Nociones teóricas

Para una distribución de masa ρ

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto x es: $F(x) = G\int \frac{x\prime - x}{|x\prime - x|^3}\rho(x\prime)d^3x$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla F(x) = -4\pi G\rho(x)$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(x) = -G\int \frac{\rho(x\prime)}{|x\prime - x|}d^3x$. Observamos que $F(x) = -\nabla\Phi$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetria esférica** (las funciones solo dependen de r y no de la posición en la esfera de radio r: los angulos θ y φ), asi que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$; $\nabla\Phi(r) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r})$ La ecuacion Poisson:$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G\rho(r) \implies r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = 4\pi G\int r^2\rho(r)dr + K_1 \implies \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G\int \frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + K_1\int \frac{1}{r^2}dr + K_2 = 4\pi G\int \frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R}(el signo - con K_1)$

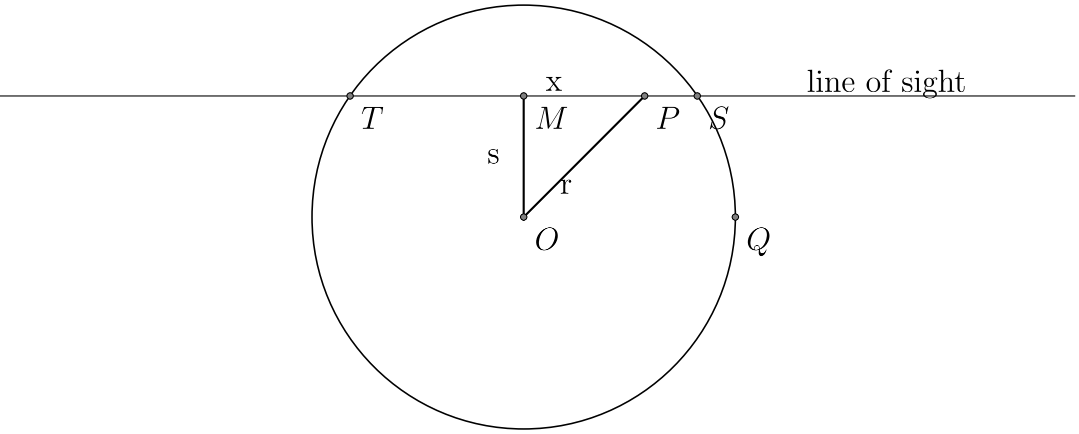
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una particula en una orbita circular de radio r: $v_c^2(r) = r\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi\int r^2\rho(r)dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno: $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0, v_c(0) = 0, M(0) = 0$

En un sistema con simetria esférica: la proyección de una función f(r) en el plano y,z (a lo largo de la línea de visión OX)es la funcción: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)dx$ donde s es la distancia desde el centro del circulo en el plano proyectado ($s^2 = y^2 + z^2$)

$r^2 = x^2 + s^2$ y la simetría esférica $\implies F(s) = 2|\int_0^\infty f(\sqrt{x^2 + s^2})dx|$



Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar $\Phi(r)$, M(r),$M_p(r)$, $v_c(r)$

Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función:$f(r) = r^2 \rho_c exp(-r/r0)$ observamos que f

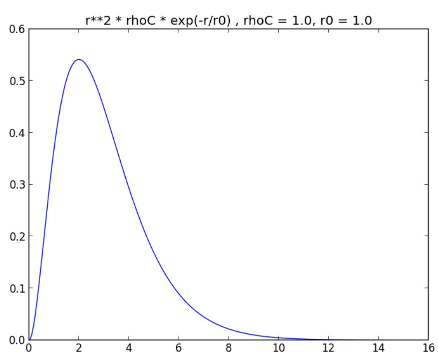


Figura 1: $r^2 \rho_c e^{\frac{-r}{r0}}$

es continua y f(0) = 0

$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$

Miramos el gráfico de la función $f(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho_c e^{-\frac{r}{r0}}$ que no está definida en 0 pero es continua en $(0,\infty)$ y $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

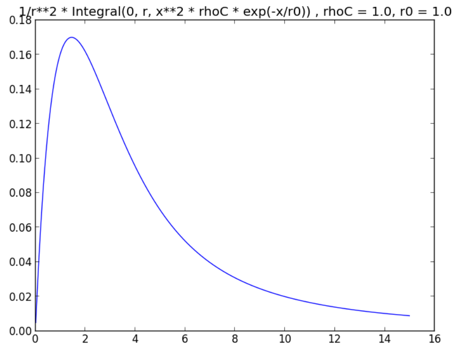


Figura 2: $\frac{1}{r^2}\int_0^r x^2 \rho_c e^{\frac{-x}{r0}} dx$

$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da)dx + K_2$ (elegimos $K_1 = 0$ y K_2 de tal manera que $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0$, en práctica $K_2 = -\Phi(R_{max})$)

$v_c(r) = (\frac{4\pi G\rho_c}{r}\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}}$ (la constante de integración es 0 porque $v_c(0) = 0$)

$M(r) = 4\pi\rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$ (la constante de integración es 0 porque $M(0) = 0$)

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2\rho_c|\int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx|$

Los gráficos se realizaron con un programa python (en el repositorio git: `https://github.com/beevageeva/potencial`) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales(sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r. Se muestran los gráficos para ρ_c en $\{0.5*10^5, 10^5, 1.5*10^5, 2.0*10^5\}$y r_0 en $\{0.5*10^9, 10^9, 1.5*10^9, 2*10^9\}$. Todas las cantidades estan expresadas en las unidades SI: densidad kg/m3, distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m2, velocidad m/s y se consideró la constante gravitacional $G = 6.6 * 10^{-11} m^3/(kg * s^2)$

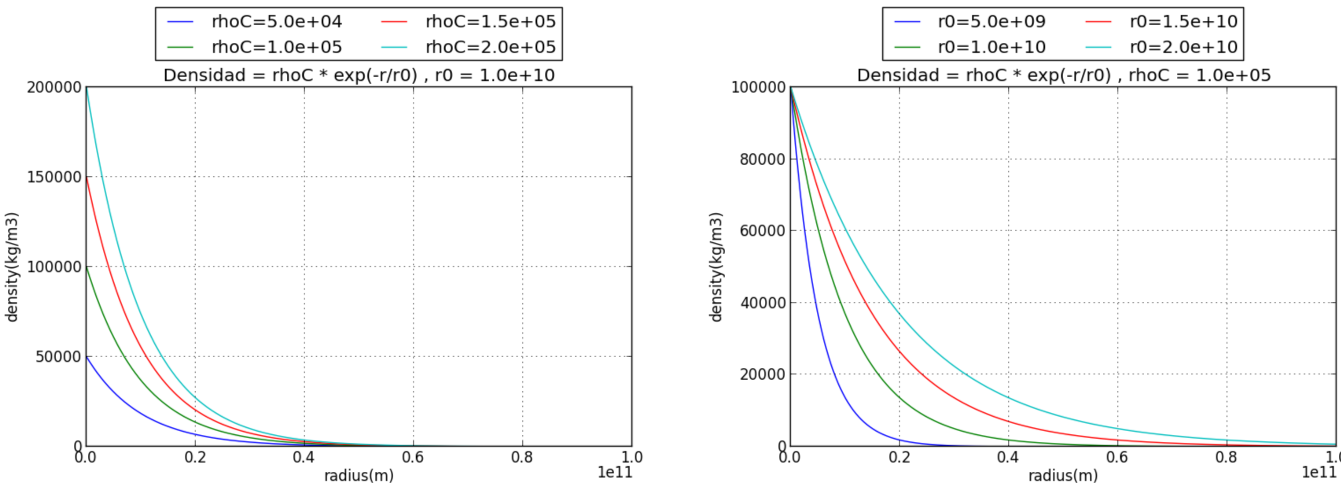


Figura 3: *Densidad*

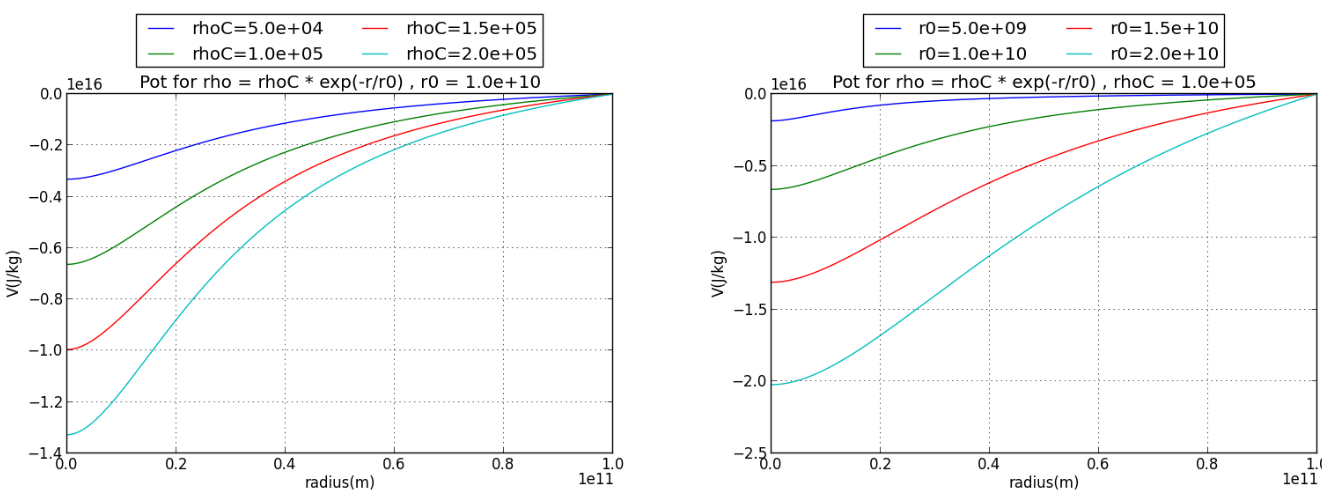


Figura 4: *Potencial*

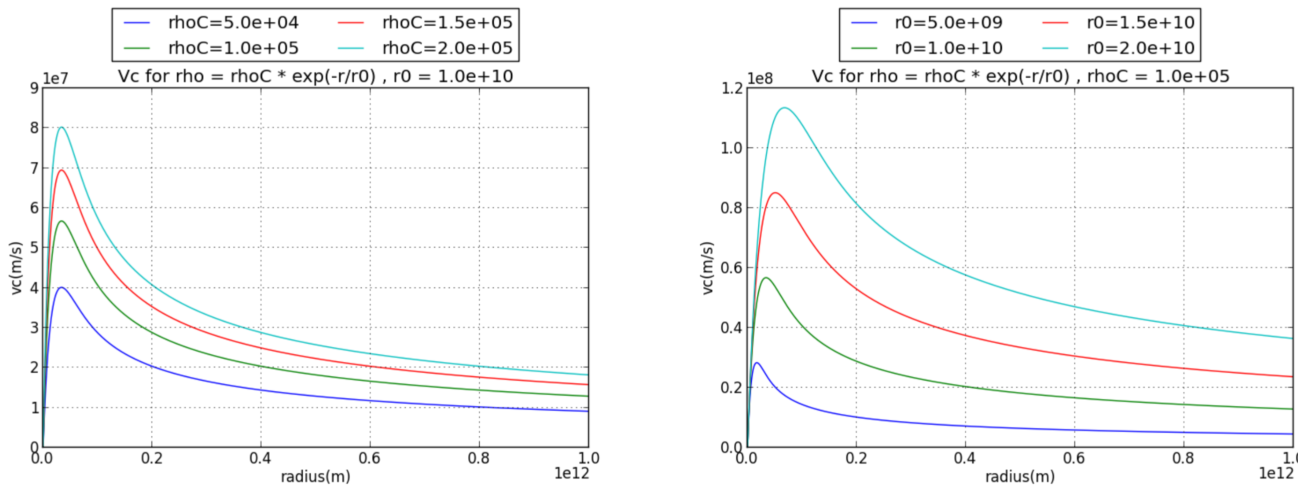


Figura 5: *Velocidad circular*

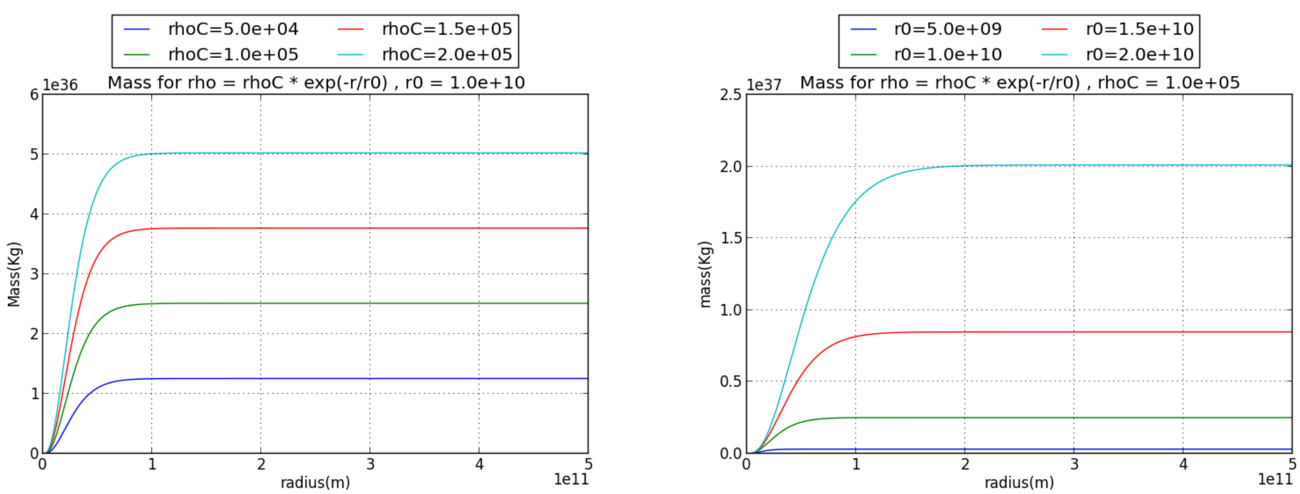


Figura 6: *Masa*

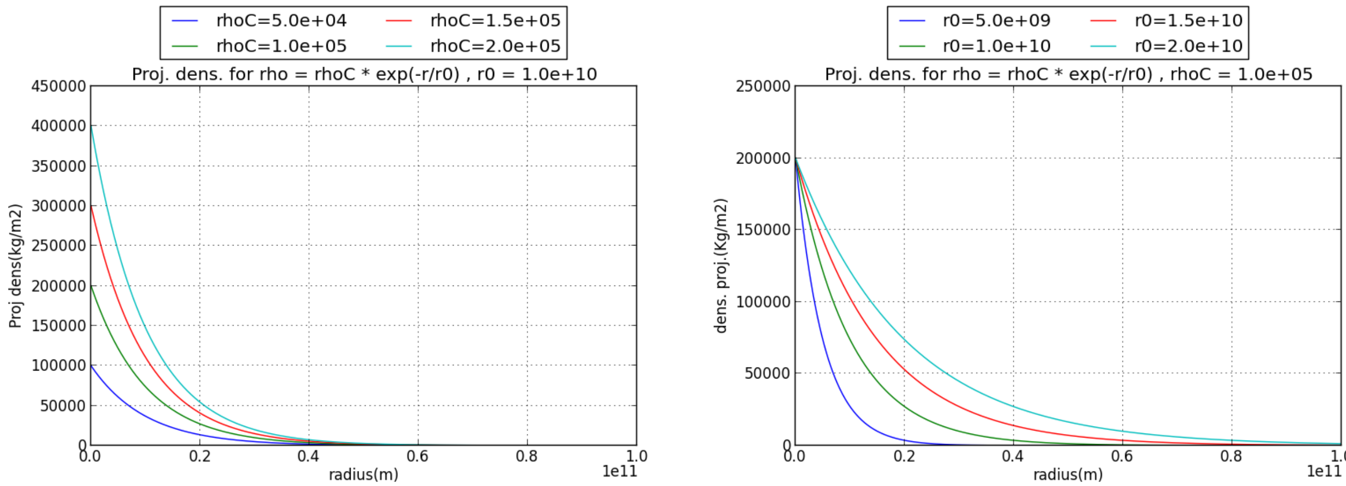


Figura 7: *Densidad proyectada*

Solución analítica

$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Integrando por partes 2 veces:

$\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = -r_0 \int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0((x^2 e^{-\frac{x}{r_0}})\Big|_0^r - 2\int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}} dx) = -2r_0^2 \int_0^r x(e^{-\frac{x}{r_0}})' dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2((xe^{-\frac{x}{r_0}})\Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx) - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^3 e^{-\frac{x}{r_0}}\Big|_0^r - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}(2r_0^2 + 2r_0 r + r^2)$

$\implies \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}} dy) dx = -r_0(-2r_0^2 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} dx + r_0^2 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx + 2r_0 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx + \int_\varepsilon^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx) = r_0^2(2r_0(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx - 2\int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx)$

Integrando por partes $\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx = -(\frac{e^{-\frac{x}{r_0}}}{x})\Big|_\varepsilon^r - \frac{1}{r_0}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

$\implies \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2 (2r_0(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + e^{-\frac{r}{r_0}} + r_0(\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}}{\varepsilon}) - \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx)$

Usando programas que trabajan con símbolos matematicos(Mathematica y sympy(python) producen los mismos resultados) se comprueba la primera integral (que se calculó de forma analitica por partes antes), pero reduce más la segunda integración:

$\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da) dx = r_0^2(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}(\varepsilon+2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}}(r+2r_0)}{r}) \implies \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}(\varepsilon+2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}}(r+2r_0)}{r})$

$M(r) = 4\pi\rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = 4\pi\rho_c r_0(2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$

$v_c(r) = (\frac{4\pi G\rho_c}{r}\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}} = (4\pi G \rho_c r_0(\frac{2r_0^2}{r} - e^{-\frac{r}{r_0}}(2\frac{r_0^2}{r} + 2r_0 + r)))^{\frac{1}{2}}$

Gráficos de las funciones calculadas de forma analítica(las fórmulas de arriba) (se observa que son parecidos a la solución completamente numérica de antes)

```
In[7]:= Trace[∫_eps^r (2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2 dx]

Out[7]= {{{{{{{{x/r0, x/r0}, -x/r0, -x/r0}, e^(-x/r0)}, e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2)},
    -(e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2)), -e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2)},
   2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2)}, {1/x^2, 1/x^2}, (2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2,
  (2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2}, ∫_eps^r (2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2 dx,
 {{FreeQ[(2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2,
    HoldPattern[Root[Integrate`ImproperDump`aa$__ /;
       Internal`DependsOnQ[{Integrate`ImproperDump`aa$}, x]]]], True},
  ! True, False}, ∫_eps^r (2 r0^3 - e^(-x/r0) r0 (2 r0^2 + 2 r0 x + x^2))/x^2 dx,
 ConditionalExpression[r0^2 (2 r0/eps - (e^(-eps/r0) (eps + 2 r0))/eps + (-2 r0 + e^(-r/r0) (r + 2 r0))/r),
  (eps^2 ≠ eps r && Re[eps/(-eps + r)] ≥ 0) || Re[eps/(eps - r)] > 1 || eps/(eps - r) ∉ Reals]}
```

Figura 8: *Trace in Mathematica*

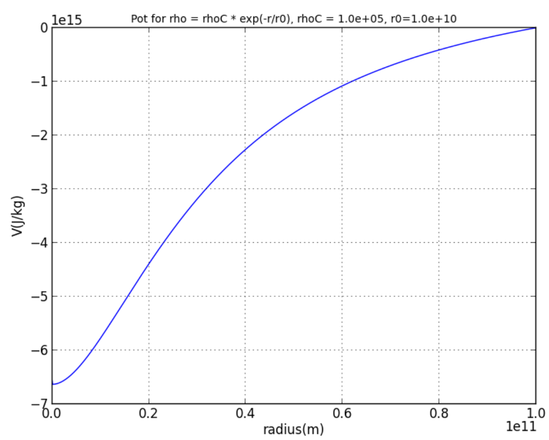


Figura 9: *Potencial*

- Hay otro programa python mas general que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar

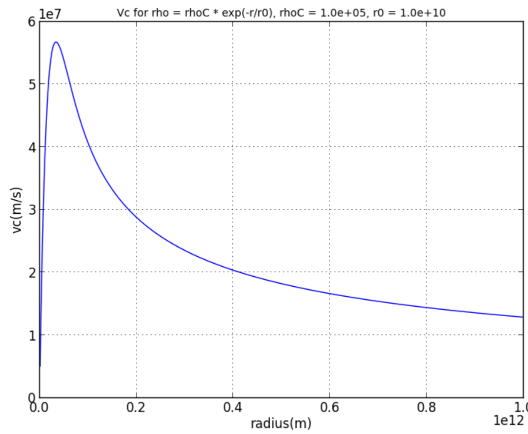


Figura 10: *Velocidad circular*

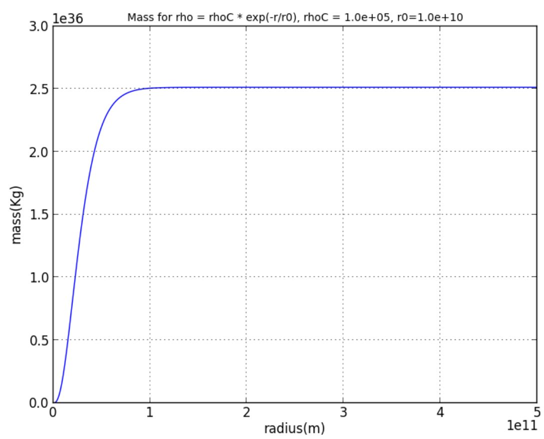


Figura 11: *Masa*

durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones(sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar K1 en el caso del potencial

- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10**1 hasta 10**30

- Se muestran los gráficos en el caso A = B = 1 ($\implies r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con las fórmulas de la integración por partes: ver calc_exp.py)

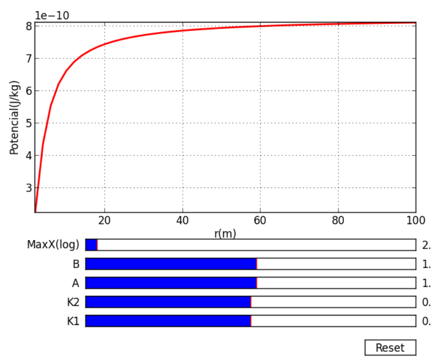


Figura 12: *Potencial*

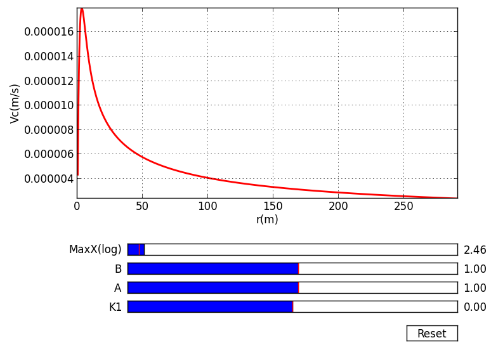


Figura 13: *Velocidad circular*

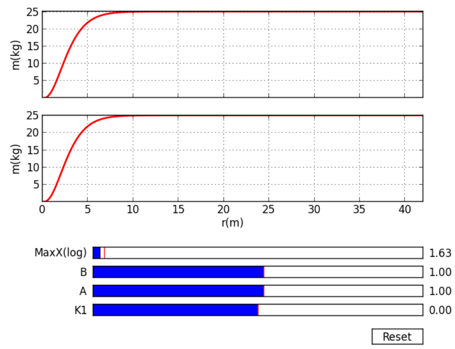


Figura 14: *Masa*

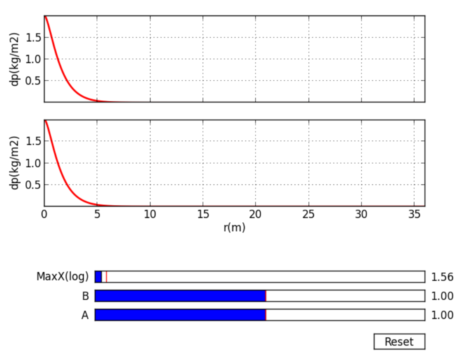


Figura 15: *Densidad proyectada*