Nociones teóricas

Para una distribución de masa ρ

De la ley de Newton la fuerza gravitatoria ejercitada en el punto x es: $F(x) = G\int \frac{x\prime - x}{|x\prime - x|^3}\rho(x\prime)d^3x$ y despues de hacer cálculos llegamos a $\nabla F(x) = -4\pi G\rho(x)$

Definimos el potencial gravitatorio $\Phi(x) = -G\int \frac{\rho(x\prime)}{|x\prime - x|}d^3x$. Observamos que $F(x) = -\nabla\Phi$ y después de reemplazar en la ecuación de antes se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) **con simetria esférica** (las funciones solo dependen de r y no de la posición en la esfera de radio r: los angulos θ y φ), asi que las derivadas totales coinciden con las derivadas parciales $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$; $\nabla\Phi(r) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$ y $\nabla^2\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r})$ La ecuacion Poisson:$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}) = 4\pi G\rho(r) \implies r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = 4\pi G\int r^2\rho(r)dr + K_1 \implies \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = \frac{4\pi G}{r^2}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K_1}{r^2} \implies \Phi(r) = 4\pi G\int \frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + K_1\int\frac{1}{r^2}dr + K_2 = 4\pi G\int\frac{1}{r^2}(\int r^2\rho(r)dr)dr + \frac{K_1}{r} + K_2, K_1, K_2 \in \mathbb{R}(el signo - con K_1)$

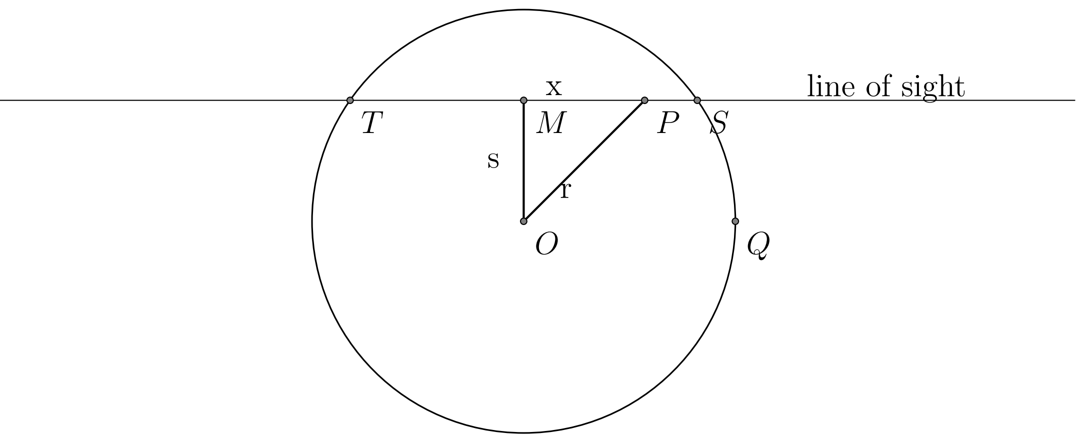
Definimos la velocidad circular: la velocidad de una particula en una orbita circular de radio r: $v_c^2(r) = r\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \implies v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r}, K \in \mathbb{R} \implies v_c(r) = (\frac{4\pi G}{r}\int r^2\rho(r)dr + \frac{K}{r})^{\frac{1}{2}}, K \in \mathbb{R}$

La masa $M(r) = 4\pi\int r^2\rho(r)dr + K, K \in \mathbb{R}$

En un sistema con simetria esférica: la proyección de una función f(r) en el plano y,z (a lo largo de la línea de visión OX)es la funcción: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)dx$

$x^2 = r^2 - s^2 \implies dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - s^2}} \implies F(s) = 2\int_s^{\infty}\frac{rf(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}}dr, s^2 = y^2 + z^2$(s es el radio proyectado) (`http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_transform`)

La proyección de la distribución de densidad en el plano Y0Z $D_p(s) = 2\int_s^{\infty}\frac{r\rho(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}}dr$,$s^2 = y^2 + z^2$



Problema de la práctica

Hipótesis: $\rho(r) = Ae^{-Br} = rhoC\dot{e}^{-\frac{r}{r_0}}, A, B > 0, rhoC = A, r_0 = frac1B$ en un sistema con simetria esférica

Determinar $\Phi(r)$, M(r),$M_p(r)$, $v_c(r)$

$\Phi(r) = 4\pi GA \int \frac{1}{r^2}(\int a^2 e^{-Ba} da)dr + \frac{K_1}{r} + K_2$

Para poder calcular las integrales de forma numérica establecemos los límites de integración y cogemos los constantes 0 Miramos el gráfico de la función: f(r) = rhoC * exp(-r/r0) observamos que f es continua y f(0)

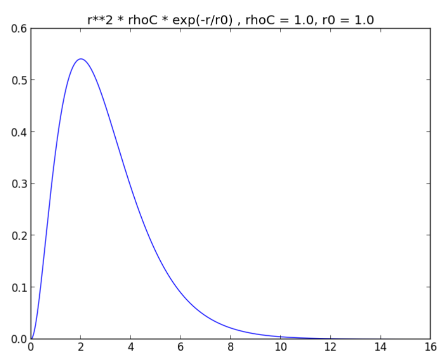


Figura 1: $r^2 \rho_c e^{\frac{-r}{r0}}$

$= 0$

$\int r^2 e^{-Br} dr = \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx$

Integrando por partes 2 veces:

$\int_0^r x^2 e^{-Bx} dx = -\frac{1}{B}\int_0^r x^2 (e^{-Bx})\prime dx = -\frac{1}{B}((x^2 e^{-Bx})\Big|_0^r - 2\int_0^r x e^{-Bx} dx) = -\frac{2}{B^2}\int_0^r x (e^{-Bx})\prime dx - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^2}((x e^{-Bx})\Big|_0^r - \int_0^r e^{-Bx} dx) - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = -\frac{2}{B^3} e^{-Bx}\Big|_0^r - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br} = \frac{2}{B^3} - \frac{2}{B^3} e^{-Br} - \frac{2}{B^2} r e^{-Br} - \frac{1}{B} r^2 e^{-Br}$

Miramos el gráfico de la función $f(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho_c e^{-\frac{r}{r0}}$ que no está definida en 0 pero es continua en $(0,\infty)$ y $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

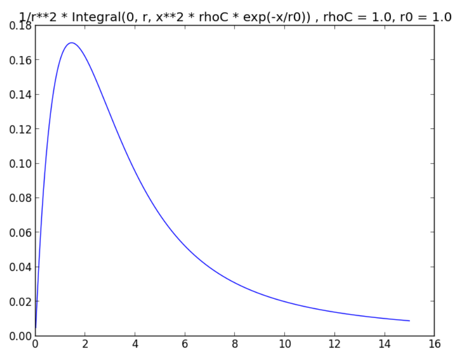


Figura 2: $\frac{1}{r^2}\int_0^r x^2 \rho_c e^{\frac{-x}{r0}} dx$

$\implies \int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2}(\int_0^x y^2 e^{-By} dy) dx = -\frac{1}{B}(-\frac{2}{B^2}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{B^2}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx + \frac{2}{B}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx + \int_\varepsilon^r e^{-Bx} dx) = \frac{1}{B^2}(\frac{2}{B}(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + e^{-Br} - \frac{1}{B}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - 2\int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx)$

$\implies \Phi(r) = \frac{4\pi G A}{B^2}(\frac{2}{B}(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}) + e^{-Br} - \frac{1}{B}\int_\varepsilon^r \frac{1}{x^2} e^{-Bx} dx - 2\int_\varepsilon^r \frac{1}{x} e^{-Bx} dx)$

$M(r) = 4\pi A \int_0^r x^2 e^{-Bx} dx = -\frac{4\pi A}{B}(-\frac{2}{B^2} + \frac{2}{B^2} e^{-Br} + \frac{2}{B} r e^{-Br} + r^2 e^{-Br})$

La proyección de la distribución de densidad en el plano YOZ $D_p(s) = 2A\int_s^\infty \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} e^{-Br} dr$

$v_c(r) = (\frac{4\pi G A}{r}\int_0^r x^2 e^{-Bx} dx)^{\frac{1}{2}} = (-\frac{4\pi G A}{B}(\frac{2}{B^2 r} e^{-Br} + \frac{2}{B} e^{-Br} + r e^{-Br} - \frac{2}{B^2 r}))^{\frac{1}{2}}$

Los gráficos se realizaron con un programa python (en el repositorio git: `https://github.com/beevageeva/potencial`) tomando las constantes de integración 0 y usando las expresiones iniciales(sin hacer la integración por partes). Las integraciones se calculan de forma numérica y observando los gráficos de las funciones que se integran estas son continuas y tienen el valor 0 en el punto 0 así que se pueden tomar los límites de integración 0 y r. Se muestran los gráficos para la función de densidad $rhoC * e^{\frac{-r}{r_0}}$ variando rhoC y r_0 con valores 0.5, 1 y 2

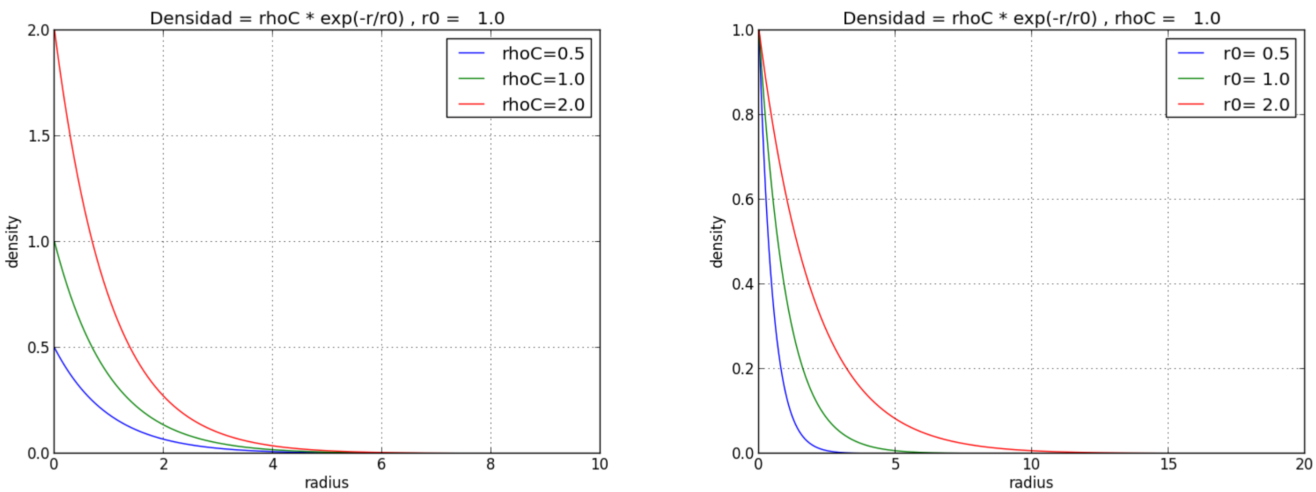


Figura 3: *Densidad*

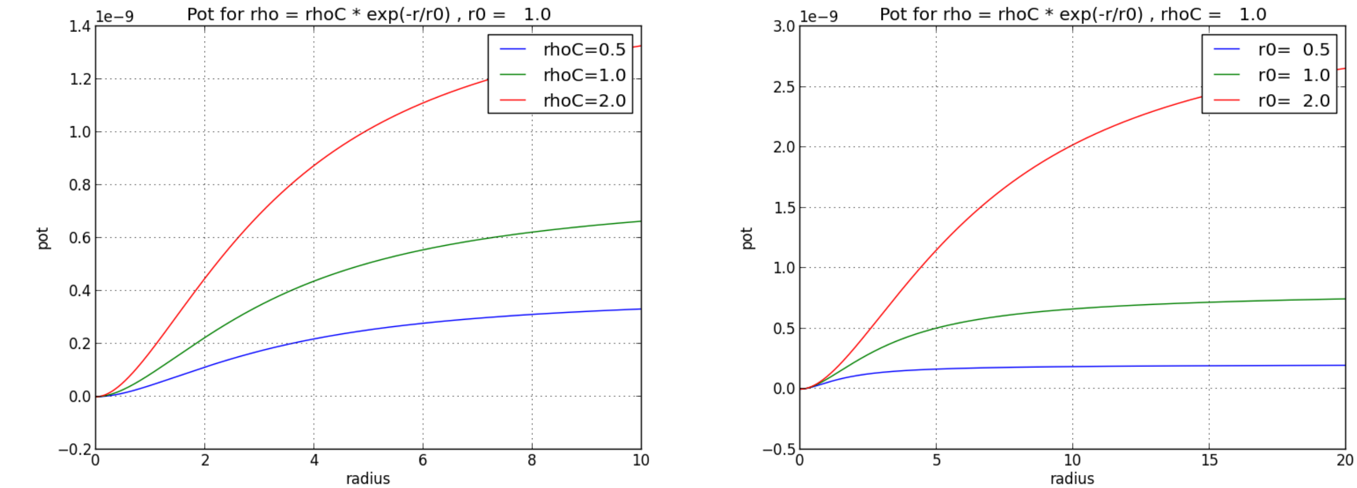


Figura 4: *Potencial*

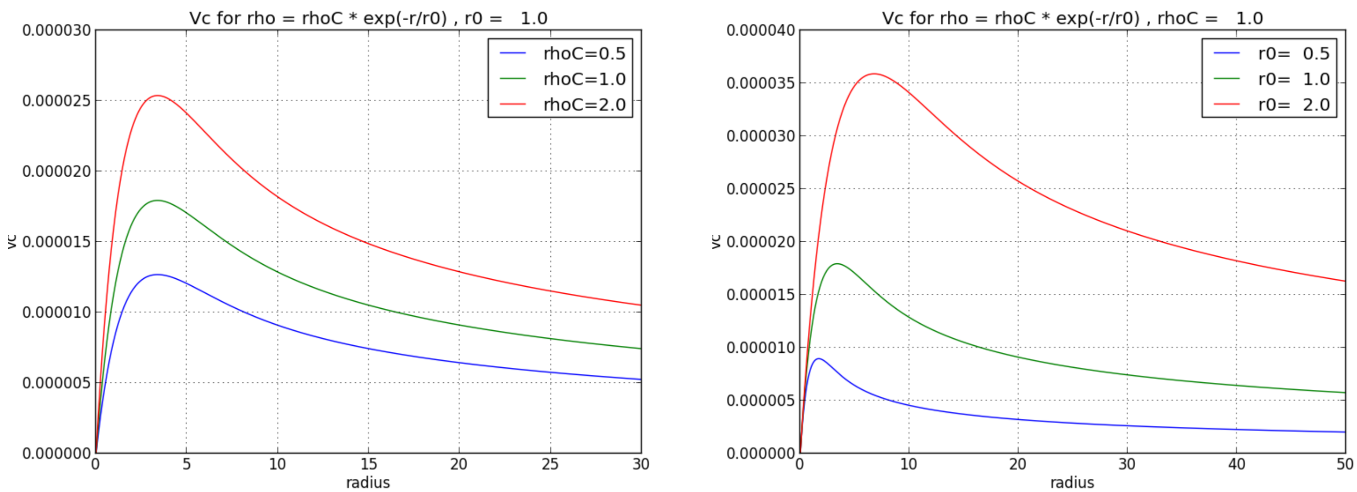


Figura 5: *Velocidad circular*

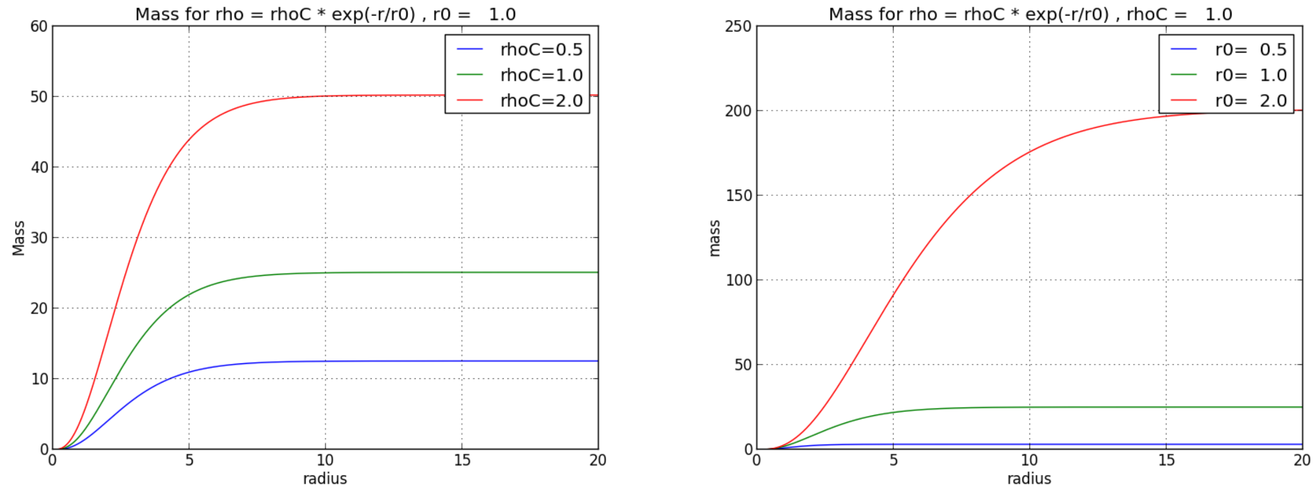


Figura 6: *Masa*

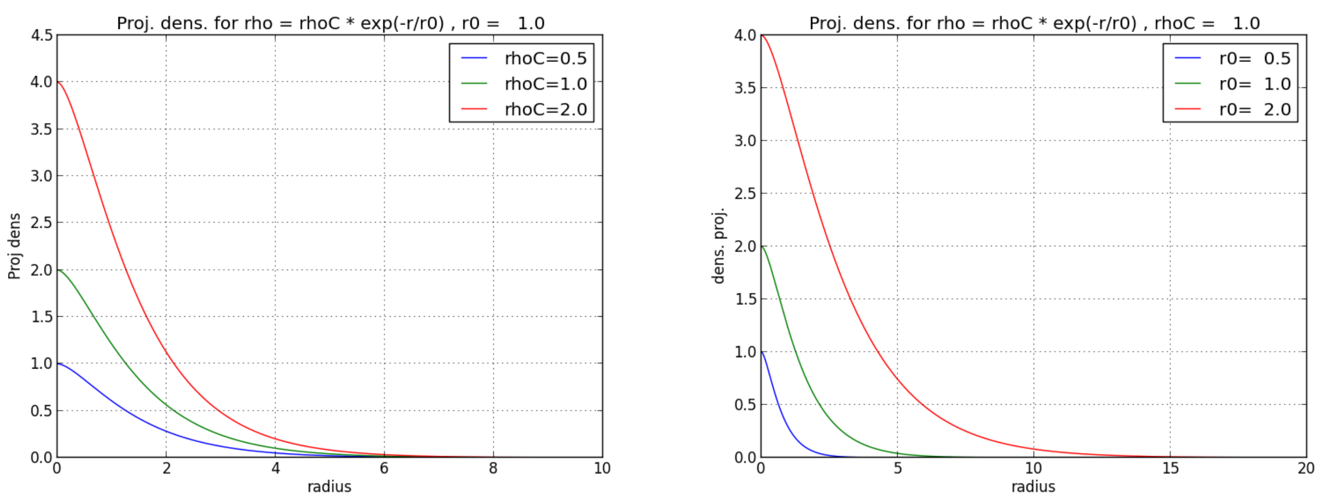


Figura 7: *Densidad proyectada*

- Hay otro programa python mas general que tiene como entrada la función de densidad (que puede tener parámetros que se pueden variar durante la ejecución a través de un slider) y calcula el potencial, velocidad circular, masa y distribución proyectada de masa según el caso general, pero tiene la posibilidad de representar el gráfico de las funciones calculadas de modo analítico (ver readme en la misma carpeta)

- Para el potencial resolver la ecuación diferencial de segundo grado implica tener 2 constantes de integración, para la V_c y masa hay solo una, variando la segunda constante en el caso del potencial y la única constante para la masa y velocidad y distribución proyectada solo hace una traslación a los gráficos de las funciones(sumando la constante), pero la forma queda igual así que solo tiene sentido tener en cuenta variar K1 en el caso del potencial

- Hay un slider con cual se puede cambiar el rango del radius desde 10**1 hasta 10**30

- Se muestran los gráficos en el caso A = B = 1 ($\implies$ $r_0 = \rho_c = 1$) y constantes de integración 0 para poder comprobarlos con los otros (donde hay 2 gráficos, el segundo está calculado con las fórmulas de la integración por partes: ver calc_exp.py)

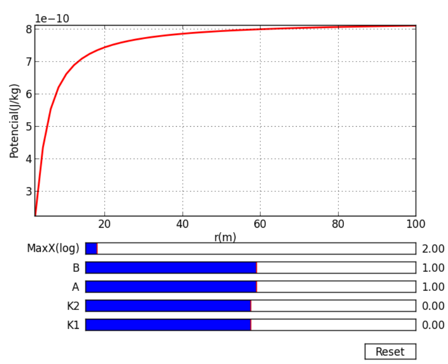


Figura 8: *Potencial*

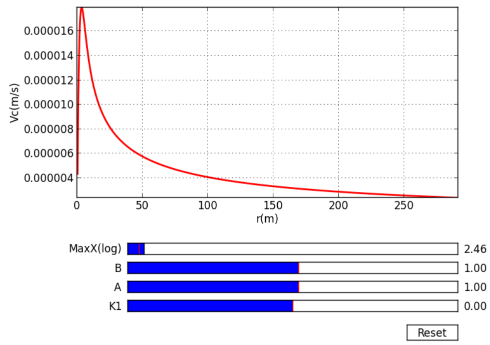


Figura 9: *Velocidad circular*

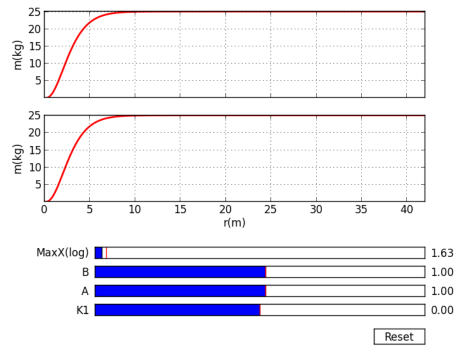


Figura 10: *Masa*

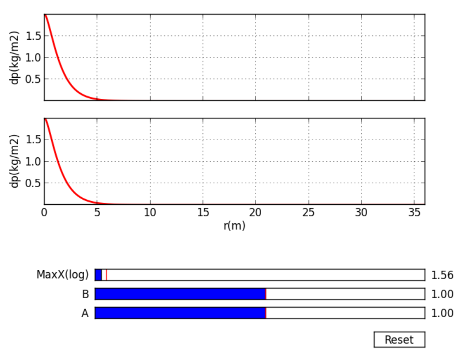


Figura 11: *Densidad proyectada*