1 Ondas de sonido

Una perturbación de pequeña amplitud en un fluido va a crear zonas de compresión y rarefacción que alternan en el tiempo y espacio en la dirección de propagación(el movimiento oscilatorio de las particulas se propaga como una onda y son ondas logitudinales: las particulas se mueven en la misma dirección que la dirección de propagación)

Condiciones iniciales Consideramos un fluido ideal con las variables en el estado de equilibrio $v_0 = 0, \rho_0, p_0$ y hacemos unos cambios en estas variables que son muy pequeños de forma que se pueden omitir los términos de segundo orden (o mayores) en las ecuaciones de los fluidos Definimos $c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ Las variables de cuales queremos estudiar la evolución devienen:

v

$\rho = \rho_0 + \rho_0\prime$

$p = p_0 + p\prime$

con $|v| << c_s, p\prime << p, \rho\prime << \rho_0$
Las ecuaciones de los fluidos despues de linearlizar devienen:

continuidad: $\frac{\partial \rho\prime}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0$

Euler: $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p\prime = 0$

El proceso es adiabático: $p\prime = c_s^2 \rho\prime$

Después de hacer los cálculos (y suponiendo el caso general inhomogeneo en tiempo y espacio : $\rho_0 = \rho_0(x,t) \implies c_s = c_s(x,t)$ con la densidad de equilibrio variando bastante lentamente en el espacio y tiempo de tal forma que se pueden omitir terminos de segundo orden o mas en multiplicaciones de derivadas temporales o espaciales de estas y las perturbaciones) las perturbaciones de las variables verifican las ecuaciones:

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial p\prime}{\partial t}\right) = \nabla^2 p\prime$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial \rho\prime}{\partial t}\right) = \nabla^2 \rho\prime$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \nabla^2 \Phi$ donde definimos $v = \nabla \Phi$ considerando el fluido irrotacional

Si la densidad de equilibrio no varia en el tiempo($\rho_0 = \rho_0(x)$):

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \rho\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho\prime$

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$

Medio homogeneo

Si la densidad de equilibrio es constante en tiempo($\rho_0, c_s constantes$) y espacio las soluciones generales son superposiciones de ondas planas de forma:

$\sum_i A_{\rho\prime_i} cos(x - c_s t)$

$\sum_i A_{p\prime_i} cos(x - c_s t)$

$\sum_i csSign_i A_{v_i} cos(x - csSign_i c_s t)$ donde $csSign_i = 1$ si la onda viaja a la derecha y -1 si va a la izquierda

con las amplitudes números reales verificando las ecuaciones: $A_{p\prime_i} = c_s^2 A_{\rho\prime_i}$ $A_{v_i} = \frac{1}{c_s \rho_0} A_{p_i}$

Medio inhomogeneo $\rho_0 = \rho_0(x)$ La solución no se puyede expresar mas como superposición de ondas planas (porque c_s no es más constante), pero análogo a esta solución intentamos buscar soluciones de forma $a(x,t)e^{i\phi(x,t)}$ (aproximación WKB): donde definimos

$\omega(x,t) = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$

$k(x,t) = -\nabla\phi$

porque análogo al caso homogeneo (considerando sin perder la generlaidad solo una onda y no una superposición) donde $\phi(x,t) = kx - \omega t$ con ω, k constantes verificando la relación de dispersión $\omega^2 = c_s^2 k^2$

Relación entre las amplitudes

Suponiendo que estas soluciones existen:

$p\prime = Pe^{i\phi}$

$\rho\prime = Re^{i\phi}$

$v = Ve^{i\phi}$

P,R,V complejos

igual que en caso homogeneo :

de la relación de adiabaticidad: $|P(x,t)| = c_s^2(x)|R(x,t)|$

de la ecuación de movimiento:

$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla\rho\prime \implies -i\rho_0\omega Ve^{i\phi} = ikPe^{i\phi}$

despues de simplificar, multiplicar cada lado con su conjugado(hay que expresar las amplitudes locales con el módulo porque pueden ser complejas):

$|V|^2 = \frac{|P|^2}{\rho_0^2 c_s^2}$ $(|V| = \frac{1}{c_s\rho_0}|P| = \frac{c_s}{p_0\gamma}|P|)$

Resolver la ecuación genérica

$\frac{1}{c_s^2(x)}\frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

Reemplazando la solución WKB approx. $p(x,t) = a(x,t)e^{i\phi(x,t)}$ en la ecuación y con las definiciones de ω y k de arriba despues de hacer los cálculos

$\omega^2(x,t) = c_s^2(x)k^2(x,t)$

definiendo $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$:

$\frac{\partial a}{\partial t} + c_g\cdot\nabla a = -\frac{1}{2}\frac{a}{|k|c_s}(\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_s^2\cdot\nabla k)$

$\implies$

$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_g\cdot\nabla\omega = 0$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g\cdot\nabla k = -k\cdot\nabla c_g$

Usamos directamente la ecuación de conservación de energía para determinar la amplitud:

$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g\cdot\nabla E = -E\nabla\cdot c_g$

1D $(c_s = c_g)$:

$\frac{1}{c_s^2(x)}\frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_s\frac{\partial k}{\partial x} = -c_s$

$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_s\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_s\frac{\partial k}{\partial x} = -k\frac{\partial c_s}{\partial x}$

$\frac{\partial E}{\partial t} + c_s\frac{\partial E}{\partial x} = -E\frac{\partial c_s}{\partial x}$

Al largo de un rayo definido por:

$\frac{dx}{dt} = c_s$

$x_p(t), x_p(0) = x_p$

las funciones:

$\omega_p(t) = \omega(x_p(t), t)$

$k_p(t) = k(x_p(t), t)$

$a_p(t) = a(x_p(t), t)$

verifican las ecuaciones

$\frac{d\omega_p}{dt} = 0$

$\frac{dk_p}{dt} = -k_p \frac{\partial c_s}{\partial x}(x_p(t))$

$\frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c_s}{\partial x}(x_p(t)) c_s$

$\frac{dk_p}{dt} = -k_p \frac{1}{c_s} \frac{dc_s}{dt} \implies$

$\frac{dln(k_p)}{dt} = -\frac{dln(c_s)}{dt} \implies$

$k(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$

de forma similar $E(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$

$\omega(x_p(t), t) = constant$

Ecuación de la energía:

$\frac{\rho_0 |V|^2}{2} = \frac{|P|^2}{2\rho_0 c_s^2}$

$E = \frac{|P|^2}{\rho_0 c_s^2}$ (la suma de las 2)

$\implies |P(x_p(t), t)| c_s^{\frac{1}{2}}(x_p(t), t) = constant$

Suponemos que podemos escribir :

$|P| = c_s^k \rho_0^l p_0^m C_P$

$|R| = c_s^k \rho_0^{l_1} p_0^{m_1} C_R$

$|V| = c_s^k \rho_0^{l_2} p_0^{m_2} C_V$

con $C_P, C_R y C_V$ constantes. Estas relaciones serían válidas aunque p_0 no es constante? (TODO: variando de tal forma que se cumplan las condiciones de las aproximaciones : ρ_0, p_0, c_s monotonas variando lentamente)

de las relaciones entre las amplitudes de arriba

$\frac{|P|}{|R|} = c_s^2 = \rho_0^{l-l_1} p_0^{m-m_1} \frac{C_P}{C_R}$

Escribimos $c_s^2 = \gamma p_0 \rho_0^{-1}$ y la relación de arriba se tiene que cumplir $\forall x$ (porque consideramos $c_s, \rho_0 y p_0$ dependiendo de x)

$\implies m - m_1 = 1$, $l - l_1 = -1$ y $\frac{C_P}{C_R} = \gamma$

$\frac{|P|}{|V|} = c_s \rho_0 = \gamma^{-\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} = \rho_0^{l-l_2} p_0^{m-m_2} \frac{C_P}{C_V}$

$\implies \frac{C_P}{C_V} = \gamma^{-\frac{1}{2}}, l - l_2 = \frac{1}{2}. m - m_2 = \frac{1}{2}$

Para determinar la relación entre m,l,k introducimos en la ecuación de la energia la expresion de $|P|$

$c_s^{2k} \rho_0^{2l} p_0^{2m} \rho_0^{-1} c_s^{-2} c_s$ tiene que ser constante al largo del rayo

Reemplazano c_s : $\gamma^{k+\frac{1}{2}} p_0^{k-\frac{1}{2}+2m} \rho_0^{-k+2l-\frac{1}{2}}$ tiene que ser constante al largo del rayo (eligiendo un punto inicial y $\forall t$)

$\implies k = 2l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2m$ y $2m + 2l = 1$

elegimos $k = l = \frac{1}{2}$, $m = 0$ (TODO eso porque en realidad se puede dejar un parámetro ya que $\gamma = const = c_s^2 \rho_0^{-1} p_0^{-1}$ y multiplicando las ecuaciones con γ^p el parámtro $m \to m + p$? o hay que elegir porque todas las amplitudes tienen que cumplir la ecuación diferencial de la amplitud?)

$\implies m_1 = -1, l_1 = \frac{3}{2}, l_2 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}$

$|P| = c_s^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} C_P$

$|R| = c_s^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{3}{2}} p_0^{-1} \gamma^{-1} C_P$

$|V| = c_s^{\frac{1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} C_P$

Las amplitudes se calculan al largo del rayo (en la curva determinada por $\frac{dx}{dt} = c_g, x(0) = x_p$): C_P es una constante que depende de los valores en el punto inicial del rayo (x_p): $C_P = c_s^{-\frac{1}{2}}(x_p), \rho_0^{\frac{1}{2}}(x_p)$

En el caso de la práctica (con p_0 constante) queremos representar las amplitudes como $const * cs^{\alpha}$ reemplazamos ρ_0 y calculanido al largo del rayo $\frac{dx}{dt} = c_g, x(0) = x_p$:

$|P(x_p(t), t)| = c_s^{-\frac{1}{2}}(x_p(t)) c_s^{\frac{1}{2}}(x_p) P(x_p, 0)$ (sé en cada momento en cada punto que punto incial en el rayo le corresponde)

las amplitudes de las demás perturbaciones se calculan reemplazando directamente en las relaciones entre las amplitudes (cuando se representa la solución analítica),

Para ver si el paquete se adapta a la relación representamos las curvas:

para la presión: $c_s^{-\frac{1}{2}}(x) c_s^{\frac{1}{2}}(x) P(x_0, 0)$

densidad: $c_s^{-\frac{3}{2}}(x) c_s^{\frac{3}{2}}(x_0) R(x_0, 0)$

velocidad: $c_s^{\frac{1}{2}}(x) c_s^{-\frac{1}{2}}(x_0) V(x_0, 0)$

eligiendo x_0 los 2 puntos donde los valores de las amplitudes de las perturbación en el momento inicial tienen el mínimo y máximo de

2 Transf fourier

Salida de mathematica de la integral de la transf fourier:

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }
Print[FullSimplify[Integrate[Exp[- (z-zc)^2 / W^2] Cos[2 Pi  k0 (z - z0)/ (zf - z0)] Exp[- 2 Pi I m z
/ (zf - z0)],  {z, -Infinity, Infinity} ]]]
```

$$f1(m) = F(\frac{2\pi m}{z_f - z_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_c)^2}{W^2}} cos(\frac{2\pi k_0 (z - z_0)}{z_f - z_0}) e^{-\frac{2\pi i m z}{z_f - z_0}} dz =$$
$$\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 + m\left(m\pi W^2 - 2 i z_c (z_0 - z_f)\right) + 2k_0\left(m\pi W^2 + i(z_0 + z_c)(z_0 + z_f)\right)\right)}{(z_0 - z_f)^2}} \left(e^{\frac{4 i k_0 \pi z_0 (z_c + z_f)}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{\frac{4 k_0 \pi \left(m\pi W^2 + i\left(z_0{}^2 + z_c z_f\right)\right)}{(z_0 - z_f)^2}} \right) \sqrt{\pi} W$$

Salida de FourierTransform mathematica con FourierParameters 0, -2π

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }
h[z_, k0_, z0_, zf_, zc_, W_]:= Exp[-(z-zc)^2/W^2] Cos[2 Pi k0 (z - z0) / (zf - z0) ]
Print[FullSimplify[FourierTransform[h[z, k0, z0, zf, zc, W], z, k, FourierParameters->{0,-2 Pi}]] ]
```

$$f2(k) = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 - 2k_0\left(k\pi W^2 - i z_0 + i z_c\right)(z_0 - z_f) + k\left(k\pi W^2 + 2 i z_c\right)(z_0 - z_f)^2\right)}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 + 2k_0\left(k\pi W^2 - i z_0 + i z_c\right)(z_0 - z_f) + k\left(k\pi W^2 + 2 i z_c\right)(z_0 - z_f)^2\right)}{(z_0 - z_f)^2}} \right) \sqrt{\pi} W$$

En esta reemplazo k = k / (zf - z0) y los graficos salen iguales ($f1(k) = f2(\frac{k}{z_f - z0})$)

Ademas la salida de:

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }

f1[m_]:=((E^(((4*I)*k0*Pi*z0*(zc + zf))/(z0 - zf)^2) + E^((4*k0*Pi*(m*Pi*W^2 + I*(z0^2 + zc*zf)))/(z0
- zf)^2))*Sqrt[Pi]*W)/
  (2*E^((Pi*(k0^2*Pi*W^2 + m*(m*Pi*W^2 - (2*I)*zc*(z0 - zf)) + 2*k0*(m*Pi*W^2 + I*(z0 + zc)*(z0 + zf))))/(
- zf)^2))
f2[k_]:=((E^(-((Pi*(k0^2*Pi*W^2 - 2*k0*(k*Pi*W^2 - I*z0 + I*zc)*(z0 - zf) + k*(k*Pi*W^2 + (2*I)*zc)*(z0
- zf)^2))/(z0 - zf)^2)) +
      E^(-((Pi*(k0^2*Pi*W^2 + 2*k0*(k*Pi*W^2 - I*z0 + I*zc)*(z0 - zf) + k*(k*Pi*W^2 + (2*I)*zc)*(z0 -
zf)^2))/(z0 - zf)^2)))*Sqrt[Pi]*W)/2

Print[FullSimplify[f1[k]-f2[k/(zf-z0)]]]
```

es 0

Elijo f2 forma para simplificar (después de hacer los gráficos de los modulos de los valores de la función , tal como imaginaba la primera exponencial corresponde a la gaussiana de las frecuancias negativas y la segunda de las frequencias positivas):

$f1(k) = f2(\frac{k}{(z_f - z_0)}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi(k_0^2\pi W^2 + 2k_0 k\pi W^2 + 2k_0 i(z_c - z_0)(z_f - z_0) + k^2\pi W^2 + 2ikz_c(z_f - z_0))}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi(k_0^2\pi W^2 - 2k_0 k\pi W^2 - 2k_0 i(z_c - z_0)(z_f - z_0) + k^2\pi W^2 + 2ikz_c(z_f - z_0))}{(z_0 - z_f)^2}}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k+k_0)^2 + 2k_0 iz_c(z_f - z_0) - 2k_0 iz_0(z_f - z_0) + 2ikz_c(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k-k_0)^2 - 2k_0 iz_c(z_f - z_0) + 2k_0 iz_0(z_f - z_0) + 2ikz_c(z_f - z_0)\right]}{z_0 - z_f)^2}}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k+k_0)^2 + 2iz_c(z_f - z_0)(k_0 + k) - 2k_0 iz_0(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k-k_0)^2 + 2iz_c(z_f - z_0)(k - k_0) + 2k_0 iz_0(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}}) =$

Considerando $z_c = 0$ las exponenciales son gaussianas con w = $\frac{z_f - z_0}{\pi W}$ la primera centrada en $-k_0$ y la segunda en k_0 y cuando calculamos el modulo las constantes $abs(exp(-2k_0 iz_0(z_f - z_0))) = abs(exp(2k_0 iz_0(z_f - z_0))) = 1$ y la amplitud queda $\frac{W\sqrt{\pi}}{2}$ igual que se ve en el gráfico (con valores : z0=3.100, zf = 7.400, k0 = 60, zc = 3.745, W = 0.050) : con rojo había hecho el plot de la función entera y con verde y azul de las 2 partes al principio para estar segura que correspondían a las 2 partes