Nociones teóricas

Para una distribución de masa ρ

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto x es: $F(x) = G\int \frac{x\prime - x}{|x\prime - x|^3}\rho(x\prime)d^3x$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla F(x) = -4\pi G\rho(x)$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(x) = -G\int \frac{\rho(x\prime)}{|x\prime - x|}d^3x$. Observamos que $F(x) = -\nabla\Phi$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetria esférica** (las funciones solo dependen de r y no de la posición en la esfera de radio r: los angulos θ y φ), asi que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$; $\nabla\Phi(r) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r})$ La ecuacion Poisson:$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G\rho(r) \implies r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = 4\pi G\int r^2\rho(r)dr + K_1 \implies \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G\int \frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + K_1\int \frac{1}{r^2}dr + K_2 = 4\pi G\int \frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R}(elsigno - conK_1)$

Definimos la velocidad circular: la velocidad de una particula en una orbita circular de radio r: $v_c^2(r) = r\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi\int r^2\rho(r)dr + K, K \in \mathbb{R}$

En un sistema con simetria esférica: la proyección de una función f(r) en el plano y,z es la funcción: $F(s) = 2\int_s^\infty \frac{rf(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}}dr, s^2 = y^2 + z^2$ (`http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_transform`)

La proyección de la distribución de densidad en el plano Y0Z $D_p(s) = 2\int_s^\infty \frac{r\rho(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}}dr$,$s^2 = y^2 + z^2$

Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = Ae^{-Br}, A, B > 0$ en un sistema con simetria esférica

Determinar $\Phi(r)$, M(r),$M_p(r)$, $v_c(r)$

$\Phi(r) = 4\pi GA \int \frac{1}{r^2}(\int a^2 e^{-Ba} da)dr + \frac{K_1}{r} + K_2$

Integrando por partes 2 veces:

$\int r^2 e^{-Br} dr = -\frac{1}{B}\int r^2 (e^{-Br})\prime dr = -\frac{1}{B}(r^2 e^{-Br} - 2\int re^{-Br} dr) = -\frac{2}{B^2}\int r(e^{-Br})\prime dr - \frac{1}{B}r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^2}(re^{-Br} - \int e^{-Br} dr) - \frac{1}{B}r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^3}e^{-Br} - \frac{2}{B^2}re^{-Br} - \frac{1}{B}r^2 e^{-Br}$

$\implies \int \frac{1}{r^2}(\int r^2 e^{-Br} dr)dr = -\frac{1}{B}(\frac{1}{B^2}\int \frac{1}{r^2}e^{-Br}dr + \frac{2}{B}\int \frac{1}{r}e^{-Br}dr + \int e^{-Br}dr) = \frac{1}{B^2}(e^{-Br} - \frac{1}{B^2}\int \frac{1}{r^2}e^{-Br}dr - \frac{2}{B}\int \frac{1}{r}e^{-Br}dr)$

$\implies \Phi(r) = \frac{4\pi GA}{B^2}(e^{-Br} - \frac{1}{B^2}\int \frac{1}{r^2}e^{-Br}dr - \frac{2}{B}\int \frac{1}{r}e^{-Br}dr)$

$M(r) = 4\pi A \int r^2 e^{-Br} dr + K = -\frac{4\pi A}{B}(\frac{2}{B^2}e^{-Br} + \frac{2}{B}re^{-Br} + r^2 e^{-Br}) + K$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2A\int_s^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} e^{-Br} dr$

$v_c(r) = (\frac{4\pi GA}{r}\int r^2 e^{-Br} dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}} = (\frac{K}{r} - \frac{4\pi GA}{B}(\frac{2}{B^2 r}e^{-Br} + \frac{2}{B}e^{-Br} + re^{-Br}))^{\frac{1}{2}}$

- El programa python que se encuentra en el repositorio git: `https://github.com/beevageeva/potencial` tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico
- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una
- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10**1 hasta 10**30
- Las figuras son las salidas para el caso A = B, $A > 0$ (distribución exponencial) - el segundo gráfico es de la función calculada de forma analítica
- La situación $A < 0$ según se verá en los gráficos no tiene sentido físico. Además la función para determinar la distribución de densidad proyectada no es integrable

- El potencial, la velocidad circular, la densidad y la proyección de la densidad decrecen con el radio y la masa crece(todo más rápidosi el parámetro A crece)

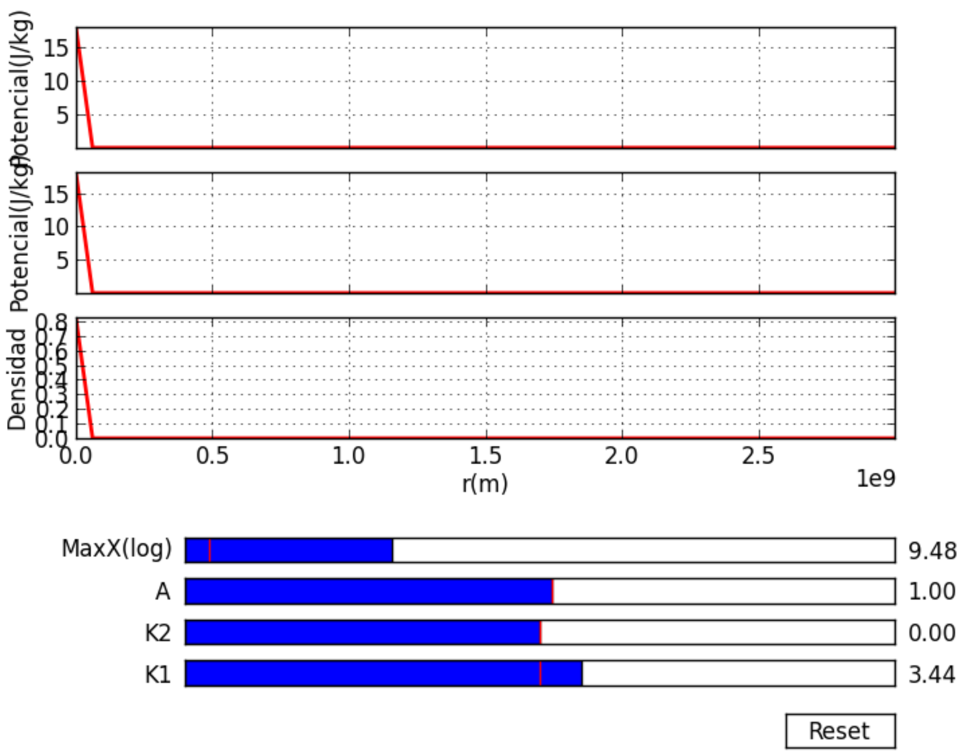

Figura 1: *Potencial A = 1, rango del radio hasta 3*10**9*

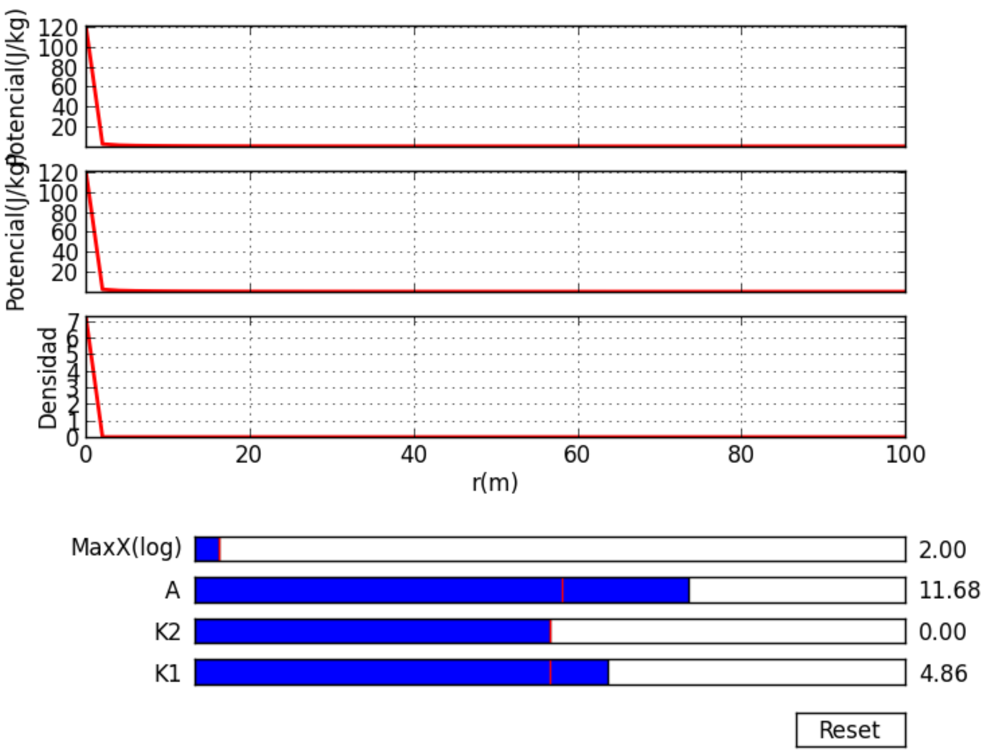

Figura 2: *Potencial A mayor que 1*

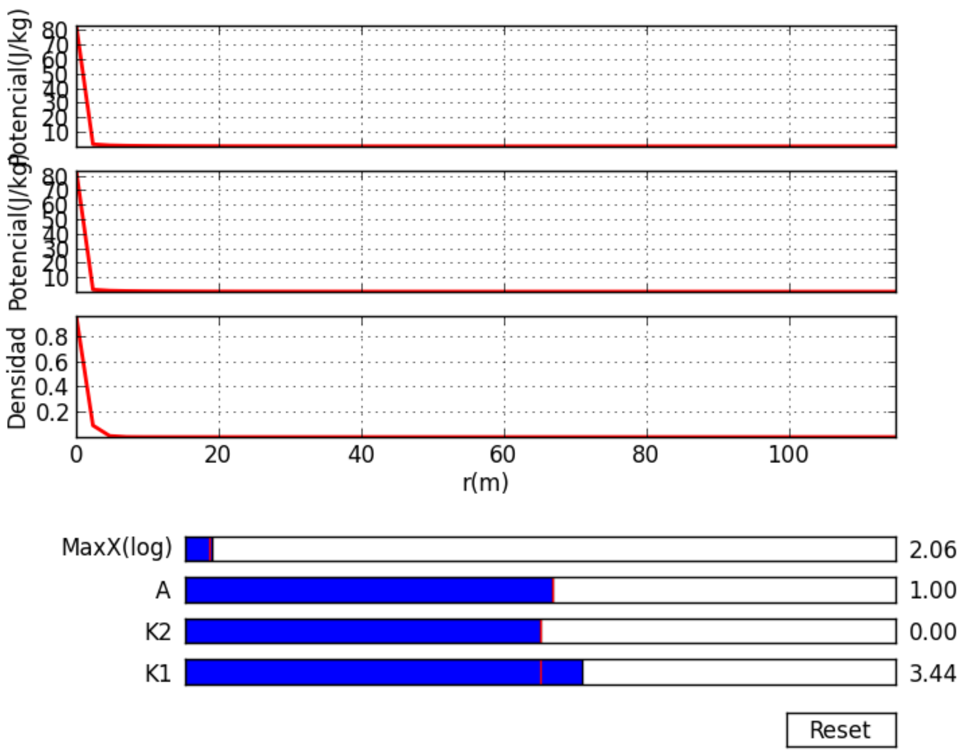

Figura 3: *Potencial A = 1*

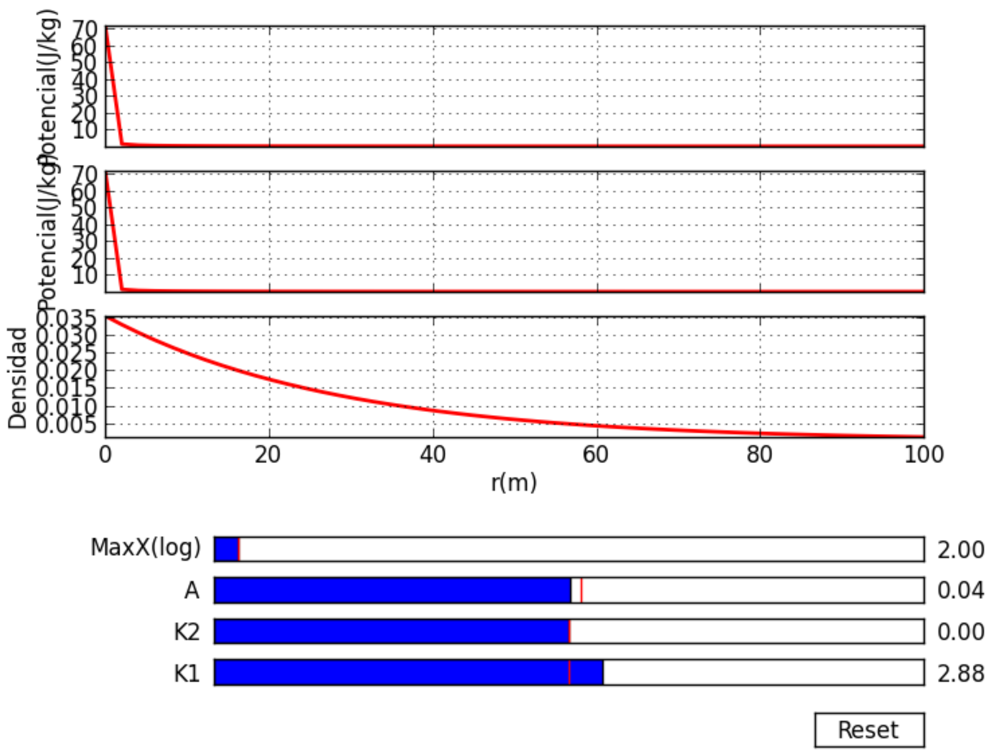

Figura 4: *Potencial A in (0,1)*

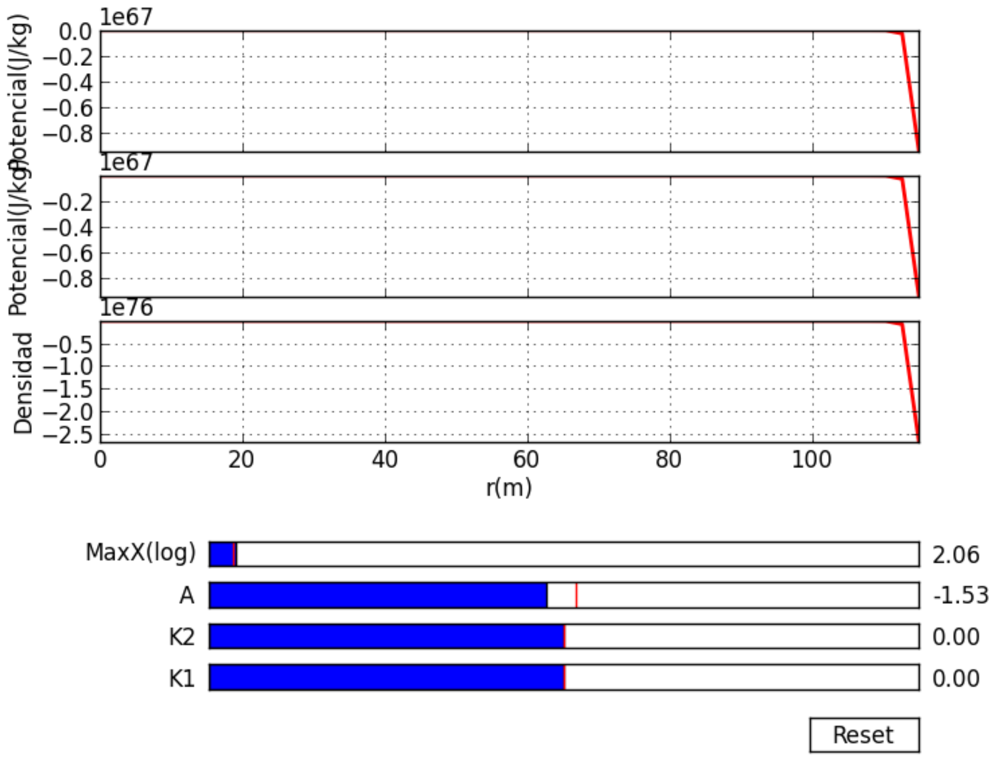

Figura 5: *Potencial A menor que 0*

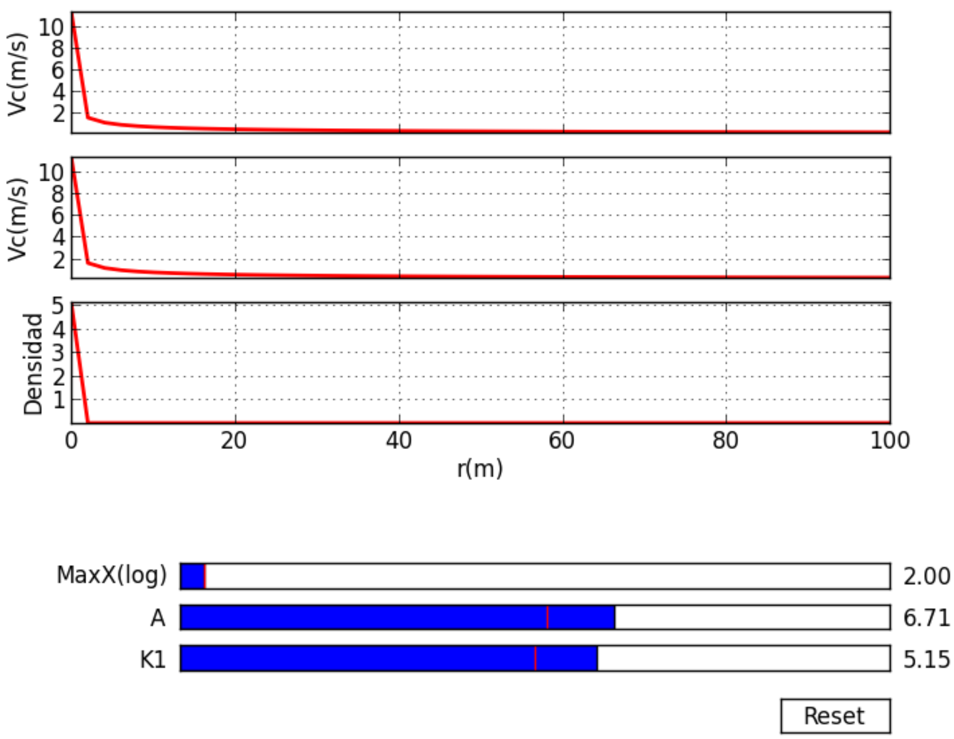

Figura 6: *Vc A mayor que 1*

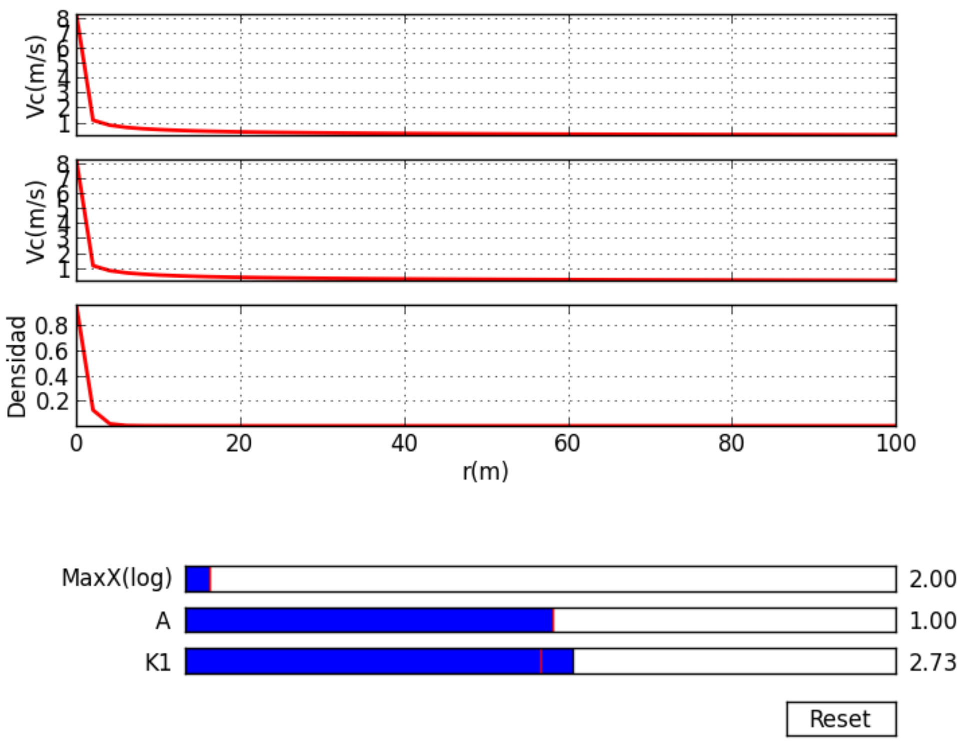

Figura 7: *Velocidad A = 1*

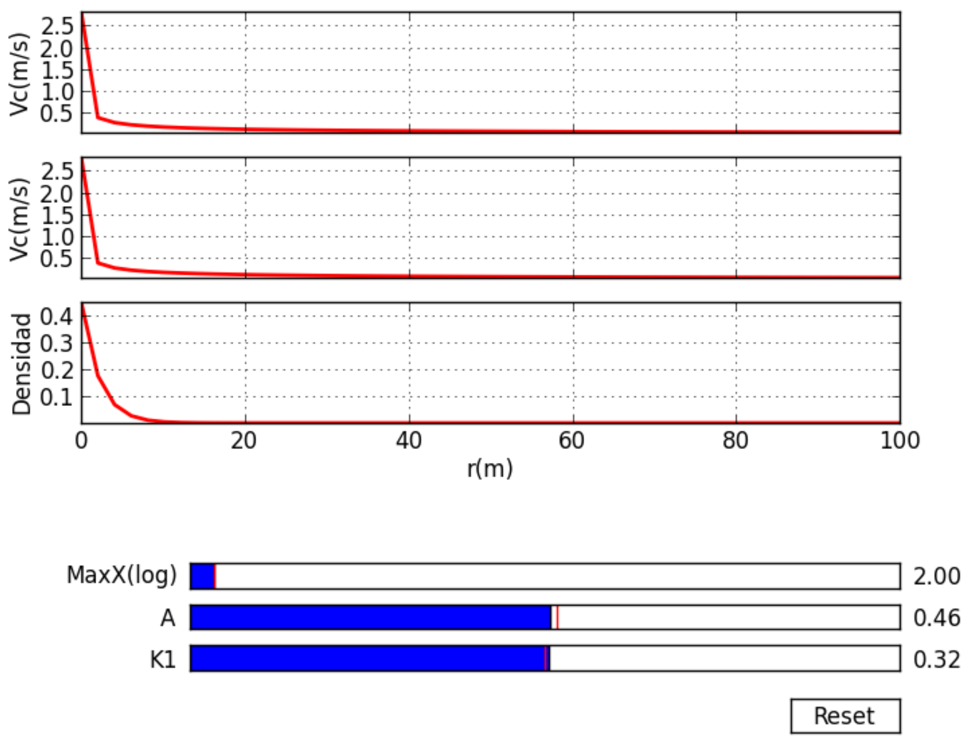

Figura 8: *Vc A in (0,1)*

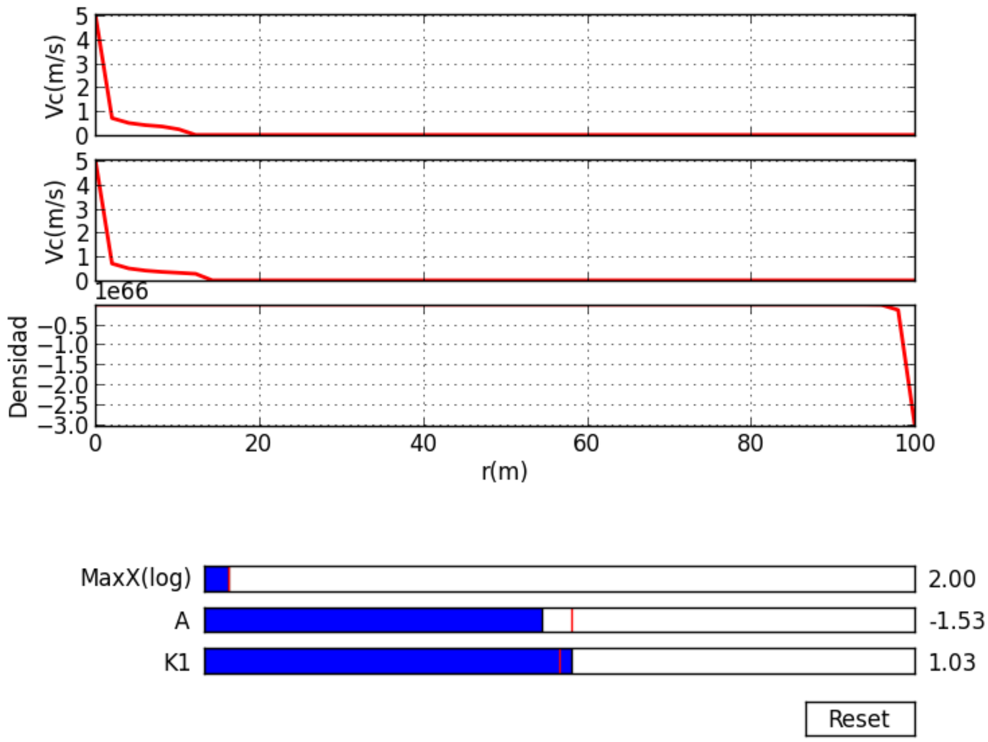

Figura 9: *Velocidad circular A menor que 0*

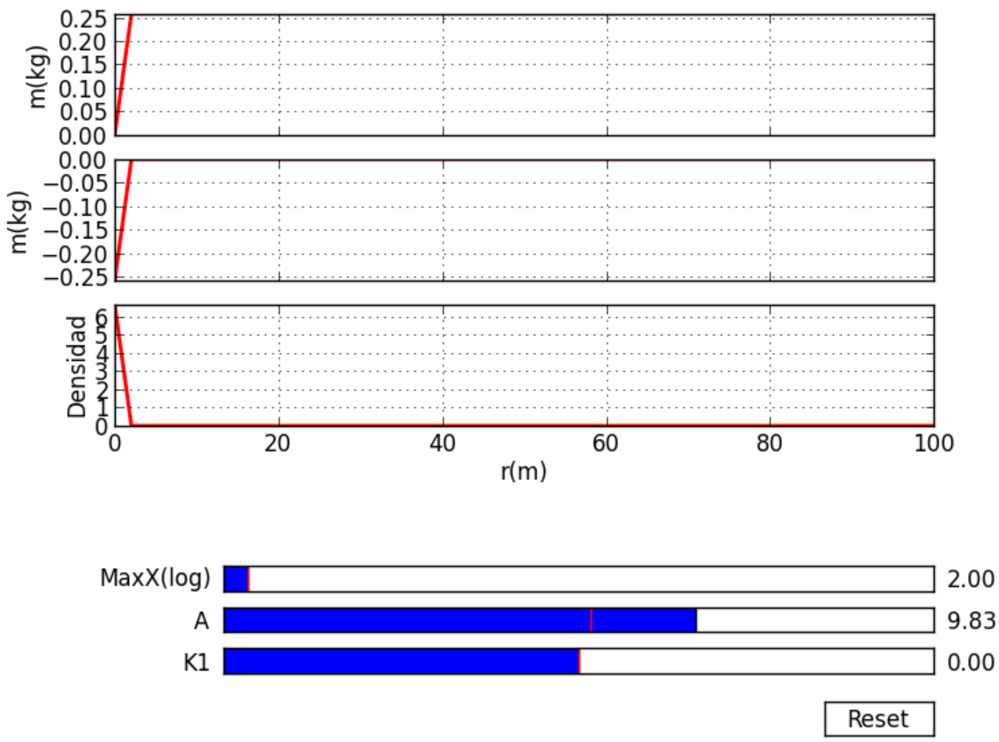

Figura 10: *Masa mayor que 1*

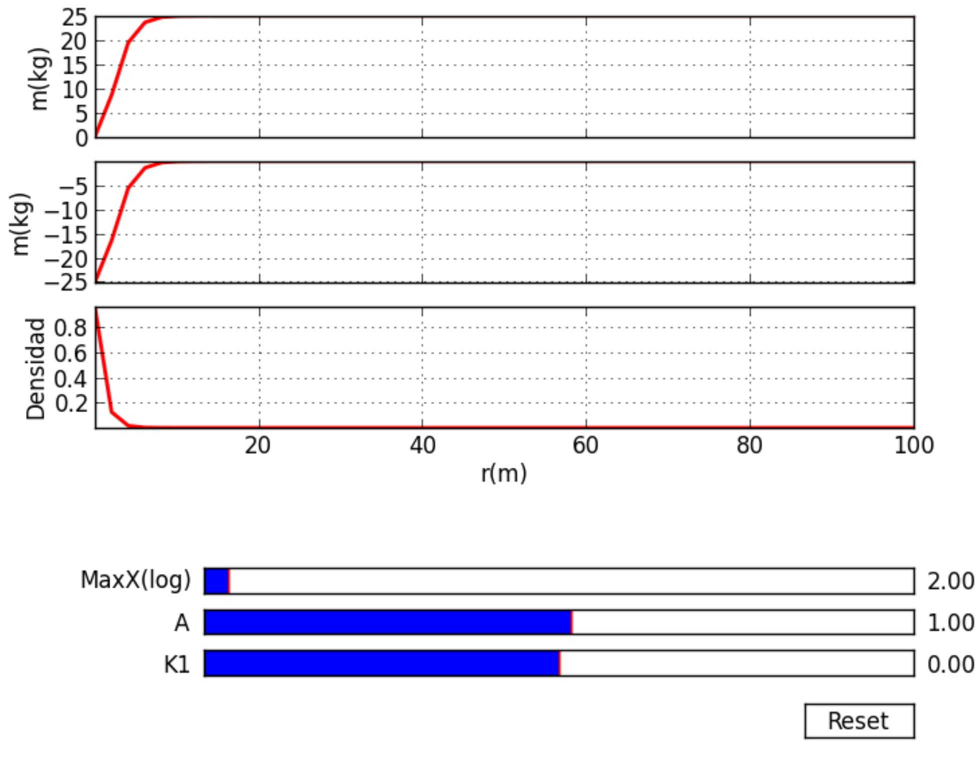

Figura 11: *Masa A = 1*

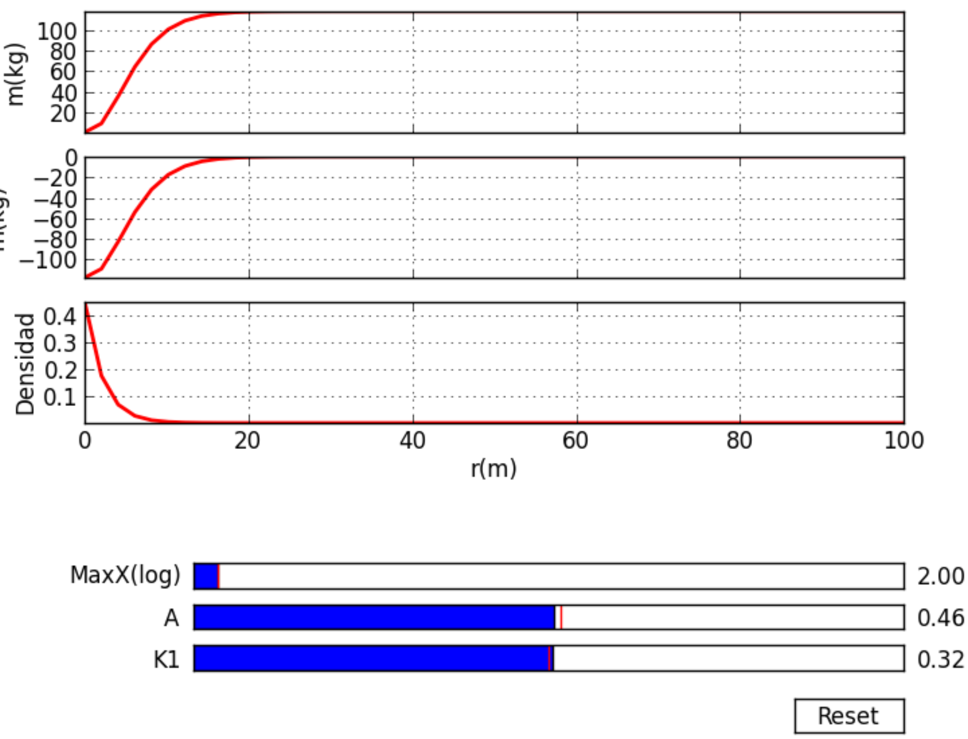

Figura 12: *Masa A in (0,1)*

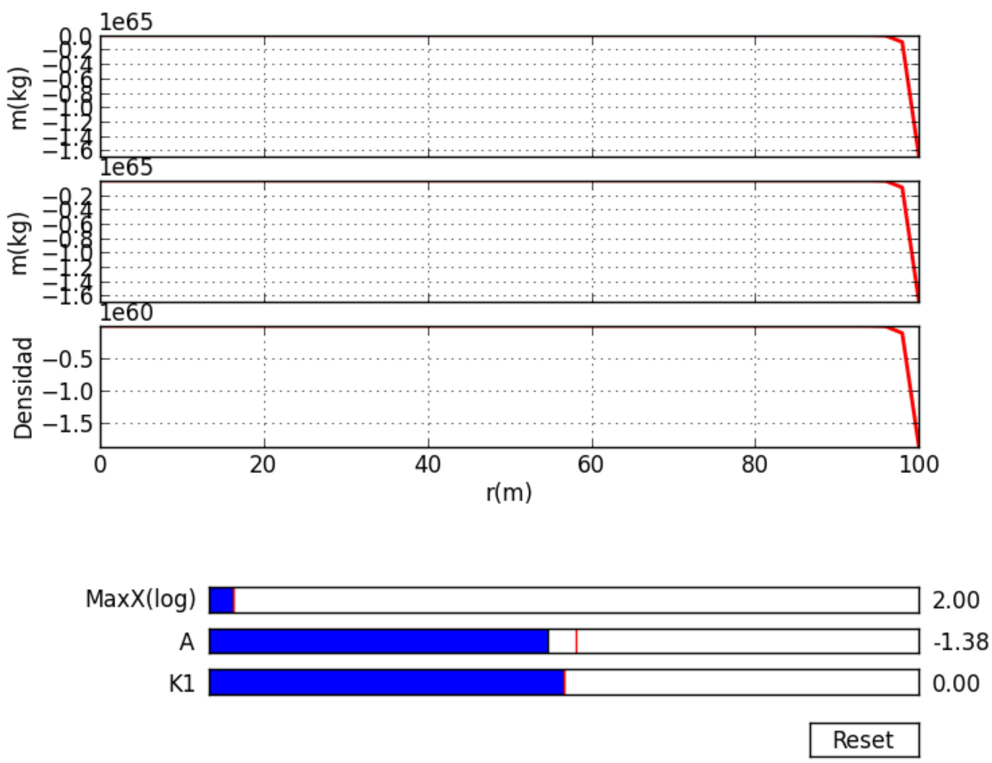

Figura 13: *Masa A menor que 0*

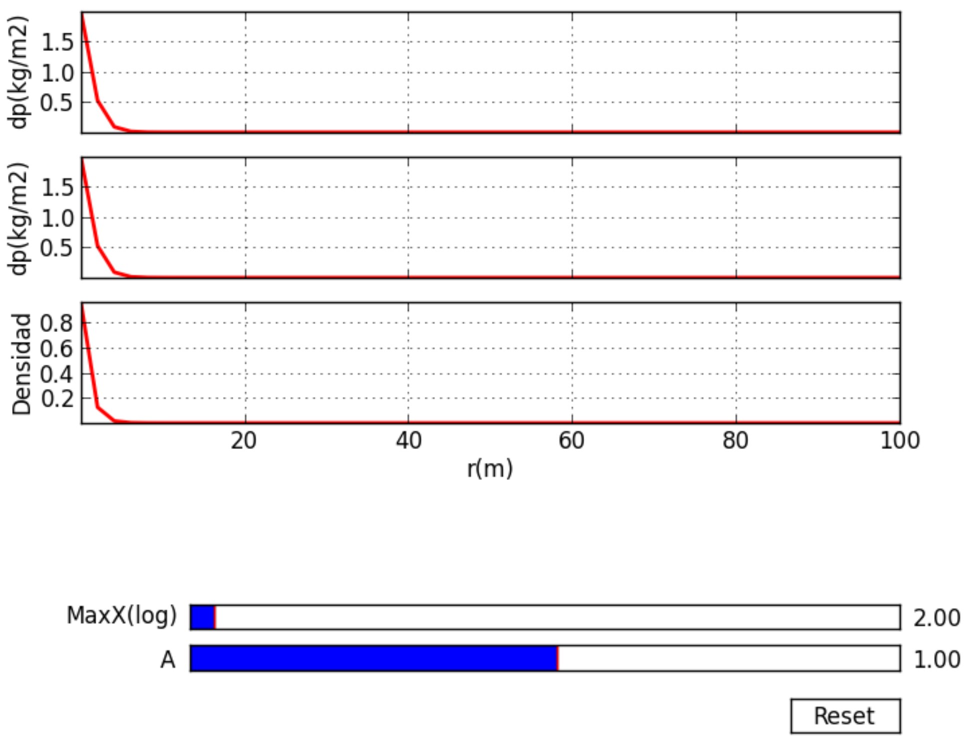

Figura 14: *Distribución proyectada A = 1*

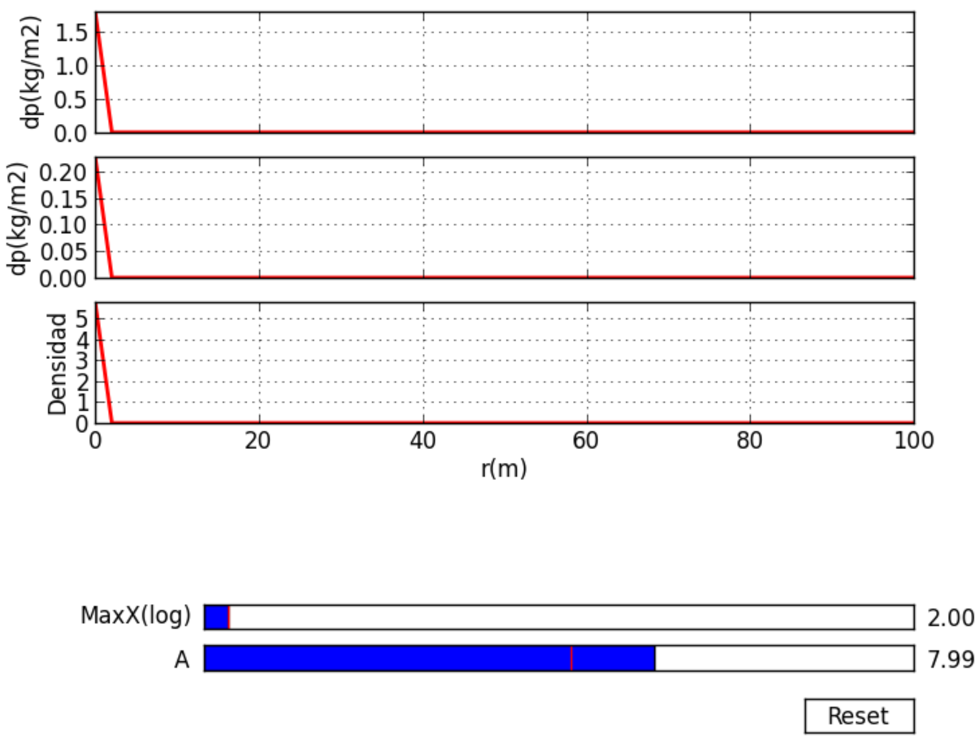

Figura 15: *Distribución proyectada A mayor que 1*

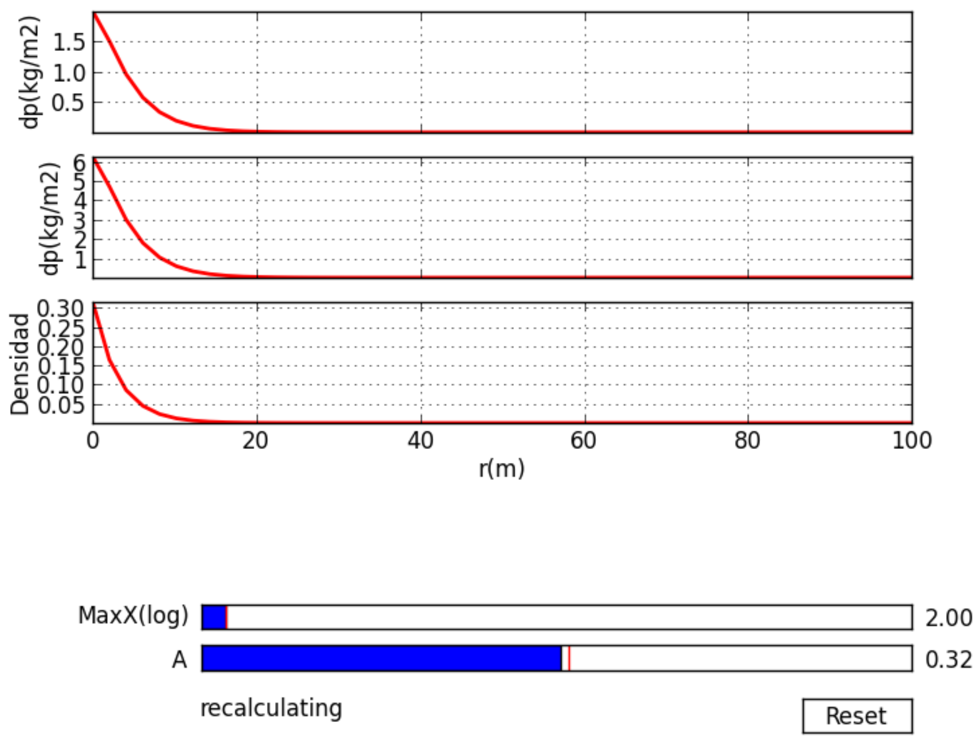

Figura 16: *Distribucion proyectada A in (0,1)*