Nociones teóricas

Para una distribución de masa $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Notaciones: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ para mostrar que $x = (x_1, x_2, x_3)$ es un vector $\in \mathbb{R}^3$ Para una function $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$ (vector) y una funcion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (scalar)

$\nabla g(\vec{x}) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_3}(\vec{x}))$ es un vector $\in \mathbb{R}^3$;

$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\vec{x})$ es un scalar ($\in \mathbb{R}$)

$\nabla^2 g(\vec{x}) = \nabla \cdot \nabla g(\vec{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_3}(\vec{x})$ scalar ($\in \mathbb{R}$)

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en una masa m = 1 situada en el punto x es: $\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{\vec{x\prime} - \vec{x}}{|\vec{x\prime} - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x\prime}) d^3 \vec{x\prime}$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = -4\pi G \rho(\vec{x})$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x\prime})}{|\vec{x\prime} - \vec{x}|} d^3 \vec{x}$. Observamos que $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla \Phi(\vec{x})$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetria esférica** (las funciones solo dependen de r $(= |\vec{r}|)$ y no de la posición en la esfera de radio r: los angulos θ y φ)

Las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$; $|\vec{F}(r)| = |\nabla \Phi(r)| = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial \phi(r)}{\partial r})$ La ecuacion Poisson:$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial \phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} (el signo - con K_1)$

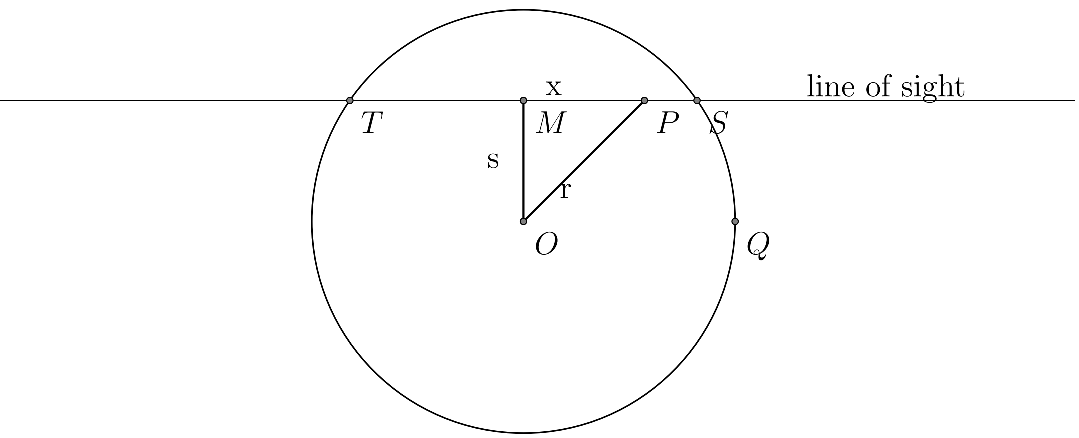
El módulo de la fuerza ejercitada sobre la particula debido al movimiento en una órbita circular es $|\vec{F}(r)| = m \frac{v_c^2}{r}$ y tiene que ser igual al módulo la fuerza gravitatoria $\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ donde v_c es la velocidad circular y m se consideró $= 1 \implies v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno: $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0, v_c(0)=0, M(0)=0$

En un sistema con simetria esférica: la proyección de una función f(r) en el plano y,z (a lo largo de la línea de visión OX)es la funcción: $F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(r)dx$ donde s es la distancia desde el centro del circulo en el plano proyectado ($s^2=y^2+z^2$)

$r^2=x^2+s^2$ y la simetría esférica $\implies$ $F(s)=2|\int_0^\infty f(\sqrt{x^2+s^2})dx|$



Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función:$f(r)=r^2\rho(r)$

si f es continua y f(0) = 0

$\int r^2\rho(r)dr=\int_0^r x^2\rho(x)dx$

Miramos el gráfico de la función $f(r)=\frac{1}{r^2}\int_0^r \frac{1}{x^2}\rho_c e^{-\frac{x}{r0}}dx$

si f no está definida en 0 pero es continua en (0,∞) y $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=0$

$\Phi(r)=4\pi G\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x a^2\rho(a)da)dx+K_2$ (elegimos $K_1=0$ y K_2 de tal manera que $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0$, en práctica $K_2=-\Phi(R_{max})$)

$v_c(r)=(\frac{4\pi G}{r}\int_0^r x^2\rho(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ (la constante de integración es 0 porque $v_c(0)=0$)

$M(r)=4\pi\int_0^r x^2\rho(x)dx$ (la constante de integración es 0 porque $M(0)=0$)

Problema de la práctica. Solución numérica

Hipótesis: $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar $\Phi(r)$, M(r),$M_p(r)$, $v_c(r)$

Miramos los gráficos de las funciones(plotFunctions.py) y vemos que cumplen las condiciones para poner los límites de integración explicadas arriba

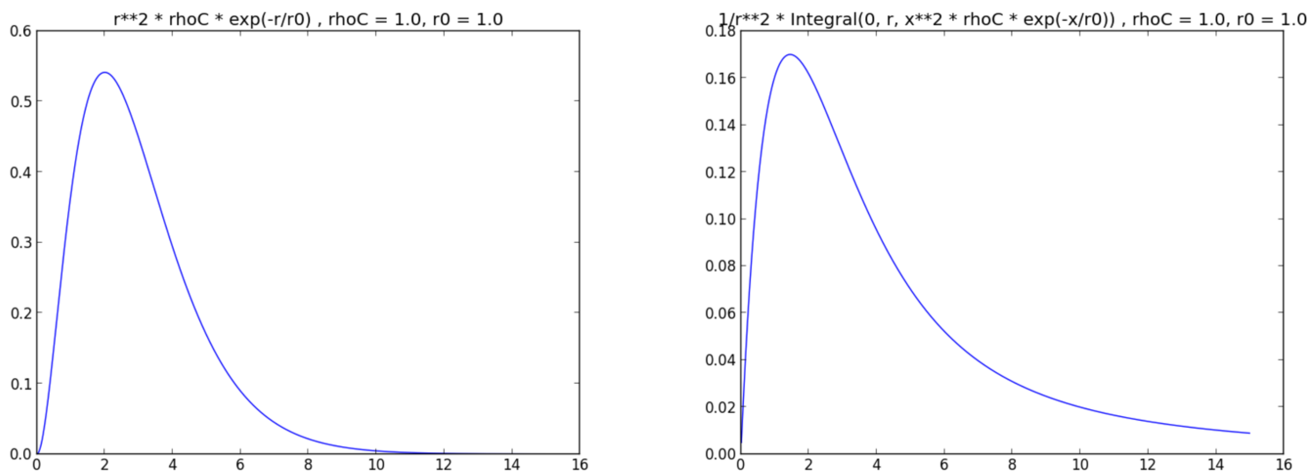


Figura 1: *Graficos de las funciones*

$\Phi(r) = 4\pi G\rho_c \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{x^2}(\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da)dx - \Phi(R_{max})$

$v_c(r) = (\frac{4\pi G\rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}}$

$M(r) = 4\pi\rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2\rho_c|\int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx|$

Solución analítica

$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Integrando por partes 2 veces:

$\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}}dx = -r_0\int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0((x^2 e^{-\frac{x}{r_0}})\Big|_0^r - 2\int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}}dx) = -2r_0^2\int_0^r x(e^{-\frac{x}{r_0}})'dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2((xe^{-\frac{x}{r_0}})\Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}}dx) - r_0r^2e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^3 e^{-\frac{x}{r_0}}\Big|_0^r - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}(2r_0^2 + 2r_0 r + r^2)$

$\implies \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}}dy)dx = 2r_0^3\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}dx - \int_\varepsilon^r \frac{e^{-\frac{x}{r_0}}(2r_0^3+2r_0^2x+x^2r_0)}{x^2}dx = -2r0^3\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^r - \int_\varepsilon^r e^{-\frac{x}{r_0}}(-(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + r_0(-r_0-\frac{2r_0^2}{x})')dx = 2r_0^3(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + r_0((e^{-\frac{x}{r_0}})'(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + e^{-\frac{x}{r_0}}(-r_0-\frac{2r_0^2}{x})')$ =(integración por partes)= $2r_0^3(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + r_0(e^{-\frac{x}{r_0}}(-r_0-\frac{2r_0^2}{x}))\Big|_\varepsilon^r = r_0^2(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}(\varepsilon+2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0+e^{-\frac{r}{r_0}}(r+2r_0)}{r}) \implies \Phi(r) = 4\pi G\rho_c r_0^2(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}(\varepsilon+2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0+e^{-\frac{r}{r_0}}(r+2r_0)}{r})$

$M(r) = 4\pi\rho_c\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}}dx = 4\pi\rho_c r_0(2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$

$v_c(r) = (\frac{4\pi G\rho_c}{r}\int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}}dx)^{\frac{1}{2}} = (4\pi G\rho_c r_0(\frac{2r_0^2}{r} - e^{-\frac{r}{r_0}}(2\frac{r_0^2}{r} + 2r_0 + r)))^{\frac{1}{2}}$

Usando programas que trabajan con símbolos matematicos(Mathematica y sympy(python) - ver sympyDens.py) producen los mismos resultados

Comparación entre las soluciones del potencial, masa y velocidad obtenidas de forma numérica y analítica (exp_plot.py): (son iguales)

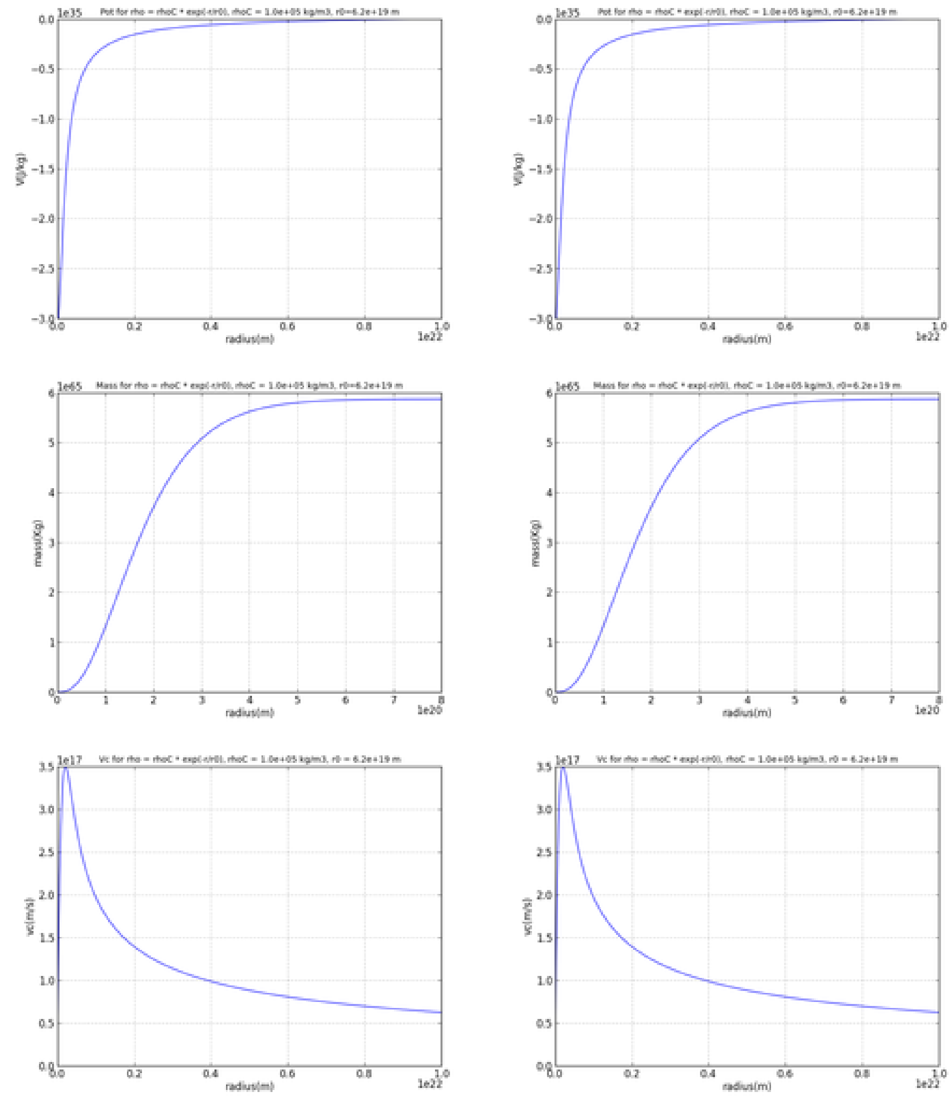


Figura 2: *izquierda: soluciones calculadas de forma numérica, derecha: analítica*

Variación de los parámetros (r_0 y ρ_c)

Los gráficos se realizaron con un programa python (exp_compare.py)

Se muestran los gráficos para ρ_c en $\{0.5 * 10^5, 10^5, 1.5 * 10^5, 2.0 * 10^5\}$ kg/m3 y r_0 en $\{0.5, 1, 1.5, 2\}$ kpc. Todas las cantidades estan expresadas en las unidades SI: densidad kg/m3, distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m2, velocidad m/s y se consideró la constante gravitacional $G = 6.6 * 10^{-11} m^3/(kg * s^2)$

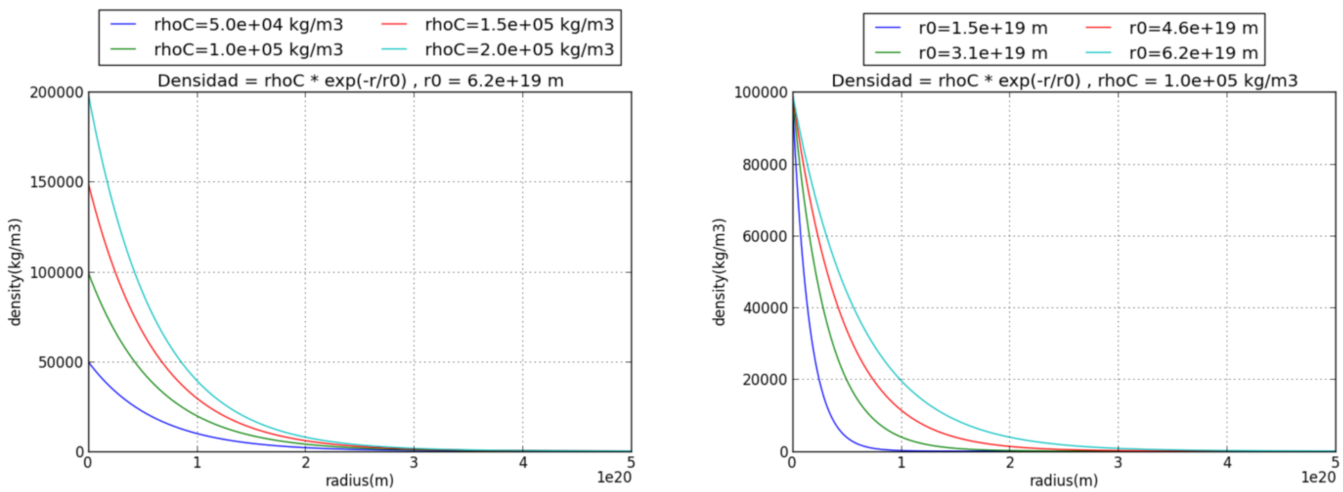


Figura 3: *Densidad*

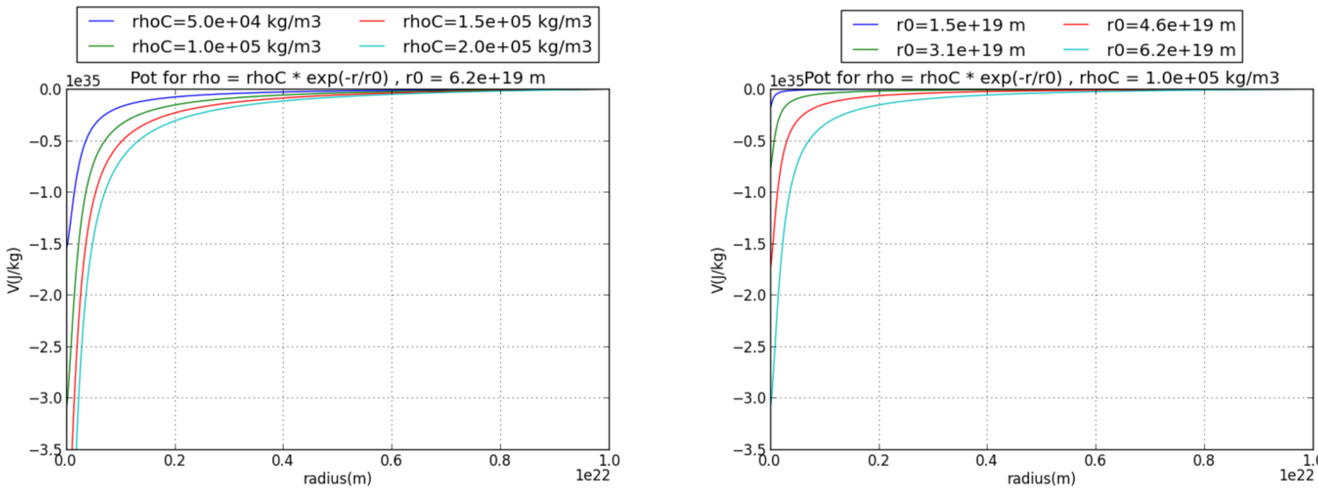


Figura 4: *Potencial*

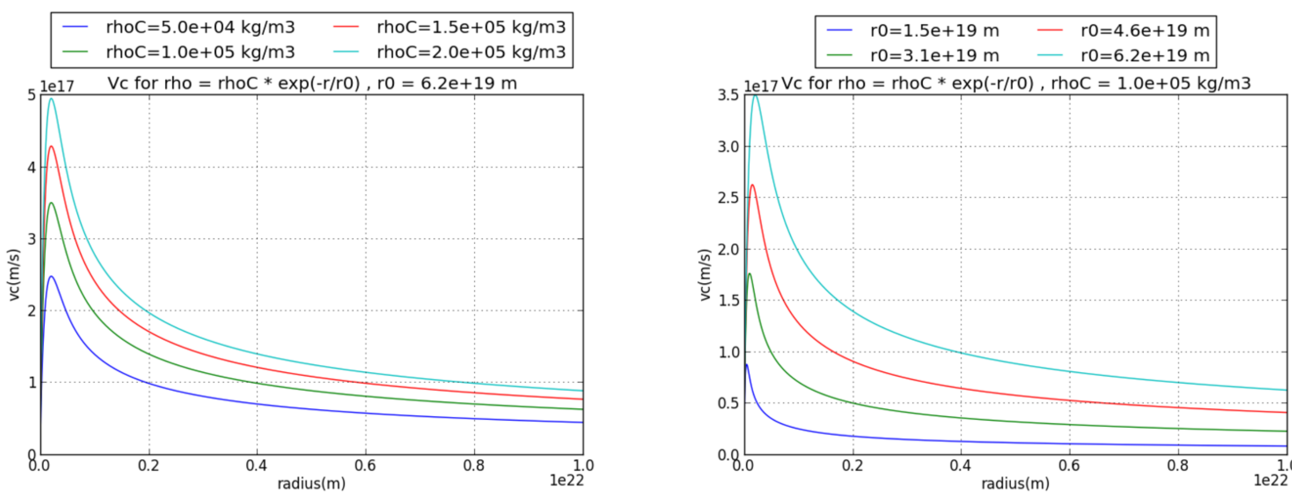


Figura 5: *Velocidad circular*

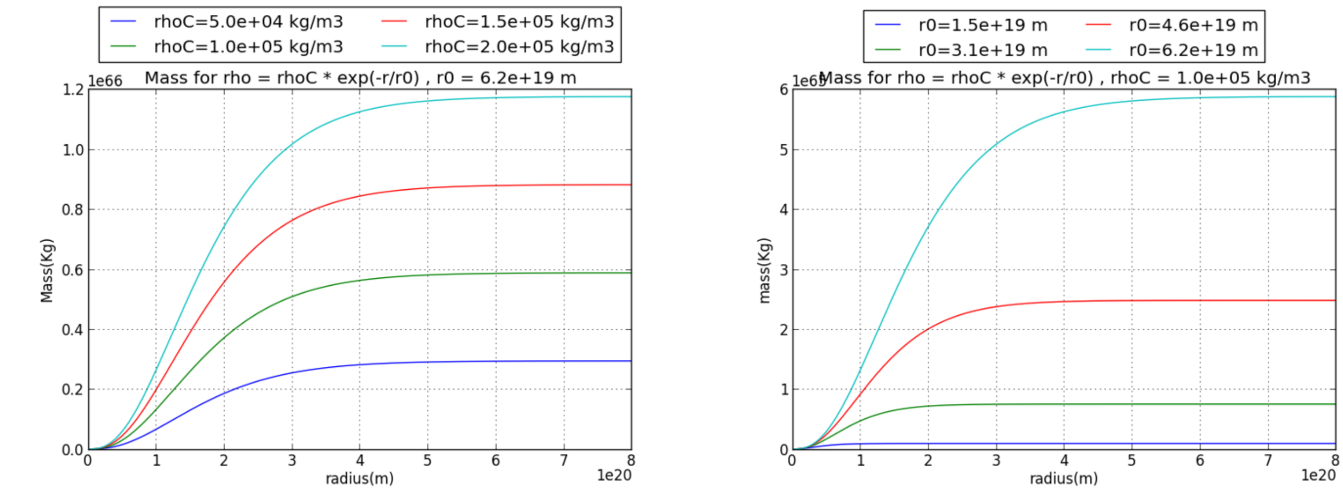


Figura 6: *Masa*

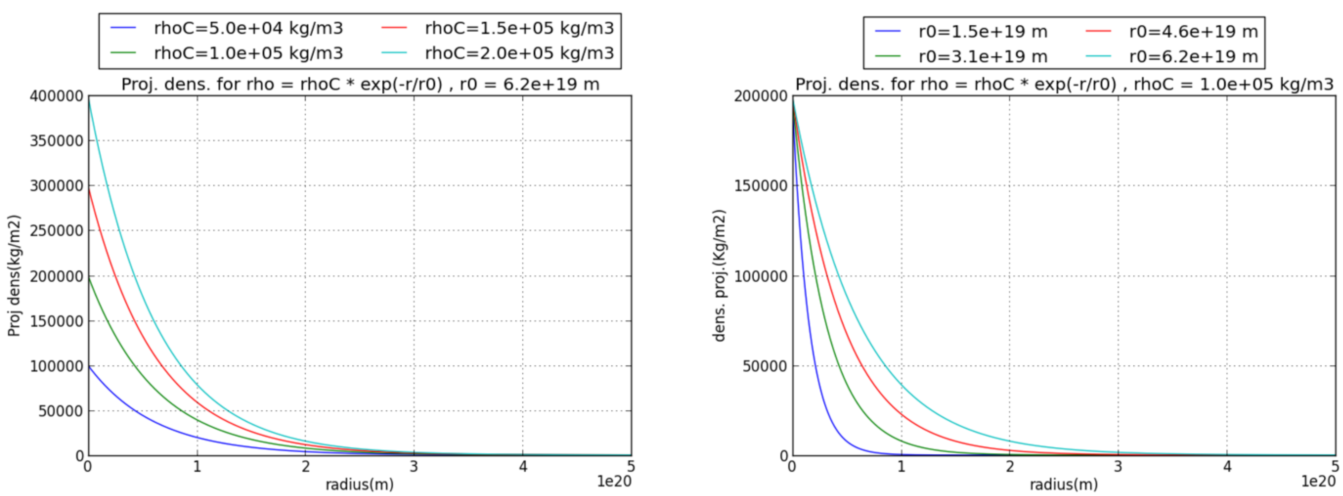


Figura 7: *Densidad proyectada*

Comparación con el potencial isócrono

Solución analítica del potencial isocrono

Hay 2 parámetros configurables: b(b = 0 es equivalente a una masa puntual: toda la masa en el centro) y M (la masa total del sistema)

$\Phi(r) = -\frac{GM}{b+\sqrt{b^2+r^2}}$

usando sympy para hacer los cálculos (sympyPot.py) (las fórmulas salen como en el libro)

Se define $a = \sqrt{b^2 + r^2}$

$\rho(r) = M(\frac{3(b+a)a^2 - r^2(b+3a)}{4\pi(b+a)^3 a^3})$

$M(r) = M\frac{r^3}{(b+\sqrt{b^2+r^2})^2\sqrt{b^2+r^2}}$

$v_c(r) = \sqrt{(GMr^2)/((b+a)^2 * a)}$

La densidad proyectada se calcula como antes reemplazando la funcion de densidad

Comparación

Elegimos r_0 (el parametro de escala de la distribucion exponencial)= 2kpc y ρ_c = 1e+5 y ejecutamos el programa para dibujar la masa para la distribución exponencial.

La masa total obtenida y misma densidad central introducidas antes se introducen como parámetros para dibujar los gráficos en el caso del potencial isócrono para poder hacer una comparación (el parámetro b se calcula : $b = (\frac{3M}{16\pi\rho_c})^{\frac{1}{3}}$ - reemplazando r=0 en la fórmula de la densidad)

```
python exp_plot.py   --type=m  --rmax=0.5e+21  --r0=6.16e+19 --rhoC=1e+5
python isochrone_plot.py --rhoC=1.0e5 --type=v --mass=5.9e+65 --rmax=0.8e+22
```

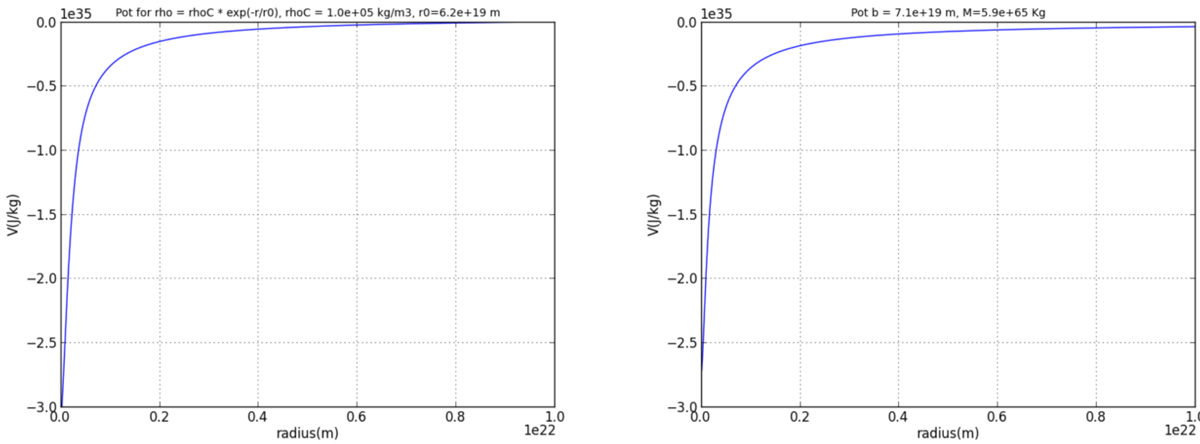


Figura 8: *Potencial comparado*

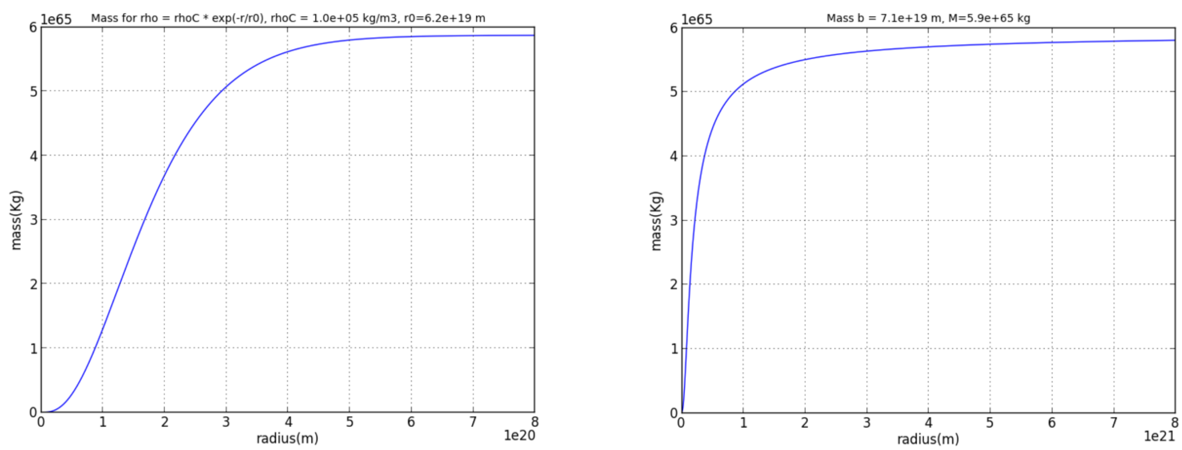


Figura 9: *Masa comparada*

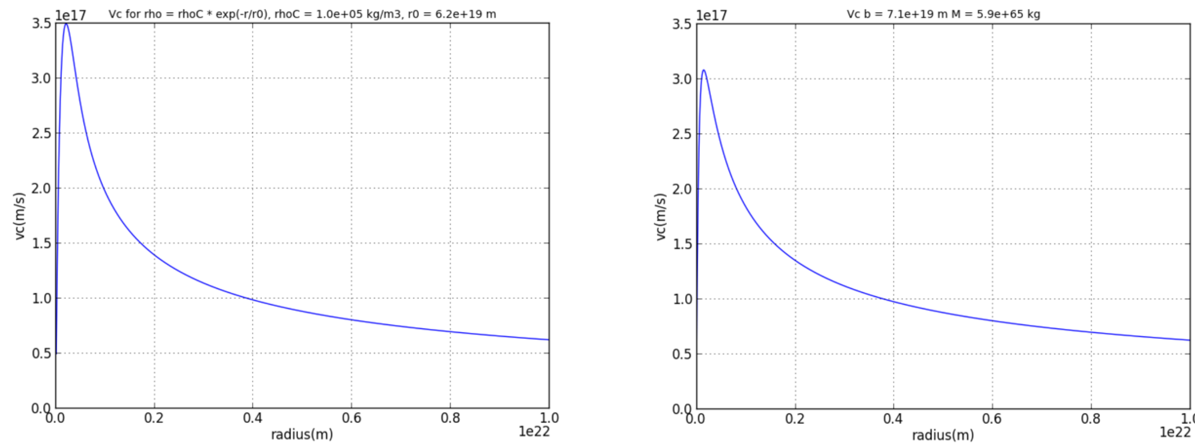


Figura 10: *Velocidad comparada*

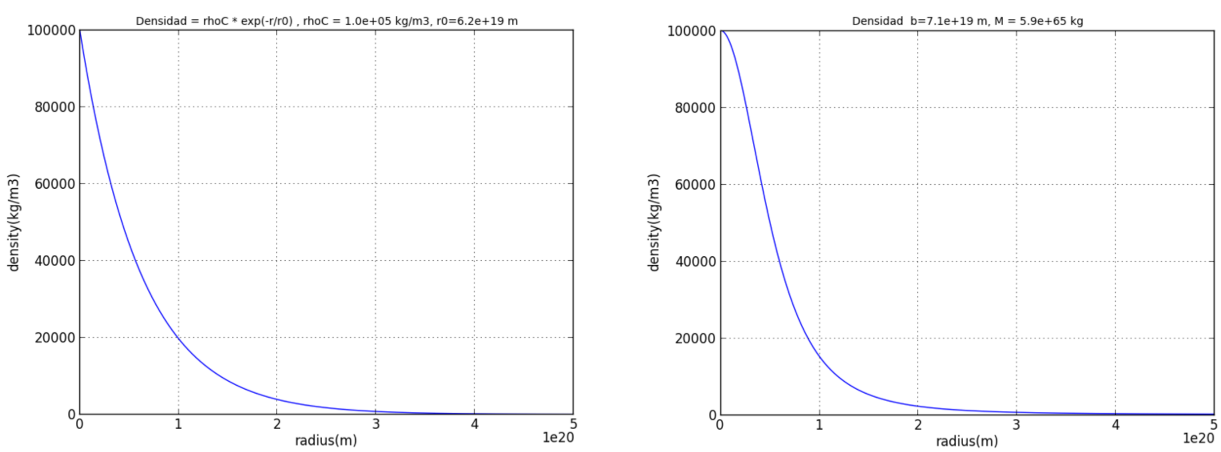


Figura 11: *Densidad comparada*

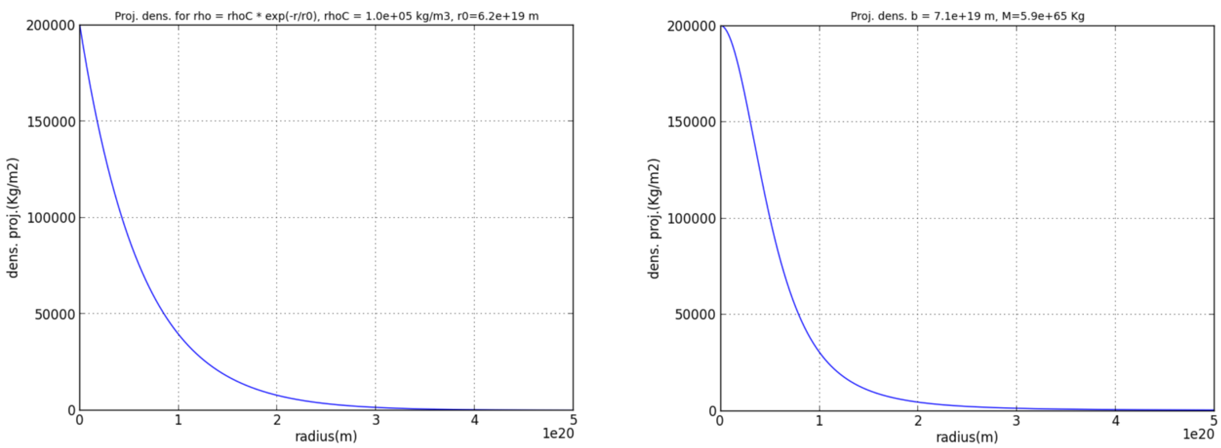


Figura 12: *Densidad proyectada comparado*

Conclusiones

Para las 2 distribuciones cuando la densidad es casi 0 la masa encerrada en el radius correspondiente es casi toda la masa (despues de este radius la masa es casi constante), el potencial se acerca a 0 y la velocidad circular tiene el máximo

el parámetro de escala r_0 y ρ_c

Código

- Los programas python, imagenes, pdf e incluso el tex están en el repositorio git: `https://github.com/beevageeva/potencial` Allí está la descripción y ejemplos de uso.
- Por razones históricas hay otro programa python mas general (pt.py)
- Se muestran los gráficos en el caso A = B = 1 ($\implies r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0, el segundo gráfico está calculado con la solución analítica: ver calc_exp.py)

```
python pt.py --type=p --test=calc_exp --k=0,-8e-10
python pt.py --type=v --test=calc_exp
python pt.py --type=m --test=calc_exp
```

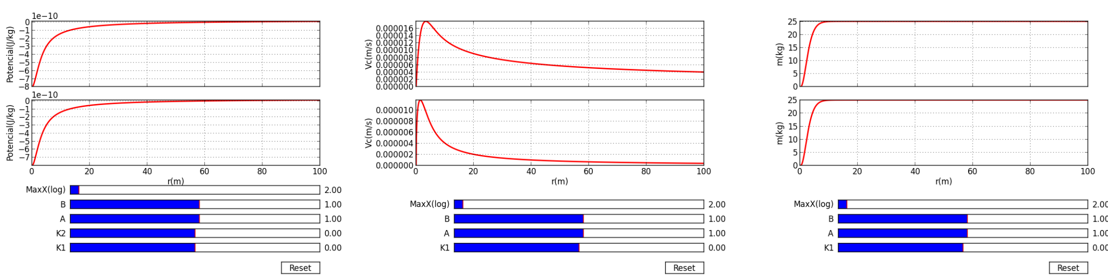


Figura 13: *Salidas de las ejecuciones de pt.py de arriba*