

## Nociones teóricas

Para una distribución de masa  $\rho$

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto  $x$  es:

$$F(x) = G \int \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \rho(x') d^3x \text{ y después de hacer cálculos llegamos a}$$

$$\nabla F(x) = -4\pi G \rho(x)$$

Definimos el potencial gravitatorio  $\Phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x' - x|} d^3x$ . Observamos que  $F(x) = -\nabla \Phi$  y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson:  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

**En coordenadas esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$  **con simetría esférica** (las funciones solo dependen de  $r$  y no de la posición en la esfera de radio  $r$ : los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ ), así que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales  $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ ;  $\nabla \Phi(r) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$  y  $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$   
 La ecuación Poisson:  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \text{ (el signo - con } K_1)$

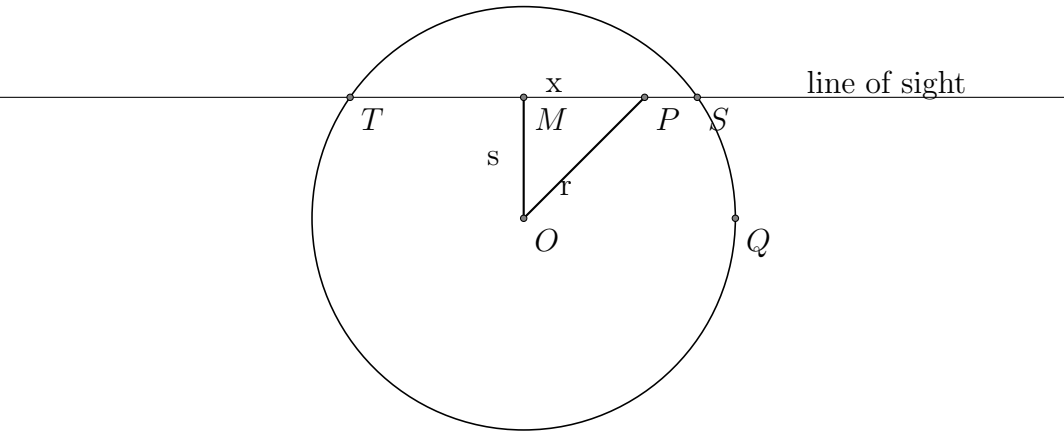
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una partícula en una órbita circular de radio  $r$ :  $v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa  $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, v_c(0) = 0, M(0) = 0$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función  $f(r)$  en el plano  $y, z$  (a lo largo de la línea de visión  $OX$ ) es la función:  $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$  donde  $s$  es la distancia desde el centro del círculo en el plano proyectado ( $s^2 = y^2 + z^2$ )

$$r^2 = x^2 + s^2 \text{ y la simetría esférica } \implies F(s) = 2 \left| \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + s^2}) dx \right|$$



## Problema de la práctica

Hipótesis:  $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar  $\Phi(r)$ ,  $M(r)$ ,  $M_p(r)$ ,  $v_c(r)$

Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función:  $f(r) = r^2 \rho_c \exp(-r/r_0)$  observamos que f

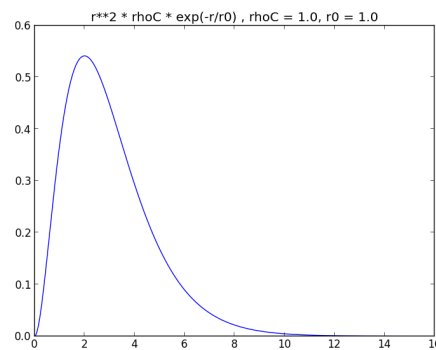


Figura 1:  $r^2 \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

es continua y  $f(0) = 0$

$$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$$

Miramos el gráfico de la función  $f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$  que no está definida en 0 pero es continua en  $(0, \infty)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

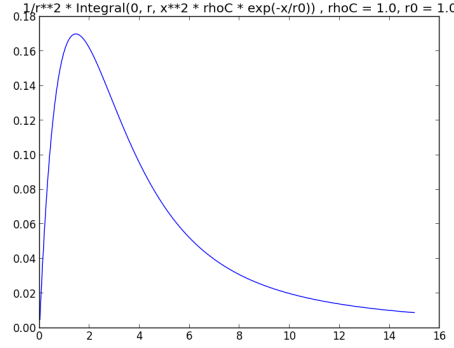


Figura 2:  $\frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} (\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da) dx + K_2$  (elegimos  $K_1 = 0$  y  $K_2$  de tal manera que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$ , en práctica  $K_2 = -\Phi(R_{max})$ )

$v_c(r) = (\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx)^{\frac{1}{2}}$  (la constante de integración es 0 porque  $v_c(0) = 0$ )

$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$  (la constante de integración es 0 porque  $M(0) = 0$ )

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ  $D_p(s) = 2\rho_c |\int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx|$

Los gráficos se realizaron con un programa python (problem.py) (en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial>) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales (sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r. Se muestran los gráficos para  $\rho_c$  en  $\{0.5 * 10^5, 10^5, 1.5 * 10^5, 2.0 * 10^5\}$  y  $r_0$  en  $\{0.5 * 10^9, 10^9, 1.5 * 10^9, 2 * 10^9\}$ . Todas las cantidades están

expresadas en las unidades SI: densidad kg/m<sup>3</sup>, distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m<sup>2</sup>, velocidad m/s y se consideró la constante gravitacional  $G = 6.6 * 10^{-11} m^3 / (kg * s^2)$

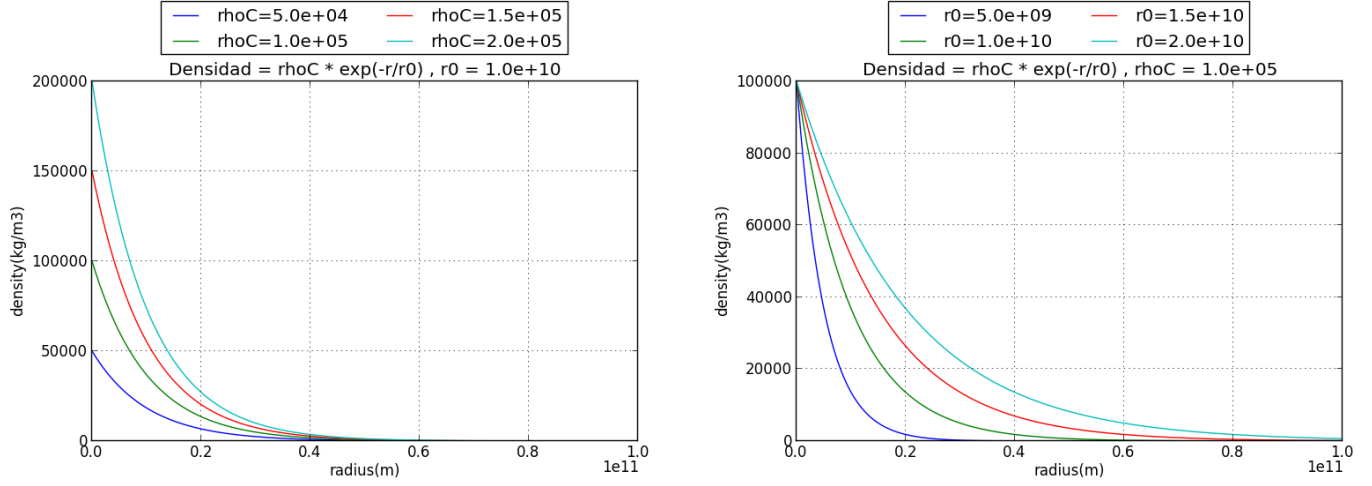
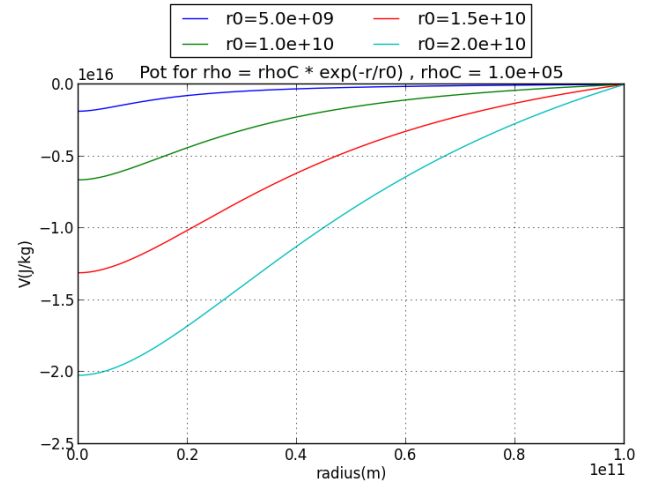
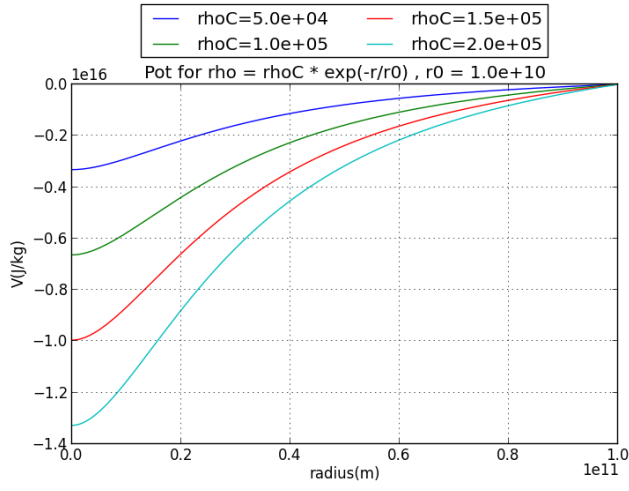
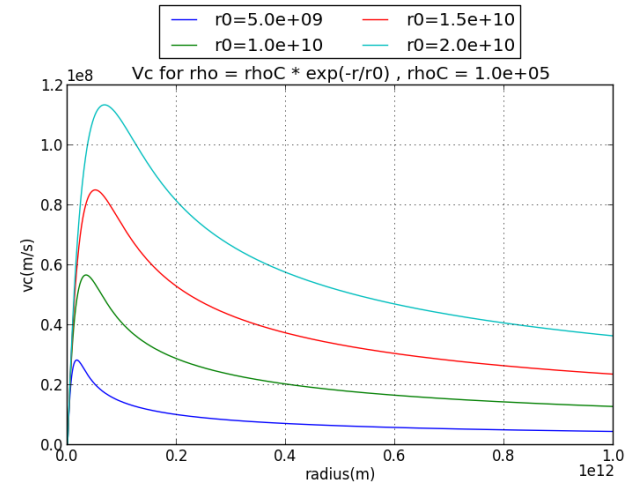
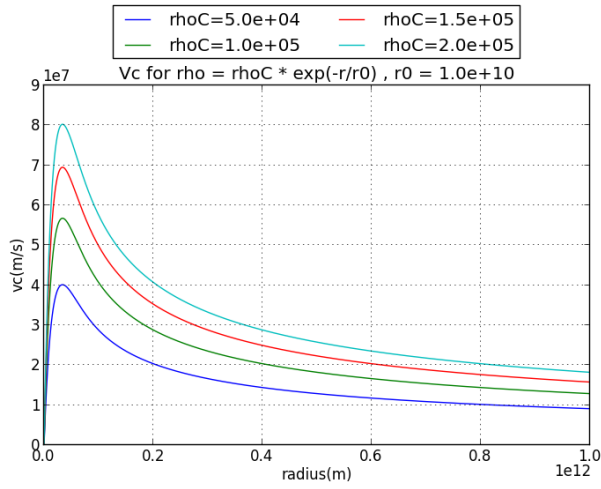
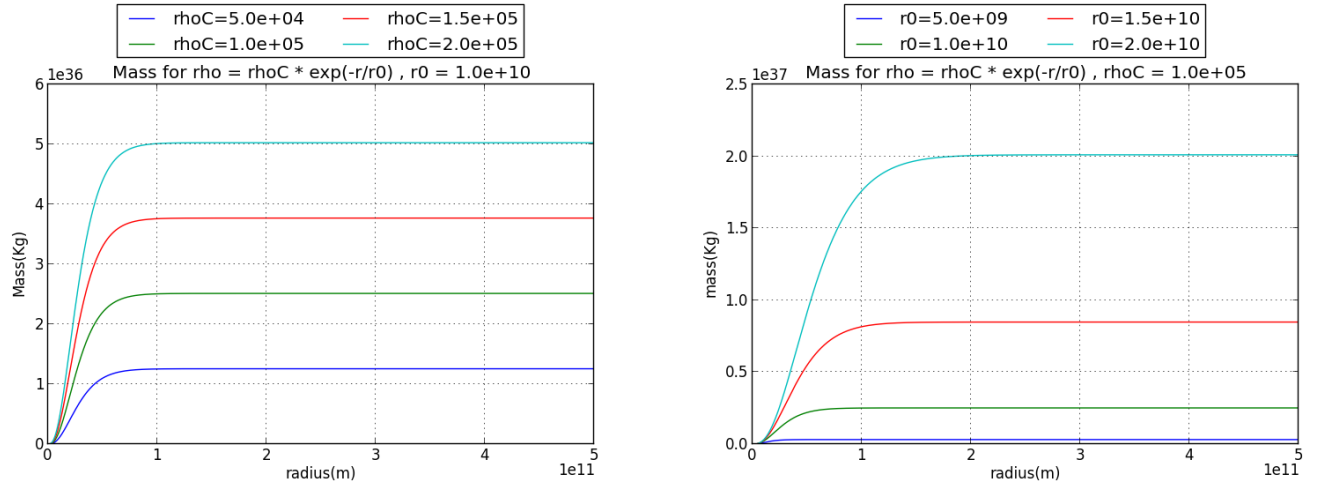
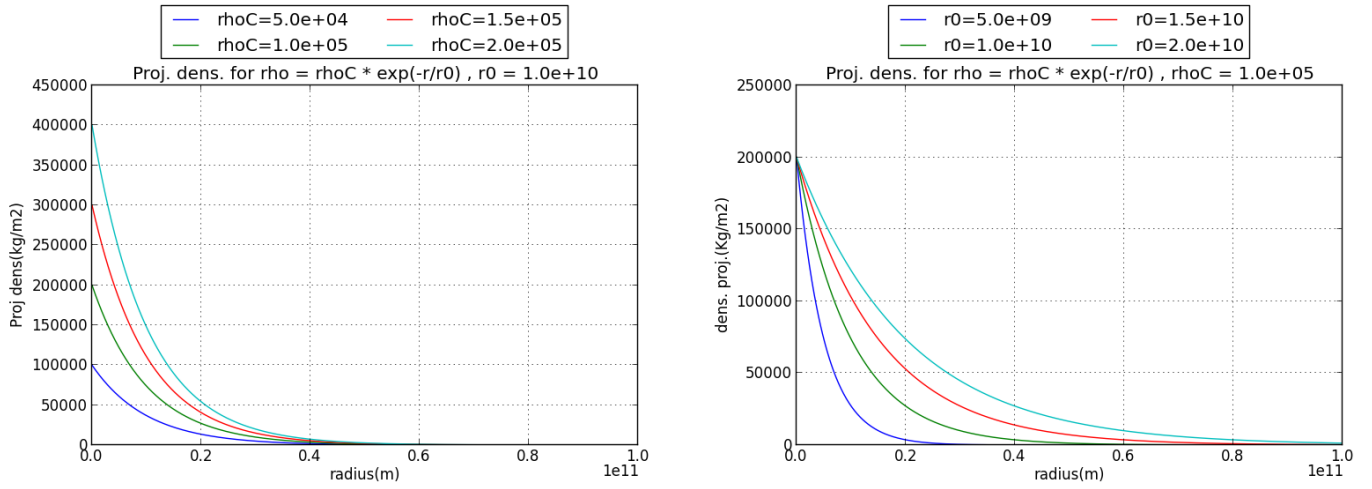


Figura 3: *Densidad*

Figura 4: *Potencial*Figura 5: *Velocidad circular*

Figura 6: *Masa*Figura 7: *Densidad proyectada*

## Solución analítica

$$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Integrando por partes 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx &= -r_0 \int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0 \left( x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -2r_0^2 \int_0^r x (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2 \left( x e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^3 e^{-\frac{x}{r_0}} \Big|_0^r - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}} - \\ &= 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - r_0 e^{-\frac{r}{r_0}} (2r_0^2 + 2r_0 r + r^2) \end{aligned}$$

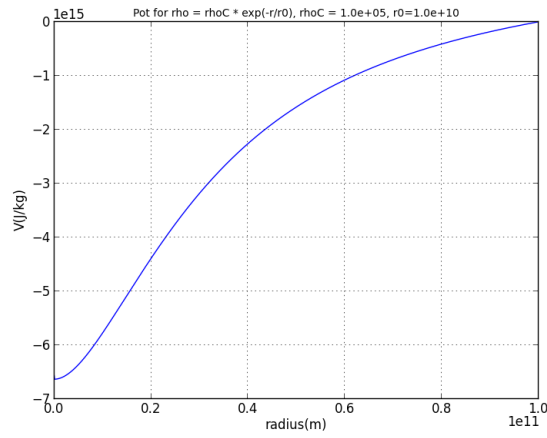
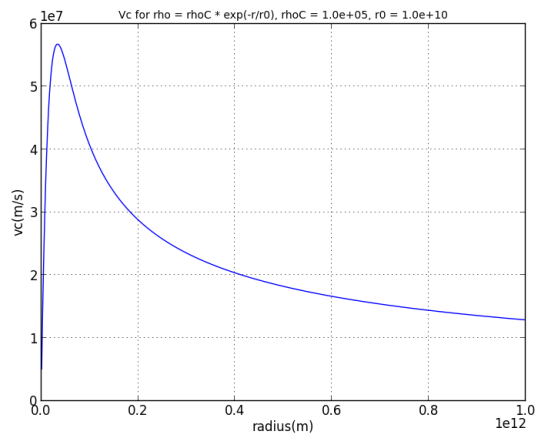
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left( \int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}} dy \right) dx &= 2r_0^3 \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{-\frac{x}{r_0}} (2r_0^3 + 2r_0^2 x + x^2 r_0)}{x^2} dx = \\ &= -2r_0^3 \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^r - \int_{\varepsilon}^r e^{-\frac{x}{r_0}} \left( -(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + r_0(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) dx = 2r_0^3 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \right. \\ &= \frac{1}{r} \Big) + r_0 \left( (e^{-\frac{x}{r_0}})' (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x})' \right) = (\text{integración por partes}) = 2r_0^3 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + r_0 \left( e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) \Big|_{\varepsilon}^r = r_0^2 \left( \frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \right. \\ &= \left. \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \right) \Rightarrow \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2 \left( \frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \right) \end{aligned}$$

$$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = 4\pi \rho_c r_0 (2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$$

$$v_c(r) = \left( \frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = (4\pi G \rho_c r_0 \left( \frac{2r_0^2}{r} - e^{-\frac{r}{r_0}} (2\frac{r_0^2}{r} + 2r_0 + r) \right))^{\frac{1}{2}}$$

Usando programas que trabajan con símbolos matematicos(Mathematica y sympy(python) producen los mismos resultados

Gráficos de las funciones calculadas de forma analítica(las fórmulas de arriba) (programa prAn.py) (se observa que son parecidos a la solución completamente numérica de antes)

Figura 8: *Potencial*Figura 9: *Velocidad circular*

- Hay otro programa python mas general (pt.py) que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider: ver rhodef) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)



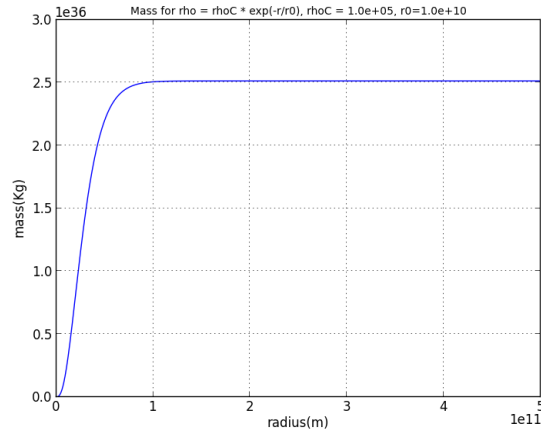


Figura 10: *Masa*

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la  $V_c$  y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones (sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar  $K1$  en el caso del potencial
- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde  $10^{**1}$  hasta  $10^{**30}$
- Se muestran los gráficos en el caso  $A = B = 1$  ( $\implies r_0 = \rho_c = 1$ ) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con la solución analítica: ver `calc_exp.py`)

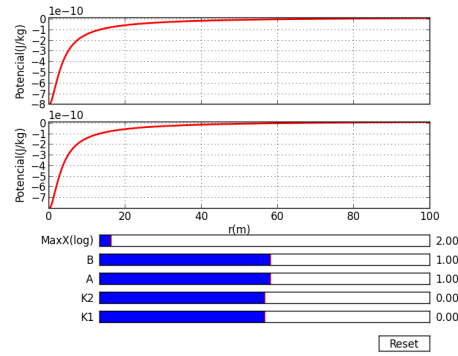


Figura 11: *Potencial* (ejecución: `python pt.py -type=p -test=calc_exp -k=0,-8e-10` )

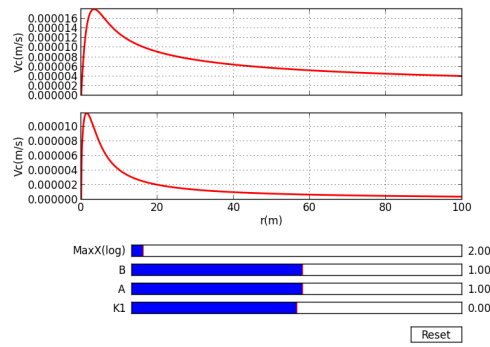


Figura 12: *Velocidad circular*( `python pt.py -type=v -test=calc_exp` )

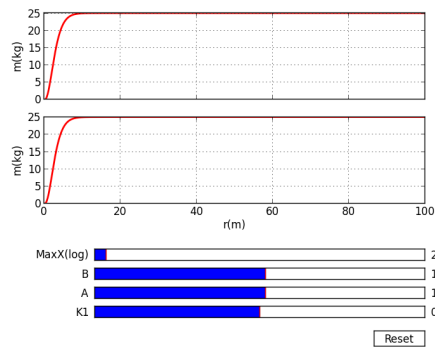


Figura 13: *Masai* ( `python pt.py -type=m -test=calc_exp` )