1 Ondas de sonido

Una perturbación de pequeña amplitud en un fluido va a crear zonas de compresión y rarefacción que alternan en el tiempo y espacio en la dirección de propagación(el movimiento oscilatorio de las particulas se propaga como una onda y son ondas logitudinales: las particulas se mueven en la misma dirección que la dirección de propagación)

Condiciones iniciales Consideramos un fluido ideal con las variables en el estado de equilibrio $v_0 = 0, \rho_0, p_0$ y hacemos unos cambios en estas variables que son muy pequeños de forma que se pueden omitir los términos de segundo orden (o mayores) en las ecuaciones de los fluidos Definimos $c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ Las variables de cuales queremos estudiar la evolución devienen:

v

$\rho = \rho_0 + \rho_0\prime$

$p = p_0 + p\prime$

con $|v| << c_s, p\prime << p, \rho\prime << \rho_0$
Las ecuaciones de los fluidos despues de linearlizar devienen:

continuidad: $\frac{\partial \rho\prime}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0$

Euler: $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p\prime = 0$

El proceso es adiabático: $p\prime = c_s^2 \rho\prime$

Después de hacer los cálculos (y suponiendo el caso general inhomogeneo en tiempo y espacio : $\rho_0 = \rho_0(x,t) \implies c_s = c_s(x,t)$ con la densidad de equilibrio variando bastante lentamente en el espacio y tiempo de tal forma que se pueden omitir terminos de segundo orden o mas en multiplicaciones de derivadas temporales o espaciales de estas y las perturbaciones) las perturbaciones de las variables verifican las ecuaciones:

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial p\prime}{\partial t}\right) = \nabla^2 p\prime$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial \rho\prime}{\partial t}\right) = \nabla^2 \rho\prime$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_s^2(x,t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \nabla^2 \Phi$ donde definimos $v = \nabla \Phi$ considerando el fluido irrotacional

Si la densidad de equilibrio no varia en el tiempo($\rho_0 = \rho_0(x)$):

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \rho\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho\prime$

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$

Medio homogeneo

Si la densidad de equilibrio es constante en tiempo($\rho_0, c_s constantes$) y espacio las soluciones generales son superposiciones de ondas planas de forma:

$\sum_i A_{\rho\prime_i} cos(x - c_s t)$

$\sum_i A_{p\prime_i} cos(x - c_s t)$

$\sum_i csSign_i A_{v_i} cos(x - csSign_i c_s t)$ donde $csSign_i = 1$ si la onda viaja a la derecha y -1 si va a la izquierda

con las amplitudes números reales verificando las ecuaciones: $A_{p\prime_i} = c_s^2 A_{\rho\prime_i}$ $A_{v_i} = \frac{1}{c_s \rho_0} A_{p_i}$

Medio inhomogeneo $\rho_0 = \rho_0(x)$ La solución no se puyede expresar mas como superposición de ondas planas (porque c_s no es más constante), pero análogo a esta solución intentamos buscar soluciones de forma $a(x,t)e^{i\phi(x,t)}$ (aproximación WKB): donde definimos

$\omega(x,t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$

$k(x,t) = -\nabla \phi$

porque análogo al caso homogeneo (considerando sin perder la generlaidad solo una onda y no una superposición) donde $\phi(x,t) = kx - \omega t$ con ω, k constantes verificando la relación de dispersión $\omega^2 = c_s^2 k^2$

Relación entre las amplitudes

Suponiendo que estas soluciones existen:

$p\prime = Pe^{i\phi}$

$\rho\prime = Re^{i\phi}$

$v = Ve^{i\phi}$

P,R,V complejos

igual que en caso homogeneo :

de la relación de adiabaticidad: $|P(x,t)| = c_s^2(x)|R(x,t)|$

de la ecuación de movimiento:

$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \rho\prime \implies -i\rho_0 \omega V e^{i\phi} = ikPe^{i\phi}$

despues de simplificar, multiplicar cada lado con su conjugado(hay que expresar las amplitudes locales con el módulo porque pueden ser complejas):

$|V|^2 = \frac{|P|^2}{\rho_0^2 c_s^2}$ $(|V(x,t)| = \frac{1}{c_s \rho_0}|P(x,t)|)$

Resolver la ecuación genérica

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

Reemplazando la solución WKB approx. $p(x,t) = a(x,t)e^{i\phi(x,t)}$ en la ecuación y con las definiciones de ω y k de arriba despues de hacer los cálculos

$\omega^2(x,t) = c_s^2(x)k^2(x,t)$

definiendo $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$:

$\frac{\partial a}{\partial t} + c_g \cdot \nabla a = -\frac{1}{2}\frac{a}{|k|c_s}(\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \cdot \nabla k)$

$\implies$

$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g \cdot \nabla \omega = 0$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \cdot \nabla k = -k \cdot \nabla c_g$

Usamos directamente la ecuación de conservación de energía para determinar la amplitud:

$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g \cdot \nabla E = -E \nabla \cdot c_g$

1D ($c_s = c_g$):

$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} = \nabla^2 p\prime$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_s \frac{\partial k}{\partial x} = -c_s$

$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial k}{\partial t} + c_s \frac{\partial k}{\partial x} = -k \frac{\partial c_s}{\partial x}$

$\frac{\partial E}{\partial t} + c_s \frac{\partial E}{\partial x} = -E \frac{\partial c_s}{\partial x}$

Al largo de un rayo definido por:

$\frac{dx}{dt} = c_s$

$x_p(t), x_p(0) = x_p$

las funciones:

$\omega_p(t) = \omega(x_p(t), t)$

$k_p(t) = k(x_p(t), t)$

$a_p(t) = a(x_p(t), t)$

verifican las ecuaciones

$\frac{d\omega_p}{dt} = 0$

$\frac{dk_p}{dt} = -k_p \frac{\partial c_s}{\partial x}(x_p(t))$

$\frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c_s}{\partial x}(x_p(t)) c_s$

$\frac{dk_p}{dt} = -k_p \frac{1}{c_s} \frac{dc_s}{dt} \implies$

$\frac{dln(k_p)}{dt} = -\frac{dln(c_s)}{dt} \implies$

$k(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$

de forma similar $E(x_p(t), t) c_s(x_p(t)) = constant$

$\omega(x_p(t), t) = constant$

Ecuación de la energía:

$\frac{\rho_0 |V|^2}{2} = \frac{|P|^2}{2\rho_0 c_s^2}$

$E = \frac{|P|^2}{\rho_0 c_s^2}$ (la suma de las 2)

$|P(x_p(t), t)| c_s^{\frac{1}{2}} = constant$

2 Transf fourier

Salida de mathematica de la integral de la transf fourier:

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }
Print[FullSimplify[Integrate[Exp[- (z-zc)^2 / W^2] Cos[2 Pi  k0 (z - z0)/ (zf - z0)] Exp[- 2 Pi I m z
/ (zf - z0)],  {z, -Infinity, Infinity} ]]]
```

$f1(m) = F(\frac{2\pi m}{z_f - z_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_c)^2}{W^2}} cos(\frac{2\pi k_0 (z-z_0)}{z_f - z_0}) e^{-\frac{2\pi i m z}{z_f - z_0}} dz = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 + m\left(m\pi W^2 - 2 i z_c (z_0 - z_f)\right) + 2k_0\left(m\pi W^2 + i(z_0 + z_c)(z_0 + z_f)\right)\right)}{(z_0 - z_f)^2}} \left(e^{\frac{4 i k_0 \pi z_0 (z_c + z_f)}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{\frac{4 k_0 \pi \left(m\pi W^2 + i\left(z_0{}^2 + z_c z_f\right)\right)}{(z_0 - z_f)^2}}\right) \sqrt{\pi} W$

Salida de FourierTransform mathematica con FourierParameters 0, -2π

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }
h[z_, k0_, z0_, zf_, zc_, W_]:= Exp[-(z-zc)^2/W^2] Cos[2 Pi k0 (z - z0) / (zf - z0) ]
Print[FullSimplify[FourierTransform[h[z, k0, z0, zf, zc, W], z, k, FourierParameters->{0,-2 Pi}]] ]
```

$f2(k) = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 - 2k_0\left(k\pi W^2 - i z_0 + i z_c\right)(z_0 - z_f) + k\left(k\pi W^2 + 2 i z_c\right)(z_0 - z_f)^2\right)}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left(k_0{}^2 \pi W^2 + 2k_0\left(k\pi W^2 - i z_0 + i z_c\right)(z_0 - z_f) + k\left(k\pi W^2 + 2 i z_c\right)(z_0 - z_f)^2\right)}{(z_0 - z_f)^2}}\right) \sqrt{\pi} W$

En esta reemplazo k = k / (zf - z0) y los graficos salen iguales ($f1(k) = f2(\frac{k}{z_f - z0})$)

Ademas la salida de:

```
$Assumptions = {Element[{k0,z0,zf,zc,W}, Reals], k0>0, z0>0, zf >0 , zf >0, zc >0, W>0 }

f1[m_]:=((E^(((4*I)*k0*Pi*z0*(zc + zf))/(z0 - zf)^2) + E^((4*k0*Pi*(m*Pi*W^2 + I*(z0^2 + zc*zf)))/(z0
- zf)^2))*Sqrt[Pi]*W)/
  (2*E^((Pi*(k0^2*Pi*W^2 + m*(m*Pi*W^2 - (2*I)*zc*(z0 - zf)) + 2*k0*(m*Pi*W^2 + I*(z0 + zc)*(z0 + zf))))/(
- zf)^2))
f2[k_]:=((E^(-((Pi*(k0^2*Pi*W^2 - 2*k0*(k*Pi*W^2 - I*z0 + I*zc)*(z0 - zf) + k*(k*Pi*W^2 + (2*I)*zc)*(z0
- zf)^2))/(z0 - zf)^2)) +
      E^(-((Pi*(k0^2*Pi*W^2 + 2*k0*(k*Pi*W^2 - I*z0 + I*zc)*(z0 - zf) + k*(k*Pi*W^2 + (2*I)*zc)*(z0 -
zf)^2))/(z0 - zf)^2)))*Sqrt[Pi]*W)/2

Print[FullSimplify[f1[k]-f2[k/(zf-z0)]]]
```

es 0

Elijo f2 forma para simplificar (después de hacer los gráficos de los modulos de los valores de la función , tal como imaginaba la primera exponencial corresponde a la gaussiana de las frecuancias negativas y la segunda de las frequencias positivas):

$f1(k) = f2(\frac{k}{(z_f - z_0)}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi(k_0^2\pi W^2 + 2k_0 k\pi W^2 + 2k_0 i(z_c - z_0)(z_f - z_0) + k^2\pi W^2 + 2ikz_c(z_f - z_0))}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi(k_0^2\pi W^2 - 2k_0 k\pi W^2 - 2k_0 i(z_c - z_0)(z_f - z_0) + k^2\pi W^2 + 2ikz_c(z_f - z_0))}{(z_0 - z_f)^2}}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k+k_0)^2 + 2k_0 iz_c(z_f - z_0) - 2k_0 iz_0(z_f - z_0) + 2ikz_c(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k-k_0)^2 - 2k_0 iz_c(z_f - z_0) + 2k_0 iz_0(z_f - z_0) + 2ikz_c(z_f - z_0)\right]}{z_0 - z_f)^2}}) =$

$\frac{W\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k+k_0)^2 + 2iz_c(z_f - z_0)(k_0 + k) - 2k_0 iz_0(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}} + e^{-\frac{\pi\left[\pi W^2(k-k_0)^2 + 2iz_c(z_f - z_0)(k - k_0) + 2k_0 iz_0(z_f - z_0)\right]}{(z_0 - z_f)^2}}) =$

Considerando $z_c = 0$ las exponenciales son gaussianas con w = $\frac{z_f - z_0}{\pi W}$ la primera centrada en $-k_0$ y la segunda en k_0 y cuando calculamos el modulo las constantes $abs(exp(-2k_0 iz_0(z_f - z_0))) = abs(exp(2k_0 iz_0(z_f - z_0))) = 1$ y la amplitud queda $\frac{W\sqrt{\pi}}{2}$ igual que se ve en el gráfico (con valores : z0=3.100, zf = 7.400, k0 = 60, zc = 3.745, W = 0.050) : con rojo había hecho el plot de la función entera y con verde y azul de las 2 partes al principio para estar segura que correspondían a las 2 partes