

Nociones teóricas

Para una distribución de masa $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Notaciones: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ para mostrar que $x = (x_1, x_2, x_3)$ es un vector $\in \mathbb{R}^3$ Para una function $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$ (vector) y una function $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (scalar)

$$\nabla g(\vec{x}) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{x}), \frac{\partial g}{\partial x_3}(\vec{x})) \text{ es un vector } \in \mathbb{R}^3;$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \text{ es un scalar } (\in \mathbb{R})$$

$$\nabla^2 g(\vec{x}) = \nabla \cdot \nabla g(\vec{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_3}(\vec{x}) \text{ scalar } (\in \mathbb{R})$$

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en una masa $m = 1$ situada en el punto x es: $\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = -4\pi G \rho(\vec{x})$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}'$. Observamos que $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla \Phi(\vec{x})$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetria esférica** (las funciones solo dependen de r ($= |\vec{r}|$) y no de la posición en la esfera de radio r : los angulos θ y φ)

Las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$;
 $|\vec{F}(r)| = |\nabla \Phi(r)| = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r})$ La ecuacion Poisson: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G \rho(r) \implies r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 4\pi G \int r^2 \rho(r) dr + K_1 \implies \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + K_1 \int \frac{1}{r^2} dr + K_2 = 4\pi G \int \frac{1}{r^2} (\int r^2 \rho(r) dr) dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R} (\text{el signo} - \text{con } K_1)$

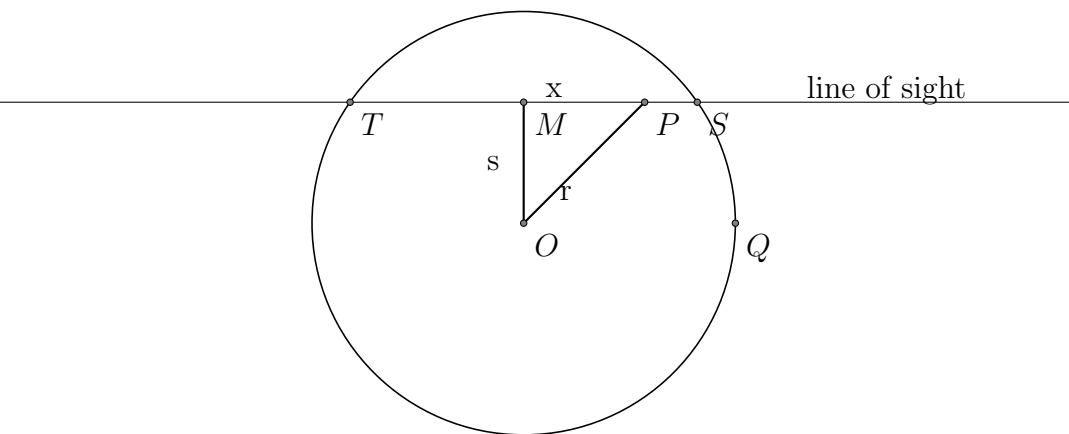
El módulo de la fuerza ejercitada sobre la particula debido al movimiento en una órbita circular es $|\vec{F}(r)| = m \frac{v_c^2}{r}$ y tiene que ser igual al módulo la fuerza gravitatoria $\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$ donde v_c es la velocidad circular y m se consideró $= 1 \implies v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr + K, K \in \mathbb{R}$

Las constantes de integración se eligen de tal forma que verifiquen las condiciones de contorno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, v_c(0) = 0, M(0) = 0$

En un sistema con simetría esférica: la proyección de una función $f(r)$ en el plano y, z (a lo largo de la línea de visión OX) es la función: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx$ donde s es la distancia desde el centro del círculo en el plano proyectado ($s^2 = y^2 + z^2$)

$$r^2 = x^2 + s^2 \text{ y la simetría esférica } \implies F(s) = 2 \left| \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + s^2}) dx \right|$$



Para calcular estas funciones de forma numérica hay que establecer los límites de integración y las constantes

Miramos el gráfico de la función: $f(r) = r^2 \rho(r)$

si f es continua y $f(0) = 0$

$$\int r^2 \rho(r) dr = \int_0^r x^2 \rho(x) dx$$

Miramos el gráfico de la función $f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{1}{x^2} \rho_c e^{-\frac{x}{r_0}} dx$

si f no está definida en 0 pero es continua en $(0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$\Phi(r) = 4\pi G \int_{\epsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x a^2 \rho(a) da \right) dx + K_2$ (elegimos $K_1 = 0$ y K_2 de tal manera que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, en práctica $K_2 = -\Phi(R_{max})$)

$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G}{r} \int_0^r x^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ (la constante de integración es 0 porque $v_c(0) = 0$)

$M(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \rho(x) dx$ (la constante de integración es 0 porque $M(0) = 0$)

Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$

Determinar $\Phi(r)$, $M(r)$, $M_p(r)$, $v_c(r)$

Miramos los gráficos de las funciones y vemos que cumplen las condiciones para poner los límites de integración explicadas arriba

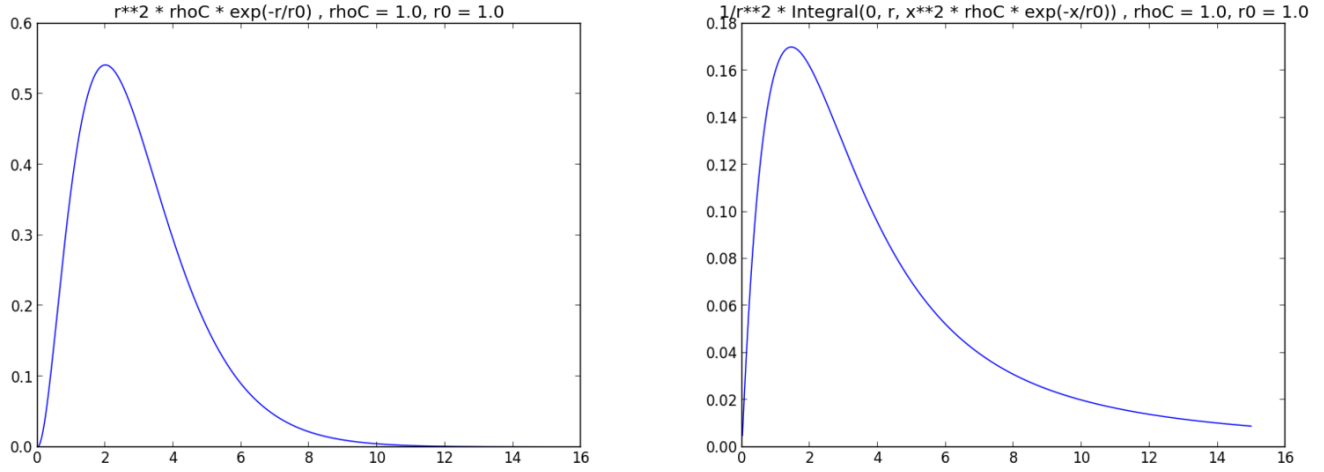


Figura 1: *Graficos de las funciones*

$$\Phi(r) = 4\pi G\rho_c \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x a^2 e^{-\frac{a}{r_0}} da \right) dx - \Phi(R_{max})$$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G\rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M(r) = 4\pi\rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx$$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) =$

$$2\rho_c \left| \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{s^2+x^2}}{r_0}} dx \right|$$

Solución numérica

Los gráficos se realizaron con un programa python (problem.py) definiendo la función densidad y calculando de forma numérica los integrales de las fórmulas de arriba (problem.py)

Se muestran los gráficos para ρ_c en $\{0.5 * 10^5, 10^5, 1.5 * 10^5, 2.0 * 10^5\}$ kg/m³ y r_0 en $\{0.5 * 10^9, 10^9, 1.5 * 10^9, 2 * 10^9\}$ m. Todas las cantidades están expresadas en las unidades SI: densidad kg/m³, distancia m, potencial J/kg, densidad proyectada kg/m², velocidad m/s y se consideró la constante gravitacional $G = 6.6 * 10^{-11} \text{m}^3 / (\text{kg} * \text{s}^2)$

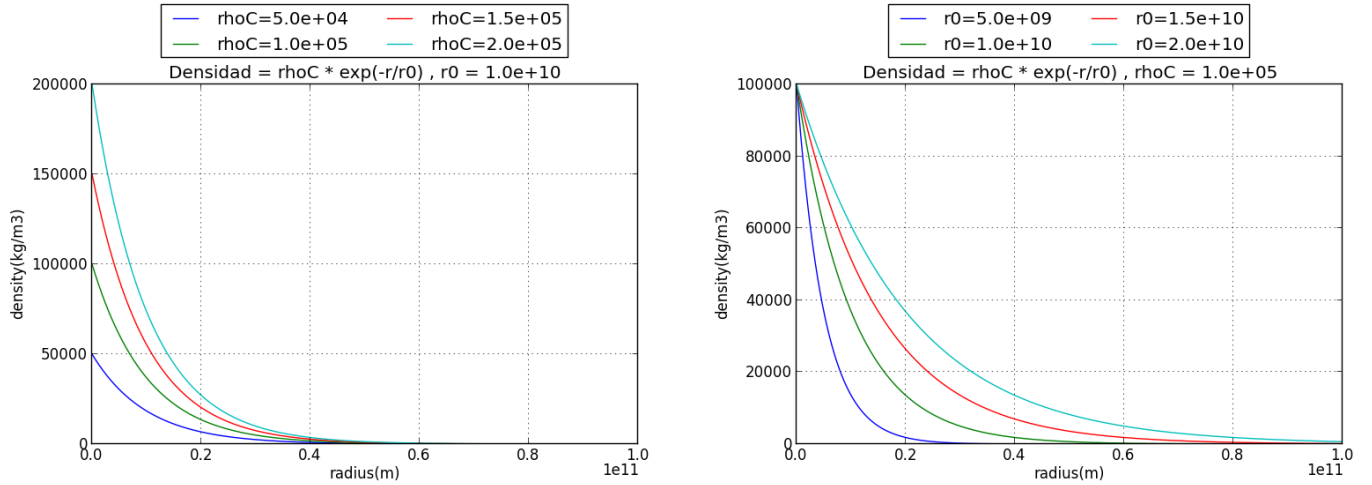
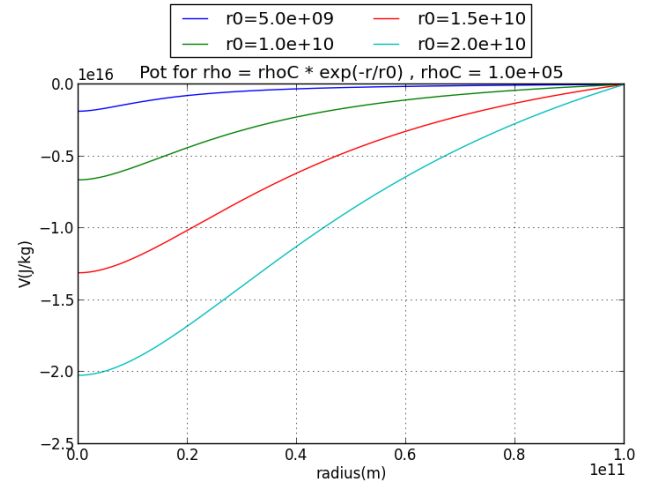
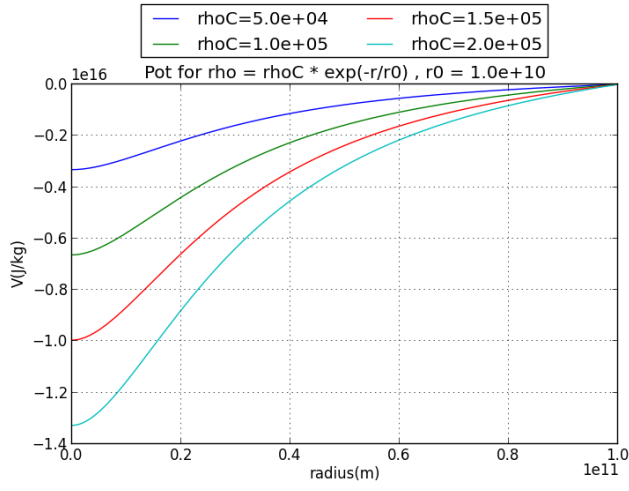
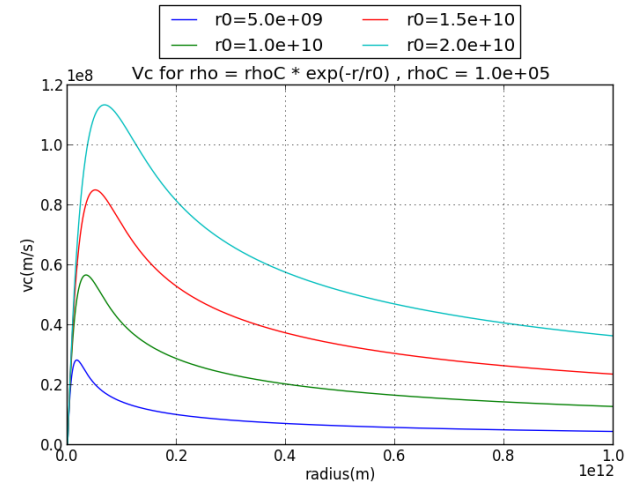
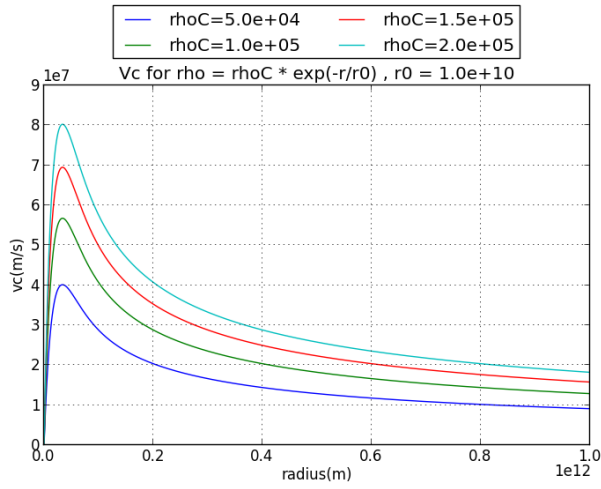
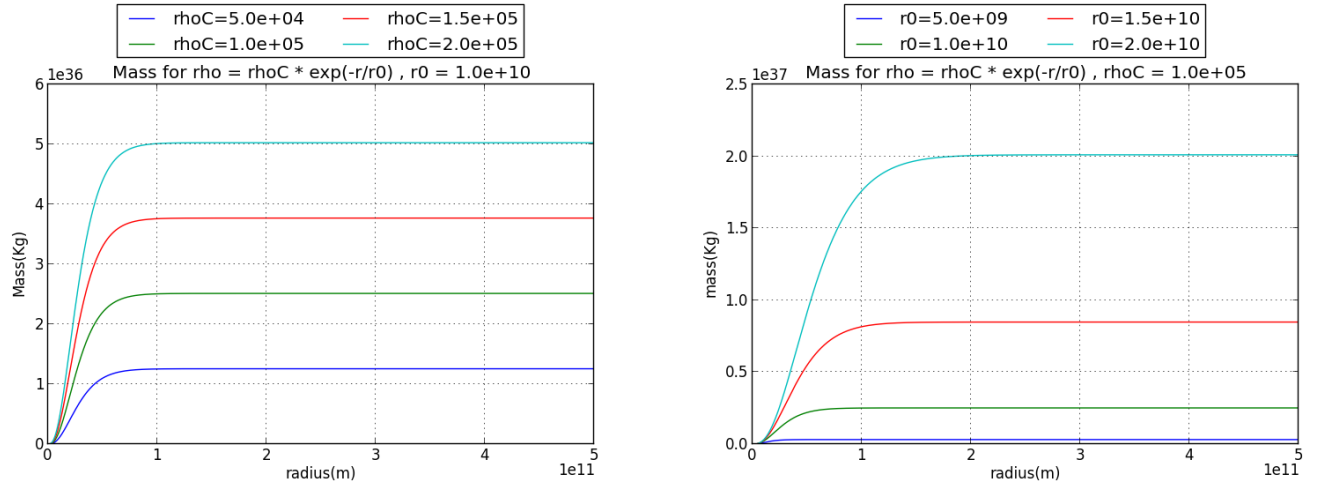
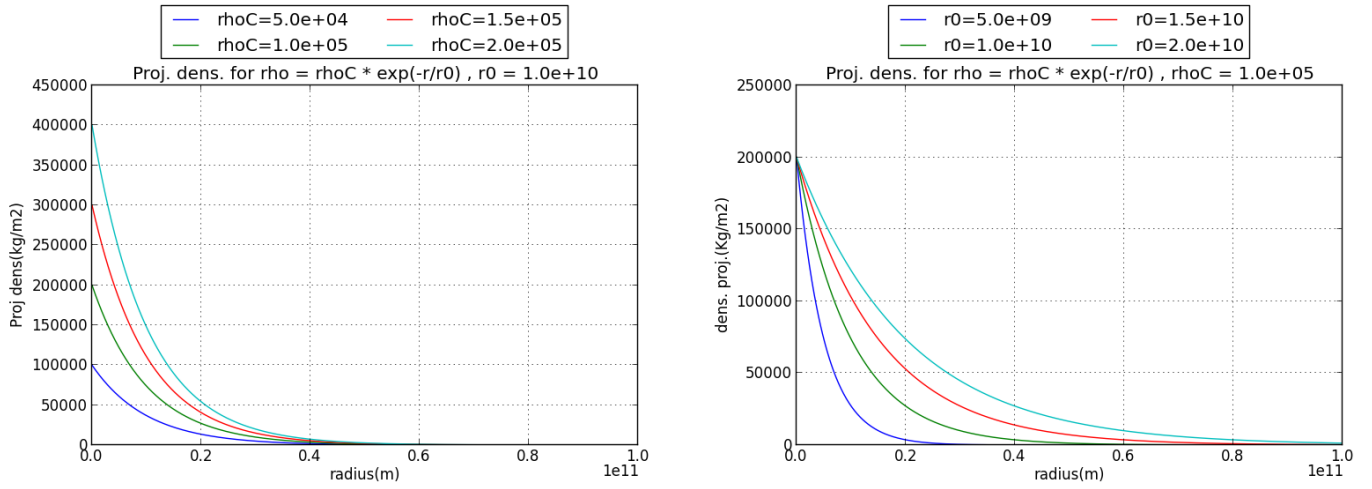


Figura 2: *Densidad*

Figura 3: *Potencial*Figura 4: *Velocidad circular*

Figura 5: *Masa*Figura 6: *Densidad proyectada*

Solución analítica

$$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Integrando por partes 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx &= -r_0 \int_0^r x^2 (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx = -r_0 \left(x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - 2 \int_0^r x e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -2r_0^2 \int_0^r x (e^{-\frac{x}{r_0}})' dx - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^2 \left(x e^{-\frac{x}{r_0}} \right) \Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{r_0}} dx = \\ &= -r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = -2r_0^3 e^{-\frac{x}{r_0}} \Big|_0^r - 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - 2r_0^3 e^{-\frac{r}{r_0}} - \\ &= 2r_0^2 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} = 2r_0^3 - r_0 e^{-\frac{r}{r_0}} (2r_0^2 + 2r_0 r + r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x y^2 e^{-\frac{y}{r_0}} dy \right) dx &= 2r_0^3 \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{-\frac{x}{r_0}} (2r_0^3 + 2r_0^2 x + x^2 r_0)}{x^2} dx = \\ &= -2r_0^3 \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^r - \int_{\varepsilon}^r e^{-\frac{x}{r_0}} \left(-(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + r_0(-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) dx = 2r_0^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \right. \\ &= \frac{1}{r} \Big) + r_0 \left((e^{-\frac{x}{r_0}})' (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) + e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x})' \right) = (\text{integración por} \\ &= \text{partes}) = 2r_0^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) + r_0 \left(e^{-\frac{x}{r_0}} (-r_0 - \frac{2r_0^2}{x}) \right) \Big|_{\varepsilon}^r = r_0^2 \left(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \right. \\ &= \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \Big) \Rightarrow \Phi(r) = 4\pi G \rho_c r_0^2 \left(\frac{2r_0}{\varepsilon} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{r_0}} (\varepsilon + 2r_0)}{\varepsilon} + \right. \\ &= \frac{-2r_0 + e^{-\frac{r}{r_0}} (r + 2r_0)}{r} \Big) \end{aligned}$$

$$M(r) = 4\pi \rho_c \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx = 4\pi \rho_c r_0 (2r_0^2 - 2r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} - 2r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r^2 e^{-\frac{r}{r_0}})$$

$$v_c(r) = \left(\frac{4\pi G \rho_c}{r} \int_0^r x^2 e^{-\frac{x}{r_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(4\pi G \rho_c r_0 \left(\frac{2r_0^2}{r} - e^{-\frac{r}{r_0}} (2\frac{r_0^2}{r} + 2r_0 + r) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando programas que trabajan con símbolos matemáticos (Mathematica y sympy(python)) producen los mismos resultados

Gráficos de las funciones calculadas de forma analítica (las fórmulas de arriba) (programa prAn.py - se pueden especificar como parámetros r0, rhoC, rmax (radio máximo para el cual se pinta el gráfico), type(d, dp, p, v, m)) y se observa que son parecidos a la solución completamente numérica de antes

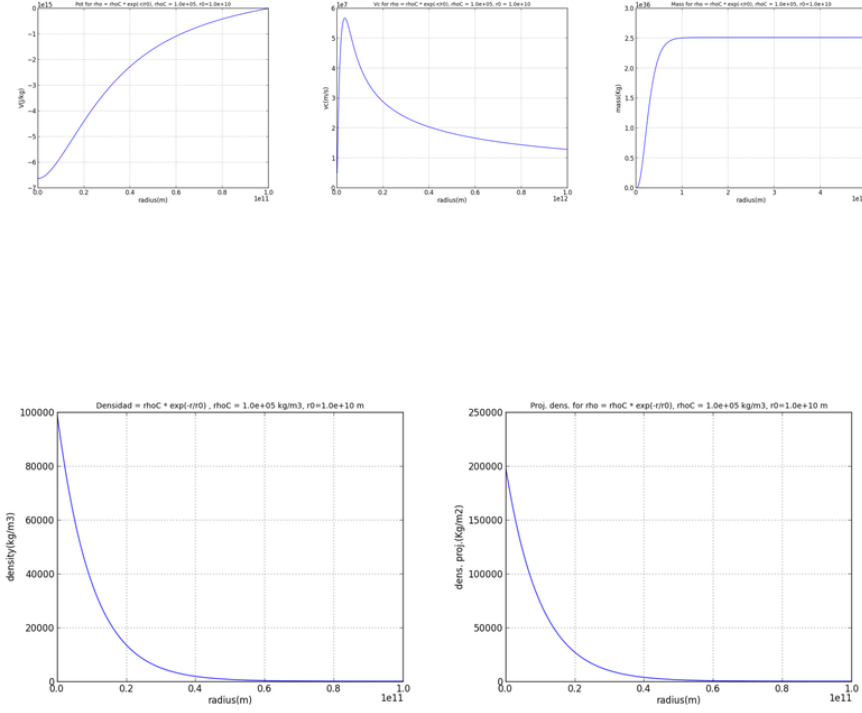


Figura 7: $\rho_0 C = 10^{**5}$, $r_0 = 10^{**10} \text{ m}$

Comparación con el potencial isócrono

Solución analítica del potencial isocrono

Hay 2 parámetros configurables : b y M (la masa total del sistema) (ver Galactic Dynamics - Binney)

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

Se define $a = \sqrt{b^2 + r^2}$

$$\rho(r) = M \left(\frac{3(b+a)a^2 - r^2(b+3a)}{4\pi(b+a)^3 a^3} \right)$$

La densidad proyectada se calcula como antes reemplazando la funcion de densidad

$$M(r) = M \frac{r^3}{(b + \sqrt{b^2 + r^2})^2 \sqrt{b^2 + r^2}} \text{ obtenido de la fórmula } M(r) = \frac{r^2}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r)$$

utilizando sympy

$$v_c(r) = \sqrt{(GMr^2)/((b + a)^2 * a)}$$

Comparación

Elegimos r_0 (el parametro de escala de la distribucion exponencial)= 2kpc y $\rho_c = 1e+5$ y ejecutamos el programa para dibujar la masa para la distribución exponencial.

La masa total obtenida y misma densidad central introducidas antes se introducen como parámetros para dibujar los gráficos en el caso del potencial isócrono para poder hacer una comparación (el parámetro b se calcula : $b = (\frac{3M}{16\pi\rho_c})^{\frac{1}{3}}$ - reemplazando $r=0$ en la fórmula de la densidad)

```
python prAn.py --type=m --rmax=0.5e+21 --r0=6.16e+19 --rhoC=1e+5
python prAn_isochrone.py --rhoC=1.0e5 --type=v --mass=5.9e+65 --rmax=0.8e+22
```

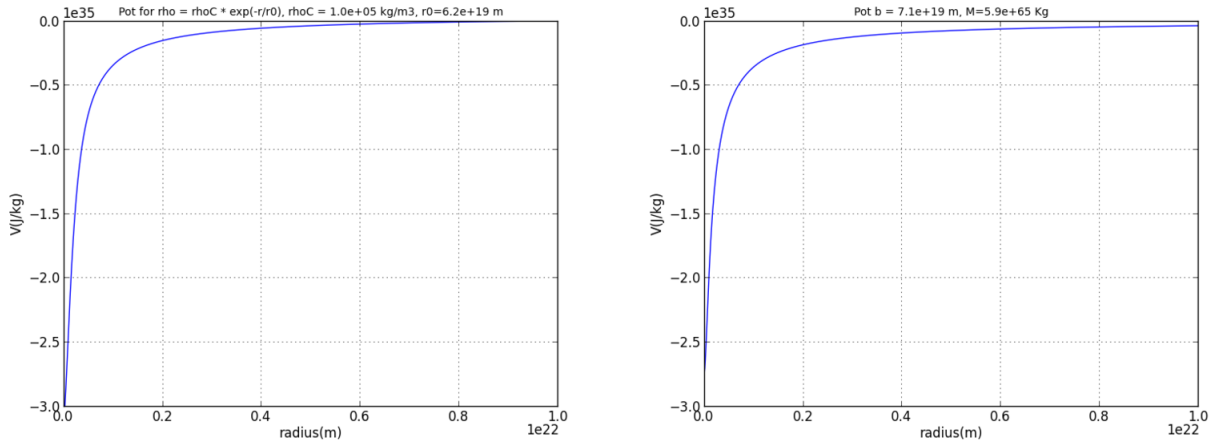
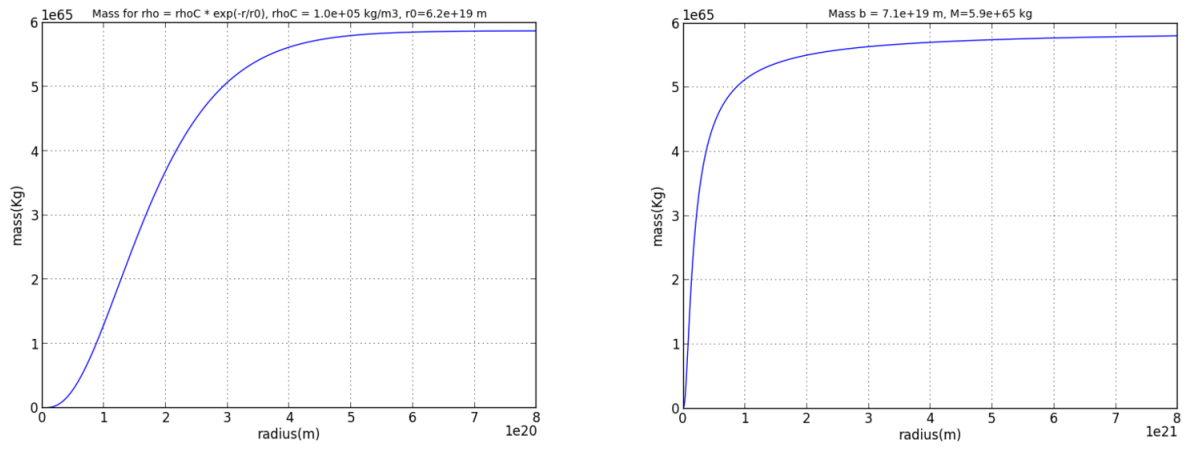
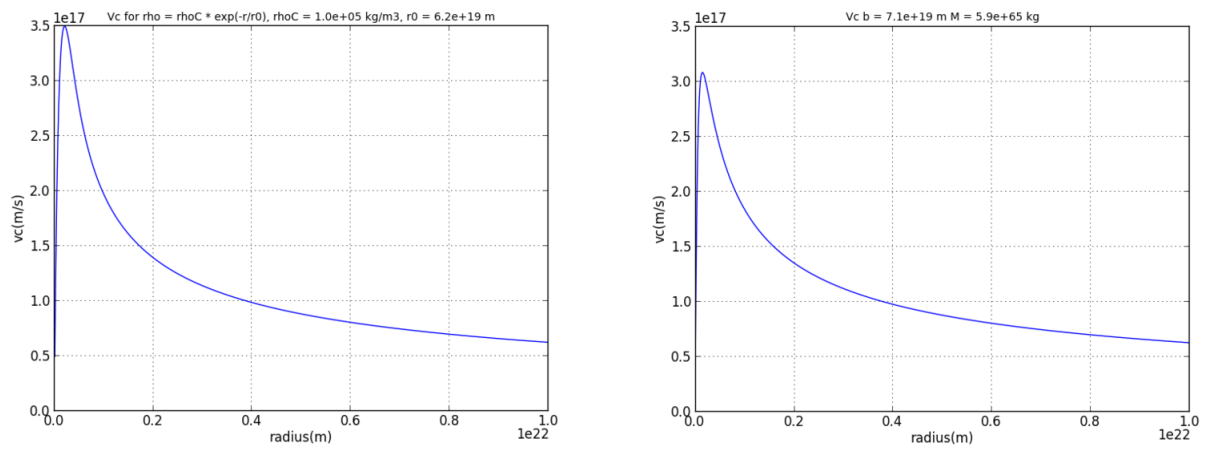
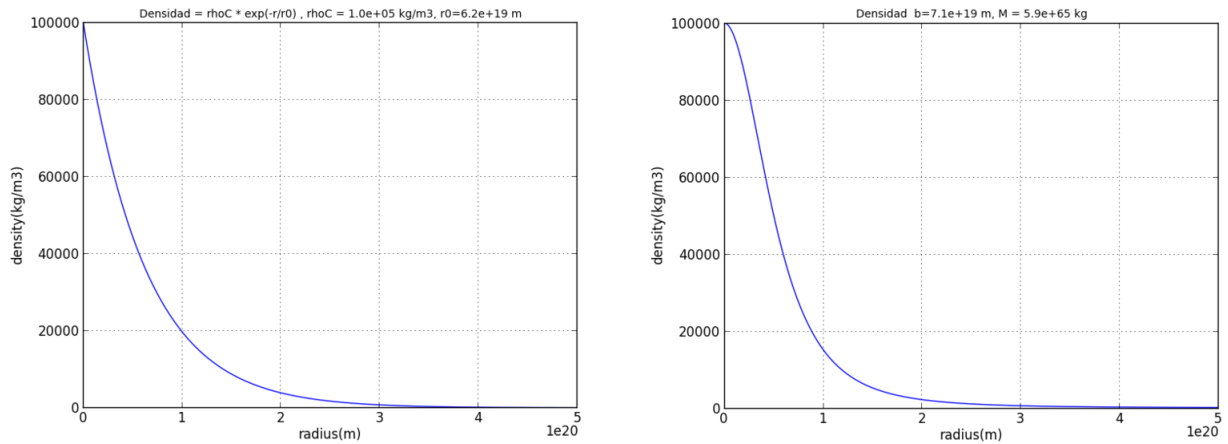
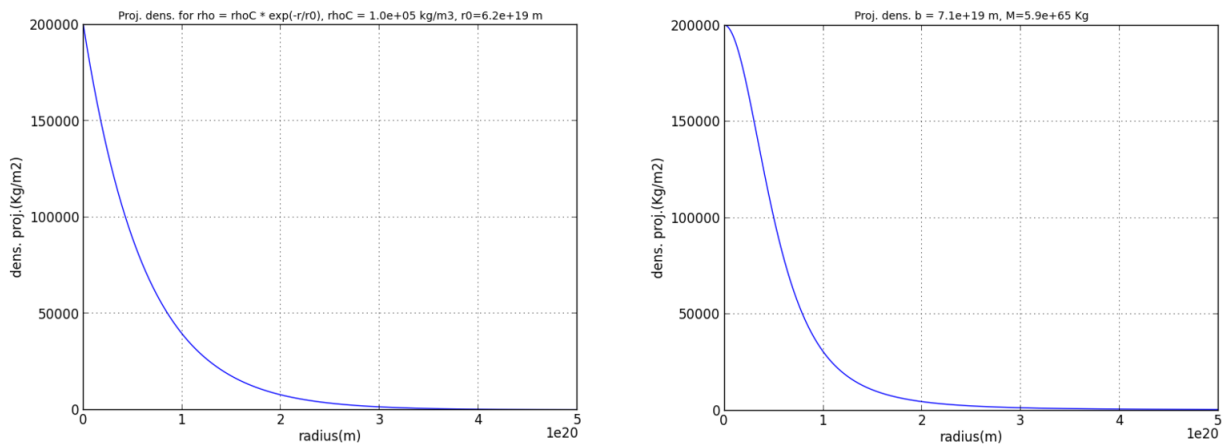


Figura 8: *Potencial comparado*

Figura 9: *Masa comparada*Figura 10: *Velocidad comparada*

Figura 11: *Densidad comparada*Figura 12: *Densidad proyectada comparado*

Código

- Los programas python , imagenes , pdf e incluso el tex están en el repositorio git: <https://github.com/beevageeva/potencial>
- Por razones históricas hay otro programa python mas general (pt.py) que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un

slider: ver rhodef) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones (sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar $K1$ en el caso del potencial
- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10^{**1} hasta 10^{**30}
- Se muestran los gráficos en el caso $A = B = 1$ ($\Rightarrow r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con la solución analítica: ver calc_exp.py)

```
python pt.py --type=p --test=calc_exp --k=0,-8e-10
python pt.py --type=v --test=calc_exp
python pt.py --type=m --test=calc_exp
```

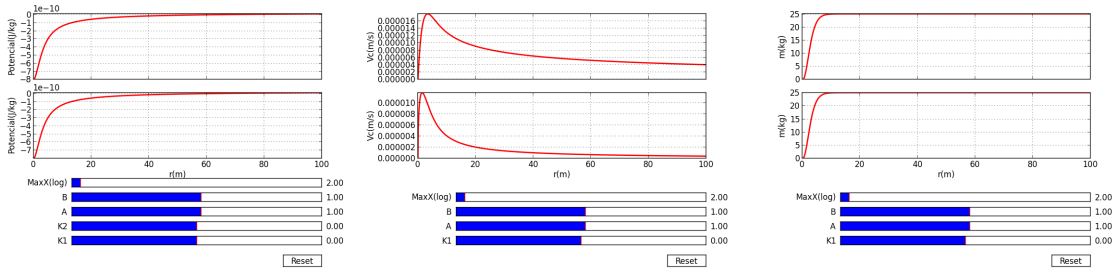


Figura 13: Salidas de las ejecuciones de pt.py de arriba