

Nociones teóricas

Notaciones: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ para mostrar que $x = (x_1, x_2, x_3)$ es un vector $\in \mathbb{R}^3$ Para una function $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$ (vector) y una function $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (scalar)

$$\nabla g(\vec{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_3}(\vec{x}) \right) \text{ es un vector } \in \mathbb{R}^3;$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \text{ es un scalar } (\in \mathbb{R})$$

$$\nabla^2 g(\vec{x}) = \nabla \cdot \nabla g(\vec{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_3}(\vec{x}) \text{ scalar } (\in \mathbb{R})$$

Para una distribución de densidad de masa $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en una masa $m = 1$ situada en el punto x es: $\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = -4\pi G \rho(\vec{x})$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}'$. Observamos que $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla \Phi(\vec{x})$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) con simetria esférica (las funciones solo dependen de r ($= |\vec{r}|$) y no de la posición en la esfera de radio r : los angulos θ y φ)

Las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$;
 $|\vec{F}(r)| = |\nabla \Phi(r)| = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$

La ecuacion Poisson: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} (\text{el signo} - \text{con } K_1)$

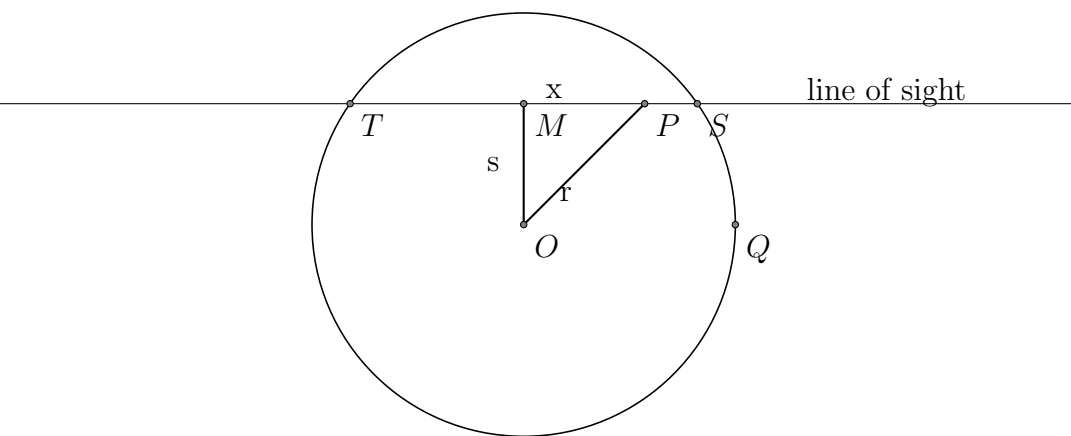
El módulo de la fuerza ejercitada sobre la particula debido al movimiento en una órbita circular es $|\vec{F}(r)| = m \frac{v_c^2}{r}$ y tiene que ser igual al módulo la fuerza gravitatoria $\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ donde v_c es el módulo de la velocidad circular y m se consideró $= 1 \implies v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = \left(\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r} \right)^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, $v_c(0) = 0$, $M(0) = 0$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función $f(r)$ en el plano y,z (a lo largo de la línea de visión OX) es la función: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$ donde s es la distancia desde el centro del círculo en el plano proyectado ($s^2 = y^2 + z^2$)

$$r^2 = x^2 + s^2 \text{ y la simetría esférica } \implies F(s) = 2 \left| \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + s^2}) dx \right|$$



Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos los gráficos de las funciones que se integran:

$$f(r) = r^2 \rho(r)$$

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{1}{x^2} \rho(x) dx$$

si f es continua y $f(0) = 0$ y g no está definida en 0 pero es continua en $(0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

$$\Phi(r) = 4\pi G \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x a^2 \rho(a) da \right) dx + K_2 \text{ (elegimos } K_1 = 0 \text{ y } K_2 \text{ de tal manera que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, \text{ en práctica } K_2 = -\Phi(R_{max}) \text{ y } \varepsilon \approx 0 \text{)}$$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G}{r} \int_0^r x^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (la constante de integración es 0 porque } v_c(0) = 0 \text{)}$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \rho(x) dx \text{ (la constante de integración es 0 porque } M(0) = 0 \text{)}$$

Problema de la práctica. Solución numérica

Hipótesis: $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar $\Phi(r)$, $M(r)$, $M_p(r)$, $v_c(r)$

Miramos los gráficos de las funciones f y g de arriba (plotFunctions.py) para poner los límites y constantes de integración en las funciones con las integrales calculadas de forma numérica(ver exp_num.py)

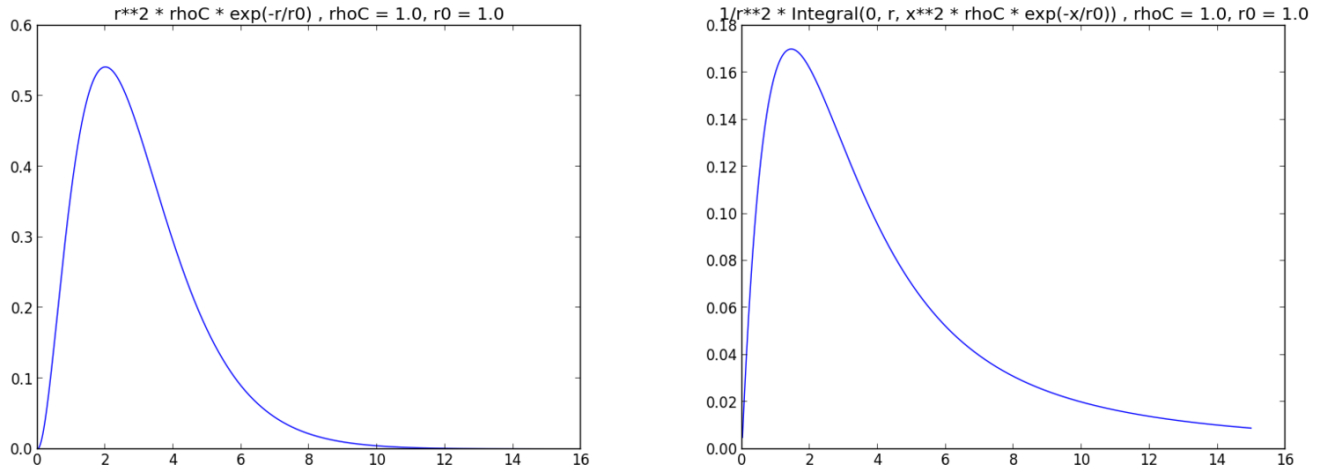


Figura 1: Gráficos de las funciones f y g

$$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da \right) dx - \Phi(R_{max})$$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) =$

$$2\rho_c \left| \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx \right|$$

Solución analítica

Las integrales se pueden calcular de forma analítica, así que las funciones del potencial, masa y vc se pueden expresar sin usar integrales (ver exp-an.py).

$$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Integrando por partes 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx &= -r_0 \int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0 \left(x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -2r_0^2 \int_0^r x (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2 \left(x e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx - \\ &= -2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \Big|_0^r - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}} - \\ &= 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - r_0 e^{-\frac{r}{r_0}} (2r_0^2 + 2r_0 r + r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}} dy \right) dx &= 2r_0^3 \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} dx - \int_\varepsilon^r \frac{e^{-\frac{x}{r_0}} (2r_0^3 + 2r_0^2 x + x^2 r_0)}{x^2} dx = \\ &= -2r_0^3 \frac{1}{x} \Big|_\varepsilon^r - \int_\varepsilon^r e^{-\frac{x}{r_0}} \left(-(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + r_0(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) dx = 2r_0^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + \\ &+ r_0 \left((e^{-\frac{x}{r_0}})' (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x})' \right) dx = (\text{integración por partes}) = 2r_0^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + r_0 \left(e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) \Big|_\varepsilon^r = r_0^2 \left(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \right. \\ &\left. \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \right) \Rightarrow \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2 \left(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \right) (\varepsilon \approx 0) \end{aligned}$$

$$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = 4\pi \rho_c r_0 (2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = (4\pi G \rho_c r_0 \left(\frac{2r_0^2}{r} - e^{-\frac{r}{r_0}} (2\frac{r_0^2}{r} + 2r_0 + r) \right))^{\frac{1}{2}}$$

Usando programas que trabajan con símbolos matematicos(Mathematica y sympy(python) - ver sympyDens.py) producen los mismos resultados

resolvemos las ecuaciones $M(R_{\max}) = M$ y $vc(R_{\text{sun}}) = v_{\text{Sun}}$ reemplazando $R_{\max} = 4.62e20$, $M = 2e42$, $R_{\text{sun}} = 2.5e20$ y $v_{\text{Sun}} = 2.2e5$ para obtener unos valores de r_0 y ρ_c parecidos a unos sistemas reales. sympySolve.py obtiene las fórmulas analíticas de r_0 y ρ_c (allí se aproximo la exponencial con un polinomio de grado 3) y despues de reemplazar con los valores de arriba y hacer unos ajustes unos valores que cuadran son $r_0 = 1.53e20$ (casi 5kpc) y $\rho_c = 9e - 21$

Comparación entre las soluciones del potencial, masa y v_c obtenidas de forma numérica y analítica (si se usa el flag `-numerical` al ejecutar `exp_plot.py` va acojer las definiciones de las funciones potencial, masa y v_c de `exp_num.py` y no de `exp_an.py` donde están las definiciones de las funciones expresadaas de forma analítica): (son iguales)

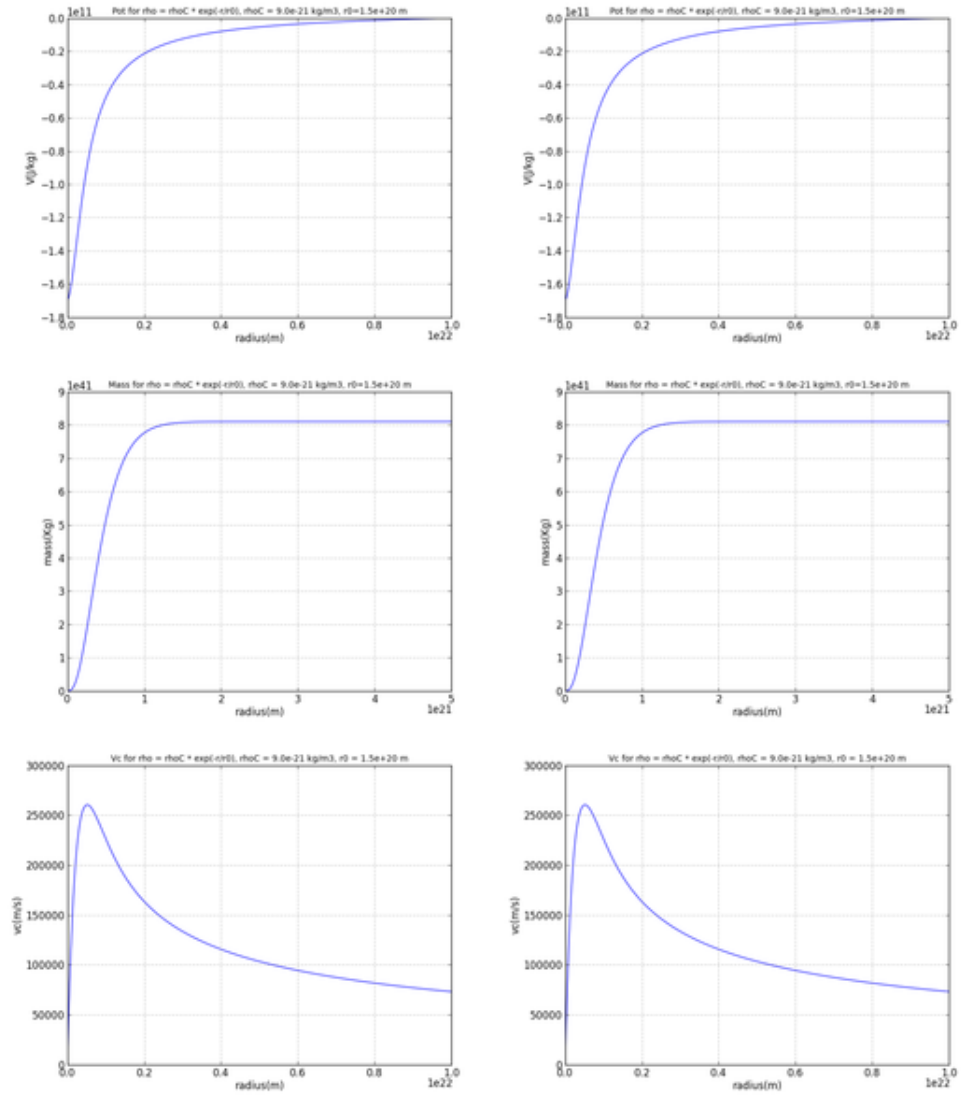


Figura 2: *izquierda: soluciones calculadas de forma numérica, derecha: analítica*

Variación de los parámetros (r_0 y ρ_c)

Los gráficos se realizaron con un programa python (exp_compare.py)

Se muestran los gráficos para ρ_c en $\{2e-21, 4e-21, 9e-21, 18e-21\}$ kg/m³ y r_0 en $\{1, 2, 5, 10\}$ kpc. Todas las cantidades estan expresadas en las unidades SI: densidad kg/m³, distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m², vc m/s y se consideró la constante gravitacional $G = 6.6 * 10^{-11} m^3/(kg * s^2)$

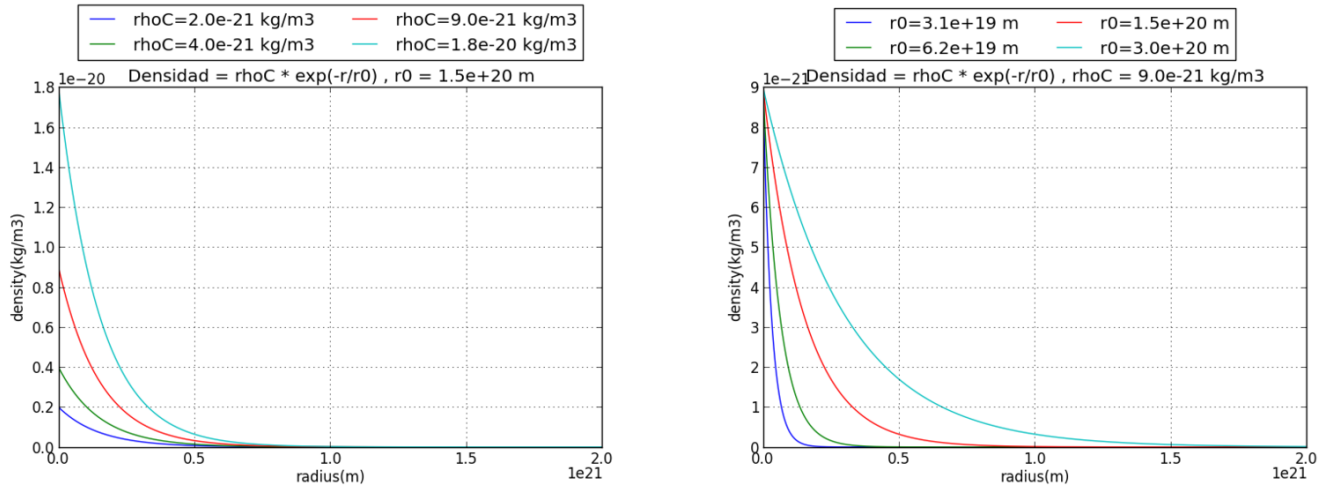
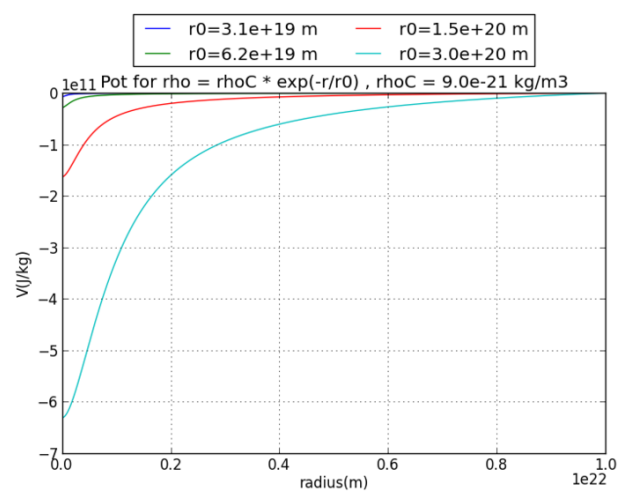
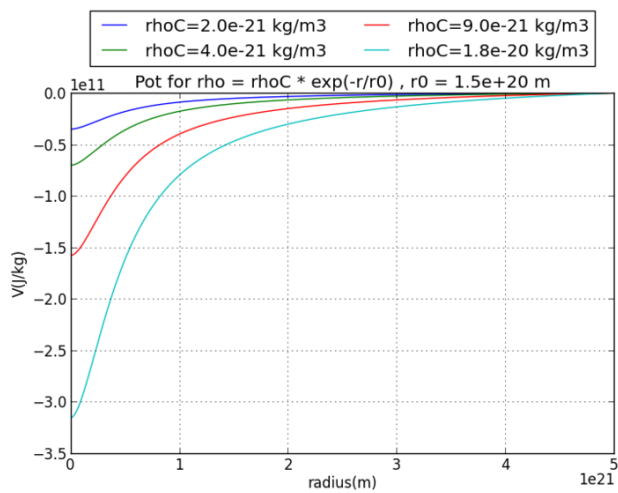
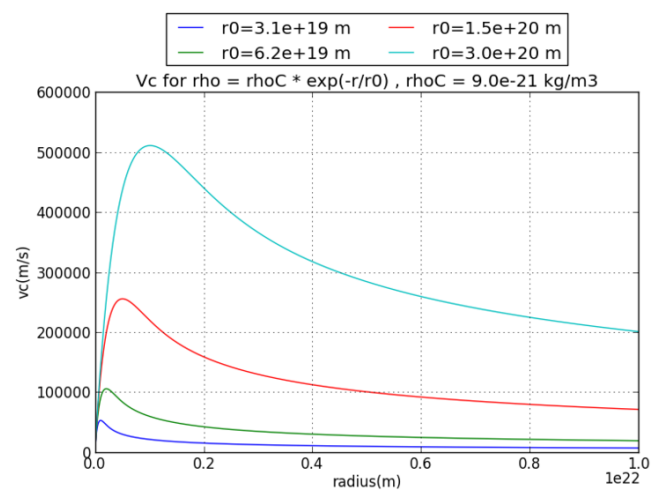
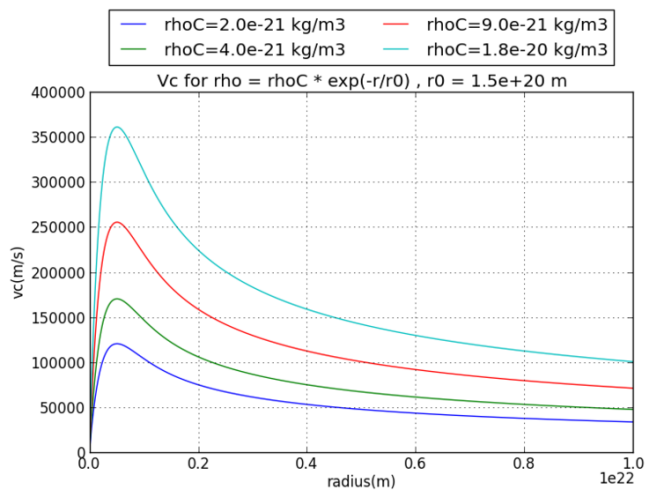
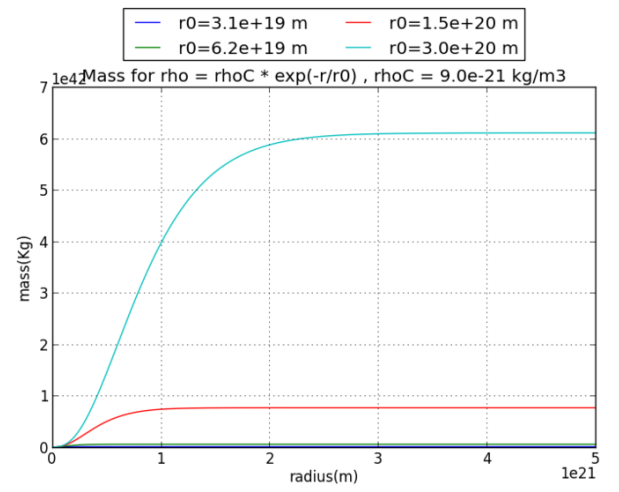
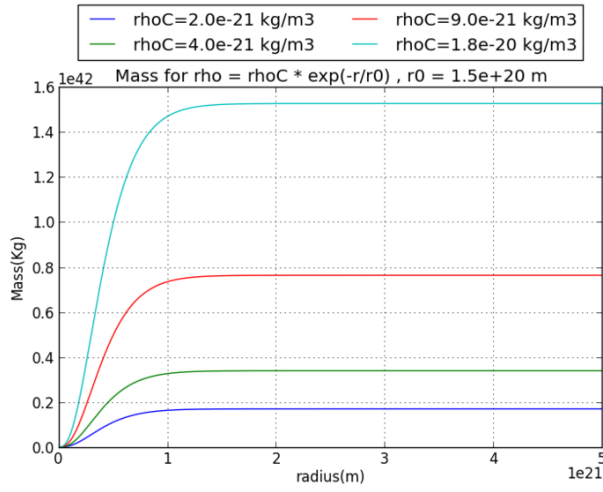
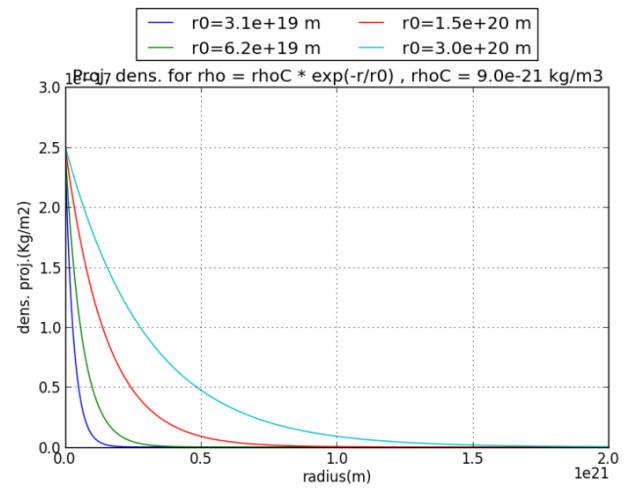
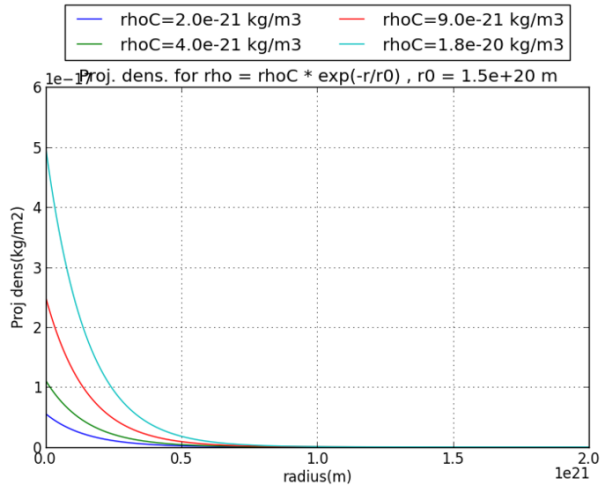


Figura 3: *Densidad*

Figura 4: *Potencial*Figura 5: *Velocidad circular*

Figura 6: *Masa*Figura 7: *Densidad proyectada*

Comparación con el potencial isócrono

Solución analítica del potencial isocrono

Hay 2 parámetros configurables: b ($b = 0$ es equivalente a una masa puntual: toda la masa en el centro) y M (la masa total del sistema)

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

usando sympy para hacer los cálculos (sympyPot.py) (las fórmulas salen como en el libro)

Se define $a = \sqrt{b^2 + r^2}$

$$\rho(r) = M \left(\frac{3(b+a)a^2 - r^2(b+3a)}{4\pi(b+a)^3 a^3} \right)$$

$$M(r) = M \frac{r^3}{(b + \sqrt{b^2 + r^2})^2 \sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$v_c(r) = \sqrt{(GM r^2) / ((b + a)^2 * a)}$$

La densidad proyectada se calcula como antes reemplazando la función de densidad

Comparación

Para comparar los gráficos de las funciones de 2 sistemas: uno con distribución de densidad exponencial y otro con el modelo de potencial isócrono que tienen la misma densidad central y masa total:

Elegimos r_0 (el parámetro de escala de la distribución exponencial) = 5kpc (1.53e20) y $\rho_c = 9e-21$ y ejecutamos el programa para dibujar la masa para la distribución exponencial.

La masa total obtenida aquí y la misma ρ_c metemos como parámetros para calcular las funciones del potencial isocrono.

El parámetro b del potencial isócrono se calcula reemplazando $r=0$ en la fórmula de la densidad: $b = \left(\frac{3M}{16\pi\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}}$

```
python exp_plot.py --type=m --rmax=1e+22 --r0=1.53e20 --rhoC=9e-21
python isochrone_plot.py --type=v --rmax=1e+22 --mass=8.1e+41 --rhoC=9e-21
```

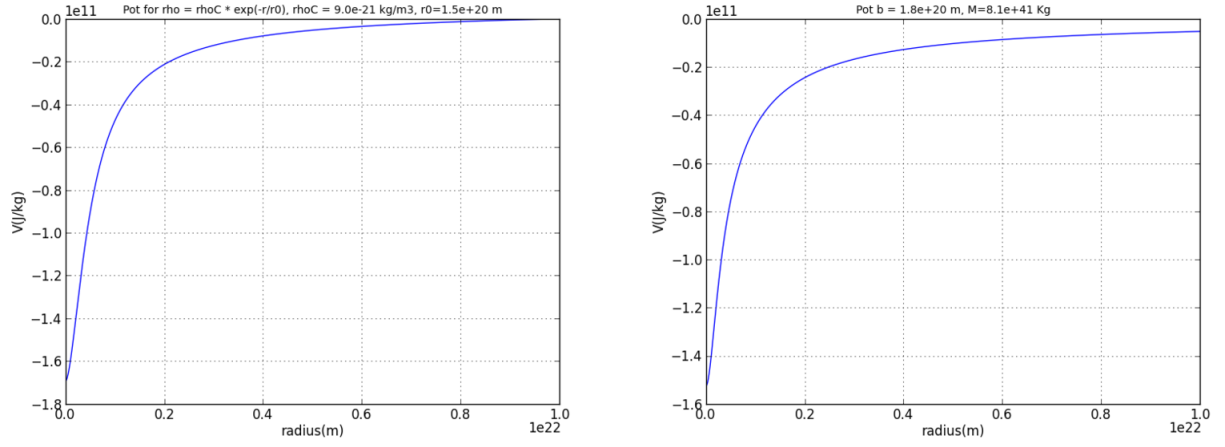


Figura 8: *Potencial comparado*

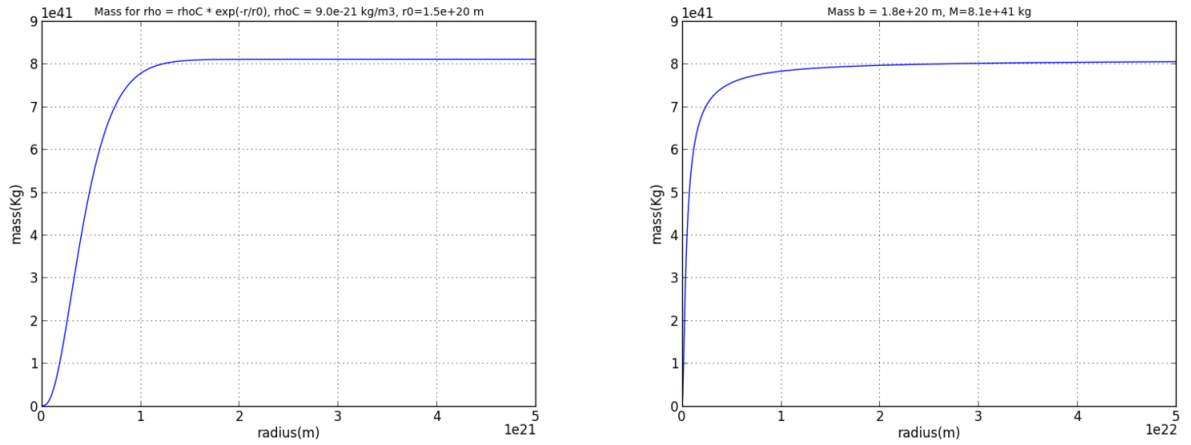
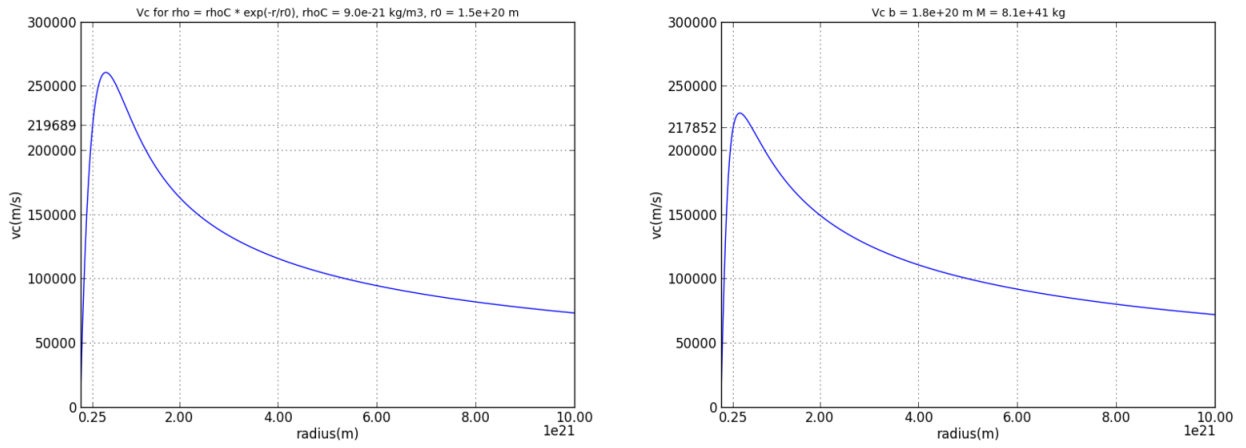
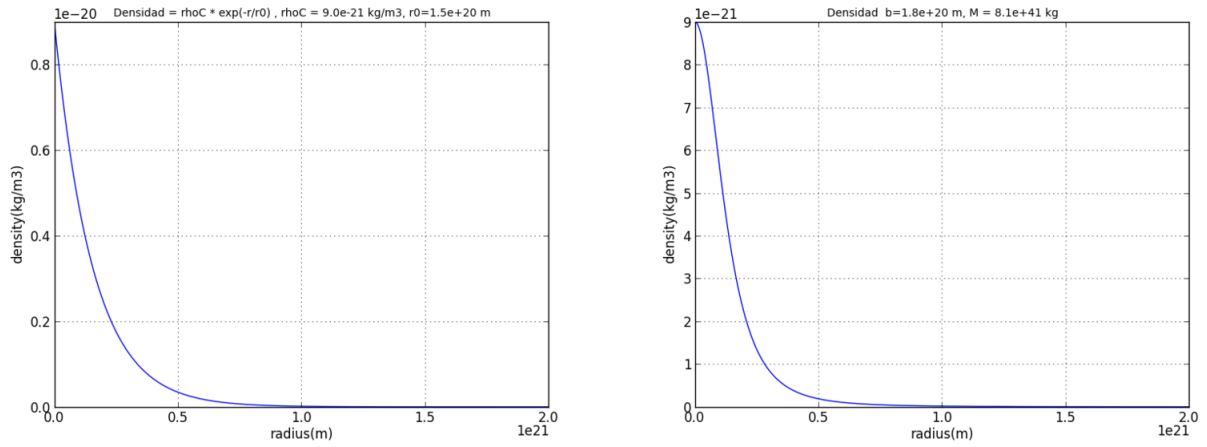


Figura 9: *Masa comparada*(R_{\max} en el caso del potencial isocrono = $10 \cdot R_{\max}$ que en el caso de la distr. exp.)

Figura 10: *Velocidad comparada*Figura 11: *Densidad comparada*

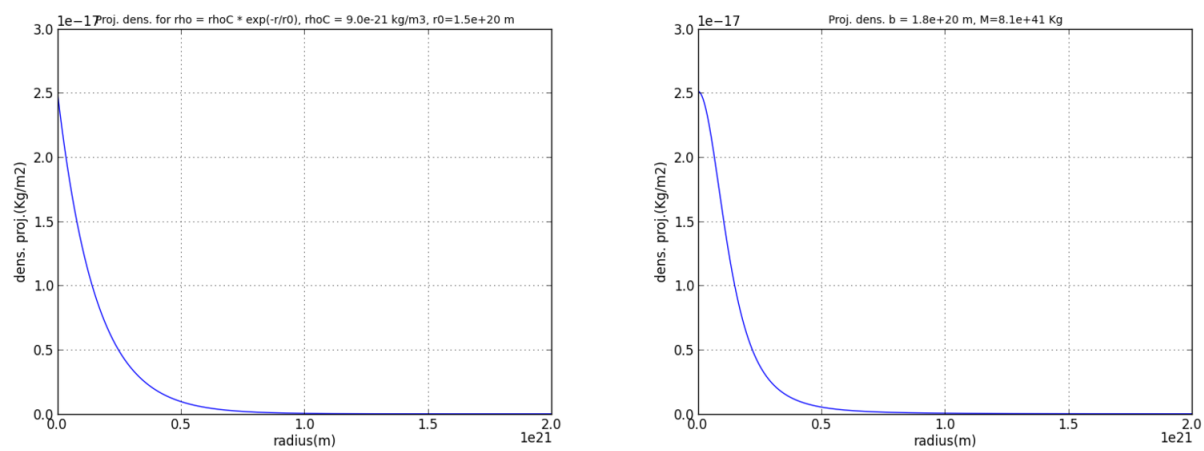


Figura 12: *Densidad proyectada comparado*

Conclusiones

Para las 2 distribuciones cuando la densidad es casi 0 la masa encerrada en el radius correspondiente es casi toda la masa (despues de este radius la masa es casi constante), el potencial se acerca a 0 y v_c tiene el máximo

Si la densidad decrece la densidad proyectada decrece más rápido visto que en el centro hay mas puntos para sumar la densidad (para integrar a lo largo de la linea de vision)

Para la distribución exponencial:

Variando el parámetro de escala r_0 (el radio en cual el logaritmo natural de la densidad decrece con una unidad comparado al logaritmo de la densidad central): si es mayor la densidad decrece mas lento (con respecto a la distancia del centro), la masa total a va ser mayor igual que el máximo de la v_c (pero van a crecer mas lento) y el potencial en el centro que va a decrecer mas despacio (igual que la densidad).

Cuanto mayor es la densidad central, mayor será la masa, la v_c y el potencial en el centro igual que en el caso de aumentar el valor del parametro de escala r_0 pero la diferencia es menor que en el caso de variar r_0

En el caso del potencial isocrono la densidad tiene una porción muy pequeña en el centro casi constante, pero despues decrece mas rapido que en el caso de la distribucion exponencial, lo que hace que la masa crece mucho mas despacio(y la masa total es la misma) y el potencial en el centro va a ser menor, igual que la v_c máxima.

Observamos que en los 2 casos la velocidad circular al radio donde se encuentra el sol es alrededor de $2.2e5$ m/s, pero la masa total es menor de $2e42$ ($8.1e+41$, 2.4 veces menor, porque?)

Código

- Los programas python, imagenes, pdf e incluso el tex están en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial> Allí está la descripción y ejemplos de uso.
- Por razones históricas hay otro programa python mas general (pt.py)
- Se muestran los gráficos en el caso $A = B = 1$ ($\Rightarrow r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0, el segundo gráfico está calculado con la solución analítica: ver calc_exp.py)

```
python pt.py --type=p --test=calc_exp --k=0,-8e-10
python pt.py --type=v --test=calc_exp
python pt.py --type=m --test=calc_exp
```

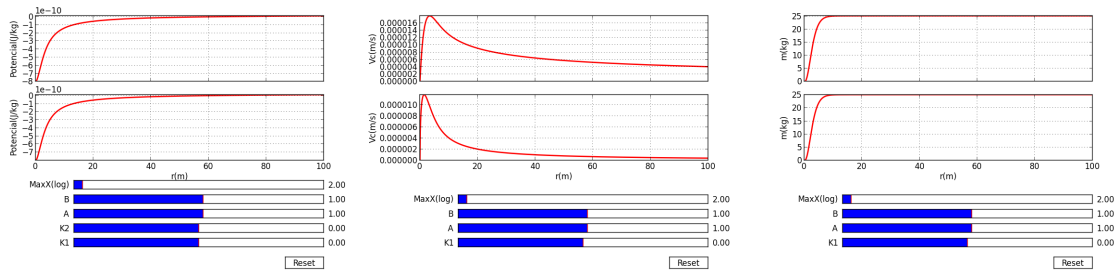


Figura 13: Salidas de las ejecuciones de `pt.py` de arriba