

# 1 Ondas de sonido

Una perturbación de pequeña amplitud en un fluido va a crear zonas de compresión y rarefacción que alternan en el tiempo y espacio en la dirección de propagación (el movimiento oscilatorio de las partículas se propaga como una onda y son ondas longitudinales: las partículas se mueven en la misma dirección que la dirección de propagación)

**Condiciones iniciales** Consideramos un fluido ideal con las variables velocidad, densidad y presión (dependen de  $x$  y  $t$ ) en el estado de equilibrio  $v_0 = 0, \rho_0, p_0$  ( $p_0, \rho_0$  constantes en el caso homogéneo, variando lentamente en espacio y/o tiempo en el caso inhomogéneo) y hacemos unos cambios en estas variables añadiendo unas perturbaciones:  $v, \rho', p'$  que son muy pequeños de forma que se pueden omitir los términos de segundo orden (o mayores) en las ecuaciones de los fluidos. Definimos

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

$$c_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Las variables de las ecuaciones de los fluidos devienen:

$v$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$p = p_0 + p'$$

$$\text{con } |v| \ll c_s, p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0$$

**Evolución** Queremos estudiar la evolución en el tiempo de las perturbaciones:  $p', \rho', v$  Las ecuaciones de los fluidos después de linearizar devienen:

$$\text{continuidad: } \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0$$

$$\text{movimiento: } \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0$$

$$\text{energía: (El proceso es adiabático) } p' = c_s^2 \rho'$$

Notaciones

$N$  número de dimensiones,  $(x_i)_i$  vector  $\in \mathbb{R}^N$ ,  $f(x) = (f_i(x))_i$  vector  $\in \mathbb{R}^N$  (como la velocidad),  $g(x)$  scalar  $\in \mathbb{R}$  como la densidad,  $p(x) = p(x)_{i,j}$  matriz  $\in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  como  $f_c$  de abajo

$$\nabla \cdot f(x) = \text{div}(f) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$$\nabla \cdot g(x) = \text{div}(g) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)_i$$

$$\nabla g(x) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_i$$

$$\nabla \cdot p(x) = \left( \sum_j \frac{\partial p_{i,j}}{\partial x_j} \right)_i$$

$$x \cdot y = \sum_i x_i y_i \text{ para } (x_i)_i, (y_i)_i \text{ vectores}$$

**De forma numérica** las ecuaciones de los fluidos linearizadas de arriba se expresan:

en el momento inicial definimos:

$$u_m = \rho$$

$$u_c = \rho v$$

$$u_e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |v|^2$$

En cada paso de tiempo

1. se calculan los flujos definidos:

$$f_m = \rho v$$

$$f_c = (\rho v_i v_j)_{i,j} + p I_N$$

matriz de dimension (N,N) N = numero de dimensiones del espacio y  $I_N$  la matriz identidad

$$f_e = u_e p v$$

2. y se recalculan  $u_m, u_e, u_c$  (aqui se pueden usar esquemas diferentes que se configuran en constants.py: lax-fr("lf") o first generation("fg")). Tambien en este paso se aplican las condiciones de contorno el tipo se configura en soundwave\_boundary\_conditions.py y se han implementado "repeat" y "refl" (en el caso se la esquema "fg" estas se pueden aplicar también en el paso intermedio dependiendo del parámetro bcStep de constants.py ("interm" o "final"))

$$\frac{du_m}{dt} = -\nabla \cdot f_m$$

$$\frac{du_e}{dt} = -\nabla \cdot f_e$$

$$\frac{du_c}{dt} = -\nabla \cdot f_c$$

3. y las variables  $v, p, \rho$ :

$$v = \frac{1}{\rho} u_c$$

$$p = (\gamma - 1) \left( u_e - \frac{1}{\rho^2} |u_c|^2 \right)$$

$$\rho = u_m$$

dt depende de los valores de las variables en el momento que se calcula  $\rho, p, v$ , resolución (nint), y el tipo de esquema numérico usado (depende del parametro fcfl que es diferente para las esquema lax-fr y first generation (que se implementaron en la práctica))

**de forma analítica:**

Después de hacer cálculos (y suponiendo el caso general inhomogeneo en tiempo y espacio :  $\rho_0 = \rho_0(x, t), p_0 = p_0(x, t) \implies c_s = c_s(x, t)$  con  $p_0, \rho_0, c_s$  monótonas, variando bastante lentamente en el espacio y tiempo de tal forma que se pueden omitir terminos de segundo orden o mas en multiplicaciones de derivadas temporales o espaciales de estas y las perturbaciones) las perturbaciones de las variables verifican las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) = \nabla^2 p'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \nabla^2 \Phi \text{ donde definimos } v = \nabla \Phi \text{ considerando el fluido irrotacional}$$

TODO: Estas relaciones serían válidas también cuando  $p_0$  no es constante? - en la práctica consideramos  $p_0$  constante y  $\rho_0 = \rho_0(x)$

( he mencionado este caso general con la variación de  $\rho_0$  también en el tiempo porque en la documentación que he leído se consideraba así)

## Medio homogéneo

Si la densidad y presión de equilibrio son constantes en tiempo y espacio ( $\rho_0, p_0 \text{ constantes} \implies c_s \text{ const}$ ) las soluciones generales de:

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$$

con  $c_s$  const. son superposiciones de ondas planas de forma

$$\sum_i A_{\rho'_i} \cos(x - cs \text{Sign}_i c_s t)$$

$$\sum_i A_{p'_i} \cos(x - cs \text{Sign}_i c_s t)$$

$$\sum_i cs \text{Sign}_i A_{v_i} \cos(x - cs \text{Sign}_i c_s t)$$

con las amplitudes números reales verificando las ecuaciones:

$$A_{p'_i} = c_s^2 A_{\rho'_i} \text{ (de la ecuación de adiab.)}$$

$$A_{v_i} = \frac{1}{cs\rho_0} A_{p'_i} \text{ (de la ecuación de movimiento)}$$

y en los casos  $cs \text{Sign}_i = 1, A_{\rho'_i}, A_{p'_i}, A_{v_i} > 0$  y  $cs \text{Sign}_i = -1, A_{\rho'_i}, A_{p'_i}, A_{v_i} < 0$  la onda viaja a la derecha

y cuando  $cs \text{Sign}_i = -1, A_{\rho'_i}, A_{p'_i}, A_{v_i} > 0$  y  $cs \text{Sign}_i = 1, A_{\rho'_i}, A_{p'_i}, A_{v_i} < 0$  la onda va a la izquierda

En la práctica pondremos (cuando de generan las condiciones iniciales y cuando se calcula la solución analítica):

$$A_{p'_i} = \gamma p_0 A$$

$$A_{\rho'_i} = \rho_0 A$$

$$A_{v_i} = c_s A$$

con A (la amplitud de la perturbación) muy pequeña

**Medio inhomogéneo independiente de tiempo**  $p_0 = p_0(x), \rho_0 = \rho_0(x) \implies c_s = c_s(x)$  monótonas, variando lentamente..

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'$$

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$$

La solución no se puede expresar mas como superposición de ondas planas (porque  $c_s$  no es más constante), pero análogo a esta solución del caso homogéneo de la onda plana:  $p(x, t) = a \cos(\phi(x, t))$  donde  $\phi(x, t) = kx - \omega t$  con la amplitud a const y  $\omega, k$  constantes verificando la relación de dispersión  $\omega^2 = c_s^2 k^2$  intentamos buscar soluciones de forma  $a(x, t)e^{i\phi(x, t)}$  (aproximación WKB): donde definimos

$$\omega(x, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$k(x, t) = -\nabla \phi$$

**Resolver la ecuación genérica**

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

Reemplazando la solución WKB approx.  $p(x, t) = a(x, t)e^{i\phi(x, t)}$  en la ecuación y con las definiciones de  $\omega$  y  $k$  de arriba después de hacer los cálculos y asumiendo que las variaciones en la amplitud son muy pequeñas de forma que podemos omitir términos de segundo orden en las derivadas espaciales y temporales de  $a$  llegamos a:

- $\omega^2(x, t) = c_s^2(x) k^2(x, t)$  (la relación de dispersión es válida de forma local)
- y la ecuación de la evolución de la amplitud:  $\frac{\partial a}{\partial t} + c_g \cdot \nabla a = -\frac{1}{2} \frac{a}{|k|c_s} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \nabla \cdot k \right)$

$$\text{con } c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

de la relación de dispersión  $\implies$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g \cdot \nabla \omega = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \cdot \nabla k = -k \cdot \nabla c_g$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_g \cdot \nabla \phi = 0$$

Usamos directamente la ecuación de conservación de energía para determinar la amplitud y no la de arriba (TODO):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g \cdot \nabla E = -E \nabla \cdot c_g$$

**1D** ( $c_g = c_s$ ):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_s \frac{\partial k}{\partial x} = -k \frac{\partial c_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_s \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_s \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{a}{|k| c_s} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial k}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_s \frac{\partial E}{\partial x} = -E \frac{\partial c_s}{\partial x}$$

Al largo de un rayo (similar a una trayectoria)  $x_p(t)$  solución de :

$$\frac{dx}{dt} = c_s$$

$$x(0) = x_p$$

las dependencias de x se transforman en dependencias de t reemplazando x por  $x_p(t)$  y reemplazando en las ecuaciones de arriba obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$\frac{dk}{dt} = -k \frac{\partial c_s}{\partial x}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{a}{|k| c_s} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial c_s}{\partial x} \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = -E \frac{\partial c_s}{\partial x}$$

al largo del rayo Las ecuaciones ahora no tienen mas derivadas parciales (solo dependen de t) y se pueden integrar más fácil.

De la primera se obtiene:

$$\omega(x_p(t), t) = constant$$

Haciendo unos cálculos:

$$\frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c_s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial c_s}{\partial x} c_s \implies \frac{dk}{dt} = -k \frac{1}{c_s} \frac{dc_s}{dt} \implies$$

$$\frac{d \ln(k)}{dt} = -\frac{d \ln(c_s)}{dt} \implies$$

$$k(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$$

de forma similar  $E(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$

### Relación entre las amplitudes

Suponiendo que estas soluciones existen:

$$p' = P e^{i\phi}$$

$$\rho' = R e^{i\phi}$$

$$v = Ve^{i\phi}$$

P,R,V complejos

igual que en caso homogéneo :

$$\text{de la relación de adiabaticidad: } |P(x,t)| = c_s^2(x)|R(x,t)|$$

de la ecuación de movimiento:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \rho' \implies -i\rho_0 \omega V e^{i\phi} = ikP e^{i\phi}$$

después de simplificar, multiplicar cada lado con su conjugado(hay que expresar las amplitudes locales con el módulo porque pueden ser complejas):

$$|V|^2 = \frac{|P|^2}{\rho_0^2 c_s^2} \implies$$

$$|V| = \frac{1}{c_s \rho_0} |P| = \frac{c_s}{p_0 \gamma} |P|$$

$$\text{De las relaciones entre las amplitudes } \implies \frac{\rho_0 |V|^2}{2} = \frac{|P|^2}{2\rho_0 c_s^2}$$

$$E = \frac{|P|^2}{\rho_0 c_s^2} \text{ (la suma de las 2)}$$

$$\implies |P(x_p(t), t)|^2 \rho_0^{-1}(x_p(t)) c_s^{-1}(x_p(t)) = \text{constant}$$

Suponemos que podemos escribir para los puntos al largo del rayo  $x_p(t)$  :

$$|P| = c_s^k \rho_0^l p_0^m C_{pP}$$

$$|R| = c_s^k \rho_0^{l_1} p_0^{m_1} C_{pR}$$

$$|V| = c_s^k \rho_0^{l_2} p_0^{m_2} C_{pV}$$

con  $C_{pP}, C_{pR}$  y  $C_{pV}$  constantes (que dependen del punto  $x_p$ )

$$\text{de la ecuación de conservación de energía al largo del rayo } x_p(t): |P(x_p(t), t)| = \text{const} * c_s^{\frac{1}{2}}(x_p(t)) \rho_0^{\frac{1}{2}}(x_p(t)) \implies$$

$$\text{existen las relaciones: } k = 2l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2m \text{ y } 2m + 2l = 1$$

k se puede dejar como parámetro ya que  $\gamma = \text{const} = c_s^2 \rho_0^{-1} p_0^{-1}$  y multiplicando las ecuaciones con  $\gamma^p$  el parámetro  $k \rightarrow k + 2p$

$$\text{elegimos } k = l = \frac{1}{2}, m = 0$$

de las relaciones entre las amplitudes de arriba

$$\frac{|P|}{|R|} = c_s^2 = \rho_0^{l-l_1} p_0^{m-m_1} \frac{C_{pP}}{C_{pR}}$$

Escribimos  $c_s^2 = \gamma p_0 \rho_0^{-1}$  y la relación de arriba se tiene que cumplir  $\forall x$  (porque consideramos  $c_s, \rho_0$  y  $p_0$  dependiendo de x)

$$\implies m - m_1 = 0, l - l_1 = 0 \text{ y } \frac{C_{pP}}{C_{pR}} = \gamma$$

$$\frac{|P|}{|V|} = c_s \rho_0 = \gamma^{-\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} = \rho_0^{l-l_2} p_0^{m-m_2} \frac{C_{pP}}{C_{pV}}$$

$$\implies \frac{C_{pP}}{C_{pV}} = \gamma^{-\frac{1}{2}}, l - l_2 = \frac{1}{2}, m - m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 = -1, l_1 = \frac{3}{2}, l_2 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}$$

En conclusión: al largo del rayo  $x_p(t)$

$$|P| = c_s^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} C_P$$

$$|R| = c_s^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{3}{2}} p_0^{-1} \gamma^{-1} C_P$$

$$|V| = c_s^{\frac{1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} C_P$$

con  $C_P$  constante que depende de  $x_p$  ( $C_P = |P(x_p, 0)| c_s^{-\frac{1}{2}} \rho_0^{-\frac{1}{2}}$  donde  $|P(x_p, 0)|$  es el valor de la amplitud de la perturbación de la presión en el momento  $t = 0$  y el punto  $x_p$ )

## 2 Práctica

Definimos una amplitud  $A$  (en `soundwave_perturbation_params.py`) muy pequeña y una función periodica  $h$  en el intervalo  $[x_0, x_f]$  (estos están en `constants.py`) con amplitud máxima 1 y creamos las perturbaciones para que cumplan las relaciones entre las amplitudes de arriba:

$$p'(x, 0) = \gamma p_0 h(x)$$

$$\rho'(x, 0) = \rho_0 h(x)$$

$$v(x, t) = c_s h(x)$$

$h$  periodica  $\Rightarrow h$  se puede escribir como una superposición de ondas sinusoidales (componentes Fourier) que viajan a la derecha

Se pueden también definir superposiciones de funciones periodicas que pueden viajar en los 2 sentidos para generar las perturbaciones (condiciones iniciales) (definiendo  $A$ ,  $csSign$  como se explicó arriba y el tipo de función para cada una : en `soundwave_perturbation_params.py`)

**Wave packet** Elegimos `functionType = "wave_packet"` in `soundwave_perturbation_params.py` (gauss wave packet: los parámetros  $z_0, z_c, W$  definidos en `sound_wave_packet_params.py`)

$$h(x) = e^{-\frac{(x-x_c)^2}{W^2}} \cos(2\pi k_0 \frac{x-x_0}{x_f-x_0})$$

### 2.1 Medio homogéneo

#### Evolución en el tiempo de las variables

$$A = 3e - 4$$

Como las 3 variables:  $p', \rho', v$  cumplen las mismas ecuaciones diferenciales consideramos  $h_2(x, t)$  solución de la ecuación genérica:  $\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$  con  $c_s$  constante y condición inicial  $h_2(x, 0) = h(x)$  y luego la solución de las 3 variables es multiplicar esta con las amplitudes correspondientes

La solución analítica (y que está implementada) es  $h_2(x, t) = h(x - c_s t)$

el gráfico de la función inicial (en este caso el paquete de ondas gaussian) no cambia de forma solo se traslada a la derecha con la velocidad  $c_s$

si la resolución no es buena la amplitud calculada de forma numérica puede crecer. En este caso he tomado  $nint = 2048$  (definido en `constants.py`) y parece que la solución analítica dibujada por encima de la numérica no se desvía mucho de ella.

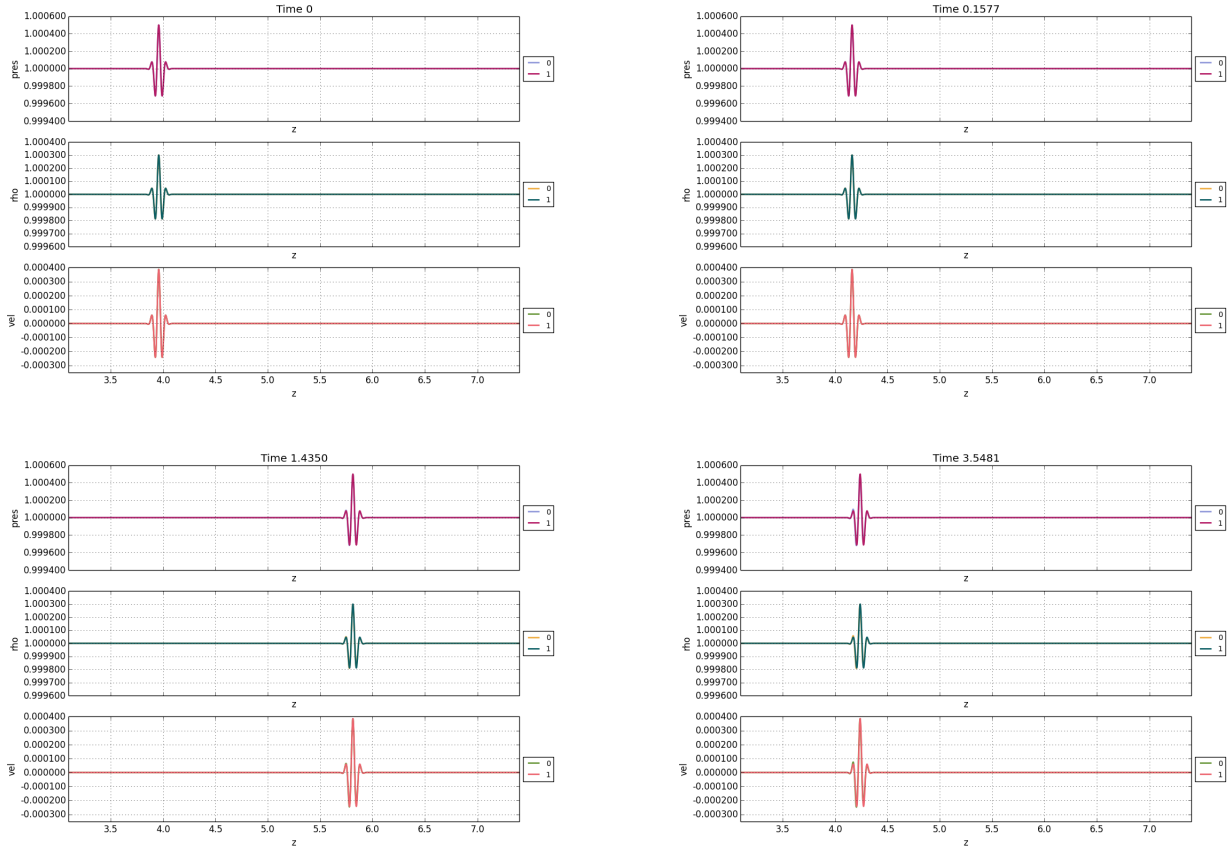


Figure 1: *El paquete de ondas en medio homogéneo en varios instantes del tiempo: boundary conditions: repeat*

#### Fourier Equivalencias de las definiciones:

La transformada Fourier de la función  $h$  se define (omitiendo dominios):  $F_h(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}dx$

para  $h(x)$  definida arriba

calculo con mathematica (de forma analítica) la siguiente integral  $f_1(k) = F_h(\frac{2\pi k}{x_f - x_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-\frac{2\pi i k x}{x_f - x_0}}dx$

calculo con mathematica (de forma analítica) la transformada fourier de  $h$  con FourierTransform usando FourierParameters  $0, -2\pi$  y obtengo  $f_2(k)$

Compruebo de forma numerica y analítica que  $f_1(k) = f_2(\frac{k}{x_f - x_0})$

De la teoria sé que si defino los coeficientes:  $c(k) = \frac{1}{x_f - x_0} f_1(k)$

puedo escribir  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{x - x_0}{x_f - x_0}}$

quiero representar de forma analítica y numérica  $c(k) * (x_f - x_0)$

de forma analítica: calculo en mathematica  $f_1(k)$  o obtengo  $f_2(k)$  y represento  $f_2(\frac{k}{x_f - x_0})$

observo que en python los coeficientes calculados (de forma numérica) con scipy.fft son  $cp(k) = f_1(\frac{k}{x_f - x_0})$  asi que

de forma numérica: calculo en python con scipy.fft  $cp(k)$  y represento  $cp(k * (x_f - x_0)) * (x_f - x_0)$

#### Resultado:

después de hacer unos cálculos llego a

$$f_1(k) = \frac{W\sqrt{\pi}}{2}(g_1(k) + g_2(k)) \text{ con}$$

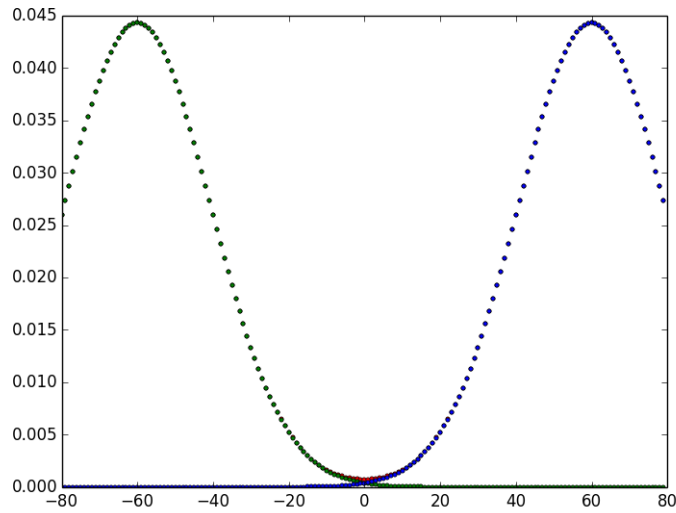
$$g_1(k) = e^{-\frac{\pi[\pi W^2(k+k_0)^2 + 2ix_c(x_f - x_0)(k+k_0) - 2k_0ix_0(x_f - x_0)]}{(x_f - x_0)^2}}$$

$$g_2(k) = e^{-\frac{\pi[\pi W^2(k-k_0)^2 + 2ix_c(x_f - x_0)(k-k_0) + 2k_0ix_0(x_f - x_0)]}{(x_f - x_0)^2}}$$

Considerando  $x_c = 0$  las exponenciales  $g_1$  y  $g_2$  son gaussianas con  $w = \frac{x_f - x_0}{\pi W}$  la primera centrada en  $-k_0$  y la segunda en  $k_0$

si calculamos el módulo de cada una el modulo las constantes  $abs(exp(-2k_0ix_0(x_f - x_0))) = abs(exp(2k_0ix_0(x_f - x_0))) = 1$  (corresponden al desplazamiento de fase por la elección de  $x_c$ (el centro de la función gauss) y  $x_0$ (el centro de la función cos ))

la amplitud máxima de cada una es  $\frac{W\sqrt{\pi}}{2}$  igual que se ve en el gráfico por estar bien separadas (con valores :  $z_0=3.100$ ,  $z_f = 7.400$ ,  $k_0 = 60$ ,  $z_c = 3.745$ ,  $\bar{W} = 0.050$ ) : con rojo había hecho el plot de la función entera y con verde y azul de las 2 partes



**Evolución de  $f_1(k)$  en el tiempo  $c_k * (x_f - x_0)$**

$$\text{Si escribimos } h_2(x, 0) = h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{x - x_0}{x_f - x_0}}$$

$$h_2(x, t) = h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{x - c_s t - x_0}{x_f - x_0}}$$

$c_s$  constante  $\implies$  los coeficientes quedan los mismos

Igual que se ve en el gráfico  $f_1(k)$  casi no varía en el tiempo (se representó también la solución analítica para hacer la comparación). La pequeña variación se debe a la resolución (la solución numérica decrece un poco)



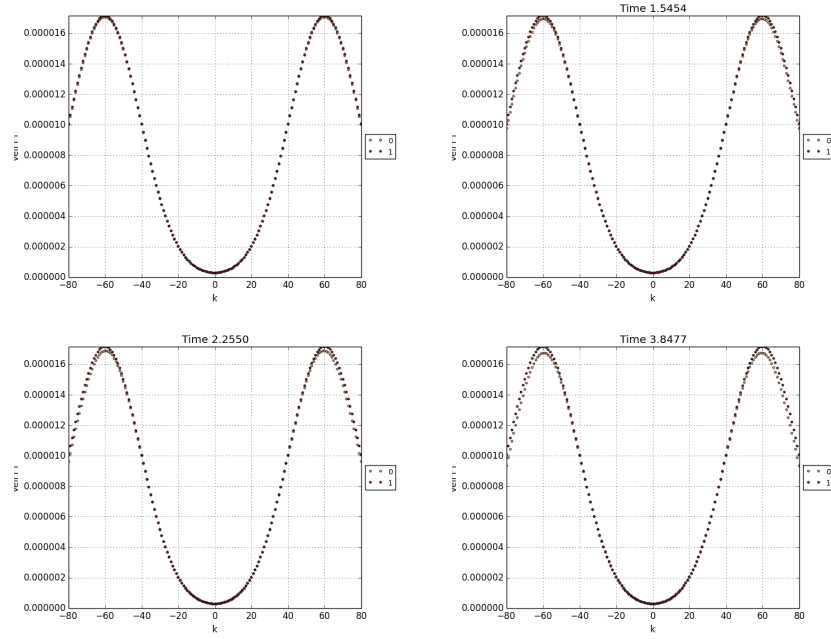


Figure 2: *evolución de  $f1(k)$*

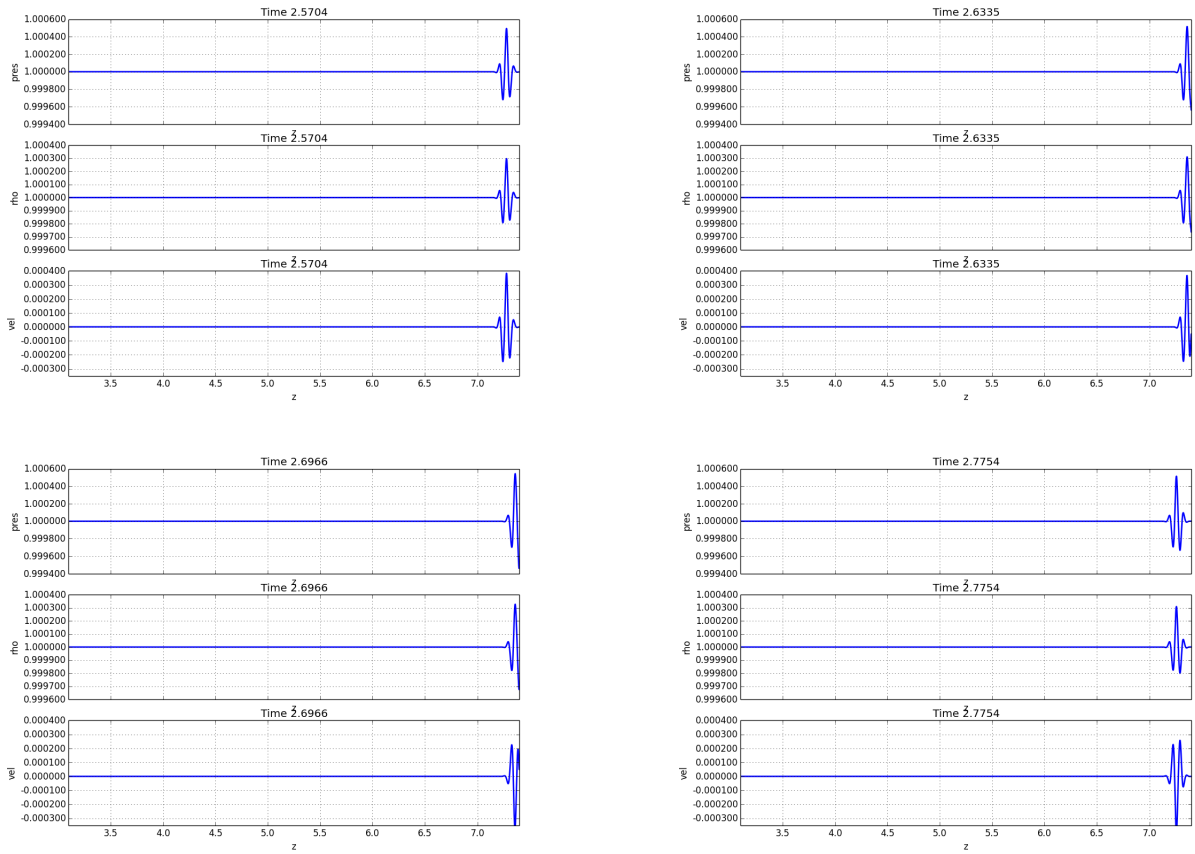


Figure 3: *Evolución en el tiempo de las variables boundary conditions: refl*

### Condiciones de contorno: reflexión

cambiando el parametro `periodicType` in `soundwave.boundary_conditions.py` podemos elegir las condiciones de contorno ("refl" o "repeat")

TODO: la solución analítica con periodicType="refl" no está todavía implementada

## 2.2 Medio inhomogéneo

$p_0$  const y  $\rho_0(x)$  definida :

$$\rho_{00} + \frac{\rho_{01} - \rho_{00}}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{z - z_e}{w_e}\right) \right]$$

(las configuraciones del medio estan en soundwave\_medium\_params.py mediumType = "homog" o "inhomog" ,  $\rho_{00}$  y los demás parámetros del caso inhomogéneo:  $z_e, w_e, \rho_{01}$  )

$\rho_0$  decrece ( $\rho_{00} > \rho_{01}$ )

Evolución de la presión, densidad, velocidad,  $\rho_{\text{Curve}} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$

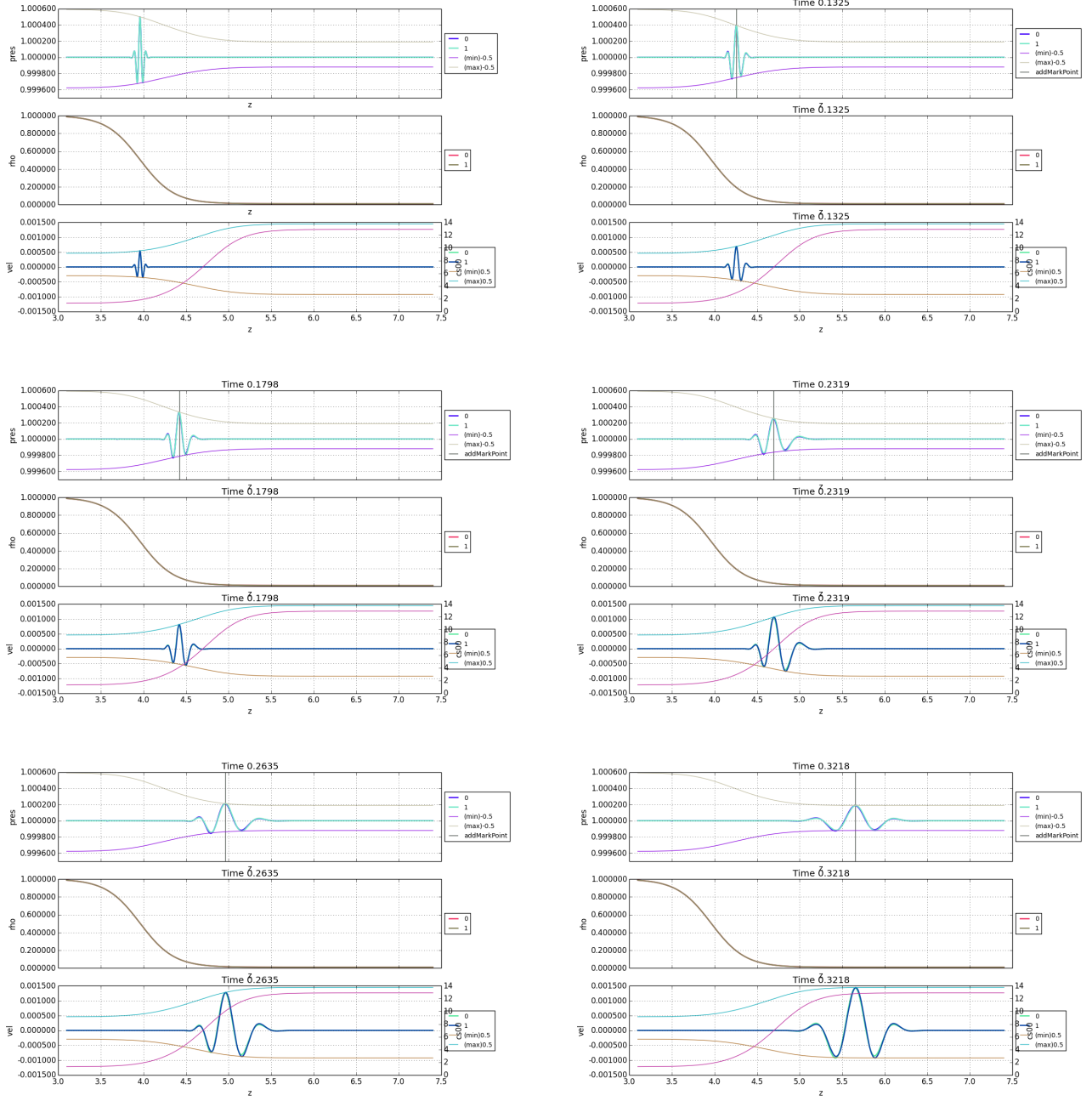


Figure 4: *presion, densidad, velocidad*

Las amplitudes de las perturbaciones de presión , densidad y velocidad no son mas constantes al largo de los rayos como en el caso homogeneo igual que se ve en el gráfico de arriba, la amplitud de la presion y rhoCurve decrece y la de la velocidad crece (las time derivative no son mas 0 como en el caso homogeneo)

En el caso homogeneo la solución para  $\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$  con  $c_s$  constante y condición inicial  $h_2(x, 0) = h(x)$  en terminos de rayos se puede escribir:

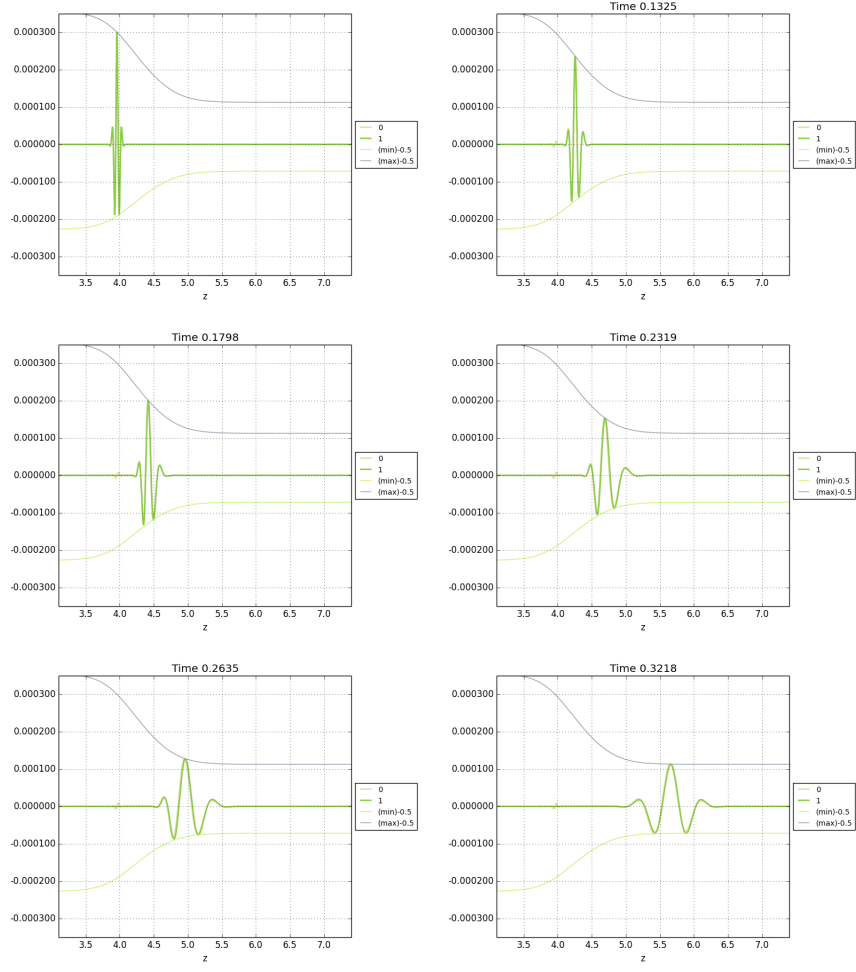


Figure 5: *rhoCurve*

al largo del rayo  $x_p(t)$  (solución de  $\frac{dx}{dt} = cs, x_p(0) = x_p$ )  $\frac{dh_2}{dt} = 0$  (time derivative) equivalente a  $h_2(x_p(t), t) = const = h(x_p)$

## Ray tracing

Marcamos en los gráficos un punto  $x_p = x_c$  (el centro del paquete) y miramos la evolución en el tiempo desplazándolo en cada paso de tiempo con  $c_s dt$ . el punto se queda en el centro del paquete. Eso esperábamos porque los rayos son soluciones  $x_p(t)$  de  $\frac{dx}{dt} = c_g$ ,  $x_p(0) = x_p$  y las amplitudes de las perturbaciones de presión, densidad y velocidad varían lentamente al largo de ellos

De las relaciones de la evolución teórica de las amplitudes: en el caso cuando  $p_0$  constante  $\Rightarrow$

$$|P(x_p(t), t)| c_s^{\frac{1}{2}}(x_p(t), t) = \text{constant al largo del rayo } x_p(t)$$

$$\text{y las otras 2 se calculan de las relaciones : } \frac{|P|}{|V|} = c_s \rho_0, \frac{|P|}{|V|} = c_s^2$$

en 1D  $c_s = c_g$

la ecuación de la variación de las amplitudes al largo de los rayos es válida para cualquier  $x_p$

Sabemos de la teoría que al largo del rayo  $x_p(t)$   $k(x_p(t), t) * c_s(x_p(t)) = \text{const}$

Comprobamos la solución numérica: calculamos  $k_c$  el  $k$  para el cual el valor de los coeficientes fourier  $c(k)$  calculados con python de forma numérica con `scipy.fft` para el valor de la presión en el momento  $t$

miramos la evolución en el tiempo de  $k_c * c_s(x_p(t))$  que debería ser constante  $= k_0 c_s(x_p)$

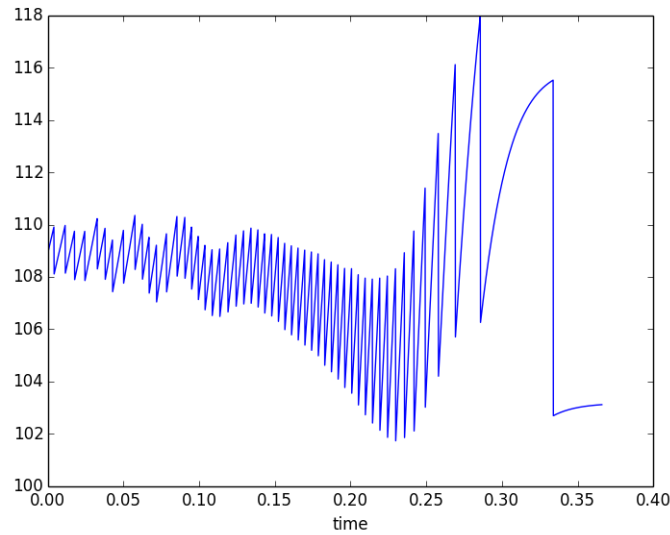


Figure 6:  $k_c * c_s(x_p(t))$

Debería ser constante, pero las

Debería ser constante, pero las

Las amplitudes se calculan al largo del rayo  $x_p(t)$  (la curva solución para  $\frac{dx}{dt} = c_s$ ,  $x(0) = x_p$ ):  $C_P$  es una constante que depende de los valores en el punto inicial del rayo ( $x_p$ ):  $C_P = c_s^{-\frac{1}{2}}(x_p) \rho_0^{\frac{1}{2}}(x_p)$

En la práctica he calculado la solución analítica (los valores de las amplitudes  $|P|, |R|, |V|$ ) al largo del rayo  $x_p(t)$ :

$$|P(x_p(t), t)| = c_s^{-\frac{1}{2}}(x_p(t)) c_s^{\frac{1}{2}}(x_p) P(x_p, 0)$$

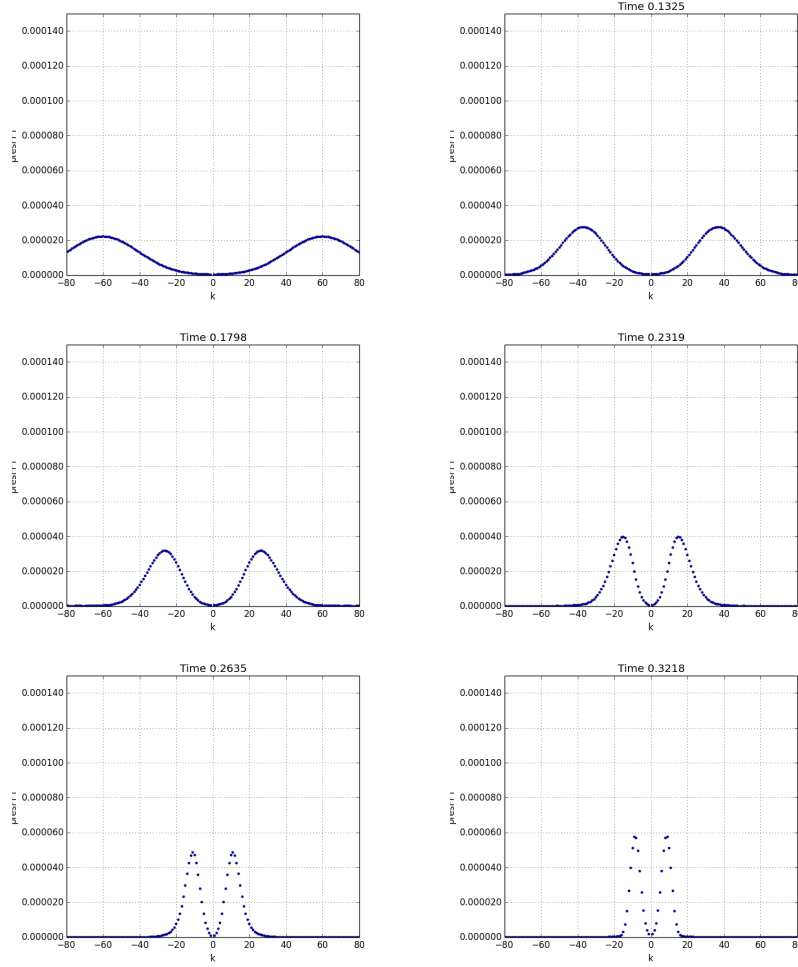


Figure 7:  $f1(k)$  para la presion

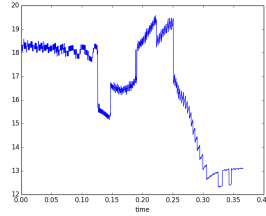


Figure 8:  $ww$

las amplitudes de las demás perturbaciones se calculan reemplazando directamente en las relaciones entre las amplitudes (cuando se representa la solución analítica),

En el caso de la práctica queremos representar las amplitudes como  $const * cs^\alpha$  reemplazamos  $\rho_0$

Para ver si el paquete se adapta a la relación representamos las curvas:

para la presión:  $c_s^{-\frac{1}{2}}(x)c_s^{\frac{1}{2}}(x)P(x_0,0)$

densidad:  $c_s^{-\frac{3}{2}}(x)c_s^{\frac{3}{2}}(x_0)R(x_0,0)$

velocidad:  $c_s^{\frac{1}{2}}(x)c_s^{-\frac{1}{2}}(x_0)V(x_0,0)$

eligiendo  $x_0$  los 2 puntos donde los valores de las amplitudes de las perturbación en el momento inicial tienen el mínimo y máximo

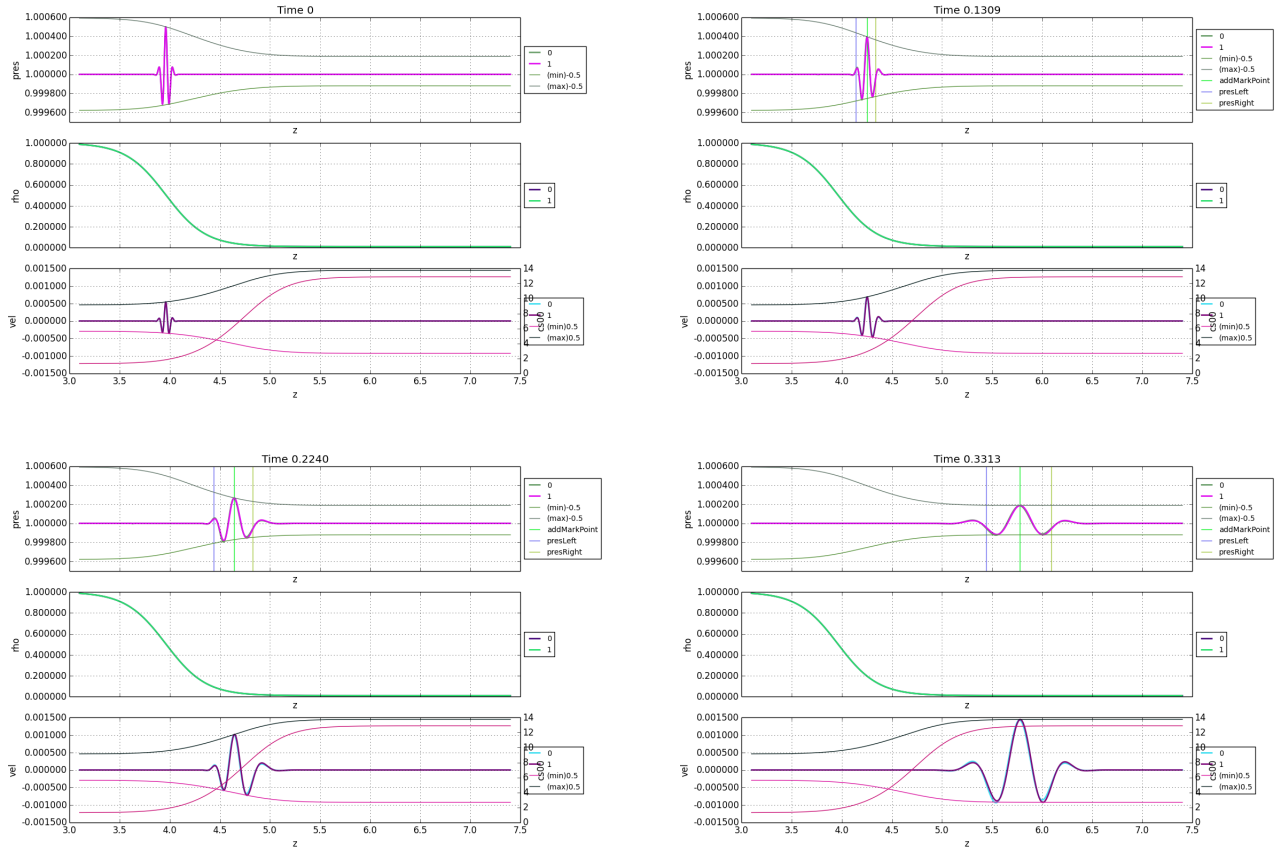


Figure 9: *Perfil radial de las estrellas de referencia para la alineación*

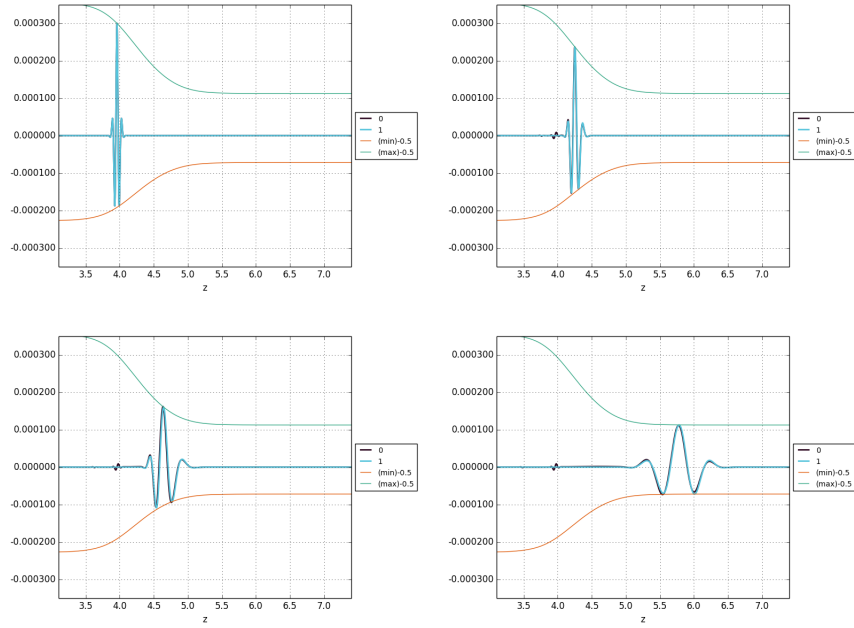


Figure 10: *Perfil radial de las estrellas de referencia para la alineación*