

## Nociones teóricas

Para una distribución de masa  $\rho$

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto  $x$  es:

$$F(x) = G \int \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \rho(x') d^3x \text{ y después de hacer cálculos llegamos a}$$

$$\nabla F(x) = -4\pi G \rho(x)$$

Definimos el potencial gravitatorio  $\Phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x' - x|} d^3x$ . Observamos que  $F(x) = -\nabla \Phi$  y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson:  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

**En coordenadas esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$  **con simetría esférica** (las funciones solo dependen de  $r$  y no de la posición en la esfera de radio  $r$ : los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ ), así que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales  $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ ;  $\nabla \Phi(r) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$  y  $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$   
 La ecuación Poisson:  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} (\text{el signo} - \text{con } K_1)$

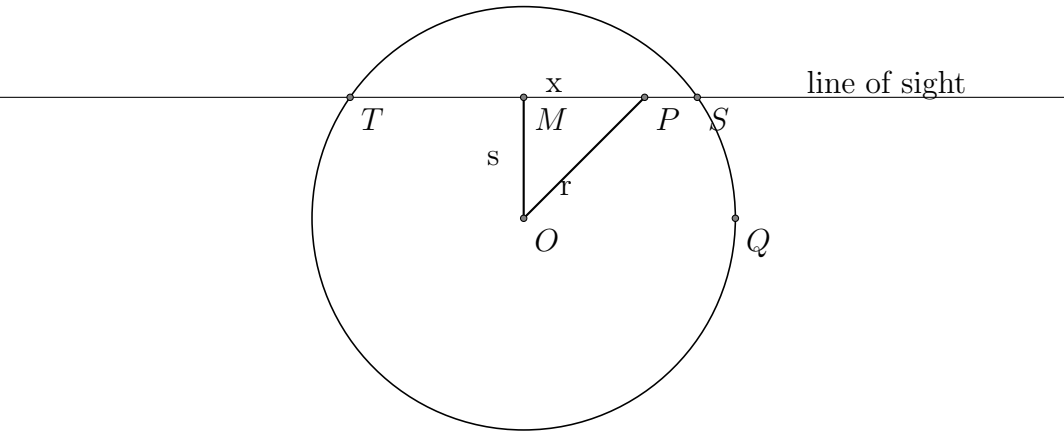
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una partícula en una órbita circular de radio  $r$ :  $v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa  $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, v_c(0) = 0, M(0) = 0$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función  $f(r)$  en el plano  $y, z$  (a lo largo de la línea de visión  $OX$ ) es la función:  $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$  donde  $s$  es la distancia desde el centro del círculo en el plano proyectado ( $s^2 = y^2 + z^2$ )

$$r^2 = x^2 + s^2 \text{ y la simetría esférica } \implies F(s) = 2 \left| \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + s^2}) dx \right|$$



## Problema de la práctica

Hipótesis:  $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar  $\Phi(r)$ ,  $M(r)$ ,  $M_p(r)$ ,  $v_c(r)$

Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función:  $f(r) = r^2 \rho_c \exp(-r/r_0)$  observamos que f

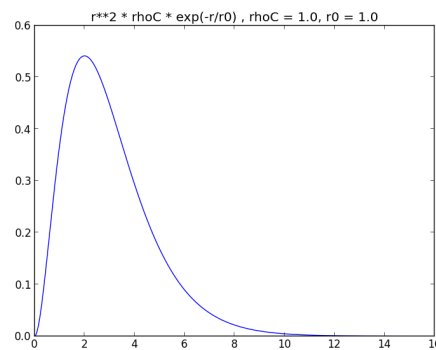


Figura 1:  $r^2 \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

es continua y  $f(0) = 0$

$$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$$

Miramos el gráfico de la función  $f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$  que no está definida en 0 pero es continua en  $(0, \infty)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

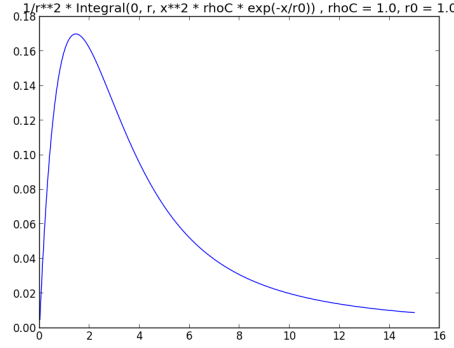


Figura 2:  $\frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} (\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da) dx + K_2$  (elegimos  $K_1 = 0$  y  $K_2$  de tal manera que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$ , en práctica  $K_2 = -\Phi(R_{max})$ )

$v_c(r) = (\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}}$  (la constante de integración es 0 porque  $v_c(0) = 0$ )

$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$  (la constante de integración es 0 porque  $M(0) = 0$ )

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ  $D_p(s) = 2\rho_c |\int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx|$

Los gráficos se realizaron con un programa python (en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial>) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales (sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r. Se muestran los gráficos para  $\rho_c$  en  $\{0.5 \cdot 10^5, 10^5, 1.5 \cdot 10^5, 2.0 \cdot 10^5\}$  y  $r_0$  en  $\{0.5 \cdot 10^9, 10^9, 1.5 \cdot 10^9, 2 \cdot 10^9\}$ . Todas las cantidades están expresadas en las unidades SI: densidad kg/m<sup>3</sup>,

distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m<sup>2</sup>, velocidad m/s  
y se consideró la constante gravitacional  $G = 6.6 * 10^{-11} m^3/(kg * s^2)$

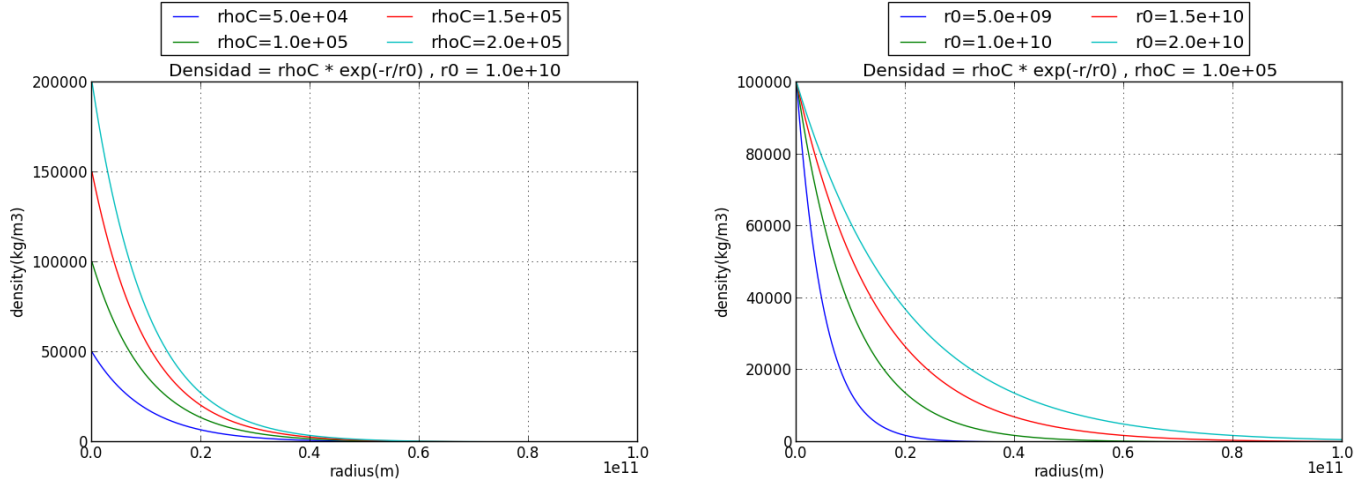


Figura 3: *Densidad*

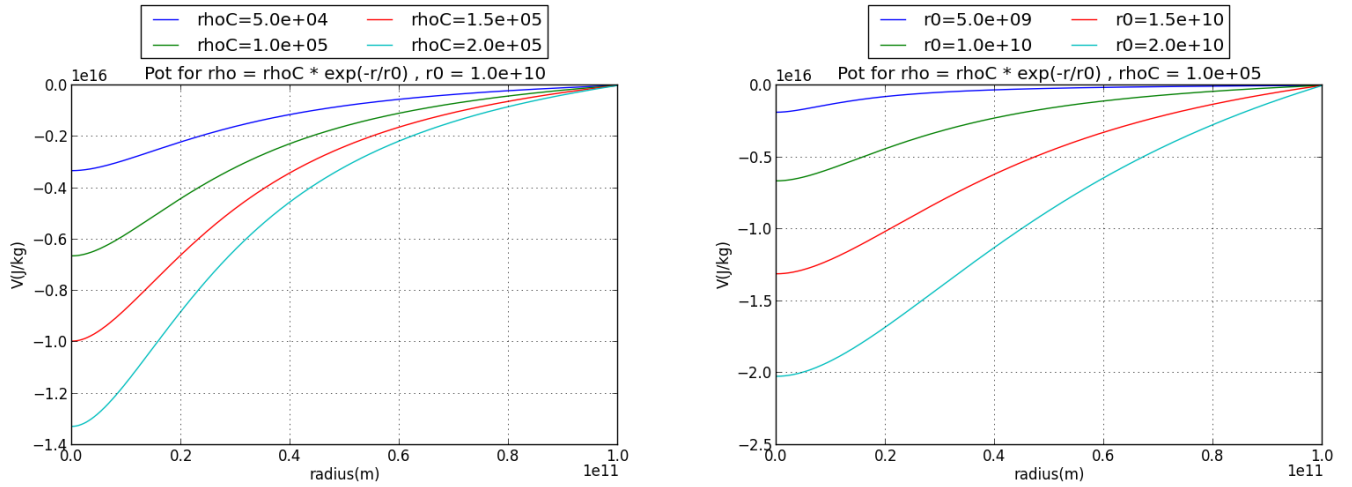
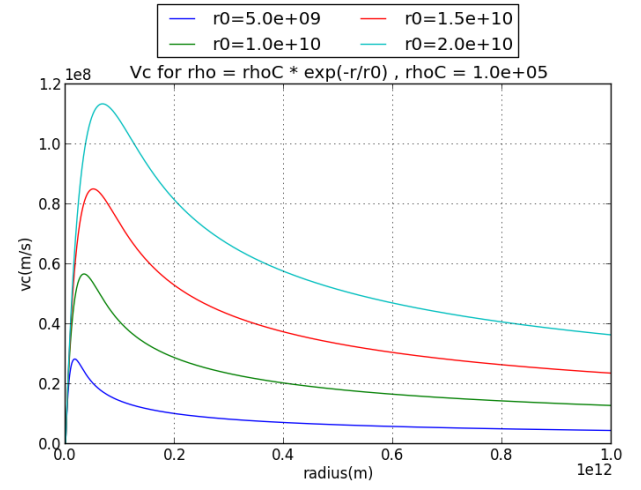
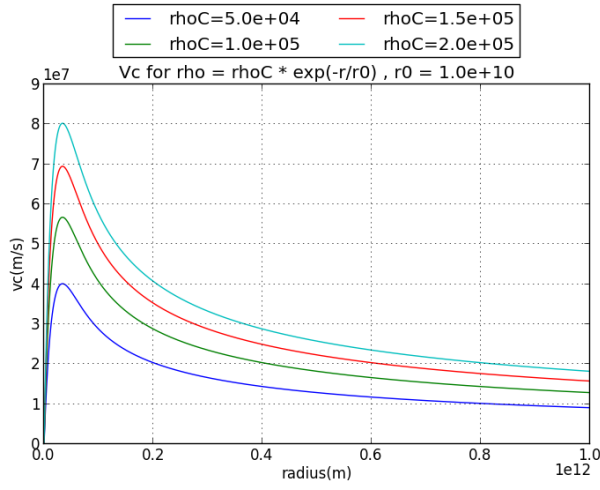
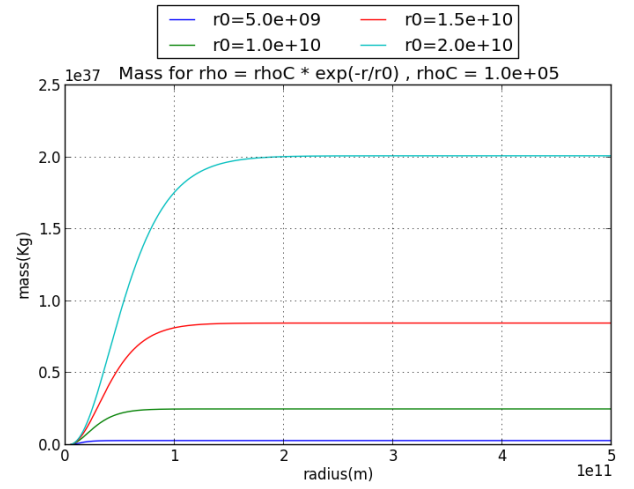
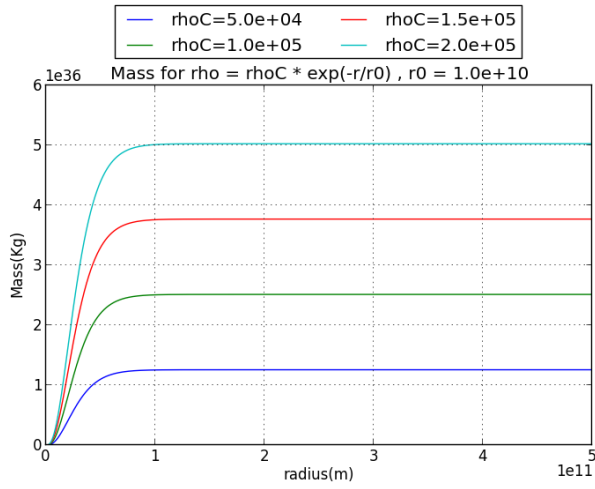


Figura 4: *Potencial*

Figura 5: *Velocidad circular*Figura 6: *Masa*

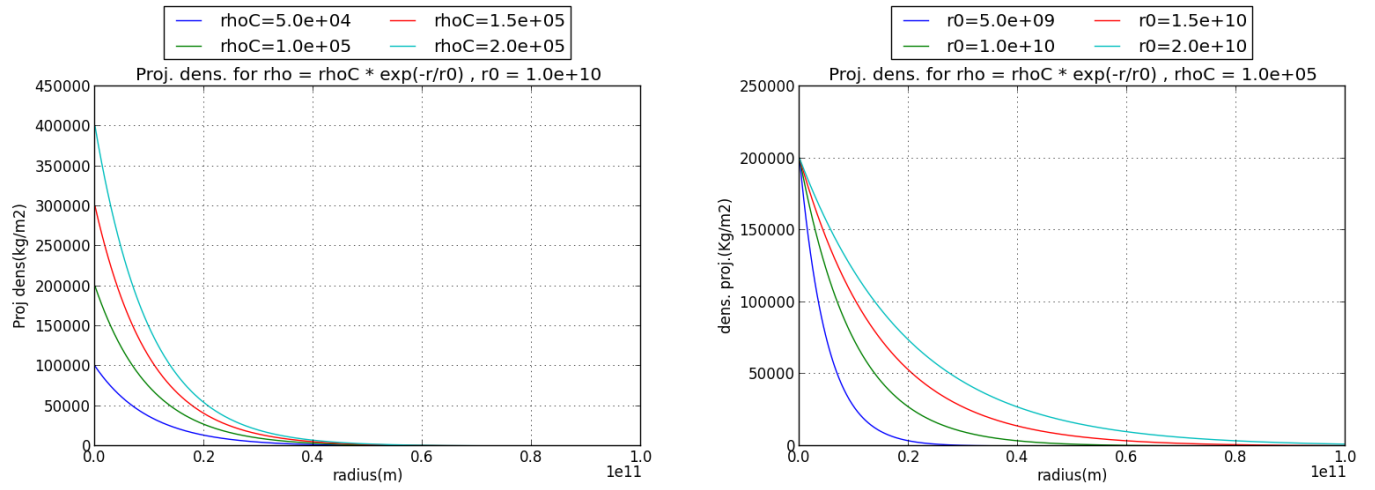


Figura 7: *Densidad proyectada*

## Solución semianalítica

$$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Integrando por partes 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx &= -r_0 \int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0 \left( x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -2r_0^2 \int_0^r x (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2 \left( x e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \\ \implies \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} \left( \int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}} dy \right) dx &= -r_0 \left( -2r_0^2 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} dx + r_0^2 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx + \right. \\ &= 2r_0 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx + \int_\varepsilon^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx \Big) = r_0^2 \left( 2r_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx - \right. \\ &= 2 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx \Big) \end{aligned}$$

$$\text{Integrando por partes } \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{r_0}} dx = - \left( \frac{e^{-\frac{x}{r_0}}}{x} \right) \Big|_\varepsilon^r - \frac{1}{r_0} \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx$$

$$\implies \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2 \left( 2r_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + e^{-\frac{r}{r_0}} + r_0 \left( \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}}}{\varepsilon} \right) - \int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)$$

$$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = 4\pi \rho_c r_0 (2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$$

$$v_c(r) = \left( \frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( -4\pi G \rho_c r_0 \left( \frac{2r_0^2}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} + 2r_0 e^{-\frac{r}{r_0}} + r e^{-\frac{r}{r_0}} - \frac{2r_0^2}{r} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

### 0.0.1 Solución analítica - resultado de programas que trabajan con símbolos matemáticos

Usando sympy(python) y mathematica - salen los mismos resultados

$$\int r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} dr = -r^2 r_0 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}}$$

$$\int \frac{1}{r^2} \int r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} dr dr = r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} + 2r_0^3 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

- Hay otro programa python mas general que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial,

velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la  $V_c$  y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones (sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar  $K1$  en el caso del potencial
- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde  $10^{**1}$  hasta  $10^{**30}$
- Se muestran los gráficos en el caso  $A = B = 1$  ( $\Rightarrow r_0 = \rho_c = 1$ ) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con las fórmulas de la integración por partes: ver calc\_exp.py)

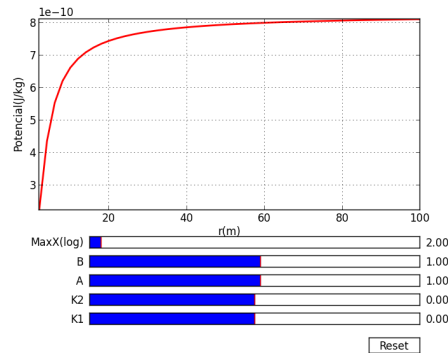


Figura 8: *Potencial*



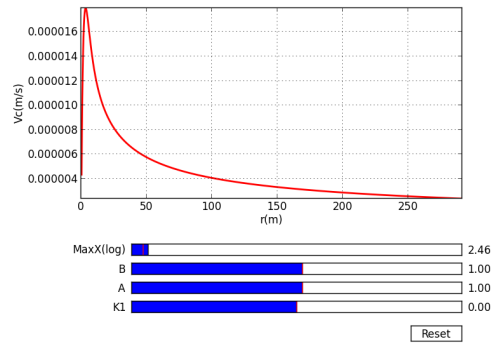


Figura 9: *Velocidad circular*

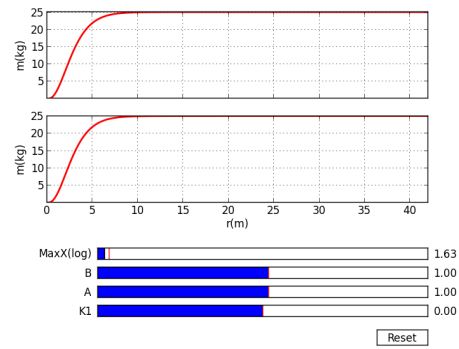


Figura 10: *Masa*

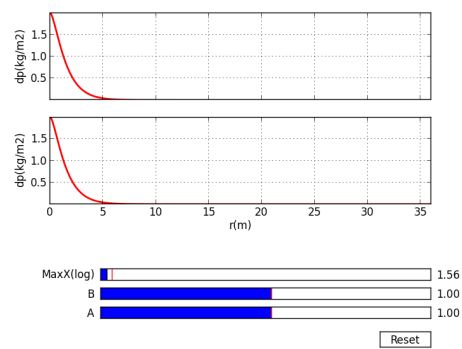


Figura 11: *Densidad proyectada*