

# 1 Ampliación 2D

## 1.1 Cambios en el código

### Esquemas numéricas implementadas

parámetro schemeType en constants.py

las mismas esquemas de 1D extendidas a 2D

#### LF

un solo paso de tiempo: FTCS usando en lugar de  $u_{i,j}$  la media espacial

#### Lax Wendroff

2 pasos de tiempo: el primero LF y el segundo Leapfrog

como los elementos de la matriz  $fc$  de dimension  $2 \times 2$  (para cada punto de la red)  $f_{0,1} = f_{1,0}$  guardo para cada punto un array de 3 elementos  $(p + \rho v_x^2, \rho v_x v_y, p + \rho v_y^2)$

2 implementaciones

Lax Wendroff 1

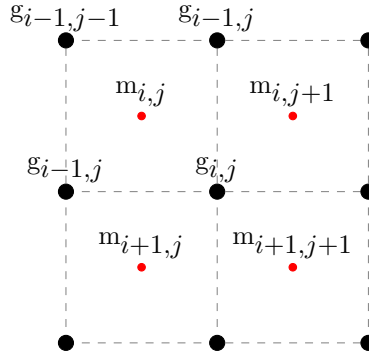


Figure 1: lw

en esta implementación se calcula un solo array de puntos intermedios

en el primer paso se calcula  $u$  en los puntos intermedios  $m_{i,j}$

para las variables  $ue$ ,  $um$  (escalares):

$$um_{i,j} = \frac{1}{4}(ug_{i-1,j-1} + ug_{i-1,j} + ug_{i,j-1} + ug_{i,j}) - \frac{1}{4} \left[ \frac{dt}{dz_0} (fg_{i,j,0} - fg_{i-1,j,0} + fg_{i,j-1,0} - fg_{i-1,j-1,0}) + \frac{dt}{dz_1} (fg_{i,j,1} - fg_{i,j-1,1} + fg_{i-1,j,1} - fg_{i-1,j-1,1}) \right]$$

para la variables  $uc$  (vector) ():

$$um_{i,j,0} = \frac{1}{4}(ug_{i-1,j-1,0} + ug_{i-1,j,0} + ug_{i,j-1,0} + ug_{i,j,0}) - \frac{1}{4} \left[ \frac{dt}{dz_0} (fg_{i,j,0} - fg_{i-1,j,0} + fg_{i,j-1,0} - fg_{i-1,j-1,0}) + \frac{dt}{dz_1} (fg_{i,j,1} - fg_{i,j-1,1} + fg_{i-1,j,1} - fg_{i-1,j-1,1}) \right]$$

$$um_{i,j,1} = \frac{1}{4}(ug_{i-1,j-1,1} + ug_{i-1,j,1} + ug_{i,j-1,1} + ug_{i,j,1}) - \frac{1}{4} \left[ \frac{dt}{dz_0} (fg_{i,j,1} - fg_{i-1,j,1} + fg_{i,j-1,1} - fg_{i-1,j-1,1}) + \frac{dt}{dz_1} (fg_{i,j,2} - fg_{i,j-1,2} + fg_{i-1,j,2} - fg_{i-1,j-1,2}) \right]$$

leapfrog en el segundo paso: se calcula  $u$  en los puntos  $g_{i,j}$

para las variables  $ue$ ,  $um$  :

$$ug_{i,j} = ug_{i,j} - \frac{1}{2} dt \left[ \frac{1}{dz_0} (fm_{i+1,j,0} - fm_{i,j,0} + fm_{i+1,j+1,0} - fm_{i,j+1,0}) + \frac{1}{dz_1} (fm_{i,j+1,1} - fm_{i,j,1} + fm_{i+1,j+1,1} - fm_{i+1,j,1}) \right]$$

para la variable uc:

$$u_{g_{i,j},0} = u_{g_{i,j},0} - \frac{1}{2} dt \left[ \frac{1}{dz_0} (f_{m_{i+1},j,0} - f_{m_{i,j},0} + f_{m_{i+1},j+1,0} - f_{m_{i,j+1},0}) + \frac{1}{dz_1} (f_{m_{i,j+1},1} - f_{m_{i,j},1} + f_{m_{i+1},j+1,1} - f_{m_{i+1},j,1}) \right]$$

$$u_{g_{i,j},1} = u_{g_{i,j},1} - \frac{1}{2} dt \left[ \frac{1}{dz_0} (f_{m_{i+1},j,1} - f_{m_{i,j},1} + f_{m_{i+1},j+1,1} - f_{m_{i,j+1},1}) + \frac{1}{dz_1} (f_{m_{i,j+1},2} - f_{m_{i,j},2} + f_{m_{i+1},j+1,2} - f_{m_{i+1},j,2}) \right]$$

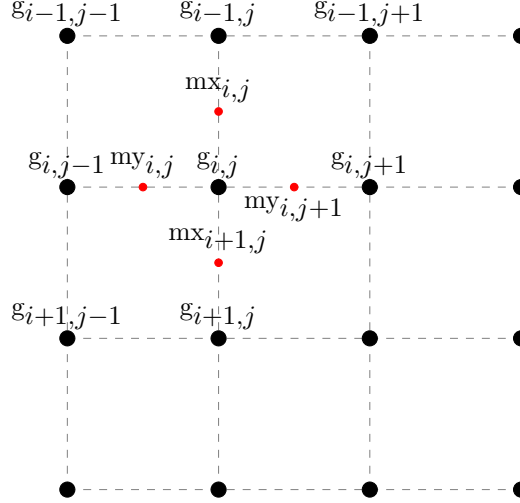


Figure 2: lw2

para las variables  $u_e$ ,  $u_m$  (escalares):

en el primer paso se calcula  $u$  en 2 arrays de puntos intermedios  $mx_{i,j}$  y  $my_{i,j}$

$$umx_{i,j} = \frac{1}{2}(ug_{i-1,j} + ug_{i,j}) - \left[ \frac{1}{8} \frac{dt}{dz_1} (fg_{i,j+1,1} - fg_{i,j-1,1} + fg_{i-1,j+1,1} - fg_{i-1,j-1,1}) + \frac{1}{2} \frac{dt}{dz_0} (fg_{i,j,0} - fg_{i-1,j,0}) \right]$$

$$umy_{i,j} = \frac{1}{2}(ug_{i,j-1} + ug_{i,j}) - \left[ \frac{1}{8} \frac{dt}{dz_0} (fg_{i+1,j,0} - fg_{i-1,j,0} + fg_{i+1,j-1,0} - fg_{i-1,j-1,0}) + \frac{1}{2} \frac{dt}{dz_1} (fg_{i,j,1} - fg_{i,j-1,1}) \right]$$

en el segundo paso:

$$ug_{i,j} = ug_{i,j} - \left[ \frac{dt}{dz_0} (fmx_{i+1,j,0} - fmx_{i,j,0}) + \frac{dt}{dz_1} (fmy_{i,j+1,1} - fmy_{i,j,1}) \right]$$

de forma similar se calcula para  $u_c$

### Condiciones iniciales

la función de la perturbación(h) es ahora función de 2 variables( $\argFunc$  en `perturbation_params.py`) y la velocidad tiene 2 componentes

$\argFunc$  puede ser una función lineal de  $x_0$  y  $x_1$  (en `perturbation_params` `waveType = "lineal"`) o radial (en este caso la perturbación de la velocidad se genera a partir del gradiente de la función de perturbación y la densidad y presión de tal forma que cumplan las relaciones de las amplitudes)

**Condiciones de contorno** las mismas `repeat`, `refl` como en el caso 1D, añadí `diff` (que quería usar para la `hankel`) que se implementó usando la misma función para densidad, presión y velocidad que en caso `refl` para densidad y presión (en el caso `refl` la función para las condiciones de contorno para la velocidad era distinta)

### Visualización

los valores de las variables que quiero representar ( $p$ ,  $\rho$ ,  $v$ ) son ahora arrays 2D y la velocidad tiene 2 componentes. Los dibujo como imagen y también puedo representar proyecciones de los valores en las 2 direcciones o en una dirección cualquiera

en el caso "wavepacket" dibujo la trayectoria calculada de forma analítica por encima de la imagen actual o también la puedo mostrar aparte (util por si está mal calculada! y luego no tengo que rehacer todo el cálculo numérico)

## 1.2 Tests

`waveType = "lineal"`: el cartón en la dirección horizontal(`argType="y"`), vertical(`argType="x"`), diagonal(`argType="d1"`) con `functionType="sine"`, "gauss", "wavepacket.carton" y "wavepacket"

Intenté `waveType="radial"` con `functionType="hankel"` pero no salió muy bien

### 1.3 Breve resumen de la teoria de ray tracing

Después de hacer unos cálculos de las ecuaciones de los fluidos (y suponiendo el caso general inhomogeneo en tiempo y espacio :  $\rho_0 = \rho_0(x, t), p_0 = p_0(x, t) \implies c_s = c_s(x, t)$  con  $p_0, \rho_0, c_s$  monótonas, variando bastante lentamente en el espacio y tiempo de tal forma que se pueden omitir terminos de segundo orden o mas en multiplicaciones de derivadas temporales o espaciales de estas y las perturbaciones) las perturbaciones de las variables verifican las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) = \nabla^2 p'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c_s^2(x, t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \nabla^2 \Phi \text{ donde definimos } v = \nabla \Phi \text{ considerando el fluido irrotacional}$$

#### Medio homogéneo

Si la densidad y presión de equilibrio son constantes en tiempo y espacio ( $\rho_0, p_0 \text{ constantes} \implies c_s \text{ const}$ ) :

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$$

En 2d la solución general es similar caso 1d de forma  $F(k \cdot x + \omega t) + G(k \cdot x - \omega t)$  con F, G funciones arbitrarias y k y  $\omega$  cumpliendo la relación de dispersión:  $\omega = c_s |k|$  ( por la T. Fourier F y G se pueden escribir como superposiciones de ondas harmónicas)

**Medio inhomogéneo independiente de tiempo**  $p_0 = p_0(x), \rho_0 = \rho_0(x) \implies c_s = c_s(x)$  monótonas, variando lentamente..

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'$$

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho'$$

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi$$

Análogo a la solución del caso homogeneo de la onda plana:  $p(x, t) = a \cos(\phi(x, t))$  donde  $\phi(x, t) = k \cdot x - \omega t$  con la amplitud a const y  $\omega, k$  constantes verificando la relación de dispersión  $\omega^2 = c_s^2 k^2$  intentamos buscar soluciones de forma  $a(x, t) e^{i\phi(x, t)}$  (aproximación WKB): donde definimos

$$\omega(x, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$k(x, t) = -\nabla \phi$$

#### Resolver la ecuación genérica

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

Reemplazando la solución WKB approx.  $p(x, t) = a(x, t) e^{i\phi(x, t)}$  en la ecuación y con las definiciones de  $\omega$  y k de arriba despues de hacer los cálculos y asumiendo que las variaciones en la amplitud son muy pequeñas de forma que podemos omitir términos de segundo orden en las derivadas espaciales y temporales de a llegamos a:

- $\omega^2(x, t) = c_s^2(x) k^2(x, t)$  (la relación de dispersión es válida de forma local)
- y la ecuación de la evolución de la amplitud:  $\frac{\partial a}{\partial t} + c_g \cdot \nabla a = -\frac{1}{2} \frac{a}{|k| c_s} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \nabla \cdot k \right)$

con  $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_s \frac{k}{|k|}$  (k es un vector)

de la relación de dispersión  $\implies$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g \cdot \nabla \omega = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \cdot \nabla k = -k \cdot \nabla c_g$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_g \cdot \nabla \phi = 0$$

Usamos directamente la ecuación de conservación de energía para determinar la amplitud y no la de arriba (TODO):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g \cdot \nabla E = -E \nabla \cdot c_g$$

Al largo de un rayo  $x_p(t)$  solución de :

$$\frac{dx}{dt} = c_g$$

$$x(0) = x_p$$

las dependencias de x se transforman en dependencias de t reemplazando x por  $x_p(t)$   
y reemplazando en las ecuaciones de arriba obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$\frac{dk}{dt} = -k \cdot \nabla c_g$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{a}{|k| c_s} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_s^2 \nabla \cdot k \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = -E \nabla \cdot c_g$$

## 2 D

Las características:  $\frac{dx_i}{dt} = c_s \frac{k_i}{\sqrt{k_0^2 + k_1^2}}, i \in 0, 1$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{\partial c_s}{\partial x_i} |k|, i \in 0, 1$$

Consideramos el caso inhomogeneo solo en una dirección: (considerando la dirección  $e_0$ , y es lo mismo para una dirección arbitraria cambiando el sistema de coordenadas,  $c_s(x) = c_s(x_0)$ )

$$\frac{dk_1}{dt} = 0$$

$$\frac{dk_0}{dt} = -\frac{\partial c_s}{\partial x_0} |k|$$

al largo del rayo  $x_p(t)$ :

$$\omega(x_p(t), t) = \text{constant}$$

$$\phi(x_p(t), t) = \text{constant}$$

$$k_1(x_p(t), t) = \text{constant}$$

**Relación entre las amplitudes** de las variables  $p, \rho, v$

Suponiendo que estas soluciones existen:

$$p' = P e^{i\phi}$$

$$\rho' = R e^{i\phi}$$

$$v = V e^{i\phi}$$

P,R,V complejos

de la relación de adiabaticidad:  $|P(x,t)| = c_s^2(x)|R(x,t)|$

de la ecuación de movimiento:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \rho' \implies -i\rho_0 \omega V e^{i\phi} = ik P e^{i\phi}$$

después de simplificar, multiplicar cada lado con su conjugado(hay que expresar las amplitudes locales con el módulo porque pueden ser complejas):

$$|V|^2 = \frac{|P|^2}{\rho_0^2 c_s^2} \implies$$

$$|V| = \frac{1}{c_s \rho_0} |P| = \frac{c_s}{p_0 \gamma} |P|$$

es independiente de si el medio es homogéneo o no

es independiente del número de dimensiones

## Practica

### Condiciones iniciales

Definimos una amplitud A(en soundwave\_perturbation\_params.py) muy pequeña y una función periodica h en el intervalo  $[x_{00}, x_{f0}]x[x_{01}, x_{f1}]$  (estos están en constants.py) con amplitud máxima 1 y creamos las perturbaciones para que cumplan las relaciones entre las amplitudes de arriba y considerando una onda que empieza a propagarse en la dirección definida por la recta  $n_x x - n_y y = 0$

$$\text{definimos } k_0 = \frac{n_x}{x_{f0} - x_{00}}, k_1 = \frac{n_y}{x_{f1} - x_{01}}$$

$$p'(x, 0) = A \gamma p_0 h(x)$$

$$\rho'(x, 0) = A \rho_0 h(x)$$

$$v(x, 0) = A c_s h(x) \left( \frac{k_0}{|k|}, \frac{k_1}{|k|} \right) \text{ donde } |k| = \sqrt{k_0^2 + k_1^2}$$

para el paquete de ondas (para el caso de propagación diagonal):

$$h(x) = e^{-\frac{(x_0 - x_{c0})^2 + (x_1 - x_{c1})^2}{W^2}} \cos[2\pi K_0(k_0(x_0 - x_{00}) + k_1(x_1 - x_{01}))]$$

### Fourier

reemplazo los parámetros  $k_0$  y  $k_1$  (multiplicándolos por  $2\pi K_0$ ) para escribir  $h(x) = e^{-\frac{(x_0 - x_{c0})^2 + (x_1 - x_{c1})^2}{W^2}} \cos[k_0(x_0 - x_{00}) + k_1(x_1 - x_{01}))]$

$$\text{para el caso 1d } h_1(x) = e^{-\frac{(x - x_c)^2}{W^2}} \cos(k_0(x - x_0))$$

había obtenido con mathematica (de forma analítica) la transformada fourier de h con FourierTransform sin especificar FourierParameters que por defecto son 0,1 y obtengo  $f_3(k)$ . De la documentación de mathematica y también se puede comprobar de forma analítica y numérica  $f_3(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{ikx} dx$

después de hacer unos cálculos:

$$f_3(k) = \frac{W}{2\sqrt{2}} e^{-ikx_c} (u_1(k) + u_2(k))$$

$$u_1(k) = e^{-\frac{W^2}{4}(k+k_0)^2} e^{-ik_0(x_0-x_c)}$$

$$u_2(k) = e^{-\frac{W^2}{4}(k-k_0)^2} e^{ik_0(x_0-x_c)}$$

Uso esta transf fourier para calcular en el caso 2d:

La transf fourier de  $h(x_0, x_1)$  es

$$\begin{aligned} f_2(m, n) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_0, x_1) e^{imx_0} e^{inx_1} dx_0 dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_0-xc_0)^2}{W^2}} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} \cos[k_0(x_0-x_0_0) + k_1(x_1-x_0_1)] e^{imx_0} e^{inx_1} dx_0 dx_1 \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_0-xc_0)^2}{W^2}} \cos[k_0(x_0-x_0_0) + k_1(x_1-x_0_1)] e^{imx_0} dx_0 \text{ es la transf fourier de } h(x) \text{ donde reemplazo } x_0 \text{ por} \\ &\quad x_0 - \frac{k_1}{k_0}(x_1-x_0_1) \text{ y } x_c \text{ por } xc_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(m, n) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{W}{2\sqrt{2}} e^{-imxc_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{inx_1} e^{-\frac{W^2}{4}(m+k_0)^2} e^{-ik_0(x_0-\frac{k_1}{k_0}(x_1-x_0_1)-xc_0)} dx_1 + \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{inx_1} e^{-\frac{W^2}{4}(m-k_0)^2} e^{ik_0(x_0-\frac{k_1}{k_0}(x_1-x_0_1)-xc_0)} dx_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(m, n) &= \frac{W}{4\sqrt{\pi}} e^{-imxc_0} \left[ e^{-\frac{W^2}{4}(m+k_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{inx_1} e^{-i(k_0x_0-k_1(x_1-x_0_1)-k_0xc_0)} dx_1 + \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{W^2}{4}(m-k_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{inx_1} e^{i(k_0x_0-k_1(x_1-x_0_1)-k_0xc_0)} dx_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(m, n) &= \frac{W}{4\sqrt{\pi}} e^{-imxc_0} \left[ e^{-\frac{W^2}{4}(m+k_0)^2} e^{-i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{i(n+k_1)x_1} dx_1 + \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{W^2}{4}(m-k_0)^2} e^{i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{i(n-k_1)x_1} dx_1 \right] \end{aligned}$$

$$\text{las integrales son transf fourier de func gauss: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-xc_1)^2}{W^2}} e^{inx_1} dx_1 = \sqrt{\pi} e^{-ixc_1n} e^{-\frac{n^2W^2}{4}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(m, n) &= \frac{W}{4} e^{-imxc_0} \left[ e^{-\frac{W^2}{4}(m+k_0)^2} e^{-i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0)} e^{-ixc_1(n+k_1)} e^{-\frac{W^2}{4}(n+k_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{W^2}{4}(m-k_0)^2} e^{i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0)} e^{-ixc_1(n-k_1)} e^{-\frac{W^2}{4}(n-k_1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(m, n) &= \frac{W}{4} e^{-i(mxc_0+nxc_1)} \left[ e^{-\frac{W^2}{4}(m+k_0)^2} e^{-\frac{W^2}{4}(n+k_1)^2} e^{-i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0-k_1xc_1)} + \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{W^2}{4}(m-k_0)^2} e^{-\frac{W^2}{4}(n-k_1)^2} e^{i(k_0x_0+k_1x_0_1-k_0xc_0-k_1xc_1)} \right] \end{aligned}$$

la fórmula muy similar a la 1d (sobre todo si reemplazo con los vectores)

2 gauss una centrada en  $k = [k_0, k_1]$  y la otra en  $-k$  igual que se ve en el gráfico (la transf fourier inicial calculados de forma numérica)

En el caso homogéneo la transf fourier se queda igual, en el otro no

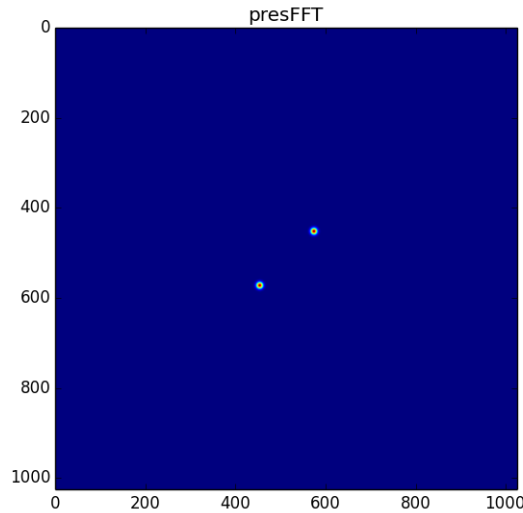


Figure 3: *Fourier inicial (sin modificar los valores de los coef ni las frecuencias según las expl de 1d)*

### Ray tracing

determinar  $k(t)$  y  $x(t)$  de las ecuaciones diferenciales

$$k(t=0) = [K_0, K_1], \quad x(t=0) = z_c$$

calculamos en cada paso de tiempo  $k$  y  $x$  integrando las DE de arriba

podemos comprobar si  $k$  obtenido en cada paso de tiempo es igual a  $k_c$  el valor donde la transf fourier tiene el máximo

### Caso homogéneo

$k$  es constante  $\implies$  las trayectorias son rectas

**Caso inhomogéneo**  $cs(x) = cs(x_0) \implies k_1$  constante

$k_1 = 0$  las trayectorias son rectas, si  $cs$  crece en la dirección de  $k$  inicial,  $k_0$  decrece (el paquete se alarga en la dirección  $x_0$  como en el caso 1d, ver la proyección en esta dimensión), la componente en la dirección  $x_0$  de las otras componentes  $k$  del paquete de ondas decrecen también y el paquete se abre

$k_0 > 0, k_1 > 0$  (el paquete va de izq arriba - derecha abajo),  $cs$  crece en la dirección  $x_0$  (arriba - abajo)  $\implies k_0$  decrecen en esta dirección y el paquete gira a la derecha

### Videos

están en la carpeta videos(el carton, 2 paquetes de onda (los nombres de los ficheros empiezan por 2p) 1 paquete de ondas ( el nombre empieza por 1p) ( intentos de hankel con dependencia radial y la funcion de pert (hankel) repr el gradiente de velocidad - empiezan por h ) ). Las simulaciones duran mucho (nint = 1024 en las 2 direcciones) y algunos tienen pequeños errores como en el caso de los 2 paquetes uno de los videos tiene la trayectoria de abajo calculada mal de forma analítica o en el caso de 1 paquete de onda que va en la misma direccion en cual varia la densidad (1pInV\*.mp4) me olvidé poner los límites fijos para rhoCurve y el color de fondo no queda constante (los límites del colormap en imshow)y tampoco los limites de esta variable en el gráfico de la proyección en esta dirección. . También debía haber guardado para cada simulación en la carpeta donde guardo las imagenes una copia de los ficheros \*.py para saber exacatamente los parámetros de la perturbación, medio, condiciones de contorno, esquema numérico,.. usados para cada experimento