

Nociones teóricas

Para una distribución de masa ρ

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto x es:

$$F(x) = G \int \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \rho(x') d^3x \text{ y después de hacer cálculos llegamos a}$$

$$\nabla F(x) = -4\pi G \rho(x)$$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x' - x|} d^3x$. Observamos que $F(x) = -\nabla \Phi$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetría esférica** (las funciones solo dependen de r y no de la posición en la esfera de radio r : los ángulos θ y φ), así que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$; $\nabla \Phi(r) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$
 La ecuación Poisson: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} (\text{el signo} - \text{con } K_1)$

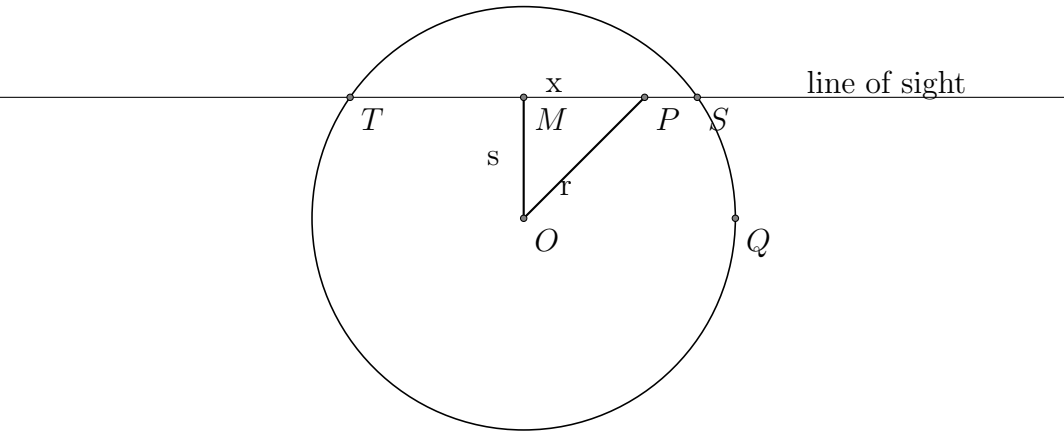
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una partícula en una órbita circular de radio r : $v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, v_c(0) = 0, M(0) = 0$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función $f(r)$ en el plano y, z (a lo largo de la línea de visión OX) es la función: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$ donde s es la distancia desde el centro del círculo en el plano proyectado ($s^2 = y^2 + z^2$)

$$r^2 = x^2 + s^2 \text{ y la simetría esférica } \implies F(s) = 2 \left| \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + s^2}) dx \right|$$



Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar $\Phi(r)$, $M(r)$, $M_p(r)$, $v_c(r)$

Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función: $f(r) = r^2 \rho_c \exp(-r/r_0)$ observamos que f

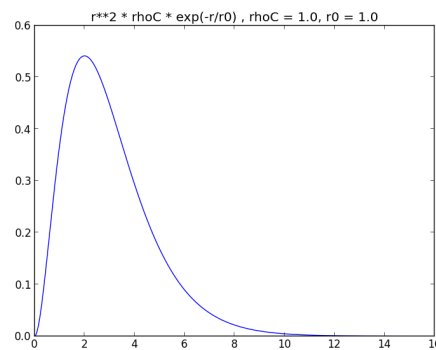


Figura 1: $r^2 \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

es continua y $f(0) = 0$

$$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$$

Miramos el gráfico de la función $f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$ que no está definida en 0 pero es continua en $(0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

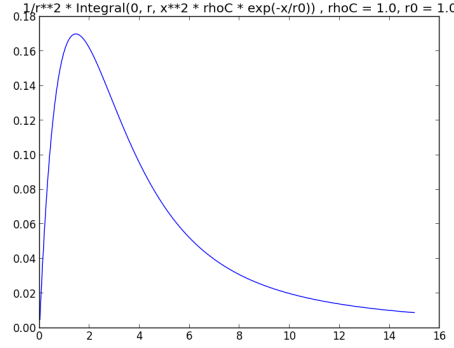


Figura 2: $\frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} (\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da) dx + K_2$ (elegimos $K_1 = 0$ y K_2 de tal manera que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, en práctica $K_2 = -\Phi(R_{max})$)

$v_c(r) = (\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}}$ (la constante de integración es 0 porque $v_c(0) = 0$)

$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$ (la constante de integración es 0 porque $M(0) = 0$)

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2\rho_c |\int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx|$

Los gráficos se realizaron con un programa python (en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial>) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales (sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r. Se muestran los gráficos para ρ_c en $\{0.5 \cdot 10^5, 10^5, 1.5 \cdot 10^5, 2.0 \cdot 10^5\}$ y r_0 en $\{0.5 \cdot 10^9, 10^9, 1.5 \cdot 10^9, 2 \cdot 10^9\}$. Todas las cantidades están expresadas en las unidades SI: densidad kg/m³,

distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m², velocidad m/s y se consideró la constante gravitacional $G = 6.6 * 10^{-11} m^3/(kg s^2)$

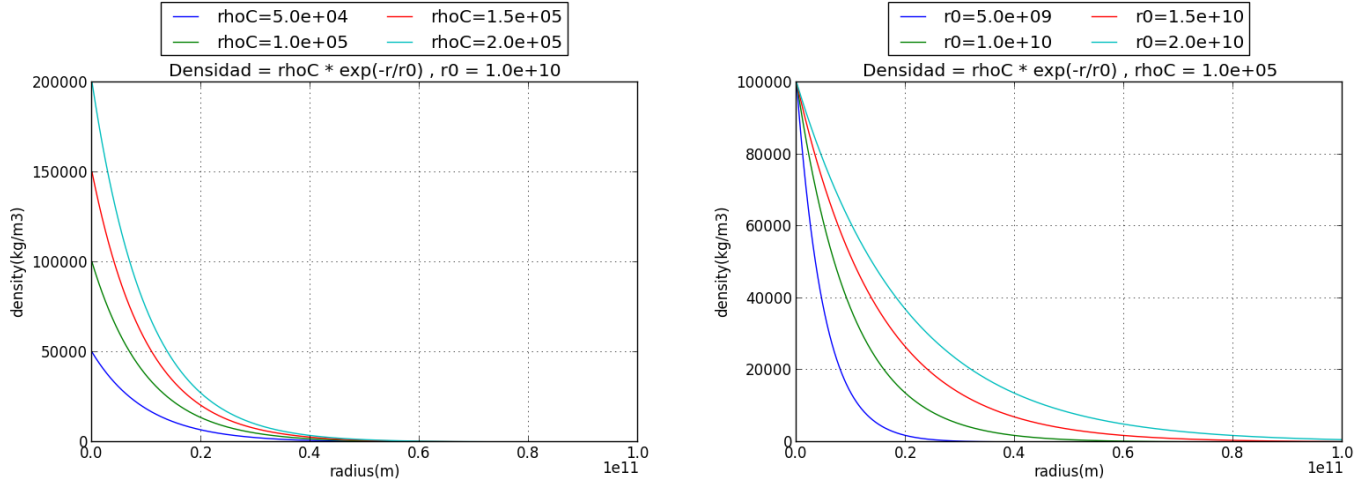


Figura 3: *Densidad*

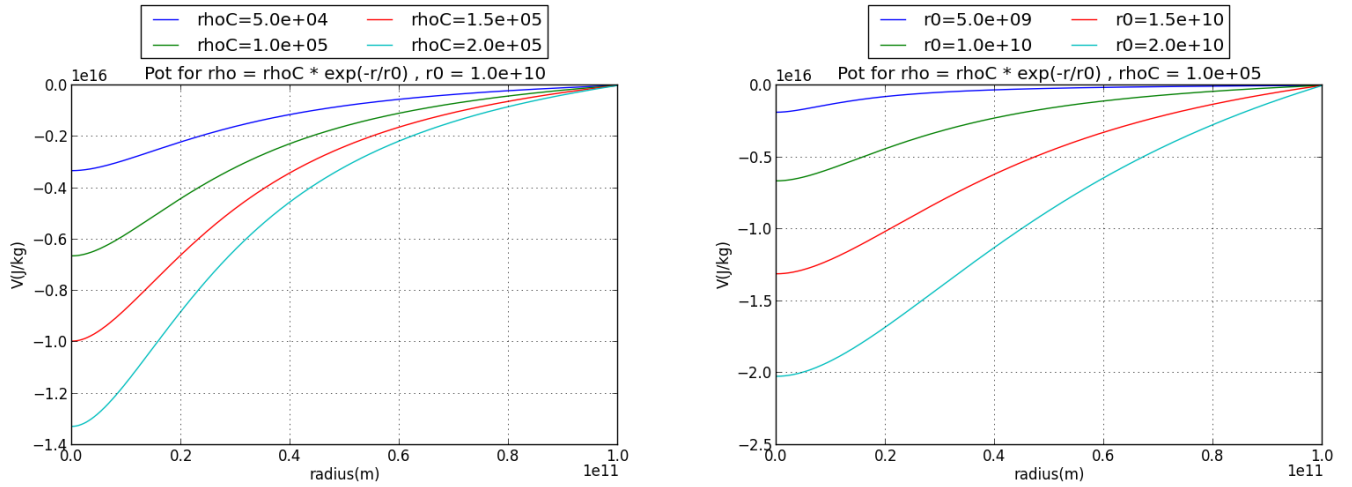
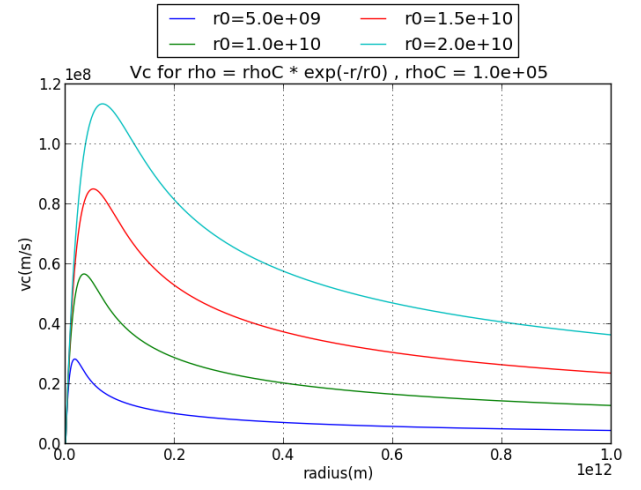
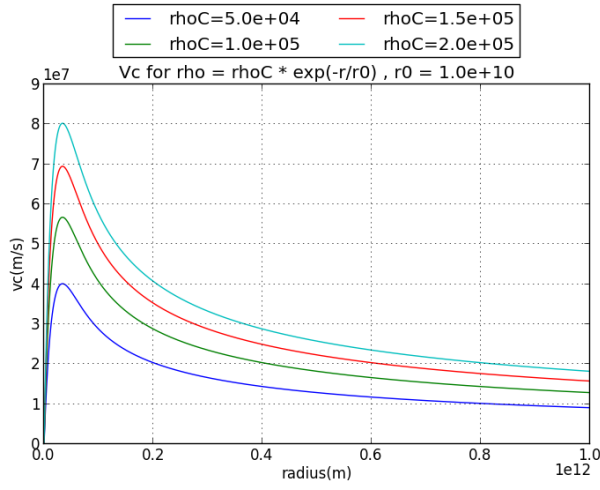
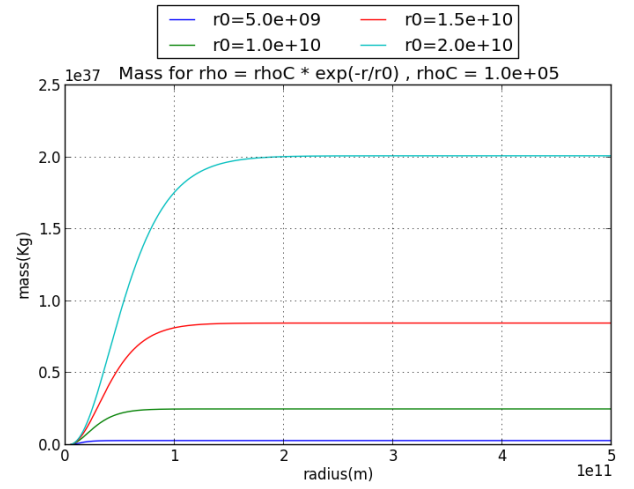
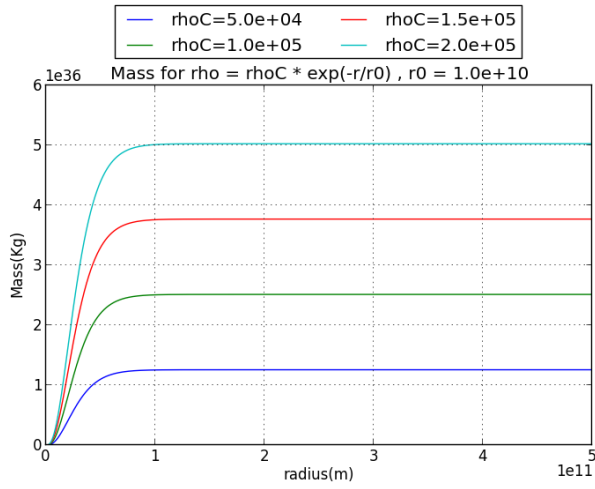


Figura 4: *Potencial*

Figura 5: *Velocidad circular*Figura 6: *Masa*

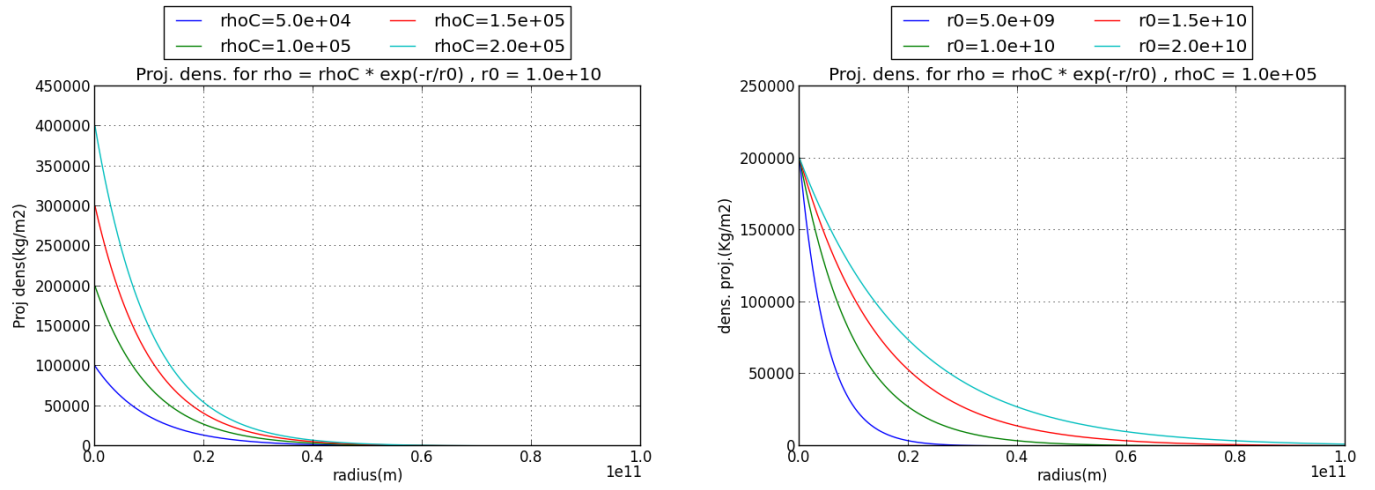


Figura 7: *Densidad proyectada*

- $\rho(r) = Ae^{-Br} = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$, $A, B > 0$, $\rho_c = A$, $r_0 = \frac{1}{B}$ en un sistema con simetría esférica
- Integrando por partes 2 veces:
- $$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx &= -\frac{1}{B} \int_0^r x^2 (e^{-Bx})' dx = -\frac{1}{B} \left((x^2 e^{-Bx}) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-Bx} dx \right) = \\ &= -\frac{2}{B^2} \int_0^r x (e^{-Bx})' dx - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^2} \left((x e^{-Bx}) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-Bx} dx \right) - \\ &= \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^3} e^{-Bx} \Big|_0^r - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = \frac{2}{B^3} - \frac{2}{B^3} e^{-Br} - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \\ &= \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x y^2 e^{-By} dy \right) dx &= -\frac{1}{B} \left(-\frac{2}{B^2} \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{B^2} \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx + \right. \\ &\left. \frac{2}{B} \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx + \int_{\varepsilon}^r e^{-Bx} dx \right) = \frac{1}{B^2} \left(\frac{2}{B} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-Br} - \frac{1}{B} \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - \right. \\ &\left. 2 \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx \right) \end{aligned}$$
- $$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{4\pi GA}{B^2} \left(\frac{2}{B} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-Br} - \frac{1}{B} \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - 2 \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx \right)$$
- $$M(r) = 4\pi A \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx = -\frac{4\pi A}{B} \left(-\frac{2}{B^2} + \frac{2}{B^2} e^{-Br} + \frac{2}{B} r e^{-Br} + r^2 e^{-Br} \right)$$
- $$v_c(r) = \left(\frac{4\pi GA}{r} \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{4\pi GA}{B} \left(\frac{2}{B^2 r} e^{-Br} + \frac{2}{B} e^{-Br} + r e^{-Br} - \frac{2}{B^2 r} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$
- Hay otro programa python mas general que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)
- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones (sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar K_1 en el caso del potencial
- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10^{**1} hasta 10^{**30}

- Se muestran los gráficos en el caso $A = B = 1$ ($\implies r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con las fórmulas de la integración por partes: ver calc_exp.py)

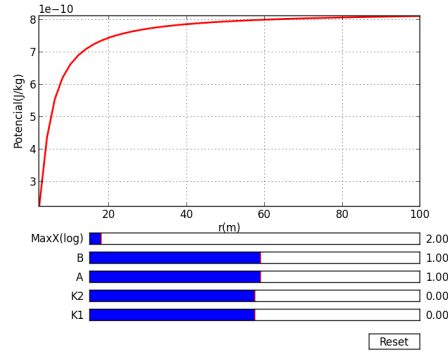


Figura 8: *Potencial*

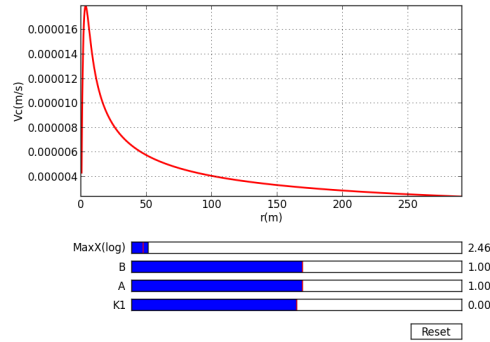


Figura 9: *Velocidad circular*

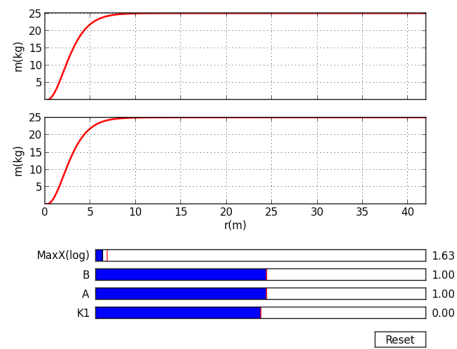


Figura 10: *Masa*

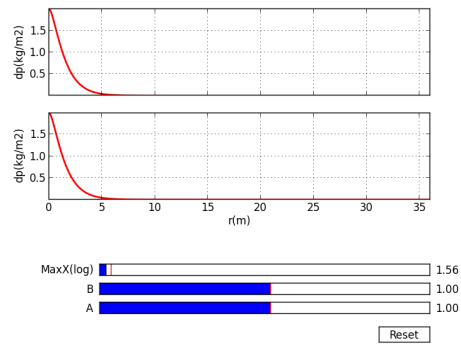


Figura 11: *Densidad proyectada*