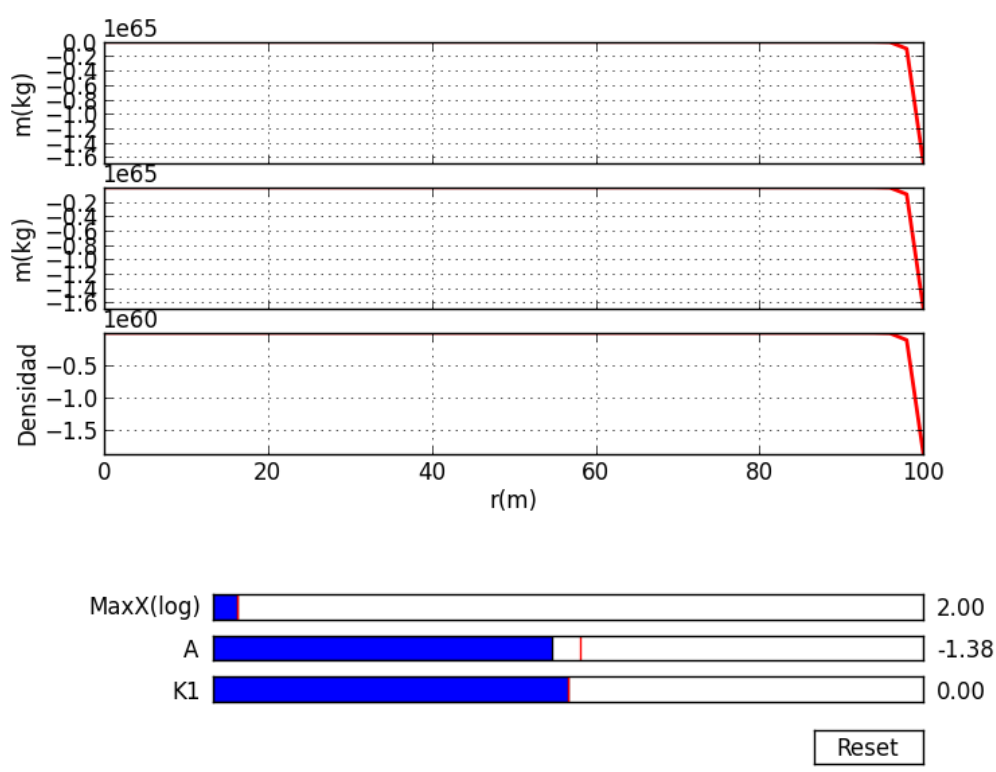


Figura 25: *Masa A menor que 0*

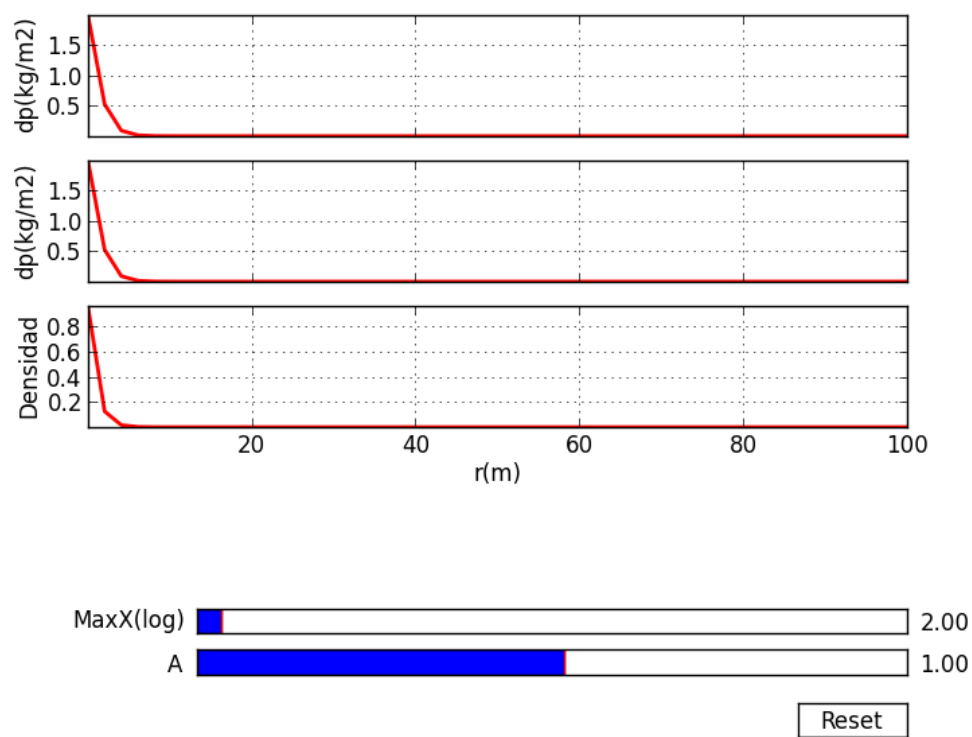


Figura 26: *Distribución proyectada $A = 1$*

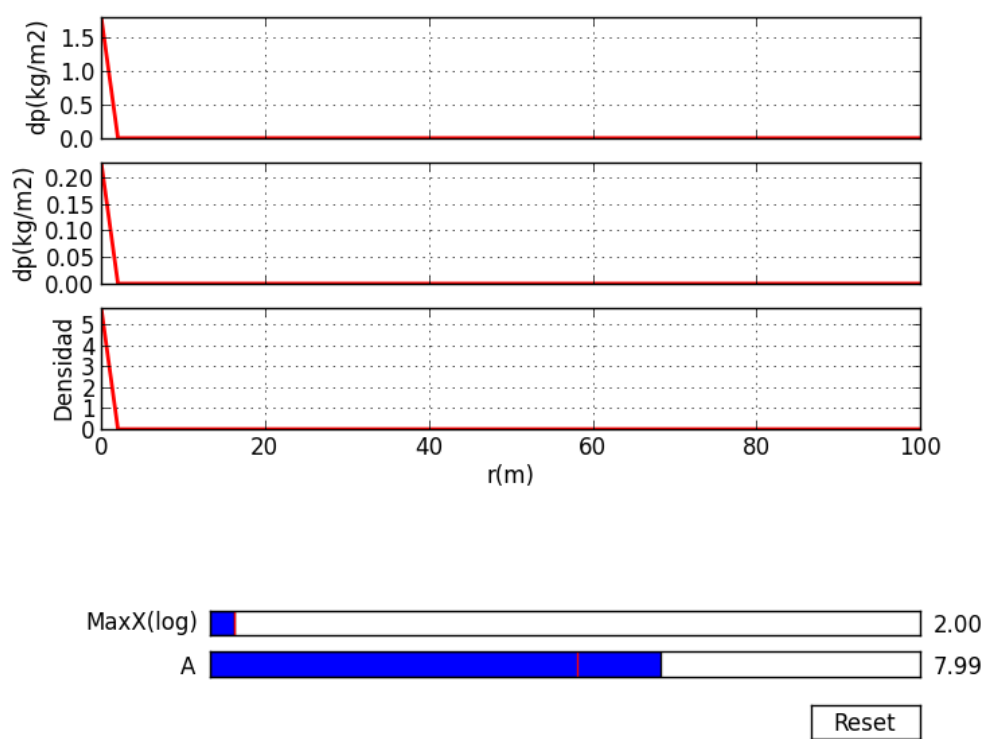


Figura 27: *Distribución proyectada A mayor que 1*

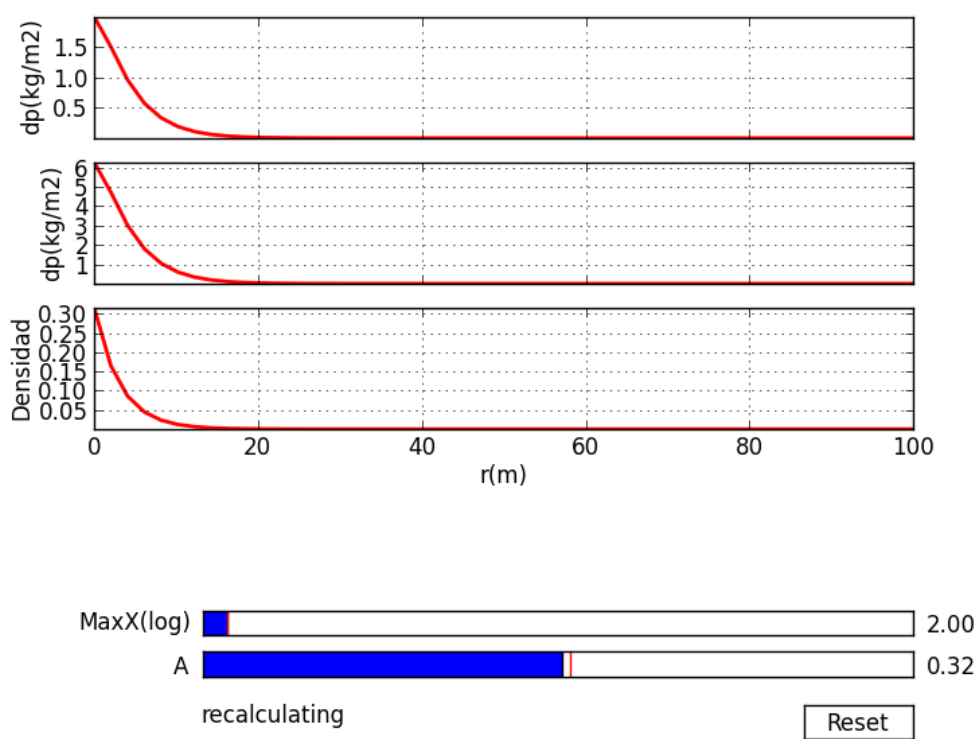


Figura 28: *Distribucion proyectada A in (0,1)*